UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

## Elementární funkce definované jako řešení diferenciálních rovnic

Vedoucí diplomové práce:
**RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.**
Rok odevzdání: 2014

Vypracoval:
**Markéta Jandová**
MATEKO, III. ročník

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení pana RNDr. Jana Tomečka, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 7. dubna 2014

**Poděkování**

Ráda bych na tomto místě poděkovala především vedoucímu bakalářské práce panu RNDr. Janu Tomečkovi, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi tak ochotně věnoval při konzultacích. Rovněž si poděkování zaslouží má rodina a přátelé za podporu během celého studia.

# Obsah

# Úvod

Cílem bakalářské práce *Elementární funkce definované jako řešení diferenciálních rovnic* je dokázat, že řešeními námi zvolených počátečních úloh pro diferenciální rovnice jsou jisté známé elementární funkce.

Práce je rozdělena do tří částí a o čtenáři se předpokládá, že již má základní znalosti z matematické analýzy. Základní pojmy z teorie diferenciálních rovnic, stěžejní pro další text, jsou nicméně uvedeny v první kapitole. V dalších dvou kapitolách se již zabýváme speciálními případy diferenciálních rovnic.

V první z nich se seznámíme s konkrétní počáteční úlohou pro diferenciální rovnici prvního řádu. Z matematické analýzy víme, že jejím řešením je exponenciální funkce s přirozeným základem $\mathrm{e}^x$. V této práci se na ni ovšem podíváme naopak. Budeme uvažovat pouze tuto počáteční úlohu a pouze s touto informací odvodíme všechny vlastnosti zmíněné funkce $\mathrm{e}^x$.

Další kapitola je věnována jisté diferenciální rovnici druhého řádu, jejímž maximálním řešením jsou tentokrát dvě funkce, každá s jinými počátečními podmínkami. Analogicky se pokusíme odvodit všechny vlastnosti těchto funkcí pouze na základě této počáteční úlohy a tím také dokázat, že se jedná o goniometrické funkce sinus a cosinus.

# 1 Základní poznatky z diferenciálních rovnic

V této práci budeme potřebovat několik pojmů z teorie diferenciálních rovnic, proto je zde uvádíme. Všechny použité definice a věty jsou čerpány z [5].

## 1.1 Definice diferenciální rovnice

**Definice 1.1.** Nechť $f(x, z_0, z_1, \ldots, z_n)$ je reálná funkce $(n+2)$ reálných proměnných, která vzhledem k proměnné $z_n$ není konstantní, definovaná na množině $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+2}$. Potom symbol

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

nazýváme *obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu* pro neznámou reálnou funkci $y(x)$ jedné reálné proměnné $x$. *Řešením v* $\Omega$ *rovnice* (1) *na intervalu* $I \subset \mathbb{R}$ nazýváme takovou funkci $y(x)$, která má na $I$ všechny derivace do řádu $n$ včetně a platí

$$(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in \Omega, \quad \forall x \in I$$

a

$$f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

**Definice 1.2.** Je-li $y(x)$ řešením (1) v $\Omega$ na intervalu $I$ a $\tilde{y}(x)$ řešením (1) v $\Omega$ na intervalu $\tilde{I}$, kde $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$, přičemž $y(x) = \tilde{y}(x)$ na $I$, pak říkáme, že $\tilde{y}$ je *prodloužením* $y$ na interval $\tilde{I}$ a $y$ je *zúžením* $\tilde{y}$ na interval $I$. Takové řešení, které v $\Omega$ nelze prodloužit nazýváme *maximálním v* $\Omega$.

V tomto textu dále se budeme zabývat speciálním případem rovnic (1) - tzv. rovnicemi rozřešenými podle nejvyšší derivace (viz Definice 1.3.).

**Definice 1.3.** Nechť $f$ je reálná funkce $(n+1)$ proměnných, definovaná na množině $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}_{n+1}$. Potom symbol

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

nazýváme *rovnicí řešenou vzhledem k nejvyšší derivaci.*

## 1.2 Věty o existenci a jednoznačnosti

**Věta 1.1.** *(o existenci)* Nechť funkce $f$ je spojitá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+1}$, $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Omega$. Potom existuje alespoň jedno řešení rovnice (2) v $\Omega$, procházející tímto bodem, tj. existuje $\delta > 0$ a funkce $y(x)$ definovaná na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, která na tomto intervalu řeší (2) v $\Omega$ a splňuje podmínky (tzv. počáteční)

$$y^{(k)}(x_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{3}$$

**Věta 1.2.** *(o jednoznačnosti)* Nechť jsou splněny předpoklady věty 1.1. a funkce $f$ splňuje navíc *tzv. lokální Lipschitzovu podmínku* podle posledních $n$ proměnných, tzn. ke každému bodu $(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \Omega$ existuje okolí $U$ tohoto bodu a číslo $K$ tak, že pro každé dva body $(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$, $(x, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1}) \in U$ platí

$$|f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) - f(x, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1})| < K \sum_{i=0}^{n-1} |y_i - \tilde{y}_i|.$$

Potom řešení rovnice (2) splňující (3) je jediné v následujícím smyslu. Dvě řešení rovnice splňující (3) jsou si rovna na průniku svých definičních intervalů. Speciálně každá dvě maximální řešení rovnic splňující pro nějaké $x_0$ stejné podmínky (3) jsou si rovna identicky.

**Poznámka 1.1.** V následujících kapitolách se budeme speciálně zabývat diferenciálními rovnicemi 1. řádu

$$y' = f(x, y)$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0,$$

a 2. řádu

$$y'' = f(x, y, y')$$

s počátečními podmínkami

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Úloha určit řešení těchto rovnic, která splňuje počáteční podmínky, kde $x_0, y_0, y_1$ jsou libovolně daná reálná čísla, se nazývá *počáteční úloha.*

## 1.3 Prodlužování řešení

V této práci budeme hledat maximální (úplné) řešení daných rovnic. Konkrétně, budeme se snažit dokázat, že uvažovaná maximální řešení jsou definovaná na celém $\mathbb{R}$. K tomu využijeme následující Pomocnou větu 5.1. z [2].

**Věta 1.3.** Buď $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorová funkce spojitá v oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in \Omega$. Buď $x$ řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x' = f(t, x)$$

na intervalu $\langle t_0, T)$, kde $t_0 < T < \infty$. Toto řešení lze prodloužit napravo od $T$ právě tehdy, když množina

$$\Gamma = \{(t, x(t)) : t \in \langle t_0, T)\}$$

(graf řešení $x$) je ohraničená a vzdálenost $\Gamma$ od hranice $\partial\Omega$ oblasti $\Omega$ je kladná, tzn. $d(\Gamma, \partial\Omega) > 0$, kde

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \quad \text{pro} \quad A, B \subset \mathbb{R}^n.$$

Podobně lze vyslovit větu o prodloužení doleva.

**Věta 1.4.** Buď $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorová funkce spojitá v oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in \Omega$. Buď $x$ řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x' = f(t, x)$$

na intervalu $(T, t_0\rangle$, kde $t_0 > T > -\infty$. Toto řešení lze prodloužit nalevo od $T$ právě tehdy, když množina

$$\Gamma = \{(t, x(t)) : t \in (T, t_0\rangle\}$$

(graf řešení $x$) je ohraničená a vzdálenost $\Gamma$ od hranice $\partial\Omega$ oblasti $\Omega$ je kladná, tzn. $d(\Gamma, \partial\Omega) > 0$, kde

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \quad \text{pro} \quad A, B \subset \mathbb{R}^n.$$

Následující věta plyne přímo z předchozích vět a budeme ji používat ve druhé kapitole pro diferenciální rovnici 1. řádu.

**Věta 1.5.** Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $x_0, T \in \mathbb{R}$. Nechť $y : \langle x_0, T) \to \mathbb{R}$, kde $T > x_0$ je řešení diferenciální rovnice

$$y' = f(x, y)$$

na intervalu $\langle x_0, T)$ a existuje vlastní limita

$$\lim_{x \to T^-} y(x),$$

pak $y$ lze prodloužit doprava za $T$.
Podobně, je-li $y : (T, x_0\rangle \to \mathbb{R}$, kde $T < x_0$, řešení diferenciální rovnice

$$y' = f(x, y)$$

na intervalu $(T, x_0\rangle$ a existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to T^+} y(x),$$

pak $y$ lze prodloužit doleva za $T$.

Pro diferenciální rovnici 2. řádu lze vyslovit podobnou větu.

**Věta 1.6.** Nechť $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $x_0, T \in \mathbb{R}$. Nechť $y : \langle x_0, T) \to \mathbb{R}$, kde $T > x_0$ je řešení diferenciální rovnice

$$y'' = f(x, y, y')$$

na intervalu $\langle x_0, T)$ a existují vlastní limity

$$\lim_{x \to T^-} y(x), \quad \lim_{x \to T^-} y'(x),$$

pak $y$ lze prodloužit doprava za $T$.
Podobně, je-li $y : (T, x_0\rangle \to \mathbb{R}$, kde $T < x_0$, řešení diferenciální rovnice

$$y'' = f(x, y, y')$$

na intervalu $(T, x_0\rangle$ a existují-li vlastní limity

$$\lim_{x \to T^+} y(x), \quad \lim_{x \to T^+} y'(x),$$

pak $y$ lze prodloužit doleva za $T$.

*Důkaz.* Dokážeme jen případ prodlužování doprava. Platí, že $y : \langle x_0, T) \to \mathbb{R}$ je řešení diferenciální rovnice $y'' = f(x, y, y')$ právě tehdy, když vektorová funkce $(y, y')$ je řešením soustavy diferenciálních rovnic

$$y_1' = y_2 \tag{4}$$

$$y_2' = f(x, y_1, y_2) \tag{5}$$

na stejném intervalu (tj. $\langle x_0, T)$).
Ze spojitosti funkcí $y, y'$ a existence vlastních limit $\lim_{x \to T^-} y(x)$, $\lim_{x \to T^-} y'(x)$ plyne ohraničenost grafu řešení soustavy (4),(5), tj. množiny

$$\Gamma = \{(x, y(x), y'(x)) : x \in \langle x_0, T)\}.$$

Podle Věty 1.3., kde $\Omega = \mathbb{R}^3$, tzn. $\partial\Omega = \emptyset$, lze řešení soustavy (4),(5) prodloužit doprava, tedy i řešení rovnice $y'' = f(x, y, y')$. $\square$

# 2 Funkce E

## 2.1 Definice funkce E

V této kapitole se budeme zabývat počáteční úlohou pro diferenciální rovnici 1. řádu

$$y' = ay, \quad y(x_0) = y_0, \tag{6}$$

kde $a, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Nejprve určíme jednoznačnost jejího řešení.

**Lemma 2.1.** Počáteční úloha (6) má jediné řešení v následujícím smyslu. Dvě řešení diferenciální rovnice $y' = ay$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ jsou si rovna na průniku svých definičních intervalů. Speciálně dvě maximální řešení splňující tuto počáteční podmínku jsou si rovna identicky.

*Důkaz.* Ověříme, že počáteční úloha (6) splňuje podmínky Věty 1.1. a Věty 1.2.
1. Spojitost $f(x, y) = ay$ je zřejmá.
2. Pro funkci $f(x, y) = ay$ a pro každé dva body $(x, y), (x, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = |ay - a\tilde{y}| = |a||y - \tilde{y}|.$$

Odtud vidíme, že $f$ je lokálně lipschitzovská v proměnné $y$, kde $K = |a|$. □

Dále se budeme zabývat konkrétním případem počáteční úlohy (6) pro hodnoty

$$a = 1, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

Nadefinujeme si její maximální řešení, dokážeme, že je definované na celém $\mathbb{R}$ a určíme jeho vlastnosti.

**Definice 2.1.** Maximální řešení počáteční úlohy

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \tag{7}$$

budeme značit symbolem E.

**Věta 2.1.** Funkce E z Definice 2.1. je jednoznačně určená, její definiční obor je $\mathbb{R}$, je spojitá, rostoucí na $\mathbb{R}$ a platí

$$\mathrm{E}(-x) = \frac{1}{\mathrm{E}(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Důkaz.* Z Lemmatu 2.1. vyplývá, že funkce E je jediná, tedy jednoznačně definovaná. Její definiční obor označíme intervalem $(\alpha, \beta)$, zřejmě platí $\alpha < 0 < \beta$. Našim cílem bude dokázat, že $\alpha = -\infty$ a $\beta = \infty$.

KROK 1. Dokážeme, že

$$\mathrm{E}(-x) = \frac{1}{\mathrm{E}(x)}, \quad \forall x \in (-\delta, \delta),$$

kde $\delta \leq \min\{|\alpha|, |\beta|\}$ (viz Obrázek 1).
Definujme funkce $z$ a $u$ předpisy

$$z(x) = \mathrm{E}(-x), \quad u(x) = \frac{1}{\mathrm{E}(x)}, \quad \forall x \in (-\delta, \delta).$$

Platí

$$z'(x) = (\mathrm{E}(-x))' = -\mathrm{E}(-x) = -z(x), \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$$

a $z(0) = \mathrm{E}(0) = 1$. Navíc

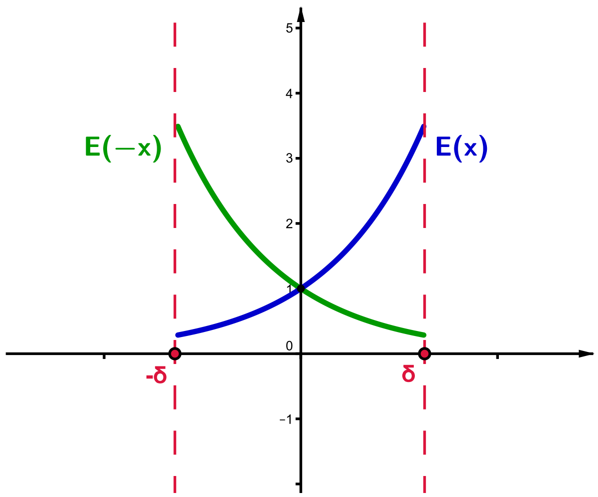
$$u'(x) = \left(\frac{1}{\mathrm{E}(x)}\right)' = -(\mathrm{E}(x))^{-2} \cdot \mathrm{E}(x) = -\frac{1}{\mathrm{E}(x)} = -u(x), \quad \forall x(-\delta, \delta)$$

a $u(0) = \frac{1}{\mathrm{E}(0)} = 1$.
Obě funkce tedy řeší počáteční úlohu

$$y' = -y, \quad y(0) = 1$$

na intervalu $(-\delta, \delta)$, která má podle Lemmatu 2.1. právě jediné maximální řešení.
Z toho plyne, že $z(x) = u(x), \forall x \in (-\delta, \delta)$, tzn.

$$\mathrm{E}(-x) = \frac{1}{\mathrm{E}(x)}, \quad \forall x \in (-\delta, \delta).$$




Obrázek 1: Graf funkcí $\mathrm{E}(x)$ a $\mathrm{E}(-x)$ na intervalu $(-\delta, \delta)$.

KROK 2. Dokážeme, že funkce E je kladná a rostoucí na $(\alpha, \beta)$.
Protože E je v bodě nula kladná a spojitá, pak existuje okolí bodu nula, na kterém je E kladná a vzhledem k faktu $\mathrm{E}' = \mathrm{E}$ je také na něm rostoucí. Že je E kladná na celém $(\alpha, \beta)$ dokážeme sporem. Nechť

$$\exists \gamma \in (\alpha, \beta) : \mathrm{E}(\gamma) = 0.$$

Pak by E byla řešením počáteční úlohy

$$y' = y, \quad y(\gamma) = 0,$$

která je jednoznačně řešitelná a muselo by platit $\mathrm{E}(x) = 0$ pro všechna $x \in (\alpha, \beta)$, čímž se dostáváme do sporu. Tzn. $\mathrm{E}(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$. Ze spojitosti a z toho, že v bodě nula je funkce kladná, také plyne, že $\mathrm{E}(x) > 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ a z

$$\mathrm{E}'(x) = \mathrm{E}(x) > 0, \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

také, že E je rostoucí na $(\alpha, \beta)$.
Tím jsme dokázali, že E je kladná a rostoucí na intervalu $(\alpha, \beta)$.

KROK 3. Dále dokážeme, že $|\alpha| = |\beta|$ - opět sporem.
Nechť $|\alpha| < |\beta|$. Protože je E rostoucí a kladná (tzn. omezená zdola) na $(\alpha, \beta)$, má vlastní

$$\lim_{x \to \alpha^+} \mathrm{E}(x)$$

a jde tedy podle Věty 1.5. rozšířit doleva. To je spor s tím, že $(\alpha, \beta)$ je maximální interval.

Nechť $|\alpha| > |\beta|$. Z kroku 2 vyplývá, že

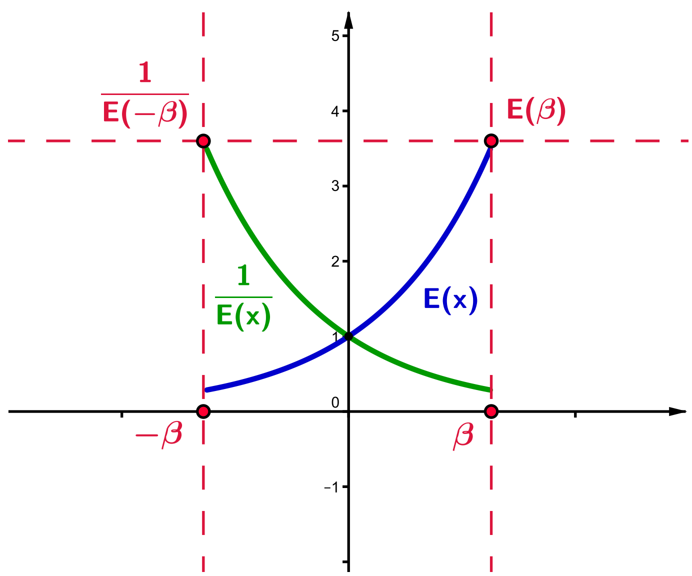
$$\mathrm{E}(-x) = \frac{1}{\mathrm{E}(x)}, \quad \forall x \in (-\beta, \beta).$$

Tedy

$$\lim_{x \to \beta^-} \mathrm{E}(x) = \lim_{x \to -\beta^+} \mathrm{E}(-x) = \lim_{x \to -\beta^+} \frac{1}{\mathrm{E}(x)} = \frac{1}{\mathrm{E}(-\beta)}.$$

Dokázali jsme, že E má v krajním bodě $\beta$ vlastní limitu zleva a jde tedy podle Věty 1.5. rozšířit doprava (viz Obrázek 2). Opět dostáváme spor.

Je-li tedy $(\alpha, \beta)$ definičním oborem E, pak $-\alpha = \beta$.




Obrázek 2: Graf funkcí $\mathrm{E}(x)$ a $\frac{1}{\mathrm{E}(x)}$ na intervalu $(-\beta, \beta)$.

KROK 4. Můžeme tedy psát, že E je definována na intervalu $(-\delta, \delta)$, kde $\delta \in (0, \infty\rangle$. Dokážeme, že $\delta = \infty$.

Protože je E rostoucí a kladná funkce, pak zřejmě platí

$$0 < \mathrm{E}(x) < 1, \quad \forall x \in (-\delta, 0).$$

Předpokládejme, že $\delta \in \mathbb{R}$. Pak by $\lim_{x\to-\delta^+} \mathrm{E}(x)$ byla vlastní limitou a tudíž by $(-\delta, \delta)$ nebyl maximální interval. Musí tedy platit $\delta = \infty$, nebo-li $\alpha = -\infty, \beta = \infty$. $\square$

## 2.2 Vlastnosti funkce E

$\boxed{v_1}$ E je spojitá na $\mathbb{R}$.

*Důkaz.* Tvrzení plyne z toho, že funkce má v každém bodě vlastní derivaci. $\square$

$\boxed{v_2}$ $\mathrm{E}' = \mathrm{E}$ na $\mathbb{R}$.

*Důkaz.* Tvrzení plyne přímo z definice úlohy (7). $\square$

$\boxed{v_3}$ $\mathrm{E}(0) = 1$.

*Důkaz.* Tvrzení plyne přímo z definice úlohy (7). $\square$

$\boxed{v_4}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{E}(x) = \infty$.

*Důkaz.* Z úlohy (7) a Věty 2.1. vyplývá, že

$$\mathrm{E}'(x) = \mathrm{E}(x) > \mathrm{E}(0) = 1, \quad \forall x \in (0, \infty),$$

tedy

$$\mathrm{E}'(x) > 1, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

Pak pro všechna $x \in (0, \infty)$ platí

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathrm{E}'(s)\,\mathrm{d}s &> \int_0^x 1\,\mathrm{d}s \\ \mathrm{E}(x) - \mathrm{E}(0) &> x \\ \mathrm{E}(x) - 1 &> x \\ \mathrm{E}(x) &> x + 1. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že pokud $x \to \infty$, pak také $x + 1 \to \infty$ a tudíž

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{E}(x) = \infty.$$

$\square$

$\boxed{v_5}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{E}(x) = 0.$

*Důkaz.* Z $\boxed{v_4}$ a Věty 2.1. plyne

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{E}(x) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{E}(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{E}(x)} = 0.$$

$\square$

$\boxed{v_6}$ $\mathrm{E}(ab) = (\mathrm{E}(a))^b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Uvažujme $b \in \mathbb{R}$ libovolné. Definujme funkce $z$ a $u$ předpisy

$$z(x) = \mathrm{E}(xb), \quad u(x) = (\mathrm{E}(x))^b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Platí

$$z'(x) = (\mathrm{E}(xb))' = b \cdot \mathrm{E}(xb) = b \cdot z(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a $z(0) = \mathrm{E}(0 \cdot b) = 1$. Navíc

$$u'(x) = ((\mathrm{E}(x))^b)' = b \cdot (\mathrm{E}(x))^{b-1} \cdot \mathrm{E}'(x) = b \cdot (\mathrm{E}(x))^b = b \cdot u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a $u(0) = (\mathrm{E}(0))^b = 1$.
Obě funkce tedy řeší počáteční úlohu

$$y' = by, \quad y(0) = 1,$$

která má podle Lemmatu 2.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $z(x) = u(x), \forall x \in \mathbb{R}$, tzn. $\boxed{v_6}$ platí. $\square$

$\boxed{v_7}$ $\mathrm{E}(a + b) = \mathrm{E}(a) \cdot \mathrm{E}(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Uvažujme $b \in \mathbb{R}$ libovolné. Definujme funkce $z$ a $u$ předpisy

$$z(x) = \mathrm{E}(x + b), \quad u(x) = \mathrm{E}(x) \cdot \mathrm{E}(b), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Platí

$$z'(x) = (\mathrm{E}(x + b))' = \mathrm{E}(x + b) = z(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a $z(0) = \mathrm{E}(0 + b) = \mathrm{E}(b)$. Navíc

$$u'(x) = (\mathrm{E}(x) \cdot \mathrm{E}(b))' = \mathrm{E}(x) \cdot \mathrm{E}(b) = u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a $u(0) = \mathrm{E}(0) \cdot \mathrm{E}(b) = 1 \cdot \mathrm{E}(b) = \mathrm{E}(b)$.

Obě funkce tedy řeší počáteční úlohu

$$y' = y, \quad y(0) = \mathrm{E}(b),$$

která má podle Lemmatu 2.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $z(x) = u(x), \forall x \in \mathbb{R}$, tzn. $\boxed{v_7}$ platí. □

$\boxed{v_8}$ $\mathrm{E}(a - b) = \frac{\mathrm{E}(a)}{\mathrm{E}(b)}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

*Důkaz.* Je-li $b = 0$, pak vlastnost zřejmě platí.

Uvažujme, že $b \neq 0$. Definujme funkce $z$ a $u$ předpisy

$$z(x) = \mathrm{E}(x - b), \quad u(x) = \frac{\mathrm{E}(x)}{\mathrm{E}(b)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Platí

$$z'(x) = (\mathrm{E}(x - b))' = \mathrm{E}(x - b) = z(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a $z(0) = \mathrm{E}(0 - b) = \mathrm{E}(-b)$. Navíc

$$u'(x) = \left(\frac{\mathrm{E}(x)}{\mathrm{E}(b)}\right)' = \frac{\mathrm{E}(x) \cdot \mathrm{E}(b) - \mathrm{E}(x) \cdot 0}{\mathrm{E}(b)^2} = \frac{\mathrm{E}(x)}{\mathrm{E}(b)} = u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a $u(0) = \frac{\mathrm{E}(0)}{\mathrm{E}(b)} = \frac{1}{\mathrm{E}(b)} = \mathrm{E}(-b)$.

Obě funkce tedy řeší počáteční úlohu

$$y' = y, \quad y(0) = \mathrm{E}(-b),$$

která má podle Lemmatu 2.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $z(x) = u(x), \forall x \in \mathbb{R}$, tzn. $\boxed{v_8}$ platí. □

$\boxed{v_9}$ $\mathrm{E}(a) = \mathrm{E}(b) \Leftrightarrow a = b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

*Důkaz.* Tvrzení plyne z toho, že je funkce rostoucí, tedy prostá. □

$\boxed{v_{10}}$ $a < b \Leftrightarrow \mathrm{E}(a) < \mathrm{E}(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Tvrzení plyne z toho, že je funkce rostoucí. □

$\boxed{v_{11}}$ $\mathrm{E}(1) = \mathrm{e}, \quad$ kde e je Eulerovo číslo.

*Důkaz.* Využijeme teorii z [4] (speciálně kapitolu 5 a příklad 5.20.)
Vycházíme z toho, že Eulerovo číslo je definováno jako součet řady

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Aproximujeme funkci E Taylorovým polynomem n-tého stupně

$$T_n(x, 0, \mathrm{E}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{E}^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \tag{8}$$

protože $\mathrm{E}^{(k)}(x) = \mathrm{E}(x), \forall x \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}$ a $\mathrm{E}(0) = 1$.
Podle Taylorovy věty o zbytku (Lagrangeův tvar zbytku) platí

$$R_{n+1}(x) = \frac{\mathrm{E}^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\mathrm{E}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde $\xi$ leží mezi 0 a $x$. Pro $x = 1$ platí

$$|R_{n+1}(1)| = \frac{\mathrm{E}(\xi)}{(n+1)!} 1^{n+1} < \frac{\mathrm{E}(1)}{(n+1)!},$$

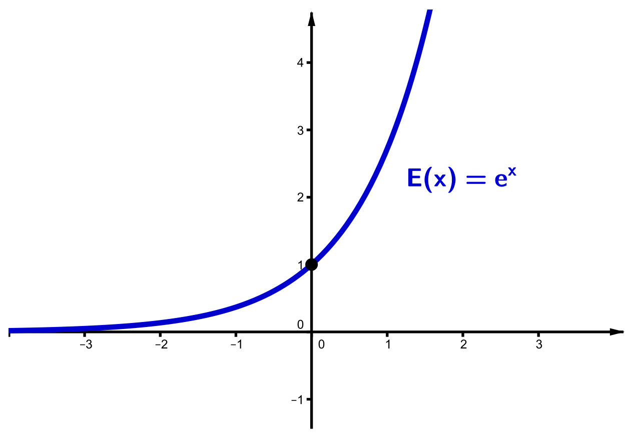
kde jsme využili faktu, že $\xi < 1$ a že E je rostoucí.
Pak $R_{n+1}(1) \to 0$ pro $n \to \infty$. Odtud a z (8) pro $x = 1$ plyne

$$\mathrm{E}(1) = \lim_{n\to\infty} T_n(1, 0, \mathrm{E}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

□

**Poznámka 2.1.** Na základě dokázaných vlastností funkce E můžeme říci, že se jedná o exponenciální funkci $\mathrm{e}^x$ (viz Obrázek 3), kterou známe ze střední školy, tedy

$$\mathrm{E}(x) = \mathrm{e}^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$




Obrázek 3: Graf exponenciální funkce $\mathrm{e}^x$

# 3 Funkce $\mathrm{S}$ a $\mathrm{C}$

## 3.1 Definice funkcí $\mathrm{S}$ a $\mathrm{C}$

V této kapitole se zaměříme na počáteční úlohu pro diferenciální rovnici 2. řádu

$$y'' = ay, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \tag{9}$$

kde $a, x_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Stejně jako u předchozí kapitoly nejprve určíme jednoznačnost řešení.

**Lemma 3.1.** Počáteční úloha (9) má jediné řešení v následujícím smyslu. Dvě řešení diferenciální rovnice $y'' = ay$ splňující počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ jsou si rovna na průniku svých definičních intervalů. Speciálně dvě maximální řešení splňující tyto počáteční podmínky jsou si rovna identicky.

*Důkaz.* Ověříme, že počáteční úloha (9) splňuje podmínky Věty 1.1. a Věty 1.2.
1. Spojitost $f(x, y, y') = ay$ je zřejmá.
2. Pro funkci $f(x, y, y') = ay$ a pro každé dva body $(x, y, y'), (x, \tilde{y}, \tilde{y}') \in \mathbb{R}^3$ platí

$$|f(x, y, y') - f(x, \tilde{y}, \tilde{y}')| = |ay - a\tilde{y}| = |a||y - \tilde{y}| \leq |a|(|y - \tilde{y}| + |y' - \tilde{y}'|).$$

Odtud vidíme, že $f$ je lokálně lipschitzovská v proměnné $y$, kde $K = |a|$. $\square$

Dále se budeme zabývat dvěma konkrétními případy počáteční úlohy (9). Pro první počáteční úlohu si nejprve za proměnné dosadíme hodnoty

$$a = -1, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 0$$

a pro druhou počáteční úlohu tyto hodnoty

$$a = -1, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$

Nadefinujeme si jejich maximální řešení, dokážeme, že jsou obě definované na celém $\mathbb{R}$ a poté se zaměříme na jejich vlastnosti.

**Definice 3.1.** Maximální řešení počáteční úlohy

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{10}$$

označíme symbolem S.

Maximální řešení počáteční úlohy

$$y'' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{11}$$

označíme symbolem C.

**Věta 3.1.** Funkce S z Definice 3.1. je jednoznačně určená, její definiční obor je $\mathbb{R}$, je lichá, $4x_0$-periodická, kde $x_0$ je její první stacionární bod a platí

$$\mathrm{S}(x_0) = 1$$

a také

$$\mathrm{S}'^2(x) + \mathrm{S}^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$\mathrm{S}(-x) = -\mathrm{S}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Důkaz.* Z Lemmatu 3.1. vyplývá, že funkce S je jediná, tedy jednoznačně definovaná. Její definiční obor označíme intervalem $(\alpha, \beta)$, zřejmě platí $\alpha < 0 < \beta$. Našim cílem bude dokázat, že $\alpha = -\infty$ a $\beta = \infty$.

KROK 1. Dokážeme, že

$$\mathrm{S}'^2(x) + \mathrm{S}^2(x) = 1, \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \tag{12}$$

z čehož ihned plyne, že $|\mathrm{S}(x)| \leq 1$ a $|\mathrm{S}'(x)| \leq 1$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Z (10) vyplývá

$$\mathrm{S}''\,\mathrm{S}' = -\mathrm{S}\,\mathrm{S}' \quad \text{na} \quad (\alpha, \beta).$$

Po úpravě a zintegrování dostáváme

$$\frac{1}{2}(\mathrm{S}'^2)' = -\frac{1}{2}(\mathrm{S}^2)' \quad \text{na} \quad (\alpha, \beta)$$
$$\mathrm{S}'^2(x) - \mathrm{S}'^2(0) = -(\mathrm{S}^2(x) - \mathrm{S}^2(0)), \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$
$$\mathrm{S}'^2(x) + \mathrm{S}^2(x) = \mathrm{S}'^2(0) + \mathrm{S}^2(0) = 1, \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

tedy rovnost (12) platí.

KROK 2. Dokážeme, že

$$\mathrm{S}(-x) = -\mathrm{S}(x), \quad \forall x \in (-\delta, \delta), \tag{13}$$

kde $\delta \le \min\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Definujme funkce $z$ a $u$ předpisy

$$z(x) = \mathrm{S}(-x), \quad u(x) = -\mathrm{S}(x), \quad \forall x \in (-\delta, \delta).$$

Platí

$$z''(x) = \mathrm{S}''(-x) = -\mathrm{S}(-x) = -z(x), \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$$

a

$$z(0) = \mathrm{S}(0) = 0$$
$$z'(0) = -\mathrm{S}'(0) = -1.$$

Navíc

$$u''(x) = -\mathrm{S}''(x) = \mathrm{S}(x) = -u(x), \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$$

a

$$u(0) = -\mathrm{S}(0) = 0$$
$$u'(0) = -\mathrm{S}'(0) = -1.$$

Obě funkce jsou řešením počáteční úlohy

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1,$$

na intervalu $(-\delta, \delta)$, která má podle Lemmatu 3.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $z(x) = u(x)$, $\forall x \in (-\delta, \delta)$, tzn. rovnost (13) platí.

KROK 3. Dokážeme, že S má stacionární bod na intervalu $(0, \beta)$ - sporem. Předpokládejme, že $\mathrm{S}'(x) \neq 0$, $\forall x \in (0, \beta)$. Protože $\mathrm{S}(0) = 0, \mathrm{S}'(0) = 1$, pak

$$\exists R^+(0) : \mathrm{S}'(x) > 0.$$

Podle předpokladu platí

$$S'(x) > 0, \quad \forall x \in (0, \beta).$$

Pak $\forall x \in (0, \beta)$

$$S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^x S'(\tau)\, d\tau > 0.$$

Odtud a z (12) vyplývá, že $S(x) \leq 1, \forall x \in (0, \beta)$. Dohromady dostáváme, že S je na $(0, \beta)$ rostoucí a omezená shora, tzn. existuje vlastní

$$\lim_{x \to \beta^-} S(x).$$

Ještě dokážeme, že i

$$\lim_{x \to \beta^-} S'(x)$$

existuje a je vlastní.

Z Newton-Leibnizova vzorce a (10) plyne

$$S'(x) = S'(0) + \int_0^x S''(\tau)\, d\tau = 1 + \int_0^x -S(\tau)\, d\tau = 1 - \int_0^x S(\tau)\, d\tau, \quad \forall x \in (0, \beta). \tag{14}$$

Uvažujeme dva případy ($\beta < \infty$ nebo $\beta = \infty$).

Je-li $\beta < \infty$, pak

$$\lim_{x \to \beta^-} S'(x) = 1 - \int_0^\beta S(\tau)\, d\tau \in \mathbb{R}$$

a tedy S lze podle Věty 1.6. rozšířit doprava. To je spor s tím, že je $(\alpha, \beta)$ maximální interval.

Je-li $\beta = \infty$, pak z faktu, že je S rostoucí na $(0, \infty)$ plyne

$$S(x) \geq S(1) > 0, \quad \forall x \geq 1$$

a tedy

$$\int_1^x S(\tau)\, d\tau \geq \int_1^x S(1)\, d\tau = S(1)(x - 1), \quad \forall x \geq 1.$$

Z (14) pak vyplývá, že $\forall x \geq 1$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}'(x) &= 1 - \left( \int_0^1 \mathrm{S}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_1^x \mathrm{S}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \\
&= 1 - \int_0^1 \mathrm{S}(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_1^x \mathrm{S}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&\leq 1 - \int_0^1 \mathrm{S}(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \mathrm{S}(1)(x-1).
\end{aligned}
$$

Z toho plyne, že pokud $x \to \infty$, pak $\mathrm{S}'(x) \to -\infty$ a to je ve sporu s tím, že $|\,\mathrm{S}'\,| \leq 1$ na $\langle 0, \beta)$.

KROK 4. Z kroku 3 tedy plyne

$$\exists x_0 \in (0, \beta) : \mathrm{S}'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad \forall x \in (0, x_0) : \mathrm{S}'(x) > 0.$$

Z (12) plyne

$$\mathrm{S}'^2(x_0) + \mathrm{S}^2(x_0) = 1,$$

tzn.

$$\mathrm{S}^2(x_0) = 1$$

a protože

$$\mathrm{S}(x_0) > 0$$

pak

$$\mathrm{S}(x_0) = 1.$$

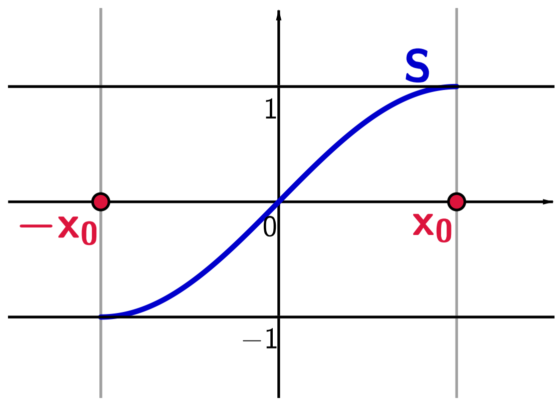
KROK 5. V předchozím kroku jsme ukázali, že S je definována na intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$. Dokážeme nejprve, že je definována i na intervalu $\langle -x_0, 0 \rangle$, neboli $\alpha < -x_0$. To ukážeme sporem, tzn. předpokládáme, že $\alpha \geq -x_0$. Pak

$$\lim_{x \to \alpha^+} \mathrm{S}(x) = \lim_{x \to \alpha^+} -\mathrm{S}(-x) = \lim_{y \to -\alpha^-} -\mathrm{S}(y) = -\mathrm{S}(-\alpha) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to \alpha^+} \mathrm{S}'(x) = \lim_{x \to \alpha^+} \mathrm{S}'(-x) = \lim_{y \to -\alpha^-} \mathrm{S}'(y) = \mathrm{S}'(-\alpha) \in \mathbb{R}.$$

Odtud a z Věty 1.6. vyplývá, že S lze prodloužit doleva od $\alpha$ - spor. Z lichosti S na intervalu $\langle -x_0, x_0 \rangle$ vyplývá, že $\mathrm{S}(-x_0) = -1$ a funkce je rostoucí na intervalu

$\langle -x_0, x_0\rangle \subset (\alpha, \beta)$ (viz Obrázek 4).




Obrázek 4: Graf funkce S definované na intervalu $\langle -x_0, x_0\rangle$

Dále budeme zkoumat chování S napravo od $x_0$. Nejprve dokážeme, že $\forall x \in (x_0, \beta)$, $x < 3x_0$ platí

$$\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(2x_0 - x), \tag{15}$$

tzn. graf funkce S je souměrný podle přímky $x = x_0$ alespoň na nějakém okolí bodu $x_0$ o poloměru nejvýše $2x_0$.
Označme

$$z(x) = \mathrm{S}(2x_0 - x), \quad \forall x \in (x_0, \beta), x < 3x_0.$$

Pak $\forall x \in (x_0, \beta)$, $x < 3x_0$ platí

$$z''(x) = \mathrm{S}''(2x_0 - x) = -\mathrm{S}(2x_0 - x) = -z(x)$$
$$z(x_0) = \mathrm{S}(2x_0 - x_0) = \mathrm{S}(x_0) = 1$$
$$z'(x_0) = -\mathrm{S}'(2x_0 - x_0) = -\mathrm{S}'(x_0) = 0,$$

tzn. $z$ řeší stejnou počáteční úlohu jako S v bodě $x_0$, která má podle Lemmatu 3.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $z(x) = \mathrm{S}(x)$, $\forall x \in (x_0, \beta)$, $x < 3x_0$, tzn. rovnost (15) platí.

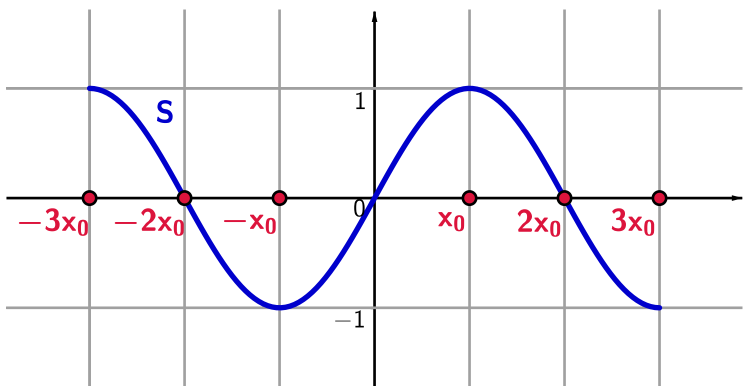
Z (15) plyne

$$\lim_{x\to\beta^-} \mathrm{S}(x) = \lim_{x\to\beta^-} \mathrm{S}(2x_0 - x) = \lim_{y\to(2x_0-\beta)^+} \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(2x_0 - \beta) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to\beta^-} \mathrm{S}'(x) = \lim_{x\to\beta^-} -\mathrm{S}'(2x_0 - x) = \lim_{y\to(2x_0-\beta)^+} -\mathrm{S}'(y) = -\mathrm{S}'(2x_0 - \beta) \in \mathbb{R}.$$

Funkce S je tedy definována minimálně na intervalu $\langle -x_0, 3x_0\rangle$, neboli $\langle -x_0, 3x_0\rangle \subset (\alpha, \beta)$.

Opět s využitím kroku 2 bychom mohli dokázat, že S je také definována minimálně na intervalu $\langle -3x_0, 3x_0\rangle \subset (\alpha, \beta)$ (viz Obrázek 5).




Obrázek 5: Graf funkce S definované na intervalu $\langle -3x_0, 3x_0\rangle$

Dále dokážeme, že $\forall x \in (3x_0, \beta), x < 3x_0 + 6x_0$ platí

$$\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(4x_0 - x). \tag{16}$$

Označme

$$u(x) = \mathrm{S}(x - 4x_0), \quad \forall x \in (3x_0, \beta), x < 9x_0.$$

Pak $\forall x \in (3x_0, \beta), x < 9x_0$ platí

$$u''(x) = \mathrm{S}''(x - 4x_0) = -\mathrm{S}(x - 4x_0) = -u(x)$$

$$u(4x_0) = \mathrm{S}(0) = 0$$

$$u'(4x_0) = \mathrm{S}'(0) = 1,$$

tzn. $u$ řeší stejnou počáteční úlohu jako S v bodě $x_0$, která má podle Lemmatu 3.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $u(x) = \mathrm{S}(x), \forall x \in (3x_0, \beta), x <$

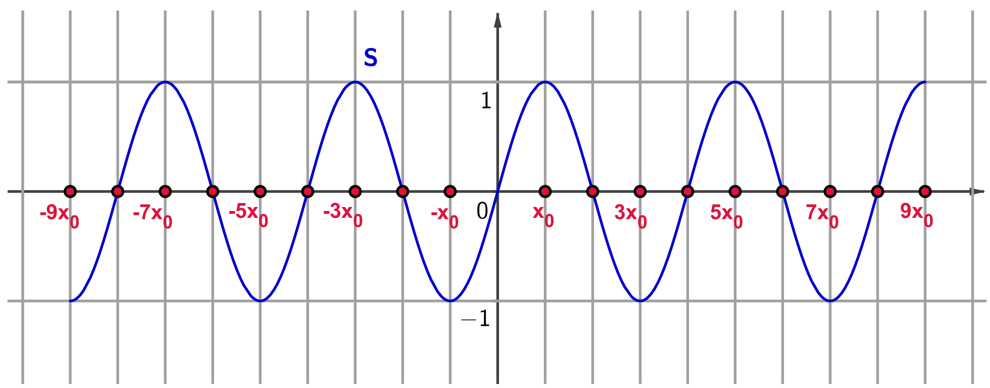
$9x_0$, tzn. rovnost (16) platí.

Z (16) plyne

$$\lim_{x\to\beta^-} \mathrm{S}(x) = \lim_{x\to\beta^-} \mathrm{S}(x-4x_0) = \lim_{y\to(\beta-4x_0)^+} \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(\beta-4x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to\beta^-} \mathrm{S}'(x) = \lim_{x\to\beta^-} \mathrm{S}'(x-4x_0) = \lim_{y\to(\beta-4x_0)^+} \mathrm{S}'(y) = \mathrm{S}'(\beta-4x_0) \in \mathbb{R}.$$

Funkce S je tedy definována minimálně na intervalu $\langle -3x_0, 9x_0\rangle \subset (\alpha,\beta)$.
Opět s využitím kroku 2 bychom mohli dokázat, že S je také definována minimálně na intervalu $\langle -9x_0, 9x_0\rangle \subset (\alpha,\beta)$ (viz Obrázek 6).




Obrázek 6: Graf funkce S definované na intervalu $\langle -9x_0, 9x_0\rangle$

Opakovaným postupem dostáváme, že

$$\beta > 3x_0, \beta > 9x_0, \beta > (9+18)x_0, ...$$

Dohromady dostáváme, že

$$\beta = \infty \quad \text{a} \quad \alpha = -\infty.$$

Funkce S je tedy definována na celém $\mathbb{R}$. Také jsme zjistili, že S je $4x_0$-periodická a z grafů lze snadno určit její lokální extrémy a intervaly monotonnosti. □

**Věta 3.2.** Funkce C z Definice 3.1. je jednoznačně určená, její definiční obor je $\mathbb{R}$ a platí

$$\mathrm{S}'(x) = \mathrm{C}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Důkaz.* Z Lemmatu 3.1. vyplývá, že funkce $\mathrm{C}$ je jediná, tedy jednoznačně definovaná. Podle Věty 3.1. je funkce $\mathrm{S}$ definována na celém $\mathbb{R}$. Stačí tedy dokázat, že její derivace $\mathrm{S}'$ řeší počáteční úlohu (11).
Definujme funkci $z$ předpisem

$$z(x) = \mathrm{S}'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Platí

$$z'(x) = \mathrm{S}''(x) = -\mathrm{S}(x)$$
$$z''(x) = -\mathrm{S}'(x) = -z(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a

$$z(0) = \mathrm{S}'(0) = 1$$
$$z'(0) = -\mathrm{S}(0) = 0.$$

Funkce $z$ tedy řeší počáteční úlohu (11) na $\mathbb{R}$, která má podle Lemmatu 3.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $\mathrm{S}'(x)$ je maximální řešení počáteční úlohy (11), které je definované na celém $\mathbb{R}$. Tedy

$$\mathrm{C}(x) = \mathrm{S}'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

## 3.2 Vlastnosti funkcí S a C

$\boxed{v_1}$ $\mathrm{S}$ a $\mathrm{C}$ jsou spojité na $\mathbb{R}$.

*Důkaz.* Tvrzení plyne z toho, že funkce mají vlastní derivace. □

$\boxed{v_2}$ $\mathrm{S}'' = -\mathrm{S}, \quad \mathrm{C}'' = -\mathrm{C}$ na $\mathbb{R}$.

*Důkaz.* Tvrzení plyne přímo z definic úloh (10) a (11). □

$\boxed{v_3}$ $\mathrm{S}(0) = 0, \quad \mathrm{S}'(0) = 1 \quad$ a $\quad \mathrm{C}(0) = 1, \quad \mathrm{C}'(0) = 0.$

*Důkaz.* Tvrzení plyne přímo z definic úloh (10) a (11). □

$\boxed{v_4}$ $\mathrm{S}'(x) = \mathrm{C}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Tvrzení plyne přímo z Věty 3.2. $\square$

$\boxed{v_5}$ $\mathrm{C}'(x) = -\mathrm{S}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Nechť $\forall x \in \mathbb{R}$. Z $\boxed{v_4}$ vyplývá

$$\mathrm{S}'(x) = \mathrm{C}(x),$$

tuto rovnici zderivujeme

$$\mathrm{S}''(x) = \mathrm{C}'(x).$$

Z $\boxed{v_2}$ plyne rovnost

$$\mathrm{C}'(x) = -\mathrm{S}(x).$$

$\square$

$\boxed{v_6}$ Lichost funkce S: $\mathrm{S}(-x) = -\mathrm{S}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Tvrzení plyne přímo z Věty 3.1. $\square$

$\boxed{v_7}$ Sudost funkce C: $\mathrm{C}(-x) = \mathrm{C}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Definujme funkce $z$ a $u$ předpisy

$$z(x) = \mathrm{C}(-x), \quad u(x) = \mathrm{C}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Platí

$$z''(x) = \mathrm{C}''(-x) = -\mathrm{C}(-x) = -z(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a

$$z(0) = \mathrm{C}(0) = 1$$
$$z'(0) = -\mathrm{C}'(0) = 0.$$

Navíc

$$u''(x) = \mathrm{C}''(x) = -\mathrm{C}(x) = -u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a

$$u(0) = \mathrm{C}(0) = 1$$
$$u'(0) = \mathrm{C}'(0) = 0.$$

Obě funkce tedy řeší počáteční úlohu

$$y'' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

která má podle Lemmatu 3.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $z(x) = u(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tzn. $\boxed{v_7}$ platí. □

$\boxed{v_8}$ $\mathrm{S}(x + x_0) = \mathrm{C}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ a $x_0$ z Věty 3.1.

*Důkaz.* Označme

$$z(x) = \mathrm{S}(x + x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$z''(x) = \mathrm{S}''(x + x_0) = -\,\mathrm{S}(x + x_0) = -z(x)$$
$$z(0) = \mathrm{S}(x_0) = 1$$
$$z'(0) = \mathrm{S}'(x_0) = 0,$$

tzn. $z$ řeší stejnou počáteční úlohu jako C, která má podle Lemmatu 3.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $z(x) = \mathrm{C}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tzn. $\boxed{v_8}$ platí. □

$\boxed{v_9}$ $\mathrm{S}^2(x) + \mathrm{C}^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Tvrzení plyne přímo z Věty 3.1. a vlastnosti $\boxed{v_4}$. □

$\boxed{v_{10}}$ $\mathrm{S}(x_0) = 1, \quad \mathrm{C}(x_0) = 0,$ kde $x_0$ je bod z Věty 3.1.

*Důkaz.* Tvrzení plyne z Věty 3.1. a vlastnosti $\boxed{v_9}$. □

$\boxed{v_{11}}$ $\mathrm{S}(a + b) = \mathrm{S}(a)\,\mathrm{C}(b) + \mathrm{C}(a)\,\mathrm{S}(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Nechť $b \in \mathbb{R}$ je libovolné. Definujme funkce $z$ a $u$ předpisy

$$z(x) = \mathrm{S}(x+b), \quad u(x) = \mathrm{S}(x)\,\mathrm{C}(b) + \mathrm{C}(x)\,\mathrm{S}(b), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Platí

$$z''(x) = \mathrm{S}''(x+b) = -\,\mathrm{S}(x+b) = -z(x)$$

a

$$z(0) = \mathrm{S}(0+b) = \mathrm{S}(b)$$
$$z'(0) = \mathrm{S}'(0+b) = \mathrm{S}'(b) = \mathrm{C}(b), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Navíc

$$u''(x) = \mathrm{S}''(x)\,\mathrm{C}(b) + \mathrm{C}''(x)\,\mathrm{S}(b) = -\,\mathrm{S}(x)\,\mathrm{C}(b) - \mathrm{C}(x)\,\mathrm{S}(b) = -u(x)$$

a

$$u(0) = \mathrm{S}(0)\,\mathrm{C}(b) + \mathrm{C}(0)\,\mathrm{S}(b) = \mathrm{S}(b)$$
$$u'(0) = \mathrm{S}'(0)\,\mathrm{C}(b) + \mathrm{C}'(0)\,\mathrm{S}(b) = \mathrm{C}(b), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obě funkce tedy řeší počáteční úlohu

$$y'' = -y, \quad y(0) = \mathrm{S}(b), \quad y'(0) = \mathrm{C}(b),$$

která má podle Lemmatu 3.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $z(x) = u(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tzn. $\boxed{v_{11}}$ platí. □

$\boxed{v_{12}}$ $\mathrm{C}(a+b) = \mathrm{C}(a)\,\mathrm{C}(b) - \mathrm{S}(a)\,\mathrm{S}(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Nechť $b \in \mathbb{R}$ je libovolné. Definujme funkce $z$ a $u$ předpisy

$$z(x) = \mathrm{C}(x+b), \quad u(x) = \mathrm{C}(x)\,\mathrm{C}(b) - \mathrm{S}(x)\,\mathrm{S}(b), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Platí

$$z''(x) = \mathrm{C}''(x+b) = -\,\mathrm{C}(x+b) = -z(x)$$

a

$$z(0) = \mathrm{C}(0+b) = \mathrm{C}(b)$$
$$z'(0) = \mathrm{C}'(0+b) = \mathrm{C}'(b) = -\mathrm{S}(b), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Navíc

$$u''(x) = \mathrm{C}''(x)\,\mathrm{C}(b) - \mathrm{S}''(x)\,\mathrm{S}(b) = -\mathrm{C}(x)\,\mathrm{C}(b) + \mathrm{S}(x)\,\mathrm{S}(b) = -u(x)$$

a

$$u(0) = \mathrm{C}(0)\,\mathrm{C}(b) - \mathrm{S}(0)\,\mathrm{S}(b) = \mathrm{C}(b)$$
$$u'(0) = \mathrm{C}'(0)\,\mathrm{C}(b) - \mathrm{S}'(0)\,\mathrm{S}(b) = -\mathrm{S}(b), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obě funkce tedy řeší počáteční úlohu

$$y'' = -y, \quad y(0) = \mathrm{C}(b), \quad y'(0) = -\mathrm{S}(b),$$

která má podle Lemmatu 3.1. právě jediné maximální řešení. Z toho plyne, že $z(x) = u(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tzn. $\boxed{v_{12}}$ platí. □

$\boxed{v_{13}}$ S a C jsou $2\pi$-periodické (tzn. $x_0 = \pi/2$).

*Důkaz.* Z Věty 3.1. víme, že funkce S je $4x_0$-periodická. Z $\boxed{v_8}$ vyplývá, že funkce C je funkce S posunutá o $x_0$ doleva a je tedy také $4x_0$-periodická. Našim cílem bude dokázat, že

$$x_0 = \pi/2.$$

Z $\boxed{v_9}$ vyplývá, že body

$$(\mathrm{C}(x), \mathrm{S}(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

leží na jednotkové kružnici. Navíc z $\boxed{v_3}$ a $\boxed{v_{10}}$ víme, že

$$(\mathrm{C}(0), \mathrm{S}(0)) = (1, 0)$$
$$(\mathrm{C}(x_0), \mathrm{S}(x_0)) = (0, 1)$$

a

$$\mathrm{C}(x), \mathrm{S}(x) > 0, \quad \forall x \in (0, x_0),$$

nebo-li body $(\mathrm{C}(x), \mathrm{S}(x))$ pro $x \in (0, x_0)$ leží v I. kvadrantu na jednotkové kružnici.

Je tedy definována křivka v rovině $\varphi : \langle 0, x_0 \rangle \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$\varphi(x) = (\mathrm{C}(x), \mathrm{S}(x)),$$

jejímž geometrickým obrazem je čtvrt jednotkové kružnice v I. kvadrantu. Vzhledem k průběhu funkcí C a S jde o prostou křivku. Navíc z $\boxed{v_4}$ a $\boxed{v_5}$ plyne

$$\varphi'(x) = (\mathrm{C}'(x), \mathrm{S}'(x)) = (-\mathrm{S}(x), \mathrm{C}(x)), \quad \forall x \in \langle 0, x_0 \rangle.$$

Odtud a z $\boxed{v_9}$ plyne

$$||\varphi'(x)||_E = \sqrt{(-\mathrm{S}(x))^2 + (\mathrm{C}(x))^2} = \sqrt{1} = 1, \quad \forall x \in \langle 0, x_0 \rangle,$$

Protože $\pi$ lze definovat jako polovinu délky jednotkové kružnice, pak čtvrtinu délky jednotkové kružnice je $\pi/2$. Z toho plyne

$$\pi/2 = \int_0^{x_0} ||\varphi'(t)||_E \, \mathrm{d}t = \int_0^{x_0} 1 \, \mathrm{d}t = x_0.$$

Tzn., že funkce S a C jsou $2\pi$-periodické. $\square$

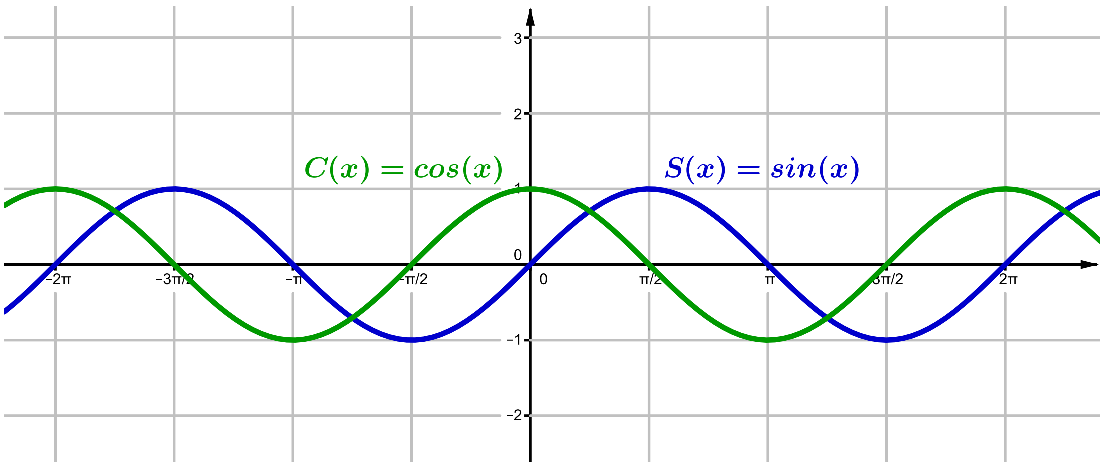
$\boxed{v_{14}}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{S}(x)}{x} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

*Důkaz.* Podle definice derivace funkce v bodě platí rovnost

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{S}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(0)}{x - 0} = \mathrm{S}'(0) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

**Poznámka 3.1.** Z uvedených a dokázaných vlastností funkce S a funkce C je zřejmé, že se jedná o elementární funkce sinus a cosinus známé především ze střední školy (viz Obrázek 7). O tom se také můžeme přesvědčit v [1], kde jsou funkce sinus a cosinus přímo definovány vlastnostmi z Věty 3.1. a $\boxed{v_3}$, $\boxed{v_6}$, $\boxed{v_7}$, $\boxed{v_{10}}$, $\boxed{v_{11}}$, $\boxed{v_{12}}$, $\boxed{v_{13}}$, $\boxed{v_{14}}$.




Obrázek 7: Graf funkcí sinus a cosinus

# Závěr

Účelem této práce bylo ukázat, že pouze na základě zadané diferenciální rovnice, jejího předpisu a počátečních podmínek, lze definovat známé elementární funkce.

Pro tento záměr jsme si vybrali dvě specifické diferenciální rovnice. A tak jsme se ve druhé kapitole seznámili s diferenciální rovnicí 1. řádu: $y' = y$ a ve třetí kapitole s diferenciální rovnicí 2. řádu: $y'' = -y$. Dříve než jsme mohli přistoupit k samotnému zkoumání řešení těchto rovnic, bylo nezbytné se seznámit se základními pojmy a především se dvěma větami - o existenci a o jednoznačnosti (viz Kapitola 1). Tyto dvě věty jsou velice důležité, protože nám říkají, které diferenciální rovnice mají vůbec nějaké řešení (o existenci) a jestli je toto řešení jediné (o jednoznačnosti). U obou případů námi zvolených diferenciálních rovnic jsme potvrdili jednoznačnost maximálního řešení v úvodu každé kapitoly. Toto jediné maximální řešení jsme si poté nadefinovali jako funkce E (viz Kapitolu 2) a funkce S a C (viz Kapitolu 3).

Dalším krokem bylo dokázat, že jsou tyto funkce definované na celém oboru reálných čísel. Posléze jsme přistoupili k samotnému určování a dokazování vlastností funkcí, na jejichž základě jsme schopni říci, že se jedná o elementární funkce nám známé především ze středních škol. Konkrétně funkce E je rovna exponenciální funkci $\mathrm{e}^x$, funkce S goniometrické funkci sinus a funkce C goniometrické funkci cosinus.

Tato práce je vysázena typografickým systémem LaTeX a pro větší srozumitelnost některých důkazů jsou připojeny i obrázky grafů funkcí vytvořené v programu Geogebra.

# Literatura

[1] Jarník, V.: *Diferenciální počet I.* Praha: ČSAV, 1955.

[2] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2001.

[3] Kojecká, J., Kojecký, T.: *Matematická analýza pro 1. semestr*, 1. vydání. Olomouc: VUP, 1997.

[4] Kopáček, J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*, 4. přepracované vydání. Praha: Matfyzpress, 2004.

[5] Kopáček, J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky (II)*, 3. upravené vydání. Praha: Matfyzpress, 2007.

[6] Kopka, H., Daly, P.W.: *LaTeX Podrobný průvodce*, 1. vydání. Brno: Computer Press, 2004.

[7] Lomtatidze, L., Plch, R.: *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky*, 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2003.