Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Využití vektorů v planimetrii na střední škole

Vypracoval:	**Pavel Hlaváček**
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	Fyzika - Matematika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
Termín odevzdání práce:	30. duben 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Jaroslava Švrčka, CSc., a že jsem použil zdrojů, které uvádím v seznamu použité literatury.

V Olomouci dne 18. dubna 2013

. . . .

Pavel Hlaváček

Poděkování

Děkuji vedoucímu bakalářské práce RNDr. Jaroslavovi Švrčkovi, CSc., za cenné rady a připomínky k bakalářské práci a typografickému zpracování matematického textu.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Pavel Hlaváček
Název práce	Využití vektorů v planimetrii na střední škole
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
Rok obhajoby práce	2013
Abstrakt	Bakalářská práce je zaměřena na studium netradičního využití vektorů v planimetrii především na střední škole. Bakalářská práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole jsou popsány základní definice a vlastnosti vektorů v rovině. V druhé a třetí kapitole jsou úlohy, které jsou řešeny užitím vektorů a skalárního součinu. V poslední kapitole jsou úlohy k samostatnému studiu.
Klíčová slova	vektor, skalární součin, trojúhelník, rovnoběžník
Počet stran	35
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Pavel Hlaváček
Title	Improvement of vectors in the plane geometry on grammar schools
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
The year of presentation	2013
Abstract	The bachelor thesis is focused on the study of non-traditional improvement of vector in plane geometry especially on the grammar school. The bachelor thesis is divided in the three chapter. In the first chapter are described the elementary definitions and properties of vector in plane geometry. In the second and third chapter are exercises, that are solved by using vector and dot product. In the last chapter are exercises to independent study.
Keywords	vector, scalar (inner) product, triangle, parallelogram
Number of pages	35
Number of appendices	0
Language	czech

Obsah

Úvod **8**

1 Základní poznatky o vektorech **9**
1.1 Vektor a jeho velikost . . . 9
1.2 Operace s vektory . . . 10
1.3 Vztahy mezi vektory v trojúhelníku . . . 14

2 Užití vektorů v úlohách o trojúhelníku **18**
2.1 Základní úlohy . . . 18
2.2 Skalární součin vektorů v úlohách o trojúhelníku . . . 23

3 Vektory v úlohách o rovnoběžníku **28**
3.1 Základní úlohy . . . 28
3.2 Skalární součin v úlohách o rovnoběžníku . . . 29

4 Soubor neřešených úloh **31**

Závěr **34**

Literatura **35**

Použité označení

Symbol	Význam
$\overrightarrow{AB}$	vektor s počátečním bodem A a koncovým bodem B
(x, y)	uspořádaná dvojice reálných čísel
$\vec{a}$	označení vektoru
$-\vec{a}$	opačný vektor
$\vec{o} = (0; 0)$	nulový vektor
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$, $\lvert\vec{a}\rvert$	velikost vektoru
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	skalární součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$
O_{xy}	kartézská soustava souřadnic s počátkem v bodě O [0; 0]
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	množina nezáporných reálných čísel
$\langle a, b\rangle$	uzavřený interval v mezích od a do b
(a, b)	otevřený interval v mezích od a do b
T	těžiště trojúhelníka
T_a, T_b, T_c	středy stran BC, CA, AB
V	ortocentrum (průsečík výšek) trojúhelníka
V_a, V_b, V_c	paty výšek z vrcholů A, B, C
v_a, v_b, v_c	délky úseček AV_a, BV_b, CV_c
O	průsečík os stran trojúhelníka (střed kružnice opsané)
O_a, O_b, O_c	průsečík os stran trojúhelníka se stranami BC, CA, AB

Úvod

Cílem této bakalářské práce je poukázat na využití vektorů v rovině při řešení planimetrických úloh. Důkazy pomocí vektorů jsou velmi názorné a po potřebném seznámení se s danou problematikou jsou mnohdy snazší než důkazy syntetické. Vektory přináší velmi účinný nástroj pro důkazy nejen ve středoškolské matematice. Žáci často nedisponují znalostmi z různých oblastí matematiky, a proto pro ně mohou být matematické důkazy obtížně pochopitelné.

Užití vektorů v planimetrických úlohách není běžným a příliš častým postupem vyskytující se na středních školách. Ve středoškolské matematice se v současnosti vyučují vektory zejména k využití v analytické geometrii. V matematických olympiádách a jiných soutěžích se úlohy využívající vektory vyskytují pouze v omezené míře. Přitom vektory mnohdy vedou k jednoduššímu řešení zadaných matematických problémů. V této práci budeme vždy využívat vektory k řešení zadaných úloh. Je velmi důležité si uvědomit, že existují i jiná řešení nevyužívající vektory.

Vektory jsou zavedeny pomocí orientované úsečky. Stejný způsob zavedení vektorů lze najít v [2] a [3]. Jiný možný způsob zavedení vektorů je pomocí vektorových prostorů viz [11] a [12]. Definování vektorů pomocí orientovaných úseček je běžné ve středoškolské matematice. Ve vyšší matematice jsou vektory obvykle zaváděny jako prvky vektorového prostoru.

V první kapitole jsou uvedeny základní informace o vektorech. Dále bude popsán skalární součin vektorů a některé další užitečné poznatky o vektorech, které můžeme aplikovat v navazujících úlohách.

Druhá kapitola je věnována úlohám o trojúhelníku, které jsou řešené pomocí vektorů a užitím skalárního součinu vektorů. V úlohách dokážeme některé základní vlastnosti trojúhelníku.

O rovnoběžnících pojednává čtvrtá kapitola této práce. Opět si zde dokážeme některé základní vlastnosti.

V poslední kapitole jsou uvedeny neřešené úlohy, které jsou určeny k samostatnému procvičení. Nejprve jsou to úlohy věnované převážně práci s vektory. Poté jsou zde uvedeny úlohy zabývající se trojúhelníky a nakonec jsou uvedeny úlohy zabývající se vlastnostmi rovnoběžníků.

Kapitola 1

Základní poznatky o vektorech

Pod pojmem vektor budeme v této práci rozumět dvojrozměrný vektor, který chápeme jako uspořádanou dvojici reálných čísel. V první kapitole nejprve uvedeme základní poznatky o vektorech v rovině, jež budeme dále využívat v celé práci. Kvůli častému využívání při řešení úloh pomocí vektorů jsou do první kapitoly zahrnuty i základní vztahy mezi vektory v trojúhelníku.

1.1 Vektor a jeho velikost

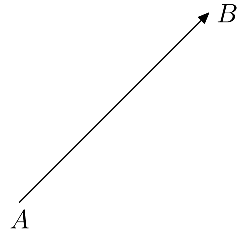
V první části zavedeme kartézskou soustavu souřadnic, kterou budeme používat v celé práci. Poté definujeme vektor za pomoci orientované úsečky a nakonec definujeme velikost vektoru.

Definice 1.1.1

Kartézskou soustavou souřadnic O_{xy} rozumíme dvojici navzájem kolmých číselných os x, y v rovině. Jejich průsečík značíme O, kde $O[0;0]$.

Definice 1.1.2

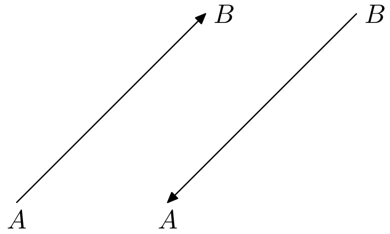
Orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ rozumíme takovou úsečku AB, kde A je počátečním a B je koncovým bodem. Značíme ji se šipkou, která směřuje podle obr. 1.1 od počátečního bodu ke koncovému bodu.



Obr. 1.1

Definice 1.1.3

Množinu všech orientovaných úseček, které mají stejnou délku a stejný směr, nazýváme *vektor*. Nechť A je počáteční a B je koncový bod, potom $\overrightarrow{AB}$ označuje vektor určený těmito body, případně označujeme vektor pomocí jediného symbolu $\vec{a}$. Je-li vektor vázán k jednomu bodu, nazýváme jej vázaný vektor. Není-li vázán k jednomu bodu, nazýváme jej volný vektor. Vektor, u kterého splývá počáteční bod A s koncovým bodem B, nazýváme *nulový vektor*. Nulový vektor značíme $\vec{o}$ (resp. $(0;0)$). *Opačným* vektorem k vektoru $\overrightarrow{AB}$ (příp. $\vec{a}$) rozumíme vektor $\overrightarrow{BA}$ (příp. $-\vec{a}$), viz obr. 1. 2.



Obr. 1.2

Definice 1.1.4

Nechť $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$ jsou body v rovině O_{xy}. Vektor $\overrightarrow{AB}$ definujeme jako rozdíl koncového bodu B a počátečního bodu A, tedy $\overrightarrow{AB} = B - A$. Souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB}$ zapíšeme jako uspořádanou dvojici reálných čísel $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Definice 1.1.5

Velikostí vektoru $\overrightarrow{AB}$ (příp. $\vec{a}$) rozumíme délku úsečky AB. Velikost vektoru značíme $|\overrightarrow{AB}|$ (příp. $|\vec{a}|$), přičemž pro $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$ platí

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2},$$

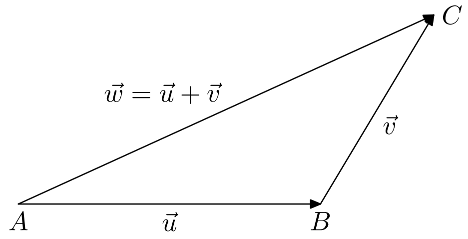
kde $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$.
Jednotkovým vektorem rozumíme každý vektor, který má velikost 1.

1.2 Operace s vektory

Dále zavedeme základní operace s vektory.

Definice 1.2.1

Součtem vektorů $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ a rozumíme vektor $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, což zapisujeme $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Sčítání vektorů provádíme po složkách, tj. pro libovolné dva vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ platí $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$. Na obr. 1.3 vidíme grafické znázornění součtu dvou vektorů.



Obr. 1.3

Věta 1.2.1 (vlastnosti součtu vektorů)

Pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ platí

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativní zákon)

b) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociativní zákon)

c) $\vec{a} = \vec{a} + \vec{o}$

d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$

Důkaz.

a) Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Potom z definice součtu vektorů a z komutativity sčítání reálných čísel plyne

$$\vec{a} + \vec{b} = \big(a_1 + b_1, a_2 + b_2\big) = \big(b_1 + a_1, b_2 + a_2\big) = \vec{b} + \vec{a},$$

čímž jsme uvedenou rovnost dokázali.

b) Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ a $\vec{c} = (c_1, c_2)$. Potom užitím definice součtu vektorů a asociativity reálných čísel vzhledem ke sčítání získáme

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \big(a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)\big) =$$

$$= \big((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2\big) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c},$$

což jsme měli dokázat.

c) Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{o} = (0; 0)$. Z definice součtu dostáváme

$$\vec{a} + \vec{o} = (a_1 + 0, a_2 + 0) = (a_1, a_2) = \vec{a},$$

z čehož plyne uvedená rovnost.

d) Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$. Z definice součtu opět dostáváme

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \big(a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2)\big) = (0; 0) = \vec{o},$$

což jsme měli dokázat.

Poznámka. Vektory tvoří vzhledem k výše definovanému sčítání vektorů *abelovskou grupu.*

Definice 1.2.2

Součinem vektoru $\vec{a}$ a reálného čísla c rozumíme vektor, který má délku $|\vec{a}| \cdot |c|$ a buď stejný směr jako $\vec{a}$ pokud $c > 0$, anebo opačný směr pokud $c < 0$. U součinu vektoru $\vec{a}$ a reálného čísla c vynásobíme jednotlivé složky vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2)$ reálným číslem c, tj. $c \cdot \vec{a} = (ca_1, ca_2)$. Pro součin reálného čísla $c = 0$ a vektoru $\vec{a}$, tj $0 \cdot \vec{a}$, směr výsledného vektoru nedefinujeme.

Věta 1.2.2 (vlastnosti násobení vektorů reálným číslem)

Nechť $\vec{a}, \vec{b}$ jsou libovolné vektory a dále nechť c, d jsou libovolná reálná čísla. Potom pro každé $c, d \in \mathbb{R}$ platí

a) $c \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = c \cdot \vec{a} + c \cdot \vec{b}$ (distributivita)

b) $(c + d) \cdot \vec{a} = c \cdot \vec{a} + d \cdot \vec{a}$

c) $c \cdot (d \cdot \vec{a}) = (cd) \cdot \vec{a}$

d) $-(c \cdot \vec{a}) = (-c) \cdot \vec{a} = c \cdot (-\vec{a})$

e) $0 \cdot \vec{a} = \vec{o} = c \cdot \vec{o}$

Důkaz.

a) Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ jsou libovolné vektory a $c \in \mathbb{R}$. Pak vzhledem k definici součtu vektorů a definici násobení vektoru reálným číslem platí

$$c \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = c \cdot (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2) =$$

$$= (ca_1, ca_2) + (cb_1, cb_2) = c \cdot \vec{a} + c \cdot \vec{b},$$

což jsme měli dokázat.

b) Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$ je libovolný vektor a dále nechť $c, d \in \mathbb{R}$. Potom vzhledem k definici násobení vektoru reálným číslem, součtu dvou vektorů a vlastnostem reálných čísel platí

$$(c + d) \cdot \vec{a} = \big((c + d) \cdot a_1, (c + d) \cdot a_2\big) =$$

$$= (ca_1 + da_1, ca_2 + da_2) = (ca_1, ca_2) + (da_1, da_2) = c \cdot \vec{a} + d \cdot \vec{a},$$

což bylo třeba dokázat.

c) Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$ je libovolný vektor a $c, d \in \mathbb{R}$. Pak vzhledem k definici násobení vektoru reálným číslem platí

$$c \cdot (d \cdot \vec{a}) = c \cdot (da_1, da_2) = (cda_1, cda_2) = (cd) \cdot \vec{a},$$

což dokazuje platnost tvrzení.

d) Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$ je libovolný vektor a $c \in \mathbb{R}$. Potom vzhledem k definici násobení vektoru reálným číslem a komutativity reálných čísel vzhledem k násobení platí

$$-(c \cdot \vec{a}) = -1 \cdot (ca_1, ca_2) = (-ca_1, -ca_2) = (-c) \cdot \vec{a} = c \cdot (-1) \cdot \vec{a} = c \cdot (-\vec{a}),$$

což dokazuje jednotlivé rovnosti.

e) $\vec{a} = (a_1, a_2)$ je libovolný vektor a $c \in \mathbb{R}$. Pak s ohledem na definici násobení vektoru reálným číslem snadno zjistíme, že platí

$$0 \cdot \vec{a} = (0a_1, 0a_2) = \vec{o} = (0, 0) = (c \cdot 0, c \cdot 0) = c \cdot \vec{o}.$$

Definice 1.2.3

Skalárním součinem dvou vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ rozumíme číslo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

kde φ je úhel sevřený vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$. Skalární součin značíme $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Poznámka 1. Protože platí $(\vec{a})^2 = a_1^2 + a_2^2$ je $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$.

Poznámka 2. Místo $\vec{a} \cdot \vec{a}$ často píšeme $(\vec{a})^2$.

Věta 1.2.3 (vlastnosti skalárního součinu)

Pro libovolné tři nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ platí

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (komutativní zákon)

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (distributivní zákon)

c) $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

d) Pro $\vec{a} \parallel \vec{b}$ platí buď $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, nebo $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Důkaz.

a) Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$. A vzhledem ke komutativitě násobení reálných čísel platí

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

což bylo třeba dokázat.

b) Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ a $\vec{c} = (c_1, c_2)$. Vzhledem k definici součtu dvou vektorů a distributivity násobení vzhledem k sčítání reálných čísel platí

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2) = (a_1 \cdot (b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2)) =$$

$$= (a_1 b_1 + a_1 c_1, a_2 b_2 + a_2 c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2) + (a_1 c_1, a_2 c_2) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c},$$

z čehož platí uvedená rovnost.

c) 1) Nechť $\vec{a} \perp \vec{b}$, potom $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Pro $\vec{a} \perp \vec{b}$ je úhel mezi vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ roven $\frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Vzhledem k rovnosti $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ získáme po dosazení úhlu rovnost $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
2) Nechť $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, potom $\vec{a} \perp \vec{b}$. Podle definice skalárního součinu platí rovnost $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, ale protože $\vec{a}$, $\vec{b}$ jsou nenulové vektory, musí výraz $\cos\varphi$ být roven nule, což platí pro úhel $\frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

d) Když jsou dva vektory rovnoběžné, musí úhel nabývat hodnot $\pi + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Proto $\cos\varphi$ nabývá hodnot ± 1. Tedy po dosazení získáme rovnost $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

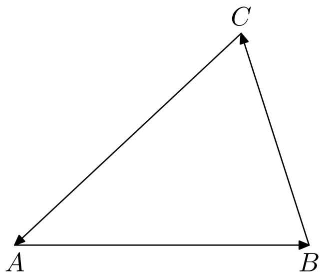
1.3 Vztahy mezi vektory v trojúhelníku

V této části jsou uvedeny některé důležité vztahy mezi vektory v trojúhelníku, které budeme používat v navazujících úlohách.

Věta 1.3.1

V libovolném trojúhelníku ABC platí

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{o}.$$



Obr. 1.4

Důkaz.
Podle obr. 1.4 platí

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

S ohledem na rovnost $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ získáme po snadné úpravě rovnost

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{o},$$

což jsme chtěli dokázat.

Věta 1.3.2 (o těžnici trojúhelníku)

Nechť ABC je libovolný trojúhelník a AT_a je těžnice trojúhelníku ABC. Potom pro vektor $\overrightarrow{AT_a}$ platí

$$\overrightarrow{AT_a} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Důkaz.
Podle obr. 1.5 platí

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT_a} &= \overrightarrow{AT_a},\\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CT_a} &= \overrightarrow{AT_a}.\end{aligned}$$

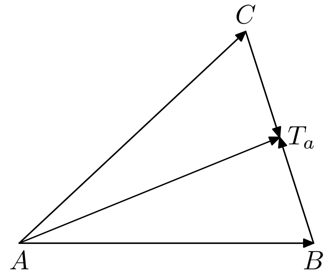
Sečtením předchozích dvou rovností získáme

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BT_a} + \overrightarrow{CT_a} = 2\,\overrightarrow{AT_a}$$

a dále s ohledem na rovnost $\overrightarrow{BT_a} = -\overrightarrow{CT_a}$ a provedením elementárních úprav obdržíme

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AT_a},$$

čímž je věta dokázána.



Obr. 1.5

Poznámka. Analogické vztahy obdržíme i pro $\overrightarrow{BT_B}$ a $\overrightarrow{CT_C}$.

Věta 1.3.3

Nechť ABC je libovolný trojúhelník a nechť úsečka BC je rozdělena bodem P na dvě části, pro něž platí $\overrightarrow{BP} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, kde $k \in (0, 1)$. Potom platí

$$\overrightarrow{AP} = (1-k) \cdot \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AC}.$$

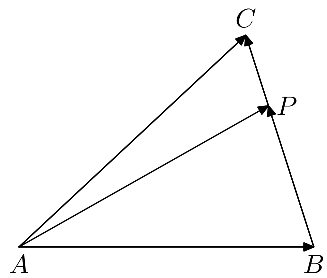
Důkaz.
Z obr. 1.6 lze vidět, že platí

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= k\,\overrightarrow{BC},\\ \overrightarrow{PC} &= (1-k)\,\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Dále je patrné, že

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{BC}, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + (1-k)\,\overrightarrow{CB}. \tag{2}$$



Obr. 1.6

Nyní rovnici (1) vynásobíme $(1-k)$ a rovnici (2) číslem k. Po následném sečtení obou rovnic dostaneme

$$(1-k)\,\overrightarrow{AP} + k\,\overrightarrow{AP} = (1-k)\,\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{AC} + k\,(1-k)\,\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}\right),$$

přičemž výraz $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}$ je roven nule. Provedením několika snadných úprav obdržíme

$$\overrightarrow{AP} = (1-k)\cdot\overrightarrow{AB} + k\cdot\overrightarrow{AC},$$

což bylo tvrzení věty 1.6.

Věta 1.3.4 (o těžišti trojúhelníku)

Nechť je dán libovolný trojúhelník ABC a libovolný bod P ležící v rovině trojúhelníku. Potom pro těžiště T trojúhelníku ABC platí

$$\overrightarrow{PT} = \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right).$$

Důkaz.

S ohledem na větu 1.6 a obr. 1.7 můžeme psát

$$\overrightarrow{PT} = (1-k)\cdot\overrightarrow{PA} + k\cdot\overrightarrow{PT_a},$$

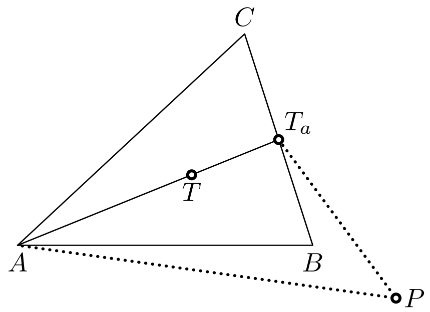
přičemž $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AT_a}$, protože těžiště leží ve $\frac{2}{3}$ vzdálenosti vrcholu A od strany BC. Dále užitím věty 1.5 můžeme rozložit vektor $\overrightarrow{PT_a}$ na součet dvou vektorů, tedy $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$. Po dosazení $k = \frac{2}{3}$ a $\overrightarrow{PT_a} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$ do původní rovnosti obdržíme

$$\overrightarrow{PT} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)\right),$$

z čehož vyplývá rovnost

$$\overrightarrow{PT} = \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right),$$

kterou jsme měli dokázat.



Obr. 1.7

Důsledek. Vzhledem k libovolnosti volby bodu P se ukazuje, že těžiště lze zjistit stejným způsobem nezávisle na volbě počátku souřadné soustavy.

Kapitola 2

Užití vektorů v úlohách o trojúhelníku

V druhé kapitole se budeme zabývat vektory v nejjednodušším rovinném útvaru, trojúhelníku.

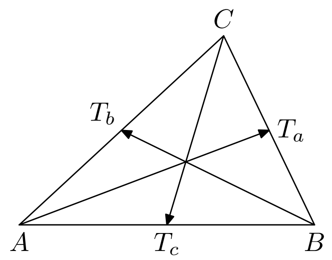
2.1 Základní úlohy

V této části si dokážeme pomocí vektorů některé vlastnosti trojúhelníků. Také se budeme věnovat základním úloham, které jsou vhodné pro použití vektorů.

Úloha 2.1.1

Dokažte, že z těžnic libovolného trojúhelníku ABC lze sestrojit trojúhelník .

Důkaz.



Obr. 2.1

Z obrázku 2.1 a díky větě o těžnici v trojúhelníku je patrné, že platí

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AT_a}\,,$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BT_b}\,,$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CT_c}\,.$$

Sečtením předcházejících tří rovností získáme

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{AT_a}+\overrightarrow{BT_b}+\overrightarrow{CT_c}.$$

S ohledem na rovnosti $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$ a $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$ obdržíme

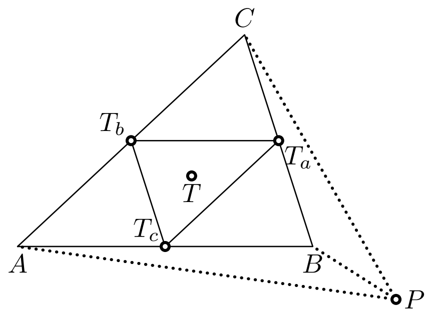
$$\overrightarrow{AT_a}+\overrightarrow{BT_b}+\overrightarrow{CT_c}=\overrightarrow{o},$$

což dokazuje, že z těžnic trojúhelníku ABC lze vytvořit trojúhelník.

Úloha 2.1.2

Dokažte, že trojúhelník ABC má stejné těžiště jako jeho příčkový trojúhelník.

Důkaz.



Obr. 2.2

Pro libovolný bod P v rovině trojúhelníku ABC platí

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=\overrightarrow{PT_a},$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)=\overrightarrow{PT_b},$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)=\overrightarrow{PT_c}.$$

Sečtením předchozích tří rovnic a vynásobením $\frac{1}{3}$ získáme rovnost

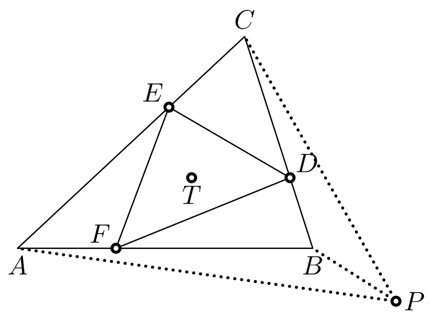
$$\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PT_a}+\overrightarrow{PT_b}+\overrightarrow{PT_c}\right)=\overrightarrow{PT},$$

která nám vyjadřuje, že těžiště T je určeno stejným vektorem $\overrightarrow{PT}$ pro trojúhelníky ABC a $T_aT_bT_c$, tedy trojúhelníky ABC a $T_aT_bT_c$ mají shodné těžiště.

Úloha 2.1.3

Pro body D, E, F po řadě stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC platí rovnosti $|BC|=3\,|BD|$, $|CA|=3\,|CE|$, $|AB|=3\,|AF|$. Dokažte, že trojúhelníky ABC a DEF mají stejné těžiště.

Důkaz.



Obr. 2.3

Podobně jako v úloze 2.1.2 je P libovolný bod v rovině trojúhelníku. Potom s ohledem na větu 1.6 a obr. 2.3 platí rovnosti

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD},$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PE},$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PF}.$$

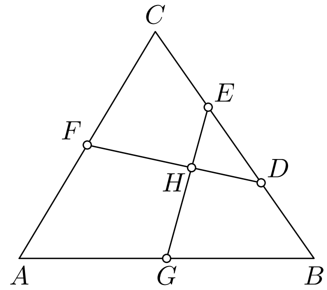
Vydělením třemi a sečtením předchozích rovnic získáme

$$\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}\right),$$

což obdobně jako v předchozím příkladě dokazuje, že trojúhelníky ABC a DEF mají stejné těžiště.

Úloha 2.1.4

V trojúhelníku ABC (obr. 2.4) jsou dány body D, E, které dělí úsečku BC na třetiny a bod E leži mezi body C a D. Dále bod F je střed úsečky AC a bod G je střed úsečky AB. Bod H je průsečík úseček EG a DF. Najděte poměr $|EH| : |HG|$.



Obr. 2.4

Řešení.
S ohledem na obr. 2.4 platí

$$\overrightarrow{AG} + a \cdot \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AF} + b \cdot \overrightarrow{FD},$$

kde a, $b \in \mathbb{R}$. Nyní vyjádříme každý z vektorů v předchozí rovnici za pomocí vektoru $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$, přičemž využijeme i vlastnosti opačného vektoru. Platí

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB},\\
\overrightarrow{GE} &= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BC} =\\
&= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{6}\,\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC},\\
\overrightarrow{AF} &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB},\\
\overrightarrow{FD} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC} =\\
&= -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{6}\,\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Dosazením těchto vztahů do původní rovnice získáme

$$\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + a\left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} + b\left(-\frac{1}{6}\,\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}\right),$$

což po úpravě dává

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\,a\right)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\,a\,\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\,b\,\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\,b\right)\overrightarrow{AC}.$$

Poslední vztah vede k řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých a, b

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\,a &= \frac{2}{3}\,b,\\
\frac{2}{3}\,a &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\,b,
\end{aligned}$$

což je ekvivalentní se soustavou dvou lineárních rovnic o neznámých a, b

$$a + 4b = 3,$$

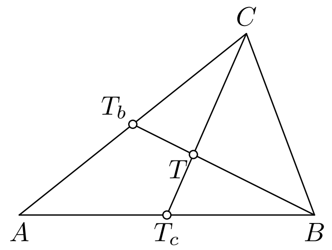
$$4a + b = 3.$$

Jejím řešením je $a = b = \frac{3}{5}$. Odtud vzhledem k způsobu zavedení a plyne, že $|EH| : |HG| = 2 : 3$.

Úloha 2.1.5

Nechť ABC je trojúhelník, T jeho těžiště a T_c, T_b paty příslušných těžnic. Určete poměr $|T_cT| : |TC|$.

Řešení.



Obr. 2.5

Z obr. 2.5 je patrné, že platí

$$\overrightarrow{AT_c} + a \cdot \overrightarrow{T_cC} = \overrightarrow{AT_b} + b \cdot \overrightarrow{T_bB},$$

kde a, $b \in \mathbb{R}$. Podobně jako v předcházející úloze si vyjádříme jednotlivé vektory z předchozí rovnice za pomocí vektoru $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AT_c} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \\
\overrightarrow{T_cC} &= \overrightarrow{T_cB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \\
&= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \\
\overrightarrow{AT_b} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \\
\overrightarrow{T_bB} &= \overrightarrow{T_bA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Po dosazení jednotlivých vztahů do původní rovnice obdržíme

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + a\left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + b\left(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right),$$

což po úpravě dává

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a\right)\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b\right)\overrightarrow{AC}.$$

Tato rovnice vede k řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou proměnných a, b

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a = b,$$

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b,$$

což je ekvivalentní k soustavě rovnic

$$\begin{aligned}
a + 2b &= 1, \\
2a + b &= 1.
\end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic je $a = b = \frac{1}{3}$. S ohledem na předchozí zavedení a víme, že $|T_cT| : |TC| = 1 : 2$.

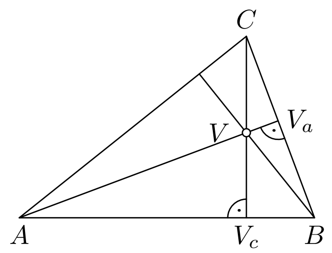
2.2 Skalární součin vektorů v úlohách o trojúhelníku

Skalárního součinu vektorů v úlohách o trojúhelníku budeme především využívat v úlohách, kde jsou pravé úhly. Svírají-li vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ pravý úhel pak platí $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, což nám často pomůže k řešení zadané úlohy.

Úloha 2.2.1

Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC se výšky protínají v jednom bodě.

Důkaz.



Obr. 2.6

Z obr. 2.6 je patrné, že platí

$$\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{VC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \tag{2}$$

Dále je z obr. jasné, že

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{VC} - \overrightarrow{VB}, \tag{3}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VA}. \tag{4}$$

Dosazení (3), (4) do (1), (2) získáme rovnosti

$$\overrightarrow{VA} \cdot \left(\overrightarrow{VC} - \overrightarrow{VB}\right) = 0,$$

$$\overrightarrow{VC} \cdot \left(\overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VA}\right) = 0.$$

Sečtením předchozích dvou rovnic obdržíme

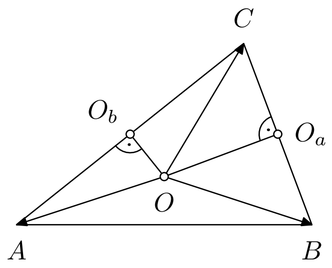
$$\overrightarrow{VC} \cdot \overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{VB} = \overrightarrow{VB} \cdot \left(\overrightarrow{VC} - \overrightarrow{VA}\right) = 0.$$

Z této rovnice vidíme, že vektory $\overrightarrow{VB}$ a $\overrightarrow{AC}$ jsou na sebe kolmé, tudíž vektor $\overrightarrow{VB}$ leží na výšce BV_b. Z toho plyne, že se výšky trojúhelníku ABC protínají v jednom bodě.

Úloha 2.2.2

Dokažte, že vrcholy trojúhelníku ABC jsou od průsečíku os stran stejně vzdálené.

Důkaz.



Obr. 2.7

S ohledem na obr. 2.7 platí

$$\overrightarrow{OO_a} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OO_b} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \tag{2}$$

Nyní si jednotlivé vektory vyjádříme za pomocí vektorů $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, a $\overrightarrow{OC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OO_a} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right),\\
\overrightarrow{OO_b} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right),\\
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA},\\
\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}.
\end{aligned}$$

Po dosazení předchozích čtyř vztahů do (1) a (2) obdržíme

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) = 0.$$

Po provedení snadných úprav dostaneme

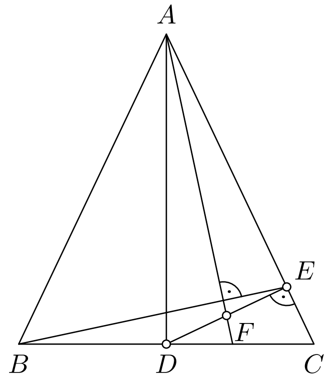
$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = 0,$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = 0.$$

Z těchto rovnic vyplývá, že $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, tedy pro délky úseček OA, OB, OC platí $|OA| = |OB| = |OC|$.

Úloha 2.2.3

V trojúhelníku ABC (obr.2.8) je D střed úsečky BC, $|AB| = |AC|$, E je pata kolmice vedená z bodu D k úsečce AC a bod F je střed úsečky DE. Dokažte, že úsečka AF je kolmá k úsečce BE.



Obr. 2.8

Důkaz.

Pro dokázání tvrzení je nutné a postačující, abychom ukázali, že $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$. Tedy

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}\right)$$

$$= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DE}.$$

Dále můžeme výraz upravit, uvědomíme-li si, že $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$. Současně využijeme rovnosti $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$. Proto

$$= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}\right) \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DE}$$

$$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DE}.$$

Nyní si opět uvědomíme, že $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ a zbývající vektory nahradíme za pomocí vektorů $\overrightarrow{DE}$ a $\overrightarrow{DC}$. Potom máme

$$= \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} - \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}}{2} - \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DE}}{2} = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}}{2} - \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DE}}{2}$$

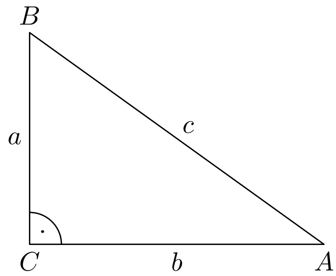
$$= \overrightarrow{DE} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DE}}{2}\right) = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EC}}{2} = 0.$$

Tím jsme dokázali, že úsečka AF je kolmá k úsečce BE.

Úloha 2.2.4 (Pythagorova věta)

Nechť v pravoúhlém trojúhelníku ABC je c délka přepony, a, b délky jeho odvěsen. Pak platí $a^2 + b^2 = c^2$. Dokažte.

Důkaz.



Obr. 2.8

S ohledem na obr. 2.8 platí

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0.$$

Dosazením vztahů

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA},$$

do předchozí rovnice obdržíme rovnost

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = 0,$$

která po snadných úpravách a užitím vztahu $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ přechází v rovnost

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{CA} \cdot \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

Použitím rovností $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ získáme

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + |\overrightarrow{CB}|^2.$$

Protože $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ dostaneme

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2,$$

z čehož plyne

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Tím jsme dokázali platnost Pythagorovy věty.

Jiný důkaz.
Z obr. 2.8 platí

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} &= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 + 2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} + |\overrightarrow{CB}|^2.\end{aligned}$$

Vzhledem k rovnosti $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ dostaneme

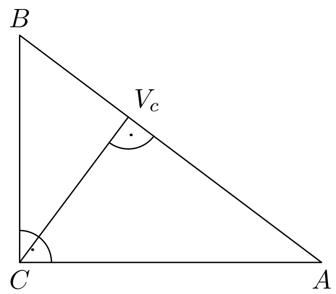
$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2,$$

což je po přeznačení shodné s tvrzením Pythagorovy věty.

Úloha 2.2.5 (Eukleidova věta o odvěsně)

V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme v_c výšku z vrcholu C na přeponu AB, patu kolmice v_c označíme V_c. Dokažte, že při obvyklém označení platí platí $b^2 = c\cdot c_b$.

Důkaz.



Obr. 2.9

Podle obr. 2.9 platí

$$\overrightarrow{CV_c}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.$$

Dosazením vztahu $\overrightarrow{CV_c} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AV_c}$ obdržíme rovnost

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AV_c}\cdot\overrightarrow{AB} = 0,$$

což s ohledem na rovnost $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ můžeme přepsat na

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AV_c}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.$$

S přihlédnutím k $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ a $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ a dále k $\overrightarrow{AV_c}\cdot\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AV_c}|\cdot|\overrightarrow{AB}|$ můžeme po snadných úpravách psát

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AV_c}|\cdot|\overrightarrow{AB}|,$$

tedy $b^2 = c\cdot c_b$, což jsme chtěli dokázat.

Kapitola 3

Vektory v úlohách o rovnoběžníku

V této kapitole se budeme věnovat úlohám o rovnoběžníku. Úlohy z této kapitole jsou podobné způsobem řešení jako v úlohách o trojúhelníku.

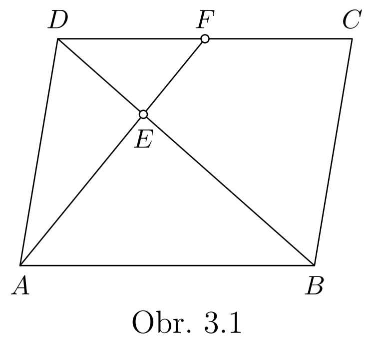
3.1 Základní úlohy

Obdobně jako v předchozí kapitole se v této části budeme věnovat snadným, ale důležitým úlohám.

Úloha 3.1.1

Nechť $ABCD$ je rovnoběžník, F je střed úsečky CD a bod E je průsečík úhlopříčky BD s úsečkou AF. Dokažte, že bod E dělí úhlopříčku BD v poměru 1:2.

Důkaz.



Obr. 3.1

Z obr. 3.1 je patrné, že platí

$$a \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{BD},$$

kde a, $b \in \mathbb{R}$.

Nyní si vektory z předchozí rovnice vyjádříme za pomoci vektoru $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\\ \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice obdržíme

$$a\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB} + b\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right),$$

což po snadných úpravách dává

$$\frac{1}{2}a \cdot \overrightarrow{AB} + a \cdot \overrightarrow{AD} = (1-b) \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Tento vztah vede k řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a, b, tj.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a &= 1 - b,\\ a &= b.\end{aligned}$$

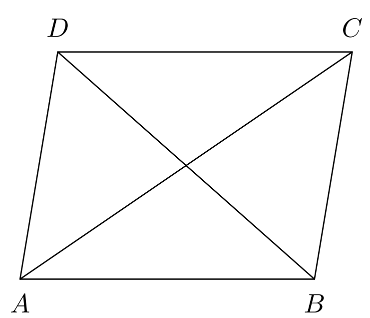
Řešením soustavy rovnic je $a = b = \frac{2}{3}$, z čehož vzhledem ke způsobu zavedení b získáváme poměr 1 : 2.

3.2 Skalární součin v úlohách o rovnoběžníku

Skalárního součinu opět velmi často používáme u úloh, ve kterých je pravý úhel.

Úloha 3.2

Dokažte, že úhlopříčky v rovnoběžníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé tehdy a jen tehdy, když strany rovnoběžníku $ABCD$ mají stejnou délku.
Důkaz.



Obr. 3.2

Nejprve určíme skalární součin $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$ a poté zjistíme, jaké podmínky musí jednotlivé vektory splňovat, aby tento skalární součin dvou vektorů byl roven nule (tedy, aby vektory byly navzájem kolmé). Vektory $\overrightarrow{BD}$ a $\overrightarrow{AC}$ s ohledem na obr. 3.2 vyjádříme pomocí vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$. Tedy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}, \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice a s ohledem na rovnost $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) = \\ &= \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 - \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = |\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{AB}|. \end{aligned}$$

Platí tudíž $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $|AD| = |AB|$. To znamená, že strany jsou shodné. Tedy úhlopříčky rovnoběžníku jsou navzájem kolmé tehdy a jen tehdy, je-li daný rovnoběžník kosočtverec.

Kapitola 4

Soubor neřešených úloh

Poslední kapitola poskytuje dostatečné množství neřešených úloh pro samostatné procvičení.

Úloha 4.1 [2]

Dokažte, že pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ platí

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}.$$

Úloha 4.2 [10]

Dokažte, že pro libovolné dva vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2\,(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|).$$

Úloha 4.3 [10]

Dokažte, že pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ a libovolná reálná čísla k, l platí

$$(k\cdot\vec{a}+l\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = k\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}+l\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Úloha 4.4 [10]

Dokažte, že jestliže jsou vektory $\vec{a}+\vec{b}$ a $\vec{a}-\vec{b}$ navzájem kolmé, potom $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Úloha 4.5

Dokažte, že pro libovolné dva vektory $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ a libovolné reálné číslo k platí

$$(ka_1, ka_2)\cdot(b_1, b_2) = (a_1, a_2)\cdot(kb_1, kb_2) = k\cdot(a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2).$$

Úloha 4.6 [2]

Nechť A, B, C, D jsou libovolné body v rovině. Dokažte, že platí

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Úloha 4.7

V trojúhelníku ABC je příčkový trojúhelník DEF, kde body D, E, F, jsou po řadě středy stran AB, BC, AC. Určete koeficient podobnosti stran BC a DF.

Úloha 4.8 [10]

V trojúhelníku ABC je bod O střed kružnice opsané a platí $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{o}$. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnostranný.

Úloha 4.9 [8]

V trojúhelníku ABC je T jeho těžiště. Dokažte, že platí

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{o}.$$

Úloha 4.10 [1]

Pro body D, E, D po řadě stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC platí rovnosti $|BC| = 3\,|BD|$, $|CA| = 3\,|CE|$ a $|AB| = 3\,|AF|$. Podobným způsobem body G, H, I dělí po řadě strany EF, FH, DE trojúhelníku DEF, tedy $|EF| = 3\,|EG|$, $|FD| = 3\,|FH|$ a $|DE| = 3\,|DI|$. Dokažte, že strany trojúhelníku GHI jsou rovnoběžné ke stranám trojúhelníku ABC, a že každá strana menšího trojúhelníku má $\frac{1}{3}$ délky jako rovnoběžná strana většího trojúhelníku.

Úloha 4.11 [1]

Pro body D, E po řadě stran BC, AC trojúhelníku ABC platí rovnosti $|BD| = 3\,|DC|$ a $|AE| = \frac{2}{3}\,|EC|$. Bod P označuje průsečík úseček AD a BE. Najděte poměr $|BP| : |PE|$.

Úloha 4.12 [1]

Pro body E, F po řadě stran AC, AB trojúhelníku ABC platí rovnosti $|AE| = 4\,|EC|$, $|AF| = |FB|$. Bod D náleží úsečce BC a bod G označuje průsečík úseček EF a AD, přičemž platí $|AG| = \frac{3}{2}\,|GD|$. Najděte poměr $|BD| : |DC|$.

Úloha 4.13 (Eukleidova věta o výšce)

Nechť v_c označíme jako kolmici vedenou z bodu C na přeponu c, patu kolmice v_c označíme V_c. Potom v každém pravoúhlém trojúhelníku ABC platí $v_c^2 = c_a \cdot c_b$, kde $c_b = |AV_c|$, a $c_a = |V_cB|$. Dokažte.

Úloha 4.14

Dokažte, že v rovnoběžníku $ABCD$ mají protilehlé strany stejnou délku.

Úloha 4.15 [10]

Dokažte, že jestliže úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé, potom úhlopříčky každého jiného čtyřúhelníku se stranami shodné délky jsou navzájem kolmé.

Úloha 4.16 [1]

Strany AB, AD, BC, CD čtyřúhelníku $ABCD$ jsou rozděleny body E, F, G, H tak, že platí $|AE| : |ED| = |AF| : |FB| = |CG| : |GB| = |CH| : |HD|$. Dokažte, že $EFGH$ je rovnoběžník.

Úloha 4.17

Dokažte, že úhlopříčky v každém rovnoběžníku $ABCD$ se navzájem půlí.

Úloha 4.18 [13]

V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = D - A$. Vyjádřete pomocí vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektory $S - A$, $B - S$, $D - S$.

Závěr

V rámci bakalářské práce jsem v první kapitole shrnul základní poznatky o vektorech v rovině, které se běžně nevyskytují v ucelené formě. Zavedl jsem obvyklým způsobem operace s vektory a popsal základní vlastnosti, které jsem poté dokázal. Pro snadnější vhled do řešení úloh pomocí vektorů jsem uvedl některé důležité vztahy mezi vektory v trojúhelníku.

V druhé kapitole následovaly úlohy o trojúhelníku. Kapitolu jsem rozdělil do dvou částí. První část nazvaná „Základní úlohy“ se věnovala užitím vektorů v jednodušších úlohách o trojúhelníku. Ukázal jsem různé způsoby řešení úloh. V druhé části druhé kapitoly jsem přešel k využití skalárního součinu v úlohách o trojúhelníku. Pomocí skalárního součinu jsem dokázal, že průsečík os stran má stejnou vzdálenost od všech vrcholů v trojúhelníku.

Následuje třetí kapitola, kterou jsem věnoval rovnoběžníkům obdobným způsobem jako předchozí kapitolu.

Poslední kapitolu jsem věnoval souboru neřešených příkladů, na kterých si zájemce o danou problematiku může dostatečně procvičit řešení úloh pomocí vektorů.

V rámci bakalářské práce jsem systematizoval pojmy a vlastnosti zabývající se vektory v rovině. Jednotlivé vlastnosti jsem dokázal způsobem snadno pochopitelným i pro žáky středních škol. Řešené úlohy ukazují různé postupy při řešení planimetrických úloh pomocí vektorů.

V této práci jsem ukázal, že dvourozměrné vektory mohou být velmi užitečným prostředkem k řešení planimetrických úloh. Důkazy pomocí vektorů jsou názorné a snadno pochopitelné i pro žáky středních škol. Věnoval jsem se pouze dvourozměrným vektorům, které jsem použil k řešení planimetrických úloh. Vektory lze dále použít jako velmi efektivní nástroj pro řešení mnohých nerovností a některých úloh zabývajících se obsahy rovinných útvarů.

Ve středoškolské matematice se způsob řešení úloh, jakým jsem řešil úlohy v této bakalářské práci, běžně nevyskytuje. Řešení úloh užitím vektorů může být pro žáky střední škol trochu obtížnější, protože velmi často neexistuje přímý mechanický postup, na který jsou žáci zvyklí.

Literatura

[1] Larson, L.C.: *Problem-Solving Through Problems*. Springer Verlag, NewYork Inc., 1983.

[2] Kočandrle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie*. Prometheus, Praha, 2011.

[3] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus, Praha, 2008.

[4] Arslanagić, Š.: *Matematička čítanka 5*. Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2013.

[5] Arslanagić, Š.: *Matematička čítanka 1*. Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[6] Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene*. Bosanska Riječ, Sarajevo, 2004.

[7] Arslanagić, Š.: *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*. Sarajevo, 2001.

[8] Švrček, J.: *Užití vektorů při řešení geometrických úloh. In Sbornik Makos 2010*. vyd. PedF UK, Praha, 2011.

[9] Švrček, J.: *O jednom důkazu Hamiltonovy věty*. MFI, roč. 20, 2010/11, č.4.

[10] Prasolov, V., V.: *Zadači po planimetrii*. Nauka, Moskva, 1986.

[11] Bican, L.: *Lineární algebra a geometrie*. Academia, Praha, 2009.

[12] Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M.: *Kompendium matematiky*. Euromedia group k.s., Praha, 2008.

[13] Budinský, B., Šmakal, S.: *Vektory v geometrii*. ŠMM, nakl. Mladá fronta, Praha, 1971.