VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

INVARIANTY JETOVÝCH GRUP A APLIKACE V MECHANICE KONTINUA

INVARIANTS OF JET GROUPS AND APPLICATIONS IN CONTINUUM MECHANICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — MARTIN BURIÁNEK

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — doc. RNDr. MIROSLAV KUREŠ, Ph.D.

SUPERVISOR

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Martin Buriánek**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.**
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Invarianty jetových grup a aplikace v mechanice kontinua

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Základem bakalářské práce je seznámit se s invariantním kalkulem a užít ho pro případ jetových grup. Dále studovat aplikace v mechanice kontinua, zejména symetrie druhého řádu.

Cíle bakalářské práce:

1) Vyhotovení přehledného textu k invariantnímu kalkulu s těmito stěžejními tématy:
– Akce grupy
– Lieovy grupy a jednoparametrické podgrupy
– Tečné vektory, vektorová pole a integrální křivky
– Exponenciální zobrazení
– Lieovy algebry.
2) Aplikace teorie na jetové grupy, Toupinovy podgrupy, a to s ohledem na symetrie v mechanice kontinua.
3) Algoritmizace problémů, výstupy v prostředí Wolfram Mathematica.

Seznam doporučené literatury:

MANSFIELD, Elizabeth Louise. A practical guide to the invariant calculus. Vol. 26. Cambridge University Press, 2010.

EPSTEIN, Marcelo and ELZANOWSKI, Marek. Material inhomogeneities and their evolution: a geometric approach. Springer Science & Business Media, 2007.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Tato práce se zabývá jetovými grupami a jejich maticovými reprezentacemi. V úvodní části práce se věnujeme reprezentacím grup, akcím grup na množinách a invariantům akcí. V další části jsou objasněny pojmy hladká varieta, Lieova grupa a Lieova algebra. Následuje vysvětlení pojmu jet a zavedení jetové grupy jako speciálního případu Lieovy grupy. Nejprve jsou popsány grupy G_1^r a G_n^1, poté grupa G_n^2 a její podgrupy. U popsaných jetových grup jsou navrženy jejich reprezentace. V závěru práce je nastíněna možnost aplikací jetových grup v mechanice kontinua. Práce je doplněna algoritmizací vybraných problému v softwaru Wolfram Mathematica.

Summary
This thesis is focused on jet groups and their matrix representations. The opening section deals with group representations, group actions on sets and invariants of actions. Another section explains terms such as smooth manifolds, Lie group and Lie algebra. The following part clarifies terms jet and jet group as a special example of Lie group. First of all, groups G_1^r and G_n^1 are described, then description of group G_n^2 and its subgroups ensues. Representations of these jet groups are proposed. Finally, applications of jet groups in continuum mechanics are mentioned. The thesis is complemented with algorithm of chosen problems in program Wolfram Mathematica.

Klíčová slova
akce grupy, invariant, reprezentace grupy, varieta, Lieova grupa, jet zobrazení, jetová grupa, mechanika kontinua, Wolfram Mathematica

Keywords
group action, invariant, group representation, manifold, Lie group, jet of map, jet group, continuum mechanics, Wolfram Mathematica

BURIÁNEK, M.*Invarianty jetových grup a aplikace v mechanice kontinua.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020. 38 s. Vedoucí doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci na téma *Invarianty jetových grup a aplikace v mechanice kontinua* zpracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Miroslava Kureše, PhD. Odbornou literaturu, kterou jsem při zpracování využíval, v práci cituji a uvádím v seznamu literatury na konci práce.

Martin Buriánek

Rád bych poděkoval vedoucímu mé práce, doc. RNDr. Miroslavu Kurešovi, PhD., za obětavý přístup, mnoho cenných rad a čas, který mi věnoval. Děkuji také rodině a přátelům za podporu při studiu. Poděkování za užitečné náměty k práci patří kamarádům Janu Krpenskému a Lucii Dočkalové.

Martin Buriánek

1. Úvod

První část bakalářské práce tvoří přehled stěžejních pojmů. Tomuto přehledu dominuje grupa, se kterou se v práci mnohokrát setkáme, a proto je ilustrována množstvím příkladů.

Grupu můžeme nechat působit na libovolnou množinu, která sama nemusí být grupou. Při splnění jistých podmínek vznikne akce grupy na množině. Akcemi, jejich vlastnostmi a funkcemi zvanými invarianty akcí se zabývá třetí kapitola. Třetí kapitolu uzavírá představení pojmu reprezentace grupy, který je tímto přichystán pro použití v kapitole páté.

Čtvrtá kapitola začíná krátkým nahlédnutím do topologie, s jejíž pomocí je definována hladká varieta. Tu záhy využijeme při zavedení Lieovy grupy. Pokračujeme uvedením souvislosti mezi Lieovými grupami a maticovými grupami a přehledem související teorie.

Pátá kapitola čtenáře seznamuje s jety zobrazení. Jety regulárních zobrazení se označují invertibilní a tyto jety tvoří jetovou (nebo také diferenciální) grupu, která se řadí mezi Lieovy grupy. Zbytek kapitoly je věnován představení struktury základních jetových grup a je pojatý jako příprava pro následující kapitolu.

Šestá kapitola je centrálním bodem práce. Je v ní představena jetová grupa druhého řádu a její možné reprezentace. Je formulována věta o nejmenším možném řádu matic s reálnými prvky, kterými lze tuto grupu reprezentovat, a je uvedeno krátké představení jejích podgrup. Stránka na samotném konci práce dává prezentované pojmy do souvislosti s jejich možnými aplikacemi v mechanice kontinua.

K vybraným problémům je přiloženo řešení v softwaru Wolfram Mathematica.

Obsah

2. Stěžejní pojmy

2.1. Zobrazení

Zobrazení je jedním ze základních kamenů matematiky a není proto překvapivé, že se k němu budeme v této práci mnohokrát obracet. Začněme proto definováním tohoto pojmu podle skript [1].

Definice 2.1. Mějme dvě neprázdné množiny M, N. Jako *zobrazení* z množiny M do množiny N nazveme takový předpis $f : M \to N$, podle něhož je každému prvku (*vzoru*) $x \in M$ přiřazen právě jeden prvek (*obraz*) $y \in N$.

Poznámka. Někdy bývá zobrazení definováno jako relace $\sim$ taková, že platí-li zároveň $a \sim b$ a $a \sim c$, pak $b = c$. Takový postup je technicky náročnější, neboť vyžaduje zavedení relace a souvisejících pojmů.

Definice 2.2. Mějme zobrazení $f : M \to N$. Zobrazení nazveme *surjektivní* (nebo *zobrazení na*), pokud libovolný prvek $y \in N$ má svůj vzor $x \in M$. Zobrazení nazveme *injektivní* (nebo *prosté zobrazení*), pokud libovolný prvek $y \in N$ má nejvýše jeden vzor $x \in M$. Zobrazení zároveň surjektivní i injektivní nazveme *bijektivní* (*vzájemně jednoznačné*).

Pro zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ užíváme název *funkce jedné (reálné) proměnné*. Pro zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ užíváme název *funkce více (reálných) proměnných*. Pro zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ není terminologie ustálena, skripta [2] používají pojem *zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí*. Připomeňme podle těchto skript důležitý pojem a s ním související větu.

Definice 2.3. *Jacobiho matice* zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je matice ve tvaru:

$$J(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Její determinant označujeme jako *Jacobiho determinant* nebo stručně *jakobián*.

Věta 2.1. *Je dáno zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že jeho složky $f_1, ..., f_n$ mají v bodě $x = (x_1, ..., x_n)$ spojité parciální derivace prvního řádu a že Jacobiho matice je regulární (tzn. jakobián je nenulový). Pak existuje okolí bodu x, ve kterém je zobrazení f prosté (a nejméně v tomto okolí tedy existuje zobrazení f^{-1} k němu inverzní).*

Poznámka. Zobrazení vyhovující uvedenému tvrzení označujeme jako *regulární v bodě x*.

Příklad 2.1. Je dáno zobrazení $f(x, y) = (x + y^2, x^2 + y)$. Jacobiho matice tohoto zobrazení je:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Jakobián tohoto zobrazení $\det(J(x, y)) = 1 - 4xy$ je nulový v bodech ležících na hyperbole určené rovnicí $y = \frac{1}{4x}$. V těchto bodech tedy neexistuje zobrazení k f inverzní.

2.2. Křivky

Křivky jsou speciálním případem zobrazení. Uveďme s pomocí [3] dvě definice.

Definice 2.4. Jako *parametrizovanou křivku* γ budeme pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ označovat zobrazení $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. O zobrazení γ předpokládáme, že je třídy C^1 (tedy má spojitou nejméně první derivaci).

Poznámka. Pojmy křivka a parametrizovaná křivka budeme ztotožňovat. Problém při tomto přístupu jsou křivky zadané implicitně, jejichž parametrické vyjádření nemusí být jednoduché nalézt (na tyto křivky v práci ale nenarazíme). Pomocí parametrizace lze křivku definovanou ve dvourozměrném nebo trojrozměrném prostoru vykreslit.

Příklad 2.2. Rovnicí $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ je definována kružnice v rovině s poloměrem r. Tuto kružnici můžeme zapsat také implicitní rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$.

Definice 2.5. Řekneme, že parametrizované křivky $\gamma(t)$ a $\delta(t)$ mají v bodě X *styk k-tého řádu*, jestliže je pro $\forall i = 1, ..., k$ splněno

$$\frac{d^i\gamma(X)}{dt^i} = \frac{d^i\delta(X)}{dt^i}.$$

Příklad 2.3. Nechť funkce jedné proměnné $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci nejméně řádu n. Pak její *Taylorův polynom n-tého řádu se středem* x_0 je definován předpisem

$$T_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Funkce f má v bodě x_0 styk n-tého řádu se svým Taylorovým polynomem n-tého řádu se středem x_0.

Poznámka. V souboru *Tayloruv_polynom* zpracovaném v programu GeoGebra zadáme dvojklikem na příslušné hodnoty x_0 střed Taylorova polynomu, n řád Taylorova polynomu a $pf(x, y)$ funkci proměnné x. Modře se vykreslí zadaná funkce, zeleně její Taylorův polynom požadovaného řádu s požadovaným středem.

2.3. Grupa

V historii se ukázalo, že při studiu algebry je vhodné zajímat se o algebraické struktury, tedy množiny, na kterých jsou definované operace na této množině uzavřené a které splňují jisté vlastnosti. Dokážeme-li platnost tvrzení pro strukturu obecně, platí pak pro všechny konkrétní příklady.

Nejznámější strukturou s jednou operací je zřejmě grupa. Ze struktur se dvěma operacemi se nejčastěji setkáváme s tělesem. Při výkladu těchto a souvisejících pojmů využijeme skript [1], [4] a [5].

Definice 2.6. Množinu G spolu s operací $*$ označujeme jako *grupu*, pokud jsou splněny následující axiomy:

- uzavřenost: pro $\forall a, b \in G$ platí $a * b \in G$

- asociativita: pro $\forall a, b, c \in G$ platí: $a * (b * c) = (a * b) * c$
- existence neutrálního prvku: $\exists e \in G$ tak, že pro $\forall g \in G$ platí $g * e = e * g = g$
- existence inverzního prvku: ke každému $g \in G$ existuje prvek $g^{-1} \in G$ tak, že platí
$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$$

Grupu G s operací $*$ obvykle zapisujeme $(G, *)$. Je-li navíc splněno $a * b = b * a$ pro $\forall a, b \in G$, označujeme grupu jako *komutativní* (nebo také *abelovskou*).

Poznámka. Je-li označení operace patrné z kontextu, píšeme místo $a * b$ pouze ab.

Věta 2.2. *I) Neutrální prvek je v grupě jediný.*
II) K libovolnému prvku grupy je inverzní prvek jediný.

Důkaz. Předpokládejme existenci dvou různých neutrálních prvků e_1, e_2, pak $e_1 = e_1 * e_2$, zároveň ale musí platit $e_1 * e_2 = e_2$, což znamená, že $e_1 = e_2$ a to je spor s předpokladem. Neutrální prvek je skutečně jediný. Druhé tvrzení dokážeme analogicky. □

Příklad 2.4. Číselné množiny $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ tvoří spolu s operací sčítání $+$ grupy. Naopak množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ s operací sčítání $+$ grupu netvoří (v množině nenajdeme ani neutrální prvek, ani inverze k dané operaci).

Právě definovaný pojem grupy využijeme při definici tělesa.

Definice 2.7. Množinu F spolu se dvěma operacemi $+$ a $\cdot$ označujeme jako *těleso*, pokud je splněno:

- $(F, +)$ tvoří komutativní grupu s neutrálním prvkem e.
- $(F \backslash \{e\}, \cdot)$ tvoří grupu.
- distributivní zákony: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ pro $\forall a, b, c \in F$.

Zapisujeme $(F, +, \cdot)$ nebo krátce F. Těleso označujeme jako *komutativní*, pokud je grupa $(F \backslash \{e\}, \cdot)$ komutativní.

Příklad 2.5. a) V matematice běžně pracujeme s tělesy $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$, a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, která jsou všechna komutativní. Nekomutativním tělesem jsou kvaterniony $(\mathbb{H}, +, \cdot)$.
b) Množina $M = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ netvoří s operacemi $+$ a $\cdot$ těleso, neboť není uzavřená na operaci násobení.
c) Vhodnou úpravou uvedené množiny M dostaneme těleso: $N_1 = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ a $N_2 = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}; a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ tvoří s operacemi $+$ a $\cdot$ tělesa.

Příklad 2.6. Množina čtvercových invertibilních matic řádu n s prvky z daného tělesa F spolu s operací maticového násobení se nazývá *obecná lineární grupa* a označuje $GL(n, F)$.

Existují také podmnožiny grupy, které jsou samy grupami.

Definice 2.8. Nechť je dána grupa $(G, *)$. Podmnožinu $H \subseteq G$ (spolu se stejnou operací $*$ definovanou na G) nazveme jako *podgrupu*, jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

- pokud libovolné dva prvky $h_1, h_2 \in H$, pak také $h_1 * h_2 \in H$.
- pokud prvek $h \in H$, pak i prvek k němu inverzní $h^{-1} \in H$.

Příklad 2.7. Podgrupou obecné lineární grupy je *speciální lineární grupa* $SL(n, F)$, kde navíc požadujeme, aby determinant matice byl roven jedné.

Příklad 2.8. Vezměme S (libovolnou) čtvercovou matici řádu n, položme

$$G(n,S) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^T SA = S\}$$

a ukažme, že se jedná o grupu (a opět i podgrupu obecné lineární grupy).

Nechť matice $A, B \in G$ (platí $A^T SA = S = B^T SB$). Požadujeme, aby také matice $AB \in G$. S využitím pravidla $(AB)^T = B^T A^T$ dostáváme $(AB)^T SAB = B^T A^T SAB = B^T SB = S$, grupa je vůči maticovému násobení uzavřená. Je známo, že maticové násobení je asociativní, neutrálním prvkem je jednotková matice $I \in G$ (protože $I^T SI = ISI = S$).

Libovolná matice $A \in G$ je z definice regulární, matice A^{-1} tedy existuje. Zbývá dokázat, že $A^{-1} \in G$, neboli $(A^{-1})^T SA^{-1} = S$. Rovnost $A^T SA = S$ zprava vynásobíme maticí A^{-1}, zleva maticí $(A^{-1})^T$. Protože platí $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, je důkaz hotov.

Zajímavostí je, že matice S může být i singulární. Vezměme $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Grupu G (zde navíc komutativní) pak tvoří diagonální matice ve tvaru $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{smallmatrix}\right)$, $a \neq 0$.

Poznámka. Maticové grupy jsou obecně nekomutativní. Speciálním případem maticové komutativní grupy je např. množina diagonálních matic s reálnými prvky (matic, které mají mimo diagonálu nuly a na diagonále jen nenulové prvky) s operací maticového násobení.

Příklad 2.9. Pokud položíme v příkladu 2.8 matici S rovnu jednotkové matici I, dostaneme *ortogonální grupu*:

$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}.$$

Ukažme několik zajímavých vlastností této grupy. Ze vztahu $A^T A = I$ plyne rovnost $A^T = A^{-1}$. Uvědomíme-li si, že $A^T A = A^{-1} A = I$, snadno nahlédneme, že sloupce (resp. řádky) takové matice tvoří soustavu ortonormálních (na sebe vzájemně kolmých) vektorů.

Podle Cauchyovy věty o determinantu součinu matic platí $\det(A^T A) = \det A^T \cdot \det A$. Protože platí $A^T A = I$ a $\det A^T = \det A$, dostáváme rovnost $(\det A)^2 = \det I = 1$. Determinant ortogonální matice se tak rovná 1 nebo -1. Opačné tvrzení ale neplatí (rovnost determinantu 1 nebo -1 neimplikuje ortogonalitu matice).

Ortogonální grupa popisuje transformace v euklidovském prostoru (rotace a zrcadlení). Její podgrupou je *speciální ortogonální grupa* $SO(n,\mathbb{R})$, u níž požadujeme, aby byl determinant matic roven 1.

Ve všech předchozích příkladech nebyly grupy konečné (množina G měla mohutnost kontinua). Uveďme nyní jeden příklad konečné grupy, neboť na konečných grupách vynikne vysvětlení později zavedeného pojmu reprezentace grup.

Příklad 2.10. Jako permutaci n-prvkové množiny označujeme n-tici přirozených čísel od 1 do n obsahující každé číslo právě jednou. Tato n-tice určuje jedno z možných uspořádání množiny a pro n-prvkovou množinu existuje celkem $n!$ takových n-tic.

Permutace se označují způsobem, který znázorňuje, na jaký prvek se daný prvek zobrazí. V práci první řádek vynecháváme, například permutaci $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ označujeme $(2\ 3\ 1)$.

Vezměme tříprvkovou množinu a označme její permutace tímto způsobem:

$A = (1\ 2\ 3)$, $B = (2\ 3\ 1)$, $C = (3\ 1\ 2)$, $D = (2\ 1\ 3)$, $E = (1\ 3\ 2)$, $F = (3\ 2\ 1)$.

Permutace skládejme následovně:

$$C \circ E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = D$$

$$E \circ C = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix} = F$$

Množina všech permutací n-prvkové množiny spolu s operací skládání permutací tvoří nekomutativní grupu. U konečných grup jejich strukturu znázorňujeme *Cayleyho tabulkou.* V zápisu $A \circ B$ značí A prvek ve sloupci nalevo, B značí prvek v řádku nahoře.

∘	A	B	C	D	E	F
A	A	B	C	D	E	F
B	B	C	A	E	F	D
C	C	A	B	F	D	E
D	D	F	E	A	C	B
E	E	D	F	B	A	C
F	F	E	D	C	B	A

Definice 2.9. Jako *centrum grupy* $(G, *)$ označujeme množinu

$$Z(G) = \{h \in G \mid \forall g \in G : g * h = h * g\}.$$

Poznámka. Centrum grupy je komutativní podgrupou původní grupy.

Setkáváme se s grupami, které se, ačkoliv popisují různé situace, z hlediska struktury „chovají stejně“. To nás vede k následující definici.

Definice 2.10. Mějme grupy $(G, *)$ a $(H, \circ)$. Zobrazení f označíme jako *grupový homomorfismus*, je-li splněno:

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2).$$

Je-li zobrazení f navíc bijektivní, označujeme ho jako *izomorfismus* a to, že grupy G a H jsou izomorfní zapisujeme $G \approx H$.

Příklad 2.11. Grupa reálných čísel spolu s operací sčítání $(\mathbb{R}, +)$ je izomorfní grupě kladných (nenulových) reálných čísel spolu s operací násobení $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Izomorfismus je popsán zobrazením f, pro které platí $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Obdrželi jsme známou funkcionální rovnici, podle níž je f exponenciální zobrazení. Obě grupy jsou komutativní, jejich centra splývají s grupami samotnými.

Příklad 2.12. Grupa $SL(2, \mathbb{F}_2)$ obsahuje šest prvků a je izomorfní grupě z příkladu 2.10. Tento izomorfismus je popsán (využijeme-li značení zavedené v příkladu 2.10) pomocí zobrazení f tímto způsobem:

$$f(A) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),\ f(B) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right),\ f(C) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right),\ f(D) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),\ f(E) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right),\ f(F) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right).$$

Centrem grupy je tříprvková množina obsahující matice označené $f(A), f(B), f(C)$. Grupa je izomorfní také dihedrální grupě symetrií rovnostranného trojúhelníka, s níž se lze blíže seznámit v knize [4].

3. Akce grupy

Hlavními zdroji, použitými v této kapitole, jsou [6], [7] a [8].

Definice 3.1. Mějme zobrazení $\alpha : G \times M \to M$. Zobrazení α označíme jako *levou akci* grupy G na množině M, je-li pro všechna $g, h \in G$ a pro všechna $z \in M$ splněno:

$$\alpha(h, \alpha(g, z)) = \alpha(hg, z).$$

Podobně zobrazení α označíme jako *pravou akci* grupy G na množině M, je-li pro všechna $g, h \in G$ a pro všechna $z \in M$ splněno:

$$\alpha(h, \alpha(g, z)) = \alpha(gh, z).$$

Poznámka. Levou akci značíme též $gh \otimes z = g \otimes (h \otimes z)$, pravou $gh \bullet z = g \bullet (h \bullet z)$. Budeme využívat oba způsoby značení, vždy ten vhodnější v dané situaci. V případě komutativní grupy levá a pravá akce splývají. Akci také nazýváme působení grupy G na množinu M.

Věta 3.1. *Mějme akci α grupy G na množině M a neutrální prvek grupy $e \in G$. Pro libovolný prvek $z \in M$ pak platí $\alpha(e, z) = z$.*

Důkaz. Mějme $g \in G$, $w \in M$ a předpokládejme, že $\alpha(e, z) = w$. Pak rovnost definující levou akci $\alpha(g, \alpha(e, z)) = \alpha(ge, z)$ přejde na tvar $\alpha(g, w) = \alpha(g, z)$. Protože α je zobrazení, musí platit $w = z$, a to je spor s předpokladem. Stejnou úvahou lze tvrzení dokázat i pro pravou akci. □

Příklad 3.1. Pro zvolené $n \in \mathbb{N}$ mějme maticovou grupu $GL(n, \mathbb{R})$. Násobení n-prvkových vektorů maticemi je akcí. Pokud půjde o množinu sloupcových vektorů, bude se jednat o levou akci, naopak v případě množiny řádkovch vektorů dostaneme pravou akci.

Jelikož grupa je speciálním případem množiny, můžeme definovat akci grupy G na sobě samé, tedy položit $M = G$. Níže uvedenou *akci grupy na sobě konjugovaností* je možné definovat pro libovolnou grupu. My si ji představíme na grupě $GL(n, \mathbb{R})$.

Příklad 3.2. Mějme grupu $G = GL(n, \mathbb{R})$ a množinu $M = G$. Akci G na M zavedeme předpisem $\alpha(B, A) = B^{-1}AB$. Protože je splněno:

$$\alpha(C, \alpha(B, A)) = \alpha(C, B^{-1}AB) = C^{-1}B^{-1}ABC,$$

$$\alpha(BC, A) = (BC)^{-1}ABC = C^{-1}B^{-1}ABC,$$

jedná se o pravou akci značenou též $B \bullet A$. Levou akci získáme předpisem $B \otimes A = BAB^{-1}$.

Definice 3.2. Řekneme, že dvě grupové akce $\alpha_i : G \times M \to M, i = 1, 2$ jsou *ekvivalentní*, jestliže existuje hladké invertibilní zobrazení $\phi : M \to M$ pro $\forall g \in G$ splňující rovnici:

$$\alpha_2(g, z) = \phi^{-1}(\alpha_1(g, \phi(z))).$$

Příklad 3.3. Je dána maticová grupa $G = SL(2, \mathbb{C})$ a množina M uspořádaných dvojic komplexních čísel $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Označme prvek grupy:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1.$$

Pak podle [6] existují tři vzájemně neekvivalentní akce grupy G na množině M. První z nich je:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{ax + b}{cx + d}, y \right).$$

Druhá je:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{ax + b}{cx + d}, \frac{y}{(cx + d)^2} \right).$$

A třetí je:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{ax + b}{cx + d}, 6c(cx + d) + (cx + d)^2 y \right).$$

Příklad 3.4. Mějme grupu i množinu stejnou jako v předchozím případě. Akce α_1 grupy G na množině M nechť je zadána předpisem:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (ax + by, cx + dy).$$

Akci můžeme vnímat jako působení matice na sloupcový vektor. Podle předchozího příkladu musí být tato akce ekvivalentní některé ze tří zmíněných akcí.

Definujme zobrazení $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ vztahem:

$$\phi((x, y)) = \left(\frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{y}} \right).$$

Pak zobrazení k němu inverzní je:

$$\phi^{-1}((x, y) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y^2} \right).$$

Dosazením do definice ekvivalence akcí $\phi^{-1}(\alpha_1(g, \phi(z)))$ zjistíme, že akce α_1 je ekvivalentní druhé akci z předchozího příkladu.

3.1. Invarianty akcí

Pojem invariantu se objevuje přímo v názvu této práce, věnujme proto tomuto pojmu samotnou podkapitolu a ilustrujme ho na několika příkladech.

Definice 3.3. O funkci $f : M \to \mathbb{R}$ řekneme, že je *invariantem* akce $\alpha : G \times M \to M$, jestliže je pro $\forall z \in M$ splněno:

$$f(\alpha(g, z)) = f(z).$$

Příklad 3.5. Vezmeme ortogonální grupu $O(n, \mathbb{R})$ a necháme ji působit maticovým násobením na množinu n-prvkových sloupcových vektorů $(x_1, ..., x_n)^T$.

Funkce $f = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ určující velikost vektoru je invariantem této akce. Grupou $SO(2, \mathbb{R})$ a množinou dvouprvkových vektorů se více zabýváme v příkladu 3.12.

Příklad 3.6. *Stopu matice A* definujeme jako součet prvků, které leží na hlavní diagonále, a označujeme $\mathrm{tr}(A)$. Připomeňme si akci z příkladu 3.2 zadanou předpisem $B \bullet A = B^{-1}AB$ a ukažme, že funkce $f(A) = \mathrm{tr}(A)$ je jejím invariantem.

Podle [8] vztah $B^{-1}AB$ definuje matici podobnou k matici A. Podobné matice mají stejná vlastní čísla a stopa matice je jejich součtem. Z toho plyne, že uvedená funkce je invariantem akce (totožné tvrzení platí i pro levou akci $B \otimes A$).

Akce je invariantní i vůči funkci určující determinant matice, protože ten je součinem vlastních čísel.

Ve dvou následujících příkladech necháme na zvolenou množinu působit grupu $SL(2, \mathbb{R})$. Prvek této grupy označíme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, platí $ad - bc = 1$.

Příklad 3.7. Akci α grupy $SL(2, \mathbb{R})$ na množině uspořádaných čtveřic reálných čísel (x, y, z, w) zavedeme předpisem $\alpha((x, y, z, w)) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}, \frac{ay+b}{cy+d}, \frac{az+b}{cz+d}, \frac{aw+b}{cw+d}\right)$. Invarianten této akce je výraz:

$$\frac{(x-z)(y-w)}{(x-y)(z-w)}$$

zvaný *křížový poměr*, který se uplatňuje v projektivní geometrii.

Podívejme se také na jeden příklad diferenciálního invariantu.

Příklad 3.8. Akci α grupy $SL(2, \mathbb{R})$ na množině funkcí $u(x)$ proměnné x zavedeme předpisem $\alpha(u) = \frac{au+b}{cu+d}$. Jako *Schwarzovskou derivaci* $S(u)$ funkce u označíme výraz složený z derivací funkce u (předpokládejme, že všechny potřebné existují) následovně:

$$S(u) = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x^2}.$$

Schwarzovská derivace je invariantem této akce. Jinými slovy, v bodech, kde existují potřebné derivace, platí $S(u) = S(\frac{au+b}{cu+d})$.

Příklad 3.9. Vezmeme n-tici lineárně nezávislých sloupcových vektorů o n prvcích a tyto vektory uspořádáme do matice X. Dále vezmeme množinu $\mathfrak{D}$ všech diagonálních regulárních matic řádu n.

Grupu G definujeme předpisem $G = \{X^{-1}DX; D \in \mathfrak{D}\}$. Uvedenou konstrukcí jsme podle [1] získali grupu všech matic, jejichž množina vlastních vektorů je tvořena sloupci matice X. Dokažme, že se jedná o grupu.

- Především zdůrazněme, že definice je korektní, neboť jsou-li sloupce matice X lineárně nezávislé, tato matice je regulární a matice k ní inverzní X^{-1} existuje.
- Nechť matice $X^{-1}AX$ a $X^{-1}BX$ jsou prvky G. Pak i jejich součin $X^{-1}AXX^{-1}BX = X^{-1}ABX$ je prvkem G (součinem diagonálních matic je opět diagonální matice).
- Násobení matic je asociativní.
- Jednotkovou matici dostaneme, zvolíme-li D jako jednotkovou matici.
- Inverzní matice k $X^{-1}AX$ je $(X^{-1}AX)^{-1} = X^{-1}A^{-1}X$ (A je invertibilní, protože je regulární).

Nyní opět vezměme n-tici sloupcových vektorů z úvodu tohoto příkladu. Množinu M definujme jako množinu všech reálných násobků těchto vektorů (skutečně pouze násobků, ne lineárních kombinací). Grupu G necháme působit na množinu M maticovým násobením. Funkce $f(v) = \frac{v}{|v|}$ normuje vektor (dělí ho jeho velikostí) a je invariantem této akce.

3.2. Vlastnosti akcí

Vezměme jeden konkrétní prvek množiny a zjistěme, které prvky množiny z něj působením grupy vygenerujeme.

Definice 3.4. Je-li z prvek množiny M a g libovolný prvek grupy G na množině působící akcí α, pak *orbita* $\mathcal{O}(z)$ prvku z je dána předpisem:

$$\mathcal{O}(z) = \{y \in M \mid y = \alpha(g, z)\}.$$

Příklad 3.10. Mějme množinu $M = \mathbb{Q}$ a grupu $G = (\mathbb{Z}, +)$, prvky $z \in M$, $g \in G$. Akce je definována předpisem $\alpha(g, z) = g + z$ (grupa G je komutativní, levá a pravá akce splývají). Orbitou zvoleného prvku $z = \frac{1}{2}$ je množina $\{..., -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ...\}$.

Příklad 3.11. Opět se odkažme na příklad 3.2 a najděme orbitu matice A. Zadaným působením grupy na sobě samé získáme množinu všech matic, které jsou matici A podobné. Orbitou matice A jsou všechny matice, které mají stejná vlastní čísla jako A.

Příklad 3.12. Mějme speciální ortogonální grupu $SO(2, \mathbb{R})$. Její prvky můžeme obecně popsat jako prvky matice

$$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

pro $\alpha = \langle 0, 2\pi)$. Působením grupy na prvek $(x, y)^T$ maticovým násobením dostaneme prvek $(\tilde{x}, \tilde{y})^T$ ve tvaru

$$\tilde{x} = x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha),$$
$$\tilde{y} = x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha).$$

Umocněním obou rovnic na druhou a jejich následným sečtením získáme s využitím identity $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ rovnost $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = x^2 + y^2$.

Považujeme-li $(\tilde{x}, \tilde{y})^T$ za souřadnice bodu v rovině, pak orbitou prvku $(x, y)^T$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (protože x, y jsou pevně zvolené hodnoty). Výsledek potvrzuje, že uvedená grupa zajišťuje rotaci bodu okolo počátku v rovině.

Definice 3.5. Akci α grupy G na množině M označíme jako *tranzitivní*, pokud pro $\forall a, b \in M$ existuje $g \in G$ takové, že $b = \alpha(g, a)$.

Poznámka. Tranzitivní akce má podle výše uvedené definice právě jednu orbitu.

Příklad 3.13. Mějme dánu grupu $G = (\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, $g \in G$, množinu M, $z \in M$ a zobrazení $\alpha(g, z) = g \cdot z$.

a) Je-li $M = \mathbb{Z}$, pak α nebude akce (α není správně definované zobrazení, jeho výsledek neleží v požadované množině).

b) Je-li $M = \mathbb{Q}$, pak α je akcí, která je tranzitivní (působením grupy na libovolný prvek množiny vygenerujeme celou množinu).

c) Je-li $M = \mathbb{R}$, pak α je akcí, tato akce však není tranzitivní (působením grupy na libovolný prvek množiny nevygenerujeme celou množinu).

Vyberme si určitý prvek $z \in M$ a zkoumejme, kterými prvky grupy G na něj můžeme působit tak, aby prvek z zůstal nezměněn.

Definice 3.6. Je dána grupa G na množině M působící akcí α. Jako *stabilizátor* $\mathcal{S}(z)$ prvku z označujeme množinu

$$\mathcal{S}(z) = \{g \in G \mid z = \alpha(g, z)\}.$$

Jádro $\mathcal{J}$ akce α je množina všech prvků $g \in G$ pro libovolné $z \in M$ splňujících $z = \alpha(g, z)$.

Následující věta je převzatá z práce [7], kde najdeme i její důkaz.

Věta 3.2. *Jádro akce α je průnikem stabilizátorů všech prvků $z \in M$.*

Příklad 3.14. Je dána grupa

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

Tato grupa působí na množinu M sloupcových vektorů $(x, y)^T$ maticovým násobením. Pro stabilizátor prvku $(x, y)^T$ platí:

- je-li $x = 0, y = 0$: stabilizátorem tohoto prvku je libovolný prvek grupy.
- je-li $x \neq 0, y = 0$: množina stabilizátorů má tvar $\mathcal{S}((x, 0)^T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$.
- je-li $x = 0, y \neq 0$ nebo $x \neq 0, y \neq 0$: stabilizátorem prvku je jen jednotková matice.

Podle rozboru výše je jádrem této akce pouze jednotková matice.

Uveďme dva pojmy, které charakterizují akci podle složení jádra a stabilizátorů jednotlivých prvků množiny.

Definice 3.7. Akci grupy G na množině M nazveme jako *efektivní*, pokud její jádro tvoří pouze neutrální prvek grupy. Akci nazveme jako *volnou*, pokud stabilizátorem libovolného prvku $z \in M$ je pouze neutrální prvek grupy.

Poznámka. Volnost je speciálním případem efektivity.

Příklad 3.15. a) Akce grupy $G = (\mathbb{Z}, +)$, $g \in G$ na množině $M = \mathbb{R}$, $z \in M$ zadaná vztahem $\alpha(g, z) = g + z$ je volná, protože stabilizátorem libovolného prvku množiny je pouze 0 jako neutrální prvek grupy.
b) Akce z příkladu 3.14 je efektivní, ale není volná.
c) Akce diagonálních matic na sobě konjugovaností (viz příklad 3.2) není efektivní.

3.3. Reprezentace grupy

V této podkapitole si představíme pojem reprezentace grupy pomocí maticové grupy. Nalezení vhodné reprezentace přispěje k vytvoření představy o struktuře grupy.

Definice 3.8. Zobrazení $R : G \to GL(n, \mathbb{R})$ nazveme *reprezentací grupy* $(G, *)$, jestliže je pro $\forall g, h \in G$ splněno:

$$R(g * h) = R(g) \cdot R(h).$$

Poznámka. V předchozí defininici je možné místo $GL(n,\mathbb{R})$ použít regulární matice řádu n nad libovolným polem F.

Věta 3.3. *Buď R reprezentace grupy G. Jestliže e je neutrální prvek v G, jeho reprezentace $R(e)$ je jednotková matice.*

Důkaz. Podle definice reprezentace platí $R(e\cdot h) = R(e)\cdot R(h)$. Jelikož e je neutrální prvek, platí $e\cdot h = h$ a dostáváme rovnost $R(h) = R(e)\cdot R(h)$. Má-li rovnost platit pro libovolný prvek h grupy G, pak $R(e)$ je jednotková matice. □

Věta 3.4. *Buď R reprezentace grupy G. Pak platí $R(g)^{-1} = R(g^{-1})$*

Důkaz. Vztah $R(g)^{-1} = R(g^{-1})$ vynásobíme zprava maticí $R(g)$. Vyjde $I = R(g^{-1})\cdot R(g)$, kde I značí jednotkovou matici. Využitím definice reprezentace dostaneme $I = R(g^{-1}\cdot g)$, a protože $g^{-1}\cdot g = e$, získáme již dokázanou rovnost $I = R(e)$. □

Příklad 3.16. Nejjednodušší reprezentací je zobrazení všech prvků grupy na jednotkovou matici stejného řádu. Takovou reprezentaci označujeme jako *triviální*.

Přestože reprezentace z předchozího příkladu splňuje požadavky kladené definicí, pro popis struktury grupy se nehodí. Uveďme některé zajímavější příklady.

Příklad 3.17. Připomeňme si grupu z příkladu 2.10 a označení jejích prvků:

$$A = (1\ 2\ 3),\ B = (2\ 3\ 1),\ C = (3\ 1\ 2),\ D = (2\ 1\ 3),\ E = (1\ 3\ 2),\ F = (3\ 2\ 1).$$

Pro zavedení reprezentace maticemi $GL(3,\mathbb{R})$ bude vhodné vnímat každou z permutací jako vektor (x_1, x_2, x_3). Této permutaci přiřadíme matici A, jejíž prvky $a_{ix_i}, i = \{1,2,3\}$ budou rovny jedné, zbylé prvky matice budou nulové.

Reprezentaci maticemi $GL(2,\mathbb{R})$ zavedeme například tak, že prvkům A, B, C přiřadíme matici $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ a prvkům D, E, F přiřadíme matici $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Tato reprezentace rozlišuje podle znaménka determinantu přiřazené matice paritu permutace (viz [8]).

Další reprezentaci můžeme zavést tak, že prvek zobrazíme na blokovou matici, jejíž bloky jsou složené z matic, které jsou samy reprezentacemi tohoto prvku. Složením dvou výše uvedených reprezentací získáme jako reprezentaci prvku B matici

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Definice 3.9. Reprezentaci označujeme jako *věrnou*, když je zobrazení R prosté (tedy neexistuje žádná matice, na níž by se zobrazily dva či více prvků grupy).

Zajímavým problémem je zjišťovat nejmenší možný řád matic, kterými dosáhneme věrné reprezentace grupy. Reprezentace v příkladu 3.17 maticemi řádu 3 je věrná. Pojďme si ukázat, že existuje i věrná reprezentace této grupy maticemi řádu 2.

Příklad 3.18. Věrná reprezentace R grupy permutací z příkladu 2.10 maticemi $GL(2,\mathbb{R})$ je dána předpisem:

$$R(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, R(C) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(D) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, R(F) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Věta 3.5. *Mějme regulární matici X a reprezentaci R_1, která prvku $g \in G$ přiřadí matici A. Pak zobrazení R_2, které přiřadí prvku g matici $X^{-1}AX$, je také reprezentací.*

Důkaz. Mějme prvky $a, b, c \in G$ splňující $a * b = c$. Pro reprezentaci R_1 platí $R_1(a) = A$, $R_1(b) = B$ a $R_1(c) = C$ a jelikož R_1 je reprezentace, musí platit $AB = C$. Ukážeme, že zobrazení R_2 splňuje rovnost z definice 3.8:

$$R_2(a) \cdot R_2(b) = X^{-1}AXX^{-1}BX = X^{-1}ABX = X^{-1}CX = R_2(c).$$

□

Definice 3.10. Reprezentace R_1 a R_2, které mají vlastnost uvedenou v předchozí větě, označujeme jako *ekvivalentní*.

Na příkladech jsme dosud ilustrovali reprezentace konečných grup. S reprezentacemi nekonečných grup se pomocí příkladů seznámíme v dalších kapitolách.

4. Lieovy grupy

Lieova grupa se dá výstižně popsat jako spojení geometrické struktury hladké variety a algebraické struktury grupy. V této kapitole se na definici Lieovy grupy a souvisejících pojmů podíváme důkladněji, využijeme při tom zdroje [6], [9], [10] a [11]. Narazíme také na pojem vektorového (lineárního) prostoru, který je určitým spojením struktur grupy a tělesa. Přesnou definici pojmu i řadu příkladů nalezneme ve skriptech [5].

4.1. Varieta

Pojmem *množina* myslíme pouze soubor prvků, zatímco *prostor* označuje množinu, na níž je definována nějaká struktura. Připomeňme si podle [11] pojem topologického prostoru.

Definice 4.1. Mějme množinu M spolu se systémem podmnožin τ. Systém podmnožin τ nazvme *topologie* a dvojici (M, τ) *topologický prostor*, jsou-li splněny následující axiomy:

- $\emptyset \in \tau, M \in \tau$.
- sjednocení libovolného počtu množin z τ leží v τ.
- průnik konečného počtu množin z τ leží v τ.

Prvkům z τ říkáme *otevřené množiny*.

Poznámka. Uzavřená množina se definuje jako množinový doplněk otevřené množiny. Při práci s těmito pojmy je nutná jistá opatrnost, uzavřená množina není opakem otevřené (existují *obojetné množiny*, které jsou otevřené i uzavřené současně). Proč v definici nelze připustit průnik libovolného počtu množin, je zřejmé z příkladu $\cap_{k=2}^{\infty}(-1+\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k})$, kdy průnikem nekonečně mnoha otevřených množin je uzavřená množina $\langle -1, 1 \rangle$.

Příklad 4.1. Je dána tříprvková množina $M = \{a, b, c\}$.
a) Její potenční množina (množina všech podmnožin M) je topologií na M.
b) Soubor $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, M\}$ je topologií na M.
c) Soubor $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, M\}$ není topologií na M, neboť $\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\} \notin \tau$.

Pokud na množině existuje topologie, můžeme definovat okolí bodu.

Definice 4.2. Otevřeným okolím daného bodu je libovolná otevřená množina, ve které tento bod leží.

U zrodu topologie stálo několik zajímavých příkladů z diferenciální geometrie ploch (např. Kleinova láhev). Podle vlastností topologických prostorů byla vytvořena jejich rozsáhlá klasifikace. Uveďme typ topologického prostoru potřebný k definici variety.

Definice 4.3. Mějme topologický prostor (M, τ). Pokud pro každé dva body $x, y \in M$ existují okolí těchto bodů taková, že jejich průnikem je prázdná množina, nazveme (M, τ) jako *Hausdorfův prostor* a označíme P.

Speciálním případem Hausdorfova prostoru je metrický prostor. Je-li na množině zadána metrika, lze definovat ϵ-okolí bodu. Podrobnější výklad najdeme ve skriptech [12].

Definice 4.4. *Lokálními souřadnicemi* Hausdorfova prostoru P nazveme zobrazení:

$$\phi : \mathcal{U}(p) \to \phi(\mathcal{U}(p)),$$

kde $\mathcal{U}(p) \in P$ je okolí bodu p a $\phi(\mathcal{U}(p))$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Dvojici $(\mathcal{U}, \phi)$ nazveme *mapa*. Platí-li $\phi(p) = 0$, řekneme, že mapa je *centrovaná* v $p \in P$.

Poznámka. Hodnotu n z předchozí definice označujeme jako *dimenze* variety. Později uvidíme, že dimenzi variety lze rovnocenně definovat jako dimenzi jejího tečného prostoru.

Definice 4.5. Množinu map $(\mathcal{U}_i, \phi_i)$ daného n-rozměrného Hausdorfova prostoru P nazveme jako *hladký atlas*, pokud:

- sjednocení všech map dává celý prostor.
- pro všechny dvojice map $(\mathcal{U}_i, \phi_i)$, $(\mathcal{U}_j, \phi_j)$ s neprázdným průnikem $(U_j \cap U_k \neq \emptyset)$ existuje hladké zobrazení $\phi_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané složením $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$.

Zobrazení ϕ_{ij} se označuje jako *přechodová funkce*.

Poznámka. Hladkostí přechodových funkcí rozumíme, že jsou to zobrazení třídy C^∞ (existuje derivace libovolného řádu).

Povrch koule je lokálně podobný euklidovskému prostoru, podobnost pojmu s atlasem mapujícím povrch planety Země není náhodná. Význam přechodové funkce si můžeme představit jako požadavek, aby na sebe všechny mapy co nejpřirozeněji navazovaly a aby deformace způsobená „zploštěním“ části kulové plochy byla zanedbatelná.

Definice 4.6. Hausdorfův prostor se spočetnou bází spolu s hladkým atlasem se nazývá *hladká varieta.*

Poznámka. Hladká varieta bývá někdy označována také *diferencovatelná varieta.*

4.2. Definice Lieovy grupy

V tuto chvíli máme již řádně vybudované pojmy grupa i hladká varieta, a proto přistoupíme k definici stěžejního pojmu této kapitoly.

Definice 4.7. *Lieova grupa* G je hladká varieta, která je současně grupou. Zobrazení určující grupovou operaci i zobrazení určující inverzní prvek jsou hladká. *Dimenzi* Lieovy grupy definujeme jako dimenzi variety (viz definice 4.4).

Poznámka. Podmínka na hladkost zobrazení určujícího inverzní prvek by v definici být nemusela, protože tato podmínka plyne podle [9] z hladkosti grupové operace.

Příklad 4.2. Mezi Lieovy grupy:
a) dimenze jedna řadíme grupy $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$,
b) dimenze dva patří grupa $(\mathbb{C}, +)$,
c) dimenze n patří grupa $(\mathbb{R}^n, +)$.

Příklad 4.3. Jednotkový kruh v komplexní rovnině $S^1 \subset \mathbb{C}$ je spolu s násobením komplexních čísel Lieovou grupou.

Snadno to dokážeme z goniometrického tvaru komplexních čísel, odkud vidíme, že násobením dvou komplexních čísel, jejichž vzdálenost od počátku je 1, dostaneme opět komplexní číslo, jehož vzdálenost od počátku je 1.

Pro $e^{i\phi} \in S^1$ a $0 < \epsilon < \pi$ mějme okolí bodu θ ve tvaru $\mathcal{U}(e^{i\theta}) = \{e^{i\psi}; |\theta - \psi| \leq \epsilon\}$. Lokální souřadnice pak mají tvar $\phi(e^{i\psi}) = \psi - \theta$. Mapa $(\mathcal{U}, \phi)$ je centrovaná v θ.

Poznámka. Komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ lze zapsat třemi různými způsoby. Pro znázornění obrazu čísla v Gaussově rovině je vhodný *algebraický tvar* $z = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Pro početní operace (vyšší mocniny) se hodí *goniometrický tvar* $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, kde $|z|$ je velikost komplexního čísla a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je argument. Algebraický tvar využívá kartézských souřadnic, zatímco goniometrický polárních. Zbývající *exponenciální tvar* $z = |z|e^{i\varphi}$ je s goniometrickým spjat pomocí identity $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$, zvané Eulerův vzorec. Ten elegantně dokážeme dosazením výrazu $e^{i\varphi}$ do Taylorova rozvoje funkce $f(x) = e^x$.

Důležitým zástupcem Lieových grup jsou maticové grupy.

Příklad 4.4. Podle [6] tvoří *unitární grupu* $U(n, \mathbb{C})$ matice řádu n takové, které splňují rovnost $\bar{U}^T U = I$ (zápisem $\bar{U}$ myslíme matici komplexně sdruženou k U). Požadujeme-li navíc, aby byl determinant roven jedné, máme *speciální unitární grupu* $SU(n, \mathbb{C})$.

Ukažme, že dvoudimenzionální případ má tvar:

$$SU(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \right\}.$$

Ověříme podmínku $\overline{U}^T U = I$:

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & 0 \\ 0 & \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zapíšeme-li $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, pak podmínku $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$ dostáváme ve tvaru $(\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (\alpha_1 - i\alpha_2) + (\beta_1 + i\beta_2) \cdot (\beta_1 - i\beta_2) = 1$, po úpravě $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$. Jde o „jednotkovou kouli“ ve čtyřrozměrném prostoru a tedy o Lieovu grupu dimenze tři.

Poznámka. Unitární a ortogonální grupu rozlišujeme pouze pro matice s komplexními prvky. V případě matic s reálnými prvky jde o totéž (a užívá se pojem ortogonální grupa).

Navažme na předchozí příklad a uveďme jedno silné tvrzení.

Věta 4.1. *Grupa $GL(n, \mathbb{R})$ i její libovolná podgrupa jsou Lieovy grupy.*

Poznámka. Důkaz je k nalezení v textu [14]. Podle této věty jsou grupy z příkladů 2.7, 2.8 a 2.9 Lieovými grupami. Dimenze Lieovy grupy $GL(n, \mathbb{R})$ je n^2.

Zmiňme se o existenci *přímého součinu grup*. Máme-li grupy $G_1, ..., G_n$, pak přímým součinem $G_1 \times ... \times G_n$ jsou n-tice prvků $(g_1, ..., g_n)$. Operace na této nové struktuře je zavedena tak, že pro prvky na i-tém místě používáme operaci z původní grupy G_i. Není těžké ukázat, že jde o grupu. Zajímavějším příkladem je *polopřímý součin grup*.

Definice 4.8. Nechť G, H jsou dvě grupy takové, že G působí na H, tedy platí $g \otimes h \in H$ pro všechna $g \in G, h \in H$. Splňuje-li levá akce $\otimes$ pro všechna $g \in G, h_1, h_2 \in H$:

$$g \otimes (h_1 h_2) = (g \otimes h_1)(g \otimes h_2), \tag{4.1}$$

pak operaci *polopřímého součinu* na množině $G \times H$ značenou $G \ltimes H$ zavedeme předpisem:

$$(g_1, h_1) \cdot_{\ltimes} (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1(g_1 \otimes h_2)).$$

Poznámka. Působení grupy G na grupu H podle rovnice 4.1 určuje homomorfismus grupy H do sebe samé. Více o této problematice se píše v práci [15].

Věta 4.2. *Jsou dány grupy G, H splňující předpoklady pro zavedení přímého součinu. Pak množina $G \times H$ spolu s operací přímého součinu tvoří grupu.*

Důkaz. Uzavřenost v první složce plyne z uzavřenosti grupy G, uzavřenost ve druhé složce plyne z toho, že H je grupa a $\otimes$ levá akce.

Po rozepsání $[(g_1, h_1) \cdot_{\ltimes} (g_2, h_2)] \cdot_{\ltimes} (g_3, h_3)$ a $(g_1, h_1) \cdot_{\ltimes} [(g_2, h_2) \cdot_{\ltimes} (g_3, h_3)]$ je asociativita v první složce zřejmá. Pro druhou dostáváme z prvního výrazu $h_1(g_1 \otimes h_2)(g_1g_2 \otimes h_3)$ a z druhého $h_1(g_1 \otimes h_2(g_2 \otimes h_3))$. Poslední uvedený výraz podle rovnosti 4.1 upravíme do tvaru $h_1(g_1 \otimes h_2)(g_1 \otimes (g_2 \otimes h_3))$ a užitím vlastnosti akce $g_1 \otimes (g_2 \otimes h_3) = (g_1g_2) \otimes h_3$ je dokázána asociativita i pro druhou složku.

Neutrální prvek (e_G, e_H) je složený z neutrálních prvků jednotlivých grup. Inverzní prvek k prvku (g, h) je ve tvaru $(g^{-1}, g^{-1}h^{-1})$. $\square$

Podkapitolu uzavřeme tvrzením převzatým z práce [13].

Věta 4.3. *Přímý i polopřímý součin Lieových grup je opět Lieova grupa.*

Příklad 4.5. Připomeňme si speciální ortogonální grupu $SO(n, \mathbb{R})$ z příkladu 2.9. Polopřímým součinem $SO(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ dostáváme speciální euklidovskou grupu popisující posuv a otočení v euklidovském prostoru dimenze n.

4.3. Tečné vektory

Pojem tečného vektoru se vztahuje k varietě, a proto ho má smysl uvažovat i pro Lieovu grupu. Připomeňme na úvod, jak hledáme tečnu křivky a tečnou rovinu plochy.

Příklad 4.6. Najděme rovnici tečny elipsy $3x^2 + 4y^2 = 12$ v bodě $[-1, \frac{3}{2}]$.
Rovnici zderivujeme jako implicitní funkci a vyjádříme $y^I = \frac{-3x}{4y}$. Směrnice tečny v daném bodě je $\frac{1}{2}$ a směrový vektor můžeme psát ve tvaru $s = (2, 1)$. Rovnice tečny v parametrickém tvaru bude $t = \{x = -1 + 2t, y = \frac{3}{2} + t, t \in \mathbb{R}\}$ a v obecném $t : x - 2y + 4 = 0$.

Příklad 4.7. Najděme tečnou rovinu koule $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ v bodě $[1, 1, 1]$.
Tečná rovina koule je v libovolném bodě určena dvěma lineárně nezávislými vektory kolmými na vektor z počátku do tohoto bodu. K vektoru $v = (1, 1, 1)$ jsou kolmé například vektory $s_1 = (0, 1, -1)$ a $s_2 = (-1, 1, 0)$. Jejich vektorovým součinem je vektor $n = (1, 1, 1)$ a po dosazení bodu $[1, 1, 1]$ do předpisu $x+y+z+d = 0$ vyjde $d = 0$. Tečná rovina v daném bodě tak je $x + y + z = 0$.

Pojem tečny, resp. tečné plochy zobecníme pro variety vyšších dimenzí. V práci se zabýváme varietami, které jsou současně Lieovými grupami, a označujeme je proto G.

Definice 4.9. *Parametrizovanou hladkou křivkou na varietě G* označujeme pro $\epsilon > 0$ zobrazení $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \in \mathbb{R} \to G$ takové, že složením $\phi \circ \gamma$, kde ϕ značí lokální souřadnice, dostaneme hladkou křivku v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka. V literatuře narážíme na různé přístupy k definici. Podobně jako jsme v poznámce za definicí 2.4 komentovali rozdíl mezi pojmy křivka a parametrizovaná křivka, někteří autoři rozlišují křivku (anglicky „curve“), ve smyslu množiny bodů na varietě, a dráhu (anglicky „path“), ve smyslu zobrazení. Takový přístup má opodstatnění, snadno nahlédneme, že dvě různé dráhy (dvě různé parametrizace) mohou určovat tutéž křivku.

V případě rovinné křivky je tečný vektor v jejím bodě určen derivací křivky v tomto bodě. Analogie platí i pro variety, za účelem dosažení korespondence mezi křivkami a jejich tečnými vektory nebudeme však tečný vektor přiřazovat konkrétní křivce, ale skupině křivek.

Definice 4.10. Mějme dvojici křivek γ_1, γ_2, pro které platí $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = g$. Křivky γ_1, γ_2 *se dotýkají* v bodě $g \in G$, jestliže v okolí bodu g s lokálními souřadnicemi ϕ splňují:

$$\left(\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1)\right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2)\right)_{t=0}.$$

Zformulovaná definice nám křivky na varietě procházející daným bodem rozdělila do tříd ekvivalence.

Definice 4.11. Třídu ekvivalence křivek na varietě G v bodě g označujeme *tečný vektor* v bodě g.

Definice 4.12. *Tečný prostor* v bodě $g \in G$ označovaný T_gG je množina všech tečných vektorů v bodě g.

Poznámka. Vraťme se na chvíli k příkladu 4.7. Tečným prostorem dané variety v bodě $[1, 1, 1]$ je rovina $x + y + z = 0$, tečnými vektory v bodě $[1, 1, 1]$ jsou všechny vektory s počátkem v tomto bodě ležící v rovině $x + y + z = 0$.

Věta 4.4. *Tečný prostor T_gG je vektorový prostor.*

Poznámka. Je-li Lieova grupa reprezentována maticemi $A(t)$ řádu n, pak její tečný prostor k neutrálnímu prvku jednoduše určíme jako matici vzniklou zderivováním všech jejích prvků podle parametru v nule:

$$\left(\frac{d}{dt}\, a_{ij}(t)\right)_{t=0}.$$

4.4. Jednoparametrické Lieovy podgrupy

Definice 4.13. Je dána Lieova grupa G s neutrálním prvkem $e \in G$. *Jednoparametrická Lieova podgrupa grupy* G je zobrazení $t \mapsto h(t) \in G$ pro $\forall t, s \in \mathbb{R}$ splňující:

$$h(0) = e,$$
$$h(t)h(s) = h(t + s).$$

Příklad 4.8. Mějme grupu $G = (\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ a pevně zvolené komplexní číslo $\alpha \neq 0$. Pak předpisem $h(t) = e^{\alpha t}$ je určena jednoparametrická podgrupa grupy G. Podle pravidel pro počítání s mocninami skutečně platí, že $e^{\alpha \cdot 0} = 1$ i $e^{\alpha \cdot t} e^{\alpha \cdot s} = e^{\alpha \cdot (t+s)}$.

Každé parametrické podgrupě $h(t)$ můžeme přiřadit *tečný vektor* $\boldsymbol{v}_h$ *k neutrálnímu prvku* předpisem $\boldsymbol{v}_h = \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)_{t=0}$. Získáme tak jednoznačnou korespondenci mezi všemi podgrupami Lieovy grupy G a tečnými vektory Lieovy grupy G k neutrálnímu prvku.

Věta 4.5. *Jednoparametrická podgrupa Lieovy grupy G je jednoznačně určena tečným vektorem k neutrálnímu prvku grupy G.*

Důkaz. Podrobný důkaz je k nalezení v druhé kapitole knihy [6]. □

Poznámka. Zobrazení, které tečnému vektoru Lieovy grupy v neutrálním prvku jednoznačně přiřazuje jednoparametrickou podgrupu, nazýváme *exponenciální zobrazení.*

4.5. Vektorová pole a Lieova algebra

Vektorová pole nacházejí četné aplikace. V meteorologii jimi popisujeme směr a rychlost větru, v hydromechanice je využíváme k popisu proudění, v termomechanice k popisu teplotního toku a zjišťování tepelných ztrát.

Uvažujme zrnko písku, které bylo z počátečního bodu po jistou dobu unášeno větrem. Integrální křivku si můžeme představit jako křivku, po níž se zrnko pohybovalo. Vektorová pole nezávislá na čase nazýváme *autonomní* (například ustálený teplotní profil).

Definice 4.14. Jako *tečný bandl* TG variety G označujeme disjunktní sjednocení tečných prostorů T_zG všech jejich prvků.

Definice 4.15. *Vektorovým polem* na varietě G je hladké zobrazení $V : G \to TG$, které splňuje podmínku $V(g) \in T_gG$.

Poznámka. Vektorové pole tedy každému bodu variety $g \in G$ přiřazuje tečný vektor v tomto bodě.

Definice 4.16. Jako *integrální křivku* vektorového pole V na na varietě G označujeme zobrazení $\Gamma : s \to G$ splňující pro všechna $s \in \mathbb{R}$: $V(\Gamma(s)) = \Gamma(s)$.

Definice 4.17. *Lieova algebra* je vektorový prostor nad reálnými čísly spolu s operací zvanou *Lieova závorka*, která je zobrazením $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ pro všechna $x, y, z \in V$ splňujícím:

- antisymetrii: $[x, y] = -[y, x]$.
- Jacobiho identitu: $[x, [y, z] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

5. Seznámení s jetovými grupami

V této kapitole vycházíme především ze zdrojů [9], [16] a [17].

5.1. Jety zobrazení

Definice 5.1. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bod x, který se zobrazí na bod y (platí $y = f(x)$). *Souřadnicemi r-jetu zobrazení f v bodě x* nazveme hodnotu v bodě x, hodnotu obrazu y a hodnoty derivací f v bodě x až do řádu r (včetně).

Pro jednoduchost budeme v dalším textu předpokládat, že zobrazení zobrazuje 0 na 0. Hodnoty x, y pak ztrací význam a za souřadnice r-jetu považujeme jen hodnoty derivací až do řádu r v 0 (nejde o újmu na obecnosti, ale pouze o technické zjednodušení).

Příklad 5.1. a) Zobrazení $f(x) = \sin(x)$ a $g(x) = \sinh(x)$ tvoří v 0 týž 2-jet, neboť pro funkční hodnoty platí $f(0) = g(0) = 0$ a pro hodnoty derivací $f'(0) = g'(0) = 1$ a $f''(0) = g''(0) = 0$.

b) Zobrazení $p(x) = e^{2x} - \cos(2x)$ a $r(x) = 4x^2 + 2x$ tvoří v 0 týž 2-jet (ale jiný než v předchozím bodě). V 0 se rovnají funkční hodnoty obou zobrazení ($p(0) = r(0) = 0$) a hodnoty prvních ($p'(0) = r'(0) = 2$) i druhých ($p''(0) = r''(0) = 8$) derivací.

V úvodu jsme se zaměřili pouze na definici souřadnic jetu funkce jedné reálné proměnné. Rozšiřme uvedenou definici pro zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$.

Definice 5.2. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a bod $\mathbf{X}$, který se zobrazí na bod $\mathbf{Y}$ (platí $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$). *Souřadnicemi r-jetu zobrazení f v bodě* $\mathbf{X}$ nazveme souřadnice výchozího bodu $\mathbf{X}$, souřadnice cílového bodu $\mathbf{Y}$ a hodnoty parciálních derivací všech složek f v bodě $\mathbf{X}$ až do řádu r (včetně).

Poznámka. I v tomto případě se dále omezíme na zobrazení, která zobrazují $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ na $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ a jako souřadnice r-jetu budeme uvažovat pouze hodnoty parciálních derivací všech složek zobrazení až do řádu r v $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$.

Příklad 5.2. Je dáno zobrazení $f(x, y) = (x^2y + \sin x, ye^x + y^2)$. Pro určení souřadnic 2-jetu zobrazení f v $\mathbf{0}$ potřebujeme tyto parciální derivace:

$$\frac{\partial f^1}{\partial x} = 2xy + \cos x,\ \frac{\partial f^1}{\partial y} = x^2,\ \frac{\partial^2 f^1}{\partial x^2} = 2y - \sin x,\ \frac{\partial^2 f^1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f^1}{\partial y \partial x} = 2x,\ \frac{\partial^2 f^1}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x} = ye^x,\ \frac{\partial f^2}{\partial y} = e^x + 2y,\ \frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2} = ye^x,\ \frac{\partial^2 f^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f^2}{\partial y \partial x} = e^x,\ \frac{\partial^2 f^2}{\partial y^2} = 2$$

Vyčíslením výrazů v bodě $\mathbf{0} = (0, 0)$ získáme souřadnice 2-jetu zobrazení f v $\mathbf{0}$.

Podle uvedených definic platí, že dvě zobrazení tvoří v daném bodě týž r-jet, jestliže obě zobrazení mají v tomto bodě stejné souřadnice r-jetu. Často však zkoumáme zobrazení mezi dvěma (i různými) hladkými varietami, a proto má smysl následující definice nezávislá na souřadnicovém systému (zde uvedená pro zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$).

Definice 5.3. Pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ mějme libovolnou křivku $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ splňující $\gamma(0) = \mathbf{0}$ a dvojici zobrazení f, g z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ zobrazujících $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ na $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$. Zobrazení f, g *tvoří týž r-jet v* $\mathbf{0}$, jestliže mají křivky $f \circ \gamma$ a $g \circ \gamma$ v 0 styk řádu r.

Věta 5.1. *Zvolme pevně $r \in \mathbb{N}$ a mějme dvě zobrazení, která jsou v relaci, pokud tvoří týž r-jet. Tato relace je ekvivalence.*

Důkaz. Každá křivka má sama se sebou styk libovolného řádu ve všech bodech, relace je tedy reflexivní. Má-li v daném bodě křivka γ styk řádu r s křivkou δ, pak zřejmě i křivka δ má styk řádu r s křivkou γ, což zaručuje symetrii. Konečně tranzitivita je splněna, neboť mají-li křivky γ a δ styk řádu r v daném bodě a zároveň křivky δ a ϵ mají styk řádu r v tomtéž bodě, musí mít i křivky γ a ϵ styk řádu r v tomto bodě. □

Jednotlivé r-jety jsou třídami ekvivalence. Množinu všech r-jetů takových, že výchozí bod má souřadnice $\mathbf{X}$ a cílový $\mathbf{Y}$ značíme $J^r_{\mathbf{X}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)_{\mathbf{Y}}$. Jak jsme již uvedli, naši pozornost budeme soustředit na množinu $J^r_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$. Pro r-jet zobrazení f budeme používat symbol $j^r f$ (předpokládáme, že $r \in \mathbb{N}$).

Jednou z podmínek kladených na grupu je existence inverzního prvku ke každému prvku grupy. Pokud se omezíme na jety regulárních zobrazení, bude toto zaručeno.

Definice 5.4. Jet $j^r f$ v $\mathbf{0}$ označíme jako *invertibilní*, je-li zobrazení f v $\mathbf{0}$ regulární.

Poznámka. Z definice invertibilního jetu plyne, že pokud je r-jet v daném bodě invertibilní pro konkrétní r, pak je invertibilní pro libovolné r.

Příklad 5.3. a) Snadno nahlédneme, že všechna zobrazení z příkladu 5.1 jsou v 0 regulární a tvoří tak v 0 invertibilní r-jet.

b) Podobně zobrazení z příkladu 5.2 je v $\mathbf{0}$ regulární (jeho jakobián v $\mathbf{0}$ je roven 1). Toto zobrazení tvoří v $\mathbf{0}$ invertibilní r-jet.

c) Naopak zobrazení $f(x) = x^3$ v 0 netvoří invertibilní r-jet, protože jeho derivace v 0 se rovná 0. K danému zobrazení sice existuje inverzní zobrazení $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ spojité v okolí bodu 0, derivace f^{-1} však už v 0 spojitá není.

Definice 5.5. Zvolme pevně $r \in \mathbb{N}$. Uvažujme zobrazení f, jemuž přísluší r-jet $j^r f$, a zobrazení g, jemuž přísluší r-jet $j^r g$. *Složení jetů* zavedeme předpisem

$$j^r f \circ j^r g = j^r(f \circ g).$$

Věta 5.2. *Množina všech invertibilních r-jetů* inv $J^r_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)_0$ *tvoří spolu s právě definovanou operací složení jetů jetovou grupu značenou G^r_n. Jde o Lieovu grupu.*

Důkaz. Uzavřenost i asociativita složení jetů plyne z vlastností skládání zobrazení. Neutrálním prvkem je jet identického zobrazení. Existenci inverzních prvků zaručuje to, že jsme se omezili pouze na invertibilní jety. Jde o grupu a později uvidíme, že ji reprezentujeme maticemi, které jsou podgrupou $GL(n, \mathbb{R})$. Proto je tato grupa Lieova. □

Poznámka. Zdůrazněme, že v označení G^r_n znamená n dimenzi prostorů, mezi nimiž zobrazujeme, a r řád nejvyšší derivace. Jetové grupě se někdy říká také diferenciální grupa. Nebude-li jinak uvedeno, předpokládáme u všech zobrazení regularitu v bodě $\mathbf{0}$.

5.2. Grupy G_1^r

V této podkapitole se budeme zabývat zobrazeními (funkcemi) z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a vlastnostmi příslušných jetových grup při zvyšování r.

Budou zadána zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(0) = 0$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(0) = 0$ a složené zobrazení $h = f \circ g$. Naším cílem bude vyjádřit souřadnice složeného r-jetu $j^r h$ v závislosti na souřadnicích r-jetů $j^r f$ a $j^r g$. Pro toto vyjádření se pak budeme snažit nalézt věrnou reprezentaci nejnižšího možného řádu.

Využijeme při tom křivku $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \gamma(0) = 0$. Provedeme $h \circ \gamma$ a spočítáme prvních r derivací. Poté provedeme $f \circ g \circ \gamma$ a opět spočítáme prvních r derivací. Porovnáním derivací stejného řádu odvodíme vztahy pro skládání jetů. Námi použitý způsob odvození vychází z definice 5.3 (souřadnice jetů lze ale odvozovat i bez použití křivky γ).

Pracujeme s funkcemi jedné proměnné, derivujeme pouze podle této proměnné. Proto označíme derivace římskými číslicemi. Souřadnice jetu $j^r f$ budeme značit písmenem a:

$$a^I = \frac{df}{dx}(0),\ a^{II} = \frac{d^2 f}{dx^2}(0),\ a^{III} = \frac{d^3 f}{dx^3}(0),\ ...$$

Podobně souřadnice jetu $j^r g$ budeme značit písmenem b ($b^I, b^{II}, ...$) a souřadnice složeného jetu $j^r h = j^r(f \circ g)$ písmenem c ($c^I, c^{II}, ...$).

5.2.1. Grupa G_1^1

Pro $h \circ \gamma$ platí $\dot{x}(0) = \frac{dh}{dx}(0)\dot{\gamma}(0)$, pro $f \circ g \circ \gamma$ platí $\dot{x}(0) = \frac{df}{dx}(0)\frac{dg}{dx}(0)\dot{\gamma}(0)$. Zobrazení h je definováno jako složení $f \circ g$, proto porovnáním vypočtených derivací dostáváme rovnost:

$$\frac{dh}{dx}(0)\dot{\gamma}(0) = \frac{df}{dx}(0)\frac{dg}{dx}(0)\dot{\gamma}(0).$$

Rovnost zapíšeme v souladu se zavedeným značením a pro složený 1-jet $j^1 h = j^1 f \circ j^1 g$ dostáváme vztah:

$$c^I = a^I b^I.$$

V tomto (speciálním) případě jde o komutativní grupu izomorfní s grupou $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$. Neutrálním prvkem je $b^I = 1$, což je 1-jet identického zobrazení. Inverzním prvkem k danému jetu je jet inverzního zobrazení, ten jistě existuje, neboť uvažujeme pouze regulární zobrazení. Tento případ také ilustruje význam vzorce pro derivaci složené funkce.

5.2.2. Grupa G_1^2

Pro $h \circ \gamma$ jsme již spočítali $\dot{x}(0) = \frac{dh}{dx}(0)\dot{\gamma}(0)$. Opakovanou derivací dostáváme:

$$\ddot{x}(0) = \frac{d^2 h}{dx^2}(0)\dot{\gamma}^2(0) + \frac{dh}{dx}(0)\ddot{\gamma}(0). \tag{5.1}$$

Podobně pro $f \circ g \circ \gamma$ máme $\dot{x}(0) = \frac{df}{dx}(0)\frac{dg}{dx}(0)\dot{\gamma}(0)$ a opakovanou derivací dostáváme:

$$\ddot{x}(0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(0)\Big(\frac{dg}{dx}(0)\Big)^2\dot{\gamma}^2(0) + \frac{df}{dx}(0)\frac{d^2 g}{dx^2}(0)\dot{\gamma}^2(0) + \frac{df}{dx}(0)\frac{dg}{dx}(0)\ddot{\gamma}(0). \tag{5.2}$$

Porovnáním příslušných členů získáváme pro složený 2-jet $j^2h = j^2f \circ j^2g$ vztahy:

$$\begin{aligned} c^I &= a^I b^I \\ c^{II} &= a^{II}(b^I)^2 + a^I b^{II}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Podle věty 5.2 množina uspořádaných dvojic $(a^I, a^{II}) \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$ tvoří s operací popsanou dvěma výše uvedenými rovnicemi grupu. Dokažme to pro grupu G_1^2 podrobně.

Uzavřenost je zřejmá (v první složce vznikne součinem dvou nenulových reálných čísel opět nenulové reálné číslo, v druhé složce bude součinem dvou reálných čísel jistě reálné číslo). Asociativitu ukážeme:

$$\begin{aligned} [(a^I, a^{II}) * (b^I, b^{II})] * (c^I, c^{II}) &= (a^I b^I, a^{II}(b^I)^2 + a^I b^{II}) * (c^I, c^{II}) = \\ &= (a^I b^I c^I, a^{II}(b^I)^2(c^I)^2 + a^I b^{II}(c^I)^2 + a^I b^I c^{II}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^I, a^{II}) * [(b^I, b^{II}) * (c^I, c^{II})] &= (a^I, a^{II}) * (b^I c^I, b^{II}(c^I)^2 + b^I c^{II}) = \\ &= (a^I b^I c^I, a^{II}(b^I)^2(c^I)^2 + a^I b^{II}(c^I)^2 + a^I b^I c^{II}) \end{aligned}$$

Neutrálním prvkem je uspořádaná dvojice $(1, 0)$ a inverzním prvkem k (a^I, a^{II}) je prvek ve tvaru $\left(\frac{1}{a^I}, -\frac{a^{II}}{(a^I)^3}\right)$.

Vhodnou reprezentaci dostaneme, pokud jetu se souřadnicemi (a^I, a^{II}) přiřadíme tuto matici:

$$\begin{pmatrix} a^I & a^{II} \\ 0 & (a^I)^2 \end{pmatrix}.$$

Uvažujeme pouze regulární zobrazení, matice je proto jistě invertibilní. Její inverze, matice příslušná inverznímu jetu, má tvar:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^I} & \frac{-a^{II}}{(a^I)^3} \\ 0 & (\frac{1}{a^I})^2 \end{pmatrix}.$$

Identické zobrazení je reprezentováno jednotkovou maticí (neutrálním prvkem). Rozbor maticové reprezentace koresponduje s důkazem, že jde o grupu a tento výsledek potvrzuje.

Příklad 5.4. Mějme zobrazení $f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x) - 3, g(x) = 4x^2 + x$
Souřadnice 2-jetu zobrazení f jsou $a^I = 2, a^{II} = -3$.
Souřadnice 2-jetu zobrazení g jsou $b^I = 1, b^{II} = 8$.
Pomocí součinu maticových reprezentací obou jetů

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

zjistíme, že souřadnice složeného jetu jsou $c^I = 2, c^{II} = 13$. Výsledek se ověří výpočtem souřadnic 2-jetu zobrezení $f \circ g = 2\sin(4x^2 + x) + 3\cos(4x^2 + x) - 3$.

5.2.3. Grupa G_1^3

Opakovanou derivací vztahu (5.1) dostáváme:

$$\dddot{x}(0) = \frac{d^3h}{dx^3}(0)\dot{\gamma}^3(0) + 3\frac{d^2h}{dx^2}(0)\dot{\gamma}\ddot{\gamma}(0) + \frac{dh}{dx}(0)\dddot{\gamma}(0),$$

a opakovanou derivací vztahu (5.2) dostáváme:

$$\begin{aligned}\dddot{x}(0) = {} & \frac{d^3f}{dx^3}(0)\left(\frac{dg}{dx}(0)\right)^3\dot{\gamma}^3(0) + 3\frac{d^2f}{dx^2}(0)\frac{d^2g}{dx^2}(0)\frac{dg}{dx}(0)\dot{\gamma}^3(0) + \frac{df}{dx}(0)\frac{d^3g}{dx^3}(0)\dot{\gamma}^3(0)\\ & + 3\frac{d^2f}{dx^2}(0)\left(\frac{dg}{dx}(0)\right)^2\dot{\gamma}(0)\ddot{\gamma}(0) + 3\frac{df}{dx}(0)\frac{d^2g}{dx^2}(0)\dot{\gamma}(0)\ddot{\gamma}(0) + \frac{df}{dx}(0)\frac{dg}{dx}(0)\dddot{\gamma}(0).\end{aligned}$$

Porovnáním příslušných členů získáváme pro složený 3-jet $j^3h = j^3f \circ j^3g$ vztahy:

$$\begin{aligned} c^I &= a^I b^I \\ c^{II} &= a^{II}(b^I)^2 + a^I b^{II} \\ c^{III} &= a^{III}(b^I)^3 + 3a^{II}b^I b^{II} + a^I b^{III} \end{aligned}$$

Množina uspořádaných trojic $(a^I, a^{II}, a^{III}) \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tvoří s operací popsanou třemi výše uvedenými rovnicemi grupu. Prvek (a^I, a^{II}, a^{III}) reprezentujeme maticí:

$$\begin{pmatrix} a^I & a^{II} & a^{III} \\ 0 & (a^I)^2 & 3a^I a^{II} \\ 0 & 0 & (a^I)^3 \end{pmatrix}.$$

5.2.4. Vývoj situace pro zvyšující se r

Souřadnice r-jetů můžeme počítat rekurzivně, tzn. známe-li souřadnice r-jetu, dokážeme derivováním určit souřadnice $(r+1)$-jetu. Při výpočtu předpokládáme, že $c = a(b)$. Podle pravidel pro derivování složené funkce pak dostáváme ze znalosti souřadnic 3-jetu pro 4-jet tyto vztahy:

$$\begin{aligned} c^I &= a^I b^I \\ c^{II} &= a^{II}(b^I)^2 + a^I b^{II} \\ c^{III} &= a^{III}(b^I)^3 + 3a^{II}b^I b^{II} + a^I b^{III} \\ c^{IV} &= a^{IV}(b^I)^4 + 3a^{III}(b^I)^2 b^{II} + 3a^{III}(b^I)^2 b^{II} + 3a^{II}(b^{II})^2 + 3a^{II}b^I b^{III} + a^{II}b^I b^{III} + a^I b^{IV} = \\ &= a^{IV}(b^I)^4 + 6a^{III}(b^I)^2 b^{II} + 3a^{II}(b^{II})^2 + 4a^{II}b^I b^{III} + a^I b^{IV} \end{aligned}$$

Maticovou reprezentaci prvku $(a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV})$ dostáváme ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} a^I & a^{II} & a^{III} & a^{IV} \\ 0 & (a^I)^2 & 3a^I a^{II} & 4a^I a^{III} + 3(a^{II})^2 \\ 0 & 0 & (a^I)^3 & 6(a^I)^2 a^{II} \\ 0 & 0 & 0 & (a^I)^4 \end{pmatrix}.$$

Reprezentace grup G_1^r tvořené tímto způsobem (tzn. všechny dosud uvedené) jsou věrné. Už z prvního řádku reprezentující matice je patrné, že dvěma různým r-jetům budou přiřazeny dvě různé matice.

S výpočty souřadnic r-jetů pro vyšší r nám pomůže vhodný software. Ověření správnosti navržených reprezentací je k nalezení v příloze.

5.3. Grupy G_n^1

Ponechme v této podkapitole $r = 1$ a zvyšujme n, tedy zabývejme se zobrazeními z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Náš cíl zůstává stejný. Pro pevně zvolené n a zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a složené zobrazení $h = f \circ g$ budeme hledat (opět s využitím křivky γ) souřadnice složeného 1-jetu j^1h v závislosti na souřadnicích 1-jetů j^1f a j^1g.

Zde ale začínáme pracovat s funkcemi více proměnných, proto potřebujeme zavést nové značení. Proveďme to tak, abychom na něho mohli plynule navázat i v další kapitole.

Definice 5.6. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve tvaru:

$$f(x_1, ..., x_n) = (f^1(x_1, ..., x_n), ..., f^n(x_1, ..., x_n)).$$

Hodnotu parciální derivace i-té složky zobrazení podle j-té proměnné v nule $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(\mathbf{0})$ označíme a_j^i.

Poznámka. Dodržujeme dohodu, že zobrazení f přísluší koeficienty a_j^i, zobrazení g koeficienty b_j^i a zobrazení h koeficienty c_j^i. Pro lepší přehlednost místo $f(x_1, x_2)$ píšeme $f(x, y)$ a místo $f(x_1, x_2, x_3)$ píšeme $f(x, y, z)$.

Ve zbytku práce pro nás bude mít zásadní význam *pravidlo pro derivaci složené funkce* (anglicky „chain rule“). Jeho přesné znění lze najít ve zdroji [2]. K popisu grupy G_2^2 v kapitole 6 přistoupíme se snahou toto pravidlo co nejnázorněji osvětlit.

Grupu G_1^1 jsme si už představili v předchozí podkapitole, začněme s grupou G_2^1.

5.3.1. Grupa G_2^1

Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, složené zobrazení $h = f \circ g$ a křivku $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\xi(t), \eta(t)), \gamma(\mathbf{0}) = 0$. Provedeme $h \circ \gamma$ a spočítáme:

$$\dot{x}(0) = \frac{\partial h^1}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial h^1}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0)$$

$$\dot{y}(0) = \frac{\partial h^2}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial h^2}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0)$$

Podobně pro $f \circ g \circ \gamma$ dostáváme:

$$\dot{x}(0) = \frac{\partial f^1}{\partial x}(\mathbf{0})\frac{\partial g^1}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial f^1}{\partial x}(\mathbf{0})\frac{\partial g^1}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial f^1}{\partial y}(\mathbf{0})\frac{\partial g^2}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial f^1}{\partial y}(\mathbf{0})\frac{\partial g^2}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0)$$

$$\dot{y}(0) = \frac{\partial f^2}{\partial x}(\mathbf{0})\frac{\partial g^1}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial f^2}{\partial x}(\mathbf{0})\frac{\partial g^1}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial f^2}{\partial y}(\mathbf{0})\frac{\partial g^2}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial f^2}{\partial y}(\mathbf{0})\frac{\partial g^2}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0)$$

Porovnáním příslušných členů obdržíme pro složený 1-jet $j^1h = j^1f \circ j^1g$ tyto vztahy:

$$c_1^1 = a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_1^2 \qquad c_2^1 = a_1^1 b_2^1 + a_2^1 b_2^2$$
$$c_1^2 = a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 \qquad c_2^2 = a_2^1 b_2^1 + a_2^2 b_2^2$$

Souřadnice jetu spolu s operací popsanou výše uvednými vztahy tvoří grupu. Její reprezentaci dostaneme tak, že jetu j^1f přiřadíme matici:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Jde o Jacobiho matici zobrazení f. Protože uvažujeme jen regulární zobrazení, matice je jistě invertibilní. Jednotková matice reprezentuje 1-jet zobrazení $f(x, y) = (x, y)$.

5.3.2. Grupa G_3^1

Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, složené zobrazení $h = f \circ g$ a křivku $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (\xi(t), \eta(t), \psi(t)), \gamma(\mathbf{0}) = 0$. Pro $h \circ \gamma$ spočítáme:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(0) &= \frac{\partial h^1}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial h^1}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial h^1}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0) \\
\dot{y}(0) &= \frac{\partial h^2}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial h^2}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial h^2}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0) \\
\dot{z}(0) &= \frac{\partial h^3}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial h^3}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial h^3}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0)
\end{aligned}$$

Podobně pro $f \circ g \circ \gamma$ dostáváme:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(0) = {} & \frac{\partial f^1}{\partial x}(\mathbf{0})\left(\frac{\partial g^1}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial g^1}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial g^1}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0)\right) + \frac{\partial f^1}{\partial y}(\mathbf{0})\left(\frac{\partial g^2}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) +\right. \\
& \left. + \frac{\partial g^2}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial g^2}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0)\right) + \frac{\partial f^1}{\partial z}(\mathbf{0})\left(\frac{\partial g^3}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial g^3}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial g^3}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}(0) = {} & \frac{\partial f^2}{\partial x}(\mathbf{0})\left(\frac{\partial g^1}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial g^1}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial g^1}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0)\right) + \frac{\partial f^2}{\partial y}(\mathbf{0})\left(\frac{\partial g^2}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) +\right. \\
& \left. + \frac{\partial g^2}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial g^2}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0)\right) + \frac{\partial f^2}{\partial z}(\mathbf{0})\left(\frac{\partial g^3}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial g^3}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial g^3}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}(0) = {} & \frac{\partial f^3}{\partial x}(\mathbf{0})\left(\frac{\partial g^1}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial g^1}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial g^1}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0)\right) + \frac{\partial f^3}{\partial y}(\mathbf{0})\left(\frac{\partial g^2}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) +\right. \\
& \left. + \frac{\partial g^2}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial g^2}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0)\right) + \frac{\partial f^3}{\partial z}(\mathbf{0})\left(\frac{\partial g^3}{\partial x}(\mathbf{0})\dot{\xi}(0) + \frac{\partial g^3}{\partial y}(\mathbf{0})\dot{\eta}(0) + \frac{\partial g^3}{\partial z}(\mathbf{0})\dot{\psi}(0)\right)
\end{aligned}$$

Porovnáním příslušných členů obdržíme pro složený 1-jet $j^1h = j^1f \circ j^1g$ tyto vztahy:

$$\begin{aligned}
c_1^1 &= a_1^1b_1^1 + a_2^1b_1^2 + a_3^1b_1^3 & c_2^1 &= a_1^1b_2^1 + a_2^1b_2^2 + a_3^1b_2^3 & c_3^1 &= a_1^1b_3^1 + a_2^1b_3^2 + a_3^1b_3^3 \\
c_1^2 &= a_1^2b_1^1 + a_2^2b_1^2 + a_3^2b_1^3 & c_2^2 &= a_1^2b_2^1 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_2^3 & c_3^2 &= a_1^2b_3^1 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_3^3 \\
c_1^3 &= a_1^3b_1^1 + a_2^3b_1^2 + a_3^3b_1^3 & c_2^3 &= a_1^3b_2^1 + a_2^3b_2^2 + a_3^3b_2^3 & c_3^3 &= a_1^3b_3^1 + a_2^3b_3^2 + a_3^3b_3^3
\end{aligned}$$

Souřadnice jetu spolu s operací popsanou výše uvednými vztahy tvoří grupu. Jet j^1f reprezentujeme Jacobiho maticí zobrazení f:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}.$$

5.3.3. Vývoj situace pro zvyšující se n

Uvedené tvrzení můžeme snadno rozšířit i pro vyšší dimenze. Platí, že reprezentací 1-jetu zobrazení f v $\mathbf{0}$ je Jacobiho matice zobrazení f v $\mathbf{0}$. Snadno nahlédneme, že takto tvořené reprezentace grup G_n^1 jsou věrné. Z odvozených výsledků vyjdeme v následující kapitole.

6. Grupy G^2_n

V této kapitole se podrobně zaměříme na grupy G^2_n, jejichž popis je hlavním cílem předložené bakalářské práce. Souřadnice r-jetů budeme nadále značit v duchu definice 5.6, například pro $\frac{\partial^2 f^1}{\partial x \partial y}(\mathbf{0})$ použijeme symbol a^1_{12}.

Zmiňme podle [2] větu, která nám umožní popisovat grupy G^2_n dvěma různými způsoby.

Věta 6.1. *Mějme funkci $f(x, y)$, která má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a spojitou smíšenou parciální derivaci f_{xy}. Pak v tomto bodě existuje také smíšená parciální drivace f_{yx} a platí $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.*

Podmínky věty bývají v obvyklých případech splněny. V dalším textu budeme proto uvažovat pouze zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ s takovými definičními obory, aby všechny jejich složky splňovaly podmínky uvedené věty, a budeme předpokládat $a^1_{12} = a^1_{21}$ apod.

Definice 6.1. Pokud budeme při reprezentaci grupy G^2_n maticemi využívat souřadnice jetů a^i_{jk}, jejichž dolní indexy jk budou tvořeny variacemi druhé třídy z n prvků s opakováním, nazveme reprezentaci *úplnou.*

Pokud budou dolní indexy jk tvořeny kombinacemi druhé třídy z n prvků s opakováním, nazveme reprezentaci *zkrácenou.* Prvky v dolním indexu řadíme vzestupně.

Označení pojmů z kombinatoriky v předchozí definici používáme podle skript [18]. Odvození vztahů pro skládání jetů budeme provádět výpočtem potřebných derivací (podle definice 5.2). Samozřejmě bychom mohli vztahy opět odvodit s využitím křivky γ stejně jako v předchozí kapitole, to je však technicky komplikovanější.

Pro odvozené vztahy budeme opět hledat maticovou reprezentaci, která je věrnou reprezentací maticemi co nejmenšího řádu. Naše pozorování ohledně řádu matice shrneme v podkapitole 6.3. Ověření navržených reprezentací provádíme v příloze práce.

Poznámka. V doplňku práce s ohledem na možnosti zápisu výrazu v programu Wolfram Mathematica používáme pro a^1_1 označení $a1x$, pro a^2_1 označení $a1y$ apod.

6.1. Grupa G^2_2

Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a složené zobrazení $h = f \circ g = \big(f^1\big(g^1(x, y), g^2(x, y)\big), f^2\big(g^1(x, y), g^2(x, y)\big)\big)$.

První parciální derivace první složky zobrazení h jsou:

$$\frac{\partial h^1}{\partial x} = \frac{\partial f^1}{\partial x}\frac{\partial g^1}{\partial x} + \frac{\partial f^1}{\partial y}\frac{\partial g^2}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial h^1}{\partial y} = \frac{\partial f^1}{\partial x}\frac{\partial g^1}{\partial y} + \frac{\partial f^1}{\partial y}\frac{\partial g^2}{\partial y}$$

Druhé parciální derivace první složky zobrazení h jsou:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h^1}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h^1}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f^1}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g^1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f^1}{\partial x \partial y}\frac{\partial g^1}{\partial x}\frac{\partial g^2}{\partial x} + \frac{\partial f^1}{\partial x}\frac{\partial^2 g^1}{\partial x^2} + \\ + \frac{\partial^2 f^1}{\partial x \partial y}\frac{\partial g^1}{\partial x}\frac{\partial g^2}{\partial x} + \frac{\partial^2 f^1}{\partial y^2}\left(\frac{\partial g^2}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f^1}{\partial y}\frac{\partial^2 g^2}{\partial x^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 h^1}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h^1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f^1}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g^1}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 f^1}{\partial x\partial y}\frac{\partial g^1}{\partial y}\frac{\partial g^2}{\partial y} + \frac{\partial f^1}{\partial x}\frac{\partial^2 g^1}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2 f^1}{\partial x\partial y}\frac{\partial g^1}{\partial y}\frac{\partial g^2}{\partial y} + \frac{\partial^2 f^1}{\partial y^2}\left(\frac{\partial g^2}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f^1}{\partial y}\frac{\partial^2 g^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 h^1}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h^1}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h^1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f^1}{\partial x^2}\frac{\partial g^1}{\partial x}\frac{\partial g^1}{\partial y} + \frac{\partial^2 f^1}{\partial x\partial y}\frac{\partial g^1}{\partial x}\frac{\partial g^2}{\partial y} + \frac{\partial f^1}{\partial x}\frac{\partial^2 g^1}{\partial x\partial y} + \\ + \frac{\partial^2 f^1}{\partial x\partial y}\frac{\partial g^1}{\partial y}\frac{\partial g^2}{\partial x} + \frac{\partial^2 f^1}{\partial y^2}\frac{\partial g^2}{\partial x}\frac{\partial g^2}{\partial y} + \frac{\partial f^1}{\partial y}\frac{\partial^2 g^2}{\partial x\partial y}$$

Parciální derivace druhé složky $\frac{\partial h^2}{\partial x}, \frac{\partial h^2}{\partial y}, \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 h^2}{\partial y}$ a $\frac{\partial^2 h^2}{\partial x\partial y}$ vypočítáme obdobně. Po úpravě pro složený 2-jet $j^2h = j^2f \circ j^2g$ získáváme následující vztahy ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} c_1^i &= a_1^i b_1^1 + a_2^i b_1^2 \\ c_2^i &= a_1^i b_2^1 + a_2^i b_2^2 \\ c_{11}^i &= a_1^i b_{11}^1 + a_2^i b_{11}^2 + a_{11}^i (b_1^1)^2 + a_{22}^i (b_1^2)^2 + 2a_{12}^i b_1^1 b_1^2 \\ c_{22}^i &= a_1^i b_{22}^1 + a_2^i b_{22}^2 + a_{11}^i (b_2^1)^2 + a_{22}^i (b_2^2)^2 + 2a_{12}^i b_2^1 b_2^2 \\ c_{12}^i &= a_1^i b_{12}^1 + a_2^i b_{12}^2 + a_{11}^i b_1^1 b_2^1 + a_{22}^i b_1^2 b_2^2 + a_{12}^i (b_1^1 b_2^2 + b_2^1 b_1^2) \end{aligned}$$

Úplná reprezentace jetu j^2f maticí řádu 6 je ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{21}^1 & a_{22}^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{21}^2 & a_{22}^2 \\ 0 & 0 & (a_1^1)^2 & a_1^1 a_2^1 & a_2^1 a_1^1 & (a_2^1)^2 \\ 0 & 0 & a_1^1 a_1^2 & a_1^1 a_2^2 & a_2^1 a_1^2 & a_2^1 a_2^2 \\ 0 & 0 & a_1^2 a_1^1 & a_1^2 a_2^1 & a_2^2 a_1^1 & a_2^2 a_2^1 \\ 0 & 0 & (a_1^2)^2 & a_1^2 a_2^2 & a_2^2 a_1^2 & (a_2^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Při zkrácené reprezentaci si vystačíme s maticí řádu 5:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_{11}^1 & a_{22}^1 & a_{12}^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_{11}^2 & a_{22}^2 & a_{12}^2 \\ 0 & 0 & (a_1^1)^2 & (a_2^1)^2 & a_1^1 a_2^1 \\ 0 & 0 & (a_1^2)^2 & (a_2^2)^2 & a_1^2 a_2^2 \\ 0 & 0 & 2a_1^1 a_1^2 & 2a_1^1 a_2^2 & a_1^1 a_2^2 + a_2^1 a_1^2 \end{pmatrix}.$$

6.2. Grupa G_3^2

Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, zobrazení $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a složené zobrazení $h = f \circ g = \big(f^i\big(g^1(x,y,z), g^2(x,y,z), g^3(x,y,z)\big)\big), i = 1, 2, 3.$

Výpočet parciálních derivací složeného zobrazení h bude analogický výpočtu v předchozí podkapitole, proto uveďme jen závěrečný výsledek. Pro souřadnice složeného 2-jetu $j^2h = j^2f \circ j^2g$ budou platit tyto vztahy ($i = 1, 2, 3$):

$$c_1^i = a_1^i b_1^1 + a_2^i b_1^2 + a_3^i b_1^3 \qquad c_2^i = a_1^i b_2^1 + a_2^i b_2^2 + a_3^i b_2^3 \qquad c_3^i = a_1^i b_3^1 + a_2^i b_3^2 + a_3^i b_3^3$$

$$c^i_{11} = a^i_1 b^1_{11} + a^i_2 b^2_{11} + a^i_3 b^3_{11} + a^i_{11}(b^1_1)^2 + a^i_{22}(b^2_1)^2 + a^i_{33}(b^3_1)^2 + 2a^i_{12}b^1_1b^2_1 + 2a^i_{13}b^1_1b^3_1 + 2a^i_{23}b^2_1b^3_1$$

$$c^i_{22} = a^i_1 b^1_{22} + a^i_2 b^2_{22} + a^i_3 b^3_{22} + a^i_{11}(b^1_2)^2 + a^i_{22}(b^2_2)^2 + a^i_{33}(b^3_2)^2 + 2a^i_{12}b^1_2b^2_2 + 2a^i_{13}b^1_2b^3_2 + 2a^i_{23}b^2_2b^3_2$$

$$c^i_{33} = a^i_1 b^1_{33} + a^i_2 b^2_{33} + a^i_3 b^3_{33} + a^i_{11}(b^1_3)^2 + a^i_{22}(b^2_3)^2 + a^i_{33}(b^3_3)^2 + 2a^i_{12}b^1_3b^2_3 + 2a^i_{13}b^1_3b^3_3 + 2a^i_{23}b^2_3b^3_3$$

$$\begin{aligned} c^i_{12} = a^i_1 b^1_{12} + a^i_2 b^2_{12} + a^i_3 b^3_{12} + a^i_{11}b^1_1b^1_2 + a^i_{22}b^2_1b^2_2 + a^i_{33}b^3_1b^3_2 + \\ + a^i_{12}(b^2_1b^1_2 + b^1_1b^2_2) + a^i_{13}(b^3_1b^1_2 + b^1_1b^3_2) + a^i_{23}(b^3_1b^2_2 + b^2_1b^3_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^i_{13} = a^i_1 b^1_{13} + a^i_2 b^2_{13} + a^i_3 b^3_{13} + a^i_{11}b^1_1b^1_3 + a^i_{22}b^2_1b^2_3 + a_{33} + \\ + a^i_{12}(b^2_1b^1_3 + b^1_1b^2_3) + a^i_{13}(b^3_1b^1_3 + b^1_1b^3_3) + a^i_{23}(b^3_1b^2_3 + b^2_1b^3_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^i_{23} = a^i_1 b^1_{23} + a^i_2 b^2_{23} + a^i_3 b^3_{23} + a^i_{11}b^1_2b^1_3 + a^i_{22}b^2_2b^2_3 + a^i_{33}b^3_2b^3_3 + \\ + a^i_{12}(b^2_2b^1_3 + b^1_2b^2_3) + a^i_{13}(b^3_2b^1_3 + b^1_2b^3_3) + a^i_{23}(b^3_2b^2_3 + b^2_2b^3_3) \end{aligned}$$

Pro úplnou reprezentaci potřebujeme matici řádu 12 a ukázka úplné reprezentace je k nahlédnutí v příloze. Uvedeme pouze zkrácenou reprezentaci maticí řádu 9. Jetu j^2f reprezentace přiřadí matici:

$$\begin{pmatrix}
a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_{11} & a^1_{22} & a^1_{33} & a^1_{12} & a^1_{13} & a^1_{23} \\
a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_{11} & a^2_{22} & a^2_{33} & a^2_{12} & a^2_{13} & a^2_{23} \\
a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & a^3_{11} & a^3_{22} & a^3_{33} & a^3_{12} & a^3_{13} & a^3_{23} \\
0 & 0 & 0 & (a^1_1)^2 & (a^1_2)^2 & (a^1_3)^2 & a^1_1a^1_2 & a^1_1a^1_3 & a^1_2a^1_3 \\
0 & 0 & 0 & (a^2_1)^2 & (a^2_2)^2 & (a^2_3)^2 & a^2_1a^2_2 & a^2_1a^2_3 & a^2_2a^2_3 \\
0 & 0 & 0 & (a^3_1)^2 & (a^3_2)^2 & (a^3_3)^2 & a^3_1a^3_2 & a^3_1a^3_3 & a^3_2a^3_3 \\
0 & 0 & 0 & 2a^1_1a^2_1 & 2a^1_2a^2_2 & 2a^1_3a^2_3 & a^1_1a^2_2 + a^1_2a^2_1 & a^1_1a^2_3 + a^1_3a^2_1 & a^1_2a^2_3 + a^1_3a^2_2 \\
0 & 0 & 0 & 2a^1_1a^3_1 & 2a^1_2a^3_2 & 2a^1_3a^3_3 & a^1_1a^3_2 + a^1_2a^3_1 & a^1_1a^3_3 + a^1_3a^3_1 & a^1_2a^3_3 + a^1_3a^3_2 \\
0 & 0 & 0 & 2a^2_1a^3_1 & 2a^2_2a^3_2 & 2a^2_3a^3_3 & a^2_1a^3_2 + a^2_2a^3_1 & a^2_1a^3_3 + a^2_3a^3_1 & a^2_2a^3_3 + a^2_3a^3_2
\end{pmatrix}.$$

6.3. Zobecnění pro vyšší n

Uveďme jednu zajímavou skutečnost o reprezentacích. Matice X, která vznikne z jednotkové matice záměnou i-tého a j-tého řádku je sama k sobě inverzní. Mějme matici A stejného řádu jako X. Součin XA zamění v matici A i-tý a j-tý řádek, součin AX zamění v matici A i-tý a j-tý sloupec. Pokud je matice A reprezentací grupy, pak podle věty 3.5 je matice $X^{-1}AX = XAX$ ekvivalentní reprezentací. Z toho plyne, že při sestavování reprezentující matice můžeme souřadnice patřící do prvního řádku zapsat v libovolném pořadí, čímž určíme podobu řádků zbývajících.

Postup, podle kterého jsme umisťovali jednotlivé prvky souřadnic jetu do matice, zůstal doposud obestřený tajemstvím. Napravme to nyní a zformulujme pravidla, jak tvoříme první řádek matice reprezentace. Posléze uvidíme, že právě tento postup je nejvhodnější pro obecný popis reprezentace grupy G^2_n.

Při úplné reprezentaci do prvního řádku zapíšeme nejprve souřadnice a_j^1 vzestupně řazené podle indexu j, poté souřadnice a_{jk}^1 lexikograficky řazené podle indexu jk.

Při zkrácené reprezentaci budou v prvním řádku matice stát nejprve souřadnice a_j^1, poté koeficienty a_{jj}^1 (v obou případech vzestupně řazené podle dolního indexu) a nakonec koeficienty se smíšeným dolním indexem a_{jk}^1 (řazené lexikograficky podle dolního indexu).

Určením podoby prvního řádku je určena podoba zbytku matice.

Věta 6.2. *Mějme grupu G_n^2. Je-li reprezentace úplná, řád reprezentující matice je n^2+n a prvku j^2f odpovídá matice:*

$$\begin{pmatrix}
a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 & a_{21}^1 & \dots & a_{pq}^1 & \dots & a_{nn}^1 \\
a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & a_{11}^2 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 & a_{21}^2 & \dots & a_{pq}^2 & \dots & a_{nn}^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & a_{11}^n & a_{12}^n & \dots & a_{1n}^n & a_{21}^n & \dots & a_{pq}^n & \dots & a_{nn}^n \\
0 & 0 & \dots & 0 & (a_1^1)^2 & a_1^1a_2^1 & \dots & a_1^1a_n^1 & a_2^1a_1^1 & \dots & a_p^1a_q^1 & \dots & (a_n^1)^2 \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_1^1a_1^2 & a_1^1a_2^2 & \dots & a_1^1a_n^2 & a_2^1a_1^2 & \dots & a_p^1a_q^2 & \dots & a_1^1a_n^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_1^1a_1^n & a_1^1a_2^n & \dots & a_1^1a_n^n & a_2^1a_1^n & \dots & a_p^1a_q^n & \dots & a_n^1a_n^n \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_1^2a_1^1 & a_1^2a_2^1 & \dots & a_1^2a_n^1 & a_2^2a_1^1 & \dots & a_p^2a_q^1 & \dots & a_n^2a_n^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_1^pa_1^q & a_1^pa_2^q & \dots & a_1^pa_n^q & a_2^pa_1^q & \dots & a_p^pa_q^q & \dots & a_n^pa_n^q \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & (a_1^n)^2 & a_1^na_2^n & \dots & a_1^na_n^n & a_2^na_1^n & \dots & a_p^na_q^n & \dots & (a_n^n)^2
\end{pmatrix}$$

Je-li reprezentace zkrácená, řád reprezentující matice je $\frac{n^2+3n}{2}$ a prvku j^2f odpovídá matice v uvedeném tvaru splňující $p<q, m=n-1$:

$$\begin{pmatrix}
a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & a_{11}^1 & a_{22}^1 & \dots & a_{nn}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & \dots & a_{pq}^1 & \dots & a_{mn}^1 \\
a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & a_{11}^2 & a_{22}^2 & \dots & a_{nn}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & \dots & a_{pq}^2 & \dots & a_{mn}^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & a_{11}^n & a_{22}^n & \dots & a_{nn}^n & a_{12}^n & a_{13}^n & \dots & a_{pq}^n & \dots & a_{mn}^n \\
0 & 0 & \dots & 0 & (a_1^1)^2 & (a_2^1)^2 & \dots & (a_n^1)^2 & a_1^1a_2^1 & a_1^1a_3^1 & \dots & a_p^1a_q^1 & \dots & a_m^1a_n^1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & (a_1^2)^2 & (a_2^2)^2 & \dots & (a_n^2)^2 & a_1^2a_2^2 & a_1^2a_3^2 & \dots & a_p^2a_q^2 & \dots & a_m^2a_n^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & (a_1^n)^2 & (a_2^n)^2 & \dots & (a_n^n)^2 & a_1^na_2^n & a_1^na_3^n & \dots & a_p^na_q^n & \dots & a_m^na_n^n \\
0 & 0 & \dots & 0 & 2a_1^1a_1^2 & 2a_2^1a_2^2 & \dots & 2a_n^1a_n^2 & a_1^1a_2^2+a_2^1a_1^2 & a_1^1a_3^2+a_3^1a_1^2 & \dots & a_p^1a_q^2+a_q^1a_p^2 & \dots & a_m^1a_n^2+a_n^1a_m^2 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 2a_1^1a_1^3 & 2a_2^1a_2^3 & \dots & 2a_n^1a_n^3 & a_1^1a_2^3+a_2^1a_1^3 & a_1^1a_3^3+a_3^1a_1^3 & \dots & a_p^1a_q^3+a_q^1a_p^3 & \dots & a_m^1a_n^3+a_n^1a_m^3 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 2a_1^pa_1^q & 2a_2^pa_2^q & \dots & 2a_n^pa_n^q & a_1^pa_2^q+a_2^pa_1^q & a_1^pa_3^q+a_3^pa_1^q & \dots & a_p^pa_q^q+a_q^pa_p^q & \dots & a_m^pa_n^q+a_n^pa_m^q \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 2a_1^ma_1^n & 2a_2^ma_2^n & \dots & 2a_n^ma_n^n & a_1^ma_2^n+a_2^ma_1^n & a_1^ma_3^n+a_3^ma_1^n & \dots & a_p^ma_q^n+a_q^ma_p^n & \dots & a_m^ma_n^n+a_n^ma_m^n
\end{pmatrix}$$

Důkaz. Tvary matic jsou důsledkem zobecnění úvah prezentovaných pro grupy G_2^2 a G_2^3. Řád matice je určen počtem prvků v prvním řádku (matice jsou čtvercové). Souřadnic

$a_1^1, ..., a_n^1$ je v obou případech n. Počet souřadnic a_{jk}^1 je v případě úplné reprezentace n^2 (variace druhé třídy z n prvků s opakováním), celkem tedy n^2+n pro úplnou reprezentaci. Počet souřadnic $a_{jk}^1, (j \leq k)$ je v případě úplné reprezentace $\binom{n+1}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ (kombinace druhé třídy z n prvků s opakováním), celkem tedy $\frac{n^2+3n}{2}$ pro úplnou reprezentaci. $\square$

Poznámka. Limita

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{n^2+3n}{2}}{n^2+n} = \lim_{x\to\infty} \frac{n^2+3n}{2\cdot(n^2+n)} = \lim_{x\to\infty} \frac{n^2\cdot(1+\frac{3}{n})}{n^2\cdot(2+\frac{2}{n})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}$$

nám ukazuje, že pro vysoká n bude řád matice zkrácené reprezentace přibližně poloviční vzhledem k řádu matice úplné reprezentace. Výhoda použití zkrácené reprezentace by ještě víc vynikla u grup G_n^r při zvyšování r.

Vidíme, že v prvních n řádcích se každá ze souřadnic 2-jetu vyskytuje, a to nezávisle na ostatních. Proto jsou obě reprezentace vytvořené tímto způsobem věrné. Navíc platí následující věta.

Věta 6.3. *Nejmenší $k \in \mathbb{N}$, pro něž existuje věrná reprezentace grupy G_n^2 v $GL(k,\mathbb{R})$ je rovno $\frac{n^2+3n}{2}$.*

Důkaz. Věta říká, že zkrácená reprezentace je věrná reprezentace, která má ze všech věrných reprezentací (maticemi s reálnými prvky) nejnižší možný řád. Ve zkrácené reprezentaci jsou umístěny v prvních n řádcích matice všechny nezbytné souřadnice jetu právě jednou a vypuštěním kteréhokoli prvku by došlo k tomu, že dvěma různým jetům by mohla být přiřazena tatáž matice. Navíc, pro zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se v souřadnici c_{jk}^i složeného jetu $j^2h = j^2f \circ j^2g$ po maximálním zjednodušení vyskytne $\frac{n^2+3n}{2}$ sčítanců (každý z prvků 2-jetu $a_j^i, j = \{1, ..., n\}$ a $a_{jk}^i, j = \{1, ..., k\}, k = \{1, ..., n\}$ se musí vyskytnout právě v jednom sčítanci). $\square$

6.4. Podgrupy grupy G_n^2

S odkazem na knihu [17] představíme tvar podgrup jetových grup G_n^2 a Toupinovu podgrupu jako speciální příklad. Poznamenejme, že vektorový prostor je sám grupou (na kterou jsou kladeny další požadavky), a proto jde v následujícím odstavci skutečně o polopřímý součin grup. Připomeňme na příkladu, jak vypadá bilineární forma.

Příklad 6.1. Známým příkladem bilineární formy na $\mathbb{R}^n$ je skalární součin.

Grupu G_n^2 můžeme zkonstruovat jako polopřímý součin grup $GL(n,\mathbb{R}) \cdot_{\ltimes} B^2(n)$, kde $GL(n,\mathbb{R})$ představuje dobře známou obecnou lineární grupu a $B^2(n)$ reálný vektorový prostor symetrických bilineárních forem na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$.

Neutrální prvek tvoří sám triviální podgrupu každé grupy. Neutrálním prvkem grupy $GL(n,\mathbb{R})$ je jednotková matice řádu n. Neutrálním prvkem grupy $B^2(n)$ je nulová bilineární forma. Podgrupu G_n^2 jistě dostaneme, pokud provedeme polopřímý součin neutrálního prvku jedné grupy s celou druhou zbývající grupou.

Označme $\mathbb{A}$ polopřímý součin jednotkové matice s grupou $B^2(n)$ a $\mathbb{B}$ polopřímý součin grupy $GL(n,\mathbb{R})$ s nulovou bilineární formou.

Definice 6.2. Jako *Toupinovu podgrupu* označujeme konjugaci $\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$.

Pokud si s odkazem na předchozí podkapitolu uvědomíme, jak vypadají maticové reprezentace podgrup $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, dokážeme, že grupy matic reprezentujících Toupinovy podgrupy jsou uzavřené, obsahují jednotkovou matici a také že všechny jejich prvky mají inverze.

7. Pár poznámek k aplikacím

Toto krátké pojednání, v němž nastíníme možnosti aplikací uvedené teorie, bylo sestaveno podle úvodu knihy [17].

Hlavní roli v mechanice kontinua hraje *tělo materiálu* $\mathcal{B}$, což je hladká třídimenzionální varieta. *Konfigurace* těla materiálu je zobrazení $\kappa : \mathcal{B} \to \mathbb{E}^3$, kde $\mathbb{E}^3$ značí euklidovský prostor se skalárním součinem. Euklidovský prostor je afinní prostor (je v něm definován pojem bodu) a zde bude navíc doplněn o skalární součin. Zvolením uspořádané báze v $\mathbb{E}^3$ se $\mathbb{E}^3$ ztotožní s $\mathbb{R}^3$. Lokální souřadnice $\kappa_0 : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^3$ nazveme *výchozí konfigurace*.

Jakmile je určena výchozí konfigurace, definuje se *deformace* jako složené zobrazení $\chi : \kappa \circ \kappa_0^{-1}$. Deformace v tomto pojetí je relativní (závisí na výchozí konfiguraci κ_0). Pro souřadnice výchozí konfigurace zavedeme označení X^I $(I = 1, 2, 3)$ a souřadnice prostoru $\mathbb{E}^3$ označíme x^i $(i = 1, 2, 3)$. Deformace χ se pak vyjádří trojicí hladkých funkcí $x^i = \chi^i(X^1, X^2, X^3)$ s hladkými inverzemi. Regulární Jacobiho matice s prvky $F^i_I = \frac{\partial x^i}{\partial X^I}$ vyhodnocená v bodě $\mathbf{X}$ určuje *gradient deformace* v bodě $\mathbf{X}$. Jde o tenzor druhého řádu a označujeme ho $\mathbf{F}$.

Termomechanické chování materiálu se vyjadřuje konstitutivními rovnicemi a závisí na mnoha veličinách, například na napětí, tepelném toku materiálem, vnitřní energii nebo entropii. Obvykle se přijímá několik zjednodušujících předpokladů. Zanedbávají se teplotní závislosti a předpokládá se *lokálnost*, tedy že veličiny mají bodový charakter a že hodnota materiálových charakteristik (například napětí) v bodě $\mathbf{X}$ je určena historií zatěžování v libovolně malém okolí bodu $\mathbf{X}$.

V praktických aplikacích převládají materiály *jednoduché*, u nichž je napětí v bodě určeno pouze vývojem gradientu deformace v bodě. Pokud navíc materiál nevykazuje žádné paměťové vlastnosti (do konstitutivních rovnic vstupují jen momentální hodnoty gradientu deformace), označíme materiál jako *elastický*.

Na těle materiálu $\mathcal{B}$ je definována skalární veličina ψ, která je zobecněním pojmu funkce na varietě a která úzce souvisí s pružnou energií těla materiálu. Pokud ψ závisí pouze na $\mathbf{X}$ a $\mathbf{F}$, materiál se nazývá *hyperelastický*.

Přichází otázka, jak rozhodnout, zda se dva různé body těla materiálu $\mathcal{B}$ skládají z téhož materiálu. I kdyby oba body byly přístupné mikroskopickému pozorování, vyvodit z něj závěr bude obtížné, jednotlivé atomy stejné látky mohou být různě prostorově uspořádány. Proto se pro hyperelastický materiál zavádí pojem materiálového izomorfismu.

Dva různé body $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ se skládají z téhož materiálu, pokud existuje mezi jejich tečnými prostory zobrazení $\mathbf{P}_{12} : T_{X_1}\mathcal{B} \to T_{X_2}\mathcal{B}$ splňující $\psi(\mathbf{F}\mathbf{P}_{12}, \mathbf{X}_1) = \psi(\mathbf{F}, \mathbf{X}_2)$. Taková dvojice bodů se označuje jako *materiálově izomorfní* a lineární transformaci $\mathbf{P}_{12}$ nazýváme *materiálový izomorfismus*. Pokud $\mathbf{P}_{12}$ je materiálový izomorfismus z bodu $\mathbf{X}_1$ do bodu $\mathbf{X}_2$, pak inverzní zobrazení $\mathbf{P}_{12}^{-1}$ je materiálový izomorfismus z bodu $\mathbf{X}_2$ do bodu $\mathbf{X}_1$.

Relace „být materiálově izomorfní" je relací ekvivalence. Splňuje reflexivitu (bod je izomorfní sám se sebou), symetrii (dvojice izomorfních bodů je navzájem izomorfní) i tranzitivitu (složením materiálových izomorfismů $\mathbf{P}_{23} \circ \mathbf{P}_{12}$ je zřejmě izomorfismus $\mathbf{P}_{13}$). Materiál je *uniformní*, pokud jsou všechny jeho body vzájemně izomorfní.

Materiálová symetrie $\mathbf{G}$ v bodě $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{B}$ je množina transformací v okolí tohoto bodu splňujících $\psi(\mathbf{F}\mathbf{G}, \mathbf{X}_0) = \psi(\mathbf{F}, \mathbf{X}_0)$. Množina všech materiálových symetrií v daném bodě tvoří grupu.

8. Závěr

První polovina této práce se věnuje grupám, akcím grup na množinách a Lieovým grupám. Zmiňované pojmy jsem se snažil vhodně ilustrovat na příkladech, z nichž některé jsem sám vytvořil, jiné jsem převzal z citované literatury. Tam, kde to bylo možné, jsem se u převzatých příkladů snažil řešení doplnit nebo inovovat.

Druhá část práce se zabývá jetovými grupami a jejich reprezentacemi. Nejprve je zaveden pojem jetu, od kterého přecházíme k definici jetové grupy. Ty jsou nejprve ilustrovány jednoduchými případy G_1^r a G_n^1. Poté přichází čas na popis grup druhého řádu. Nejprve jsou popsány grupy G_2^2 a G_3^2, následuje zobecnění pro grupu G_n^2. Jsou navrženy dvě možnosti, jak grupu G_n^2 reprezentovat a je vyslovena věta o nejmenším možném řádu matic, kterými lze provést věrnou reprezentaci.

Na práci lze určitě navázat popisem grup G_n^r pro vyšší r, hledáním jejich věrných reprezentací a studiem jejich uplatnění v praxi. Do přílohy přikládám jako námět k pokračování soubor „KamDal“, který naznačuje odvození vztahů pro grupu G_2^3. Také je možné zkoumat další vlastnosti navržených, případně nově objevovaných reprezentací. Jsem si vědom, že zejména propojení první a druhé části mohlo být propracovanější a více pozornosti by si zasloužilo i pojednání o podgrupách grupy G_n^2, časové možnosti však už bohužel více nedovolují.

Literatura

[1] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. Lineární algebra: teoretická část. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2005, 179 s. : il. ; 30 cm. ISBN 80-214-3100-8.

[2] DOŠLÁ, Zuzana a Ondřej DOŠLÝ. Diferenciální počet funkcí více proměnných. 1. dotisk 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2010. 144 s. ISBN 978-80-210-4159-2.

[3] DOUPOVEC, Miroslav. Diferenciální geometrie a trenzorový počet. Brno: PC-DIR, 1999, 83 s. ISBN 80-214-1470-7.

[4] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. Obecná algebra. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o, 2008, 64 stran. ISBN 978-80-214-3794-4

[5] DVOŘÁKOVÁ, Ľubomíra. Lineární algebra 1. V Praze: České vysoké učení technické, 2013. ISBN 978-80-01-05346-1.

[6] MANSFIELD, Elizabeth Louise. A practical guide to the invariant calculus. Vol. 26. Cambridge University Press, 2010.

[7] MACÁLKOVÁ, Lenka. Akce grupy [online]. Brno, 2009 [cit. 2020-06-21]. Dostupné z: `https://is.muni.cz/th/wq55b/`. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Radan Kučera.

[8] DVOŘÁKOVÁ, Ľubomíra. Lineární algebra 2. V Praze: České vysoké učení technické, 2014. ISBN 978-80-01-05441-3.

[9] KOLÁŘ, Ivan, Petr W. MICHOR a Jan SLOVÁK: Natural Operations in Differential Geometry. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993. ISBN 978-3-642-08149-1.

[10] DOUPOVEC, Miroslav. Jety a konexe v diferenciální geometrii. Brno: VUTIUM, 2009. Vědecké spisy Vysokého učení technického v Brně. Habilitační a inaugurační spisy. ISBN 978-80-214-3850-7.

[11] MAREČEK, T. Řízení neholonomních mechanismů. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018, 51 s., [cit. 2020-08-12]. Dostupné z: `https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/113248`. Vedoucí bakalářské práce doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.

[12] FRANCŮ, Jan. Funkcionální analýza I. Druhé doplněné vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o, 2014, 164 stran : ilustrace. ISBN 978-80-214-4920-6.

[13] GREGOROVIČ, Jan. Lieovy grupy malé dimenze [online]. Brno, 2006 [cit. 2020-06-25]. Dostupné z: `https://is.muni.cz/th/i1r5z/`. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Martin Čadek.

[14] BAKER, Andrew [online]. An introduction to matrix groups and their applications. 2000 [cit. 2020-08-27]. Dostupné z `http://www.maths.gla.ac.uk/~ajb/dvi-ps/lie-bern.pdf`

[15] BOBČÍKOVÁ, Jana. Polopřímý součin grup [online]. Brno, 2009 [cit. 2020-09-09]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/swsw5/. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Fakulta informatiky. Vedoucí práce Radan Kučera.

[16] KRUPKA Demeter and M. Krupka, Jets and contact elements 1. Silesian University in Opava, 2000 [cit. 2020-08-20]. Dostupné z http://old.math.slu.cz/MathPubl/DandMKrupka.pdf.

[17] EPSTEIN, Marcelo and ELZANOWSKI, Marek. Material inhomogeneities and their evolution: a geometric approach. Springer Science & Business Media, 2007.

[18] KARPÍŠEK, Zdeněk. Matematika IV: statistika a pravděpodobnost. 4., přeprac. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2014, 171 s. : tabulky, grafy. ISBN 978-80-214-4858-2.

9. Seznam příloh

1. Algoritmizace (příloha v programu Wolfram Mathematica)
2. KamDal (příloha v programu Wolfram Mathematica)
3. TayloruvPolynom (příloha v programu GeoGebra)