UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Infinitezimální počet ve středoškolské fyzice

Katedra algebry a geometrie
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Adéla Cekulová**
Studijní program: B1701 Fyzika
Studijní obor Matematika, Fyzika
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2019

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Adéla Cekulová

Název práce: Infinitezimální počet ve středoškolské fyzice

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2019

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá možnostmi využití infinitezimálního počtu ve středoškolské fyzice. První část obsahuje důležité definice a fakta infinitezimálního počtu, které se vyučují na některých středních školách. Proto může být text využit jako pomůcka i při výuce matematiky.
Ve druhé části práce je diskutována fyzikální aplikace. Ve vybraných tématech středoškolské fyziky je i s řešenými příklady ukázána možnost využití infinitezimálního počtu ve výuce.

Klíčová slova: Infinitezimální počet; fyzika; matematika; střední škola; funkce; aplikace; limita; derivace; integrál; mechanika; výuka; elektřina; magnetismus; kmitání; řešené příklady

Počet stran: 51

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Adéla Cekulová

Title: Infinitesimal calculus in Physics at secondary schools

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Algebra and Geometry

Supervisor: Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.

The year of presentation: 2019

Abstract: This bachelor thesis deals with possibilities of using infinitesimal calculus in Physics at secondary schools. The first section contains important definitions and facts of infinitesimal calculus taught in Maths at some secondary schools. Therefore the text can be used as an aid when teaching Maths. In the second section of the thesis, the applications in Physics is discussed. Several topics are picked and the possibilities of the use of infinitesimal calculus when teaching them are shown with solved problems.

Key words: Infinitesimal calculus; Physics; Maths; secondary school; function; application; limit; derivation; integral; mechanics; teaching; electricity; magnetism; vibration; solved problems

Number of pages: 51

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením pana Mgr. Vladimíra Vaňka, Ph.D. s vyznačením všech použitých pramenů a spoluautorství. Souhlasím se zveřejněním bakalářské práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách, ve znění pozdějších předpisů. Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, ve znění pozdějších předpisů.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych poděkovala panu Mgr. Vladimíru Vaňkovi, Ph.D. za čas, pomoc a odborné vedení při zpracování této práce.

ÚVOD

Tato bakalářská práce je zaměřena na možnosti využití infinitezimálního počtu ve středoškolské fyzice, který se ve výuce zpravidla nezavádí. V současné situaci našeho školství, kdy je výuka matematiky skloňována především v souvislosti se státní maturitou, je otázkou, zda infinitezimální počet do středoškolského učiva zahrnovat. Rámcový vzdělávací program jej nevyžaduje, avšak některé střední školy, a zvláště pak víceletá gymnázia, toto učivo do svých osnov zahrnují. V tomto případě je vhodné se zabývat i jeho aplikacemi a využít jej např. i při výuce fyziky.

Cílem práce je vytvořit text, podle kterého bude možné nejprve provést výklad učiva o infinitezimálním počtu, a následně přehled témat středoškolské fyziky, ve kterých je možné jej využít.

S ohledem na matematické znalosti žáků nastupujících ze základní školy na školu střední nejprve zopakujeme a rozšíříme poznatky o vlastnostech funkcí a uvedeme přehled elementárních funkcí. V návaznosti na toto učivo zavedeme infinitezimální počet, přičemž se nebudeme zabývat příliš podrobným výkladem ani důkazy vět.

Ve druhé části práce jsou pak uvedeny ty kapitoly fyziky, ve kterých se žáci na střední škole mohou alespoň náznakem setkat s užitím infinitezimálního počtu, a kde je tedy možné toto učivo vhodně rozšířit. Součástí jsou také řešené příklady k vybraným tématům, které bude možno využít jak v samotné fyzice, tak i v matematice k procvičení daného učiva.

Kapitola 1

FUNKCE

K zavedení infinitezimálního počtu potřebujeme znát pojem funkce a její vlastnosti. S pojmem funkce a jejími základními vlastnostmi se žáci setkávají již na druhém stupni základní školy, kde se seznámí především s přímou a nepřímou úměrností a lineární funkcí. Znají pojmy jako definiční obor funkce, obor hodnot, graf funkce, umí vyjádřit funkční vztah tabulkou, rovnicí nebo grafem. Tyto pojmy je tedy možno již v prvním ročníku střední školy zopakovat a rozšířit poznatky o dalších elementárních funkcích a jejich vlastnostech.

1.1. Definice a základní pojmy

1.1.1. Definice

Funkci můžeme definovat více způsoby, přičemž ve středoškolských učebnicích se nejčastěji setkáme s následujícími definicemi.

Def. 1: Nechť A, B jsou neprázdné množiny reálných čísel ($A \subset \mathbb{R}$,$B=\mathbb{R}$). Přiřadíme-li každému číslu $x \in A$ právě jedno číslo $y \in B$, pak se toto jednoznačné přiřazení (zobrazení) reálných čísel nazývá **reálná funkce reálné proměnné x**.

Def. 2: Reálná funkce f reálné proměnné je předpis, podle kterého je každému $x \in A \subset \mathbb{R}$ přiřazeno nejvýše jedno $y \in \mathbb{R}$; zapisujeme $y = f(x)$.

Def. 3: Funkcí se nazývá každé zobrazení f množiny A do množiny R. Množinu A nazýváme definiční obor funkce f a značíme ji $D(f)$.

Nejrozšířenější je Def. 2, která je však nejméně přesná. Naopak nejméně se setkáme s definicí funkce pomocí zobrazení (Def. 3), jelikož je k ní nutné znát i tento pojem. Při zavádění (či opakování) pojmu funkce je vhodné žáky seznámit s více než jen jednou definicí.

Dále definujeme tyto pojmy:

Def. 4: Množina A všech hodnot proměnné x se nazývá **definiční obor funkce f** a značí se $D(f)$ nebo D_f.

Def. 5: Číslo y přiřazené číslu x se nazývá **funkční hodnota** či **hodnota funkce f v bodě x** a značí se $f(x)$; píšeme $y = f(x)$. Množina všech hodnot funkce f se nazývá **obor hodnot funkce f** nebo **obor funkčních hodnot funkce f**. Značí se $\mathrm{H}(f)$ nebo H_f.

Def. 6: V rovině zvolíme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem O a osami x, y. Pro všechna $x \in D(f)$ každé uspořádané dvojici reálných čísel $[x; f(x)]$ přiřadíme v této rovině bod, který má (v uvedeném pořadí) souřadnice $x, y = f(x)$. Množinu všech takových bodů nazýváme **grafem funkce f.**

1.1.2. Způsob zadání funkce

Pro zadání funkce je třeba stanovit **definiční obor** funkce $D(f)$ a **funkční předpis**, což je pravidlo, podle kterého ke každému $x \in D(f)$ přiřazujeme jednoznačně funkční hodnotu $y = f(x)$. Nejčastěji se setkáváme s následujícími formami funkčního předpisu:

1. **Analytické zadání** – nejčastější způsob zadání, kdy je funkční předpis dán vzorcem, tj. rovnicí ve tvaru $y = f(x)$.

2. **Grafické zadání** – funkční předpis je dán grafem funkce.

3. **Zadání výčtem funkce** – funkční předpis je určen výčtem všech uspořádaných dvojic $[x; f(x)]$ hodnot argumentu x a příslušných funkčních hodnot $f(x)$ zpravidla zapsaných do tabulky. Tento způsob zadání je možno použít pouze pro funkce, jejichž definičním oborem je konečná množina.[1]

1.1.3. Vlastnosti funkcí

Def. 7 (rovnost funkcí): O dvou funkcích f, g říkáme, že **jsou si rovny** (píšeme $f = g$), právě když mají týž definiční obor $D(f) = D(g)$ a v každém bodě x tohoto definičního oboru je $f(x) = g(x)$.

Def. 8 (složená funkce): Nechť jsou dány dvě funkce $g : u = g(x), x \in D(g)$ a $f : y = f(u), u \in D(f)$, takové, že $H(g) \cap D(f) \neq \emptyset$. Funkce h se nazývá **složená funkce** z funkcí g, f (v uvedeném pořadí), právě když pro ni platí:

1. Definičním oborem funkce h je množina všech čísel $x \in D(g)$, pro která je $g(x) \in D(f)$, tj. $\mathrm{D}(h) = \{x \in \mathrm{D}(g); g(x) \in \mathrm{D}(f)\}$.

2. Pro každé $x \in D(h)$ je $h(x) = f(u)$ čili $h(x) = f(g(x))$.

[1] POLÁK, Josef, 2012. Přehled středoškolské matematiky. Dotisk 9. přepracovaného vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. s. 131. ISBN 978-80-7196-356-1

Def. 9 (sudá a lichá funkce): Nechť funkce f s definičním oborem $D(f)$ má tuto vlastnost: Je-li $x \in D(f)$, pak také $-x \in D(f)$. Pak funkce f se nazývá **sudá (resp. lichá) funkce**, právě když pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Z **Def. 9** plyne, že graf sudé funkce je souměrný podle osy y a graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

Def. 10 (periodická funkce): Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in \mathrm{D}(f)$ je též $(x \pm p) \in \mathrm{D}(f)$ a platí $f(x \pm p) = f(x)$. Číslo p se nazývá **perioda funkce** f. (Ve fyzikálních aplikacích, kde nezávisle proměnnou je čas t, se perioda značí T.)

Def. 11 (omezená funkce): Nechť f je daná funkce a M podmnožina jejího definičního oboru D(f). Funkce f se nazývá **funkce zdola (resp. shora) omezená na množině M**, právě když existuje takové číslo $d \in \mathbb{R}$ (resp. $h \in \mathbb{R}$), že pro všechna $x \in \mathrm{M}$ je $f(x) \geq d$ (resp. $f(x) \leq h$). Funkce f se nazývá **funkce omezená na množině M**, právě když je zdola omezená i shora omezená na M.

Def. 12 (extrémy): Nechť f je daná funkce, M podmnožina jejího definičního oboru D(f), $a \in \mathrm{M}$, $b \in \mathrm{M}$.

1. Říkáme, že funkce f má v bodě a **minimum** (nejmenší hodnotu) **na množině M**, právě když pro všechna $x \in \mathrm{M}$ je $f(x) \geq f(a)$.

2. Říkáme, že funkce f má v bodě b **maximum** (největší hodnotu) **na množině M**, právě když pro všechna $x \in \mathrm{M}$ je $f(x) \leq f(b)$.

Def. 13 (monotónnost funkce): Nechť f je funkce, M podmnožina jejího definičního oboru D(f).

1. Funkce f se nazývá **funkce rostoucí (resp. klesající) na množině M**, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

2. Funkce f se nazývá **funkce neklesající (resp. nerostoucí) na množině M**, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Rostoucí a klesající funkce na množině M souhrnně nazýváme **ryze monotónní funkce na množině M**; funkce neklesající a nerostoucí pak **monotónní funkce na množině M**.

Def. 14 (prostá funkce): Funkce f s definičním oborem D(f) se nazývá prostá, právě když pro každou dvojici x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(f)$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ryze monotónní funkce jsou tedy funkcemi prostými.

Def. 15 (inverzní funkce): Prostá funkce je prosté zobrazení definičního oboru D(f) na množinu všech funkčních hodnot H(f) funkce f. K tomuto zobrazení existuje proto zobrazení inverzní, které je opět prosté a zobrazuje množinu $\mathrm{H}(f)$ na množinu $\mathrm{D}(f)$. Je to funkce, které říkáme **funkce inverzní** k funkci f a značíme ji f^{-1}.

Graf inverzní funkce f^{-1} je souměrně sdružený s grafem původní funkce f podle přímky o rovnici $y = x$.

1.2. Elementární funkce

Jak již bylo řečeno, žáci znají ze základní školy přímou a nepřímou úměrnost a lineární funkci. **Základní elementární funkce** jsou funkce konstantní, mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické, přičemž středoškolské učivo o funkcích nezahrnuje poslední tři jmenované.

Def. 16: Elementární funkcí nazýváme každou funkci, která buď patří mezi základní elementární funkce, anebo je z nich vytvořena pomocí konečného počtu základních algebraických operací (tj. jejich sčítáním, odčítáním, násobením, dělením) nebo tvořením složených funkcí.

1.2.1. Lineární funkce

Lineární funkce je funkce algebraická, racionální polynomická. Tato funkce patří mezi nejčastěji používané typy funkcí ve fyzice a dalších oborech.

Def. 17: Lineární funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R}$ (tj. funkce o definičním oboru $\mathbb{R}$), která je dána ve tvaru $f : y = ax+b$, kde a, b jsou reálná čísla. Speciální případ nastává pro $a = 0$, funkce nabývá tvaru $f : y = b$ a nazýváme ji **konstantní funkce**. Lineární funkce vyjádřené ve tvaru $f : y = ax$ (tedy takové, pro něž je $b = 0$) nazýváme také **přímá úměrnost**.

Grafem lineární funkce je vždy **přímka** různoběžná s osou y, speciálně pro konstantní funkci je to rovnoběžka s osou x.

1.2.2. Kvadratická funkce

Další funkcí, která patří mezi funkce algebraické, racionální polynomické, je funkce kvadratická.

Def. 18: Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci na množině $\mathbb{R}$ ve tvaru $f : y = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou reálná čísla a $a \neq 0$. Položíme-li $a = 1, b = c = 0$, dostáváme nejjednodušší kvadratickou funkci $f : y = x^2$, která se někdy nazývá **základní kvadratická funkce**.

Grafem kvadratické funkce je **parabola** souměrná podle osy rovnoběžné s osou y. Průsečík paraboly s touto osou souměrnosti nazýváme **vrchol paraboly**. Přímka rovnoběžná s osou x procházející vrcholem se nazývá **vrcholová tečna paraboly**.

1.2.3. Mocninná funkce

Poslední zmíněnou elementární funkcí, která patří mezi algebraické, racionální polynomické funkce, je mocninná funkce.

Def. 19: Mocninná funkce s přirozeným exponentem je funkce $f : y = x^n; n \in \mathbb{N}$, $D(f) = \mathbb{R}$. Speciálním případem je $n = 1$, kdy získáme funkci lineární; pro $n = 2$ získáme základní kvadratickou funkci. Funkce $f : y = x^3$ se nazývá základní kubická funkce atd.

Grafem mocninné funkce pro $n > 1$ je **parabola** n-tého stupně.

Def. 20: Mocninná funkce se záporným celým mocnitelem je funkce $f : y = x^{-n};\ n \in \mathbb{N}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Grafem mocninné funkce se záporným celým mocnitelem je **hyperbola** stupně $n+1$.

1.2.4. Nepřímá úměrnost

Def. 21: Nepřímá úměrnost je každá funkce $f : y = \frac{k}{x}; k \neq 0; D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ve speciálním případě, kdy $k = 1$, má funkce tvar $f : y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, což je mocninná funkce se záporným celým mocnitelem -1.

Grafem nepřímé úměrnosti je **rovnoosá hyperbola** souměrná podle počátku O a podle os kvadrantů soustavy souřadnic.

1.2.5. Lineární lomená funkce

Def. 22: Lineární lomená funkce je funkce $f : y = \frac{ax+b}{cx+d}; c \neq 0; ad \neq bc$; $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Grafem lineární lomené funkce je opět **rovnoosá hyperbola** se středem v bodě $[x_0; y_0] = \left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$, její asymptoty procházejí tímto bodem a jsou rovnoběžné s osami x a y.

Nepřímá úměrnost a lineární lomená funkce jsou funkce algebraické, racionální lomené.

1.2.6. Exponenciální funkce

Def. 23: Exponenciální funkce o základu *a* je funkce $f : y = a^x; a > 0; a \neq 1; D(f) = \mathbb{R}$. Speciálními případy jsou funkce, kde $a = 10$, kterou nazýváme **dekadická exponenciální funkce**, a funkce, jejíž základem je Eulerovo číslo e, tedy ve tvaru $f : y = e^x = \exp x$, která se nazývá **přirozená exponenciální funkce**.

Grafem exponenciální funkce je **exponenciální křivka** neboli **exponenciála**. Jelikož $a^0 = 1,\ \forall a \neq 0$, prochází tato křivka vždy bodem $[0; 1]$.

1.2.7. Logaritmická funkce

Def. 24: Logaritmická funkce o základu a označovaná $f : y = \log_a x; a > 0, a \neq 1$ je funkce inverzní k exponenciální funkci o témž základu a, která je ryze monotónní v definičním oboru $\mathbb{R}$ a nabývá v něm všech kladných funkčních hodnot. Definiční obor logaritmické funkce je tedy $\mathrm{D}(f) = (0; +\infty)$ a její obor funkčních hodnot $\mathrm{H}(f) = \mathbb{R}$.

Funkční hodnoty logaritmické funkce nazýváme logaritmy, přičemž podle definice platí $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$.

Stejně jako u exponenciálních funkcí rozlišujeme speciální případy: funkci o základu $a = 10$ říkáme **dekadická logaritmická funkce** (značíme $\log x$), jejíž funkční hodnoty jsou **dekadické logaritmy**, a funkci o základu e, kterou nazýváme **přirozená logaritmická funkce** a značíme ji $\ln x$ (*logaritmus naturalis*). Funkční hodnoty nazýváme **přirozenými logaritmy**.

Grafem logaritmické funkce je **logaritmická křivka**, podle **Def. 15** je graf logaritmické funkce o základu a souměrný s grafem exponenciální funkce o základu a podle přímky o rovnici $y = x$ (osa 1. a 3. kvadrantu souřadnicové soustavy). Logaritmická křivka tedy vždy prochází bodem $[1; 0]$.

1.2.8. Goniometrické funkce

Pro definici goniometrických funkcí je třeba nejprve zavést pojem orientovaného úhlu a jeho velikosti.

Def. 25: Orientovaným úhlem v rovině rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. Přitom slovy uspořádaná dvojice vyjadřujeme skutečnost, že záleží na tom, která z obou polopřímek se bere jako první (**počáteční rameno orientovaného úhlu**) a která je druhá (**koncové rameno orientovaného úhlu**). Orientovaný úhel s počátečním ramenem *VA* a koncovým ramenem *VB* značíme $\widehat{AVB}$.
Definice orientovaného úhlu nevylučuje, že polopřímky *VA*, *VB* jsou totožné, pak $\widehat{AVB}$ se nazývá **nulový orientovaný úhel**.

Nyní můžeme přistoupit k definici goniometrických funkcí. V kartézské soustavě souřadnic sestrojíme jednotkovou kružnici a její průsečík s kladnou poloosou x označíme I. Ke každému reálnému číslu α lze pak přiřadit právě jeden orientovaný úhel velikosti α, jehož počáteční rameno je polopřímka OI. Průsečík koncového ramena orientovaného úhlu s jednotkovou kružnicí označíme M. Tento úhel nazýváme **orientovaný úhel velikosti α v základní poloze**. Bodem M vedeme kolmici k ose x, jejich průsečík je obrazem reálného čísla x_{M} a průsečík kolmice vedené bodem M k ose y s touto osou je obrazem reálného čísla y_{M}.

Def. 26: Druhou souřadnici bodu $M = [x_{\mathrm{M}}; y_{\mathrm{M}}]$ jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze nazýváme **sinus α** a jeho první souřadnici nazýváme **kosinus α**, značíme je $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. Je tedy

$\sin\alpha = y_M$, $\cos\alpha = x_M$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Těmito vztahy je každému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $\sin x$ a právě jedno reálné číslo $\cos x$, tj. tyto vztahy udávají funkční předpisy funkcí **sinus** $f : y = \sin x$ a **kosinus** $f : y = \cos x$; $D(f) = \mathbb{R}$.

Grafem funkce sinus je **sinusoida**, pro funkci kosinus je tato sinusoida posunutá o $\frac{\pi}{2}$ ve směru záporné poloosy x a říkáme jí **kosinusoida**.

Pomocí funkcí sinus a kosinus definujeme funkce tangens a kotangens.

Def. 27: Funkcí **tangens** se nazývá funkce daná vztahem tg $x = \frac{\sin x}{\cos x}$;$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, zapisujeme $f : y = \operatorname{tg} x$. Funkcí **kotangens** se nazývá funkce daná vtahem cotg $x = \frac{\cos x}{\sin x}$;$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}$, zapisujeme $f : y = \operatorname{cotg} x$.

Graf funkce tangens nazýváme **tangentoida** a funkce kotangens **kotangentoida**.

Exponenciální, logaritmické a goniometrické funkce jsou funkcemi transcendentními (nealgebraickými), se kterými se také často setkáváme ve fyzice a dalších aplikacích.

Kapitola 2

INFINITEZIMÁLNÍ POČET

Infinitezimální počet je souhrnný název pro diferenciální a integrální počet a je součástí matematické analýzy. Název infinitezimální pochází z latinského slova *infinitesimalis*, což znamená *nekonečně malý*.

Infinitezimální počet má využití nejen ve fyzice, ale také v chemii, strojírenství, stavebnictví, elektrotechnice, ekonomii, pravděpodobnosti a statistice i v lékařství.[1]

Přestože diferenciální a integrální počet není zahrnut v rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia, bývají alespoň základy tohoto učiva zařazeny do posledního ročníku, pokud to umožňuje hodinová dotace matematiky v průběhu studia. Zařazení infinitezimálního počtu na konec středoškolské matematiky však znamená, že již nezbývá prostor pro jeho využití ve fyzice či například v chemii.

Kromě znalosti funkcí je ke zvládnutí učiva o infinitezimálním počtu nutná také znalost úprav výrazů, řešení rovnic a nerovnic a výpočtu obsahů rovinných útvarů a objemů rotačních těles. S tímto učivem se žáci seznamují již ve vyšších ročnících základní školy, potřebné pojmy a operace můžeme tedy jen v krátkosti zopakovat a po učivu o funkcích přímo zařadit základy infinitezimálního počtu tak, abychom jej mohli využít i ve výuce fyziky.

2.1. Historie infinitezimálního počtu

Diferenciální a integrální počet vytvořili na konci 17. století nezávisle na sobě anglický matematik, fyzik a astronom Isaac Newton a německý matematik a filozof Gottfried Wilhelm Leibniz. Leibniz se zabýval jeho využitím

[1] HRUBÝ, Dag, KUBÁT, Josef, 2012. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Dotisk 3. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. s. 7. ISBN 978-80-7196-363-9.

z hlediska geometrie, Newton spíše aplikací ve fyzice.[2][3]

Svou prací navázali na předchůdce, mezi něž patřili francouzští matematici René Descartes a Pierre de Fermat a anglický matematik a učitel Newtona Isaac Barrow. Také Johannes Kepler ve spisu *Nova stereometrie doliorum vinariorum* (*Nová stereometrie vinných sudů*) využíval infinitezimálních úvah k určení objemu sudů. V renesanční Itálii se metodami kvadratury (výpočty obsahů, objemů apod.) zabývali Galileo Galilei a jeho žák Bonaventura Cavalieri.[4]

Během 19. století docházelo ke zpřesňování matematické analýzy, o které se zasloužili český matematik a filozof Bernard Bolzano (německy mluvící; otec Ital, matka Češka) a především francouzský matematik Augustin Louis Cauchy, který zavedl pojem limita funkce. Německý matematik Karl Weierstrass dal matematické analýze aritmetický základ a dovršil tak její upřesňování.[5]

2.2. Spojitost a limita funkce

2.2.1. Spojitost funkce

Intuitivně můžeme jistě říct, že funkce je spojitá, pokud její graf můžeme nakreslit jedním tahem. Pak také intuitivně chápeme spojitost funkce v bodě tak, že je graf funkce v tomto bodě „nepřetržený", tedy obsahuje daný bod. Na tyto intuitivní představy však nemůžeme obecně v matematice spoléhat, a proto je nutné pojmy exaktně definovat.

Nejprve zavedeme pojem okolí bodu:

Def. 28: Okolím bodu a nazýváme otevřený interval $(a-\delta; a+\delta)$, kde δ je kladné reálné číslo, které nazýváme **poloměrem okolí**. Číslo a nazýváme **střed okolí**. Toto okolí nazýváme také **δ-okolí bodu a**, značíme jej $\mathrm{U}(a)$ nebo $\mathrm{U}(a,\delta)$.

Z definice vyplývá, že δ-okolí bodu a tvoří všechna $x \in \mathbb{R}$, která vyhovují nerovnosti $|x-a| < \delta$. Dále se můžeme setkat s množinou $\mathrm{U}(a,\delta) \setminus \{a\}$, kterou nazýváme **prstencovým okolím** bodu a.[6]

---

[2] HRUBÝ, Dag, KUBÁT, Josef, 2012. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Dotisk 3. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. s. 194. ISBN 978-80-7196-363-9.

[3] Diferenciální počet ve fyzice [online]. s. 3 [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difpoc.pdf

[4] HRUBÝ, Dag, KUBÁT, Josef, 2012. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Dotisk 3. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. s. 195. ISBN 978-80-7196-363-9.

[5] HRUBÝ, Dag, KUBÁT, Josef, 2012. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Dotisk 3. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. s. 196. ISBN 978-80-7196-363-9.

[6] HRUBÝ, Dag, KUBÁT, Josef, 2012. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Dotisk 3. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. s. 22-23. ISBN 978-80-7196-363-9.

Def. 29: Nechť funkce f je definována v nějakém okolí $\mathrm{U}(a)$ bodu a a nechť $x \in \mathrm{U}(a)$. Rozdíl $x - a$ nazýváme **přírůstek argumentu** v bodě a a označujeme $\Delta x = x - a$.

Def. 30: Nechť funkce f je definována v nějakém okolí $\mathrm{U}(a)$ bodu a a nechť $x \in \mathrm{U}(a)$. Rozdíl $f(x) - f(a)$ nazýváme **přírůstek funkce** v bodě a odpovídající přírůstku $\Delta x = x - a$ argumentu a označujeme $\Delta y = f(x) - f(a)$.

Pomocí pojmu okolí bodu můžeme nyní definovat pojem spojitosti funkce:

Def. 31: Funkce f je spojitá v bodě a, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu $f(a)$ existuje takové okolí bodu a, že pro všechna x z tohoto okolí bodu a patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného okolí bodu $f(a)$.

Aby byla funkce spojitá v nějakém bodě a, musí být definována nejen v tomto bodě, ale také na nějakém jeho okolí.

Příkladem spojitých funkcí je funkce konstantní, lineární nebo funkce sinus a kosinus.

Pro dvě funkce f, g platí věta:

Věta 1: Jsou-li funkce f, g spojité v bodě a, pak také $f \pm g$, $f \cdot g$ a $\frac{f}{g}; g(a) \neq 0$ jsou funkcemi spojitými v bodě a.

Jelikož se setkáváme i s funkcemi, jejichž definiční obor není celá množina $\mathbb{R}$, můžeme také definovat jednostranné okolí bodu, a tedy i jednostranné limity a limity na intervalech (otevřených, uzavřených, polouzavřených). Všechny elementární funkce jsou spojité v intervalech, ve kterých jsou definovány.

Zřejmě platí následující věta:

Věta 2: Funkce f je spojitá v bodě a, právě když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

Pro funkci spojitou na uzavřeném intervalu platí:

Věta 3 (Weierstrassova): Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje alespoň jeden takový bod $x_1 \in \langle a, b\rangle$, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \leq f(x_1)$, a alespoň jeden takový bod $x_2 \in \langle a, b\rangle$, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \geq f(x_2)$.

Tato věta nám tedy říká, že funkce spojitá v uzavřeném intervalu nabývá v tomto intervalu alespoň v jednom bodě svého minima a alespoň v jednom bodě maxima.

Věta 4 (Bolzano-Weierstrassova): Je-li funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a $f(a) \neq f(b)$, potom ke každému číslu K, které leží mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$, existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že $f(c) = K$.

Jinými slovy tato věta říká, že funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$, pro kterou platí $f(a) \neq f(b)$, nabývá v tomto intervalu všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Důsledkem je další důležitá vlastnost spojitých funkcí (zvaná Darbouxova), kterou uvádí následující věta.

Věta 5: Je-li funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a mají-li čísla $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, tj. $f(a) \cdot f(b) < 0$, potom existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, v němž platí $f(c) = 0$.

Věta 5 tedy říká, že graf funkce splňující dané podmínky protíná alespoň v jednom bodě osu x.

2.2.2. Limita funkce

Dalším z pro žáky nových pojmů je limita, která patří k nejzákladnějším pojmům celé matematiky. Souvisí s výše zavedeným pojmem spojitosti a umožní nám definovat pojmy derivace a integrál.

Def. 32: Funkce f má v bodě a limitu L, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje okolí bodu a tak, že pro všechna reálná $x \neq a$ z tohoto okolí náleží hodnoty $f(x)$ zvolenému okolí bodu L. Zapisujeme $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Platí, že funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu. Důkaz tohoto tvrzení můžeme provést sporem.

Věta 6: Funkce f je spojitá v bodě a, právě když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Věta 7 (o limitě dvou funkcí): Jestliže pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a platí $f(x) = g(x)$ a současně $\lim_{x\to a} g(x) = L$, potom má v bodě a limitu i funkce f a platí $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$.

Věta 8 (o třech limitách, o sevření): Jestliže pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a současně $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, potom existuje také limita funkce g v bodě a a platí $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Věta 8 je jednou z užitečných metod výpočtu limit. Pomůckou pro žáky, jak si tuto větu zapamatovat, je „věta o policajtech a zlodějích“. Funkce f a h jsou „policisté“ a funkce g „zloději“. Zloději mohou unikat pouze ve dvou směrech, přičemž z každého z těchto směrů je pronásledují policisté a míří k určitému společnému bodu. To znamená, že policisté „naženou“ zloděje do tohoto bodu.

Pro limity platí, že limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí je rovna součtu, rozdílu, součinu a podílu limit jednotlivých funkcí (pro podíl musí být splněna podmínka nenulovosti dělitele).

Stejně jako u spojitosti můžeme definovat jednostranné limity, pro které platí věta:

Věta 9: Limita funkce f v bodě a existuje, právě když existují v bodě a limity zprava a zleva a jsou si rovny. Potom se limita funkce f v bodě a rovná společné hodnotě limit zprava a zleva.

Pojem limity funkce můžeme rozšířit i pro případy, kdy a nebo L jsou $\pm\infty$ (nevlastní body). Pak rozlišujeme nevlastní limity ve vlastním bodě, jednostranné nevlastní limity ve vlastním bodě, vlastní limity v nevlastním bodě a nevlastní limity v nevlastním bodě.

2.2.3. Významné limity

Na závěr této části uvedeme některé významné limity:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^n} = 0; n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\sin x \quad \text{neexistuje}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\cos x \quad \text{neexistuje}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\mathrm{tg}x = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\mathrm{tg}x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\mathrm{cotg}x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\mathrm{tg}x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \ ; a>0, a\neq 1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^\pm}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

1. Pro $a \in (0;1)$:

$$\lim_{x\to -\infty}a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}a^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\log_a x = -\infty$$

2. Pro $a \in (1;+\infty)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} a^x &= 0\\
\lim_{x\to+\infty} a^x &= +\infty\\
\lim_{x\to 0^+} \log_a x &= -\infty\\
\lim_{x\to+\infty} \log_a x &= +\infty\\
\lim_{x\to 0^+} \ln x &= -\infty\\
\lim_{x\to+\infty} \ln x &= +\infty
\end{aligned}$$

2.3. Derivace funkce

Def. 33: Je-li funkce f definována v nějakém okolí $\mathrm{U}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li vlastní limita $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, pak se tato limita nazývá **derivace funkce f v bodě x_0**. Značí se $f'(x_0)$, tj. platí $f'(x_0)=\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

V **Def. 33** můžeme položit $x = x_0 + h$, tedy $h = x - x_0$. Derivace pak má tvar $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Stejně jako u spojitosti můžeme definovat i jednostranné derivace a derivaci v intervalu (otevřeném, uzavřeném i v polootevřených).

Vztah mezi spojitostí a derivací funkce vyjadřuje následující věta:

Věta 10: Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Tato Věta 10 je ve tvaru implikace a obrácená věta neplatí. Příkladem funkce, která je spojitá, ale nemá derivaci, je $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$ (jednostranné limity existují, ale nejsou si rovny).

Pro výpočet derivací funkcí jsou důležité následující věty:

Věta 11: Jestliže funkce u, v mají v bodě x_0 derivaci, má v bodě x_0 derivaci i součet, rozdíl, součin a pro $v(x_0) \neq 0$ i podíl funkcí u, v a platí:

$$(u \pm v)'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0),$$

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,v'(x_0),$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)\,v(x_0) - u(x_0)\,v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Věta 12: Nechť funkce $g : u = g(x)$ má v bodě x_0 derivaci $g'(x_0)$ a nechť funkce $f : y = f(u)$ má v bodě $u_0 = g(x_0)$ derivaci $f'(u_0)$. Pak složená funkce $h : f(g(x))$ má derivaci v bodě x_0, přičemž platí $h'(x_0) = f'(u_0)\,g'(x_0) = f'(g(x_0))\,g'(x_0)$.

2.4. Užití diferenciálního počtu

Tato kapitola bude pojednávat o využití diferenciálního počtu k vyšetřování průběhu funkce. Fyzikálním aplikacím bude věnována další část bakalářské práce.

2.4.1. Užití limity funkce

Jedním z využití limity je určení asymptoty grafu funkce. Asymptoty jsou přímky, jejichž znalost nám umožní poměrně přesné sestrojení grafu dané funkce. Rozlišujeme asymptoty dvojího druhu – se směrnicí a bez směrnice.

Def. 34: Přímku $y = ax + b$ nazveme **asymptotou se směrnicí grafu funkce** $\boldsymbol{f}$, jestliže $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$ nebo $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$.

Věta 13: Přímku $y = ax + b$ nazveme asymptotou se směrnicí grafu funkce f, jestliže $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$ nebo $a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax]$.

Def. 35: Nechť je funkce f definována v $\mathrm{U}(a,\delta)\setminus\{a\}$ nebo v $(a-\delta, a)$ nebo v $(a, a+\delta)$. Přímka o rovnici $x = a$ se nazývá **asymptota bez směrnice grafu funkce $\boldsymbol{f}$**, právě když má funkce f v bodě a aspoň jednu jednostrannou nevlastní limitu.

Asymptota bez směrnice je tedy rovnoběžka s osou y v bodě, ve kterém funkce není definovaná, ale je definovaná na nějakém jeho okolí (alespoň jednostranném).

Dále můžeme limitu využít také k určení tečny grafu funkce.

Def. 36: Je-li křivka grafem funkce $y = f(x)$ a existuje-li vlastní limita $k_\mathrm{T} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, pak **tečna křivky** v bodě $\mathrm{T} = [x_0, y_0]$ je přímka o rovnici $y - y_0 = k_\mathrm{T}(x - x_0)$.

V **Def. 36** nazýváme číslo k_T směrnicí tečny. Můžeme si všimnout, že definice směrnice je shodná s definicí derivace funkce v bodě x_0. Určení tečny grafu funkce je tedy prakticky využitím derivace funkce v bodě.

2.4.2. Užití derivace funkce

Věta 14 (Rolleova): Mějme funkci f, která má tyto vlastnosti:

1. je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) má derivaci,
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje v otevřeném intervalu (a, b) aspoň jeden bod c, pro který platí $f'(c) = 0$.

Věta 14 nám tedy říká, že funkce splňující uvedené vlastnosti má alespoň jednu tečnu rovnoběžnou s osou x.

První derivaci funkce lze využít ke zjištění monotónnosti funkce v intervalu. Platí věta:

Věta 15: Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a,b) kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí. Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a,b) zápornou derivaci, je v tomto intervalu klesající.

Další důležitou charakteristikou funkce, kterou můžeme určit pomocí derivace, jsou extrémy.

Def. 37: Funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum**, existuje-li takové okolí $\mathrm{U}(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in \mathrm{U}(x_0) \cap \mathrm{D}_f$ platí: $f(x) \leq f(x_0)$. Funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum**, existuje-li takové okolí $\mathrm{U}(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in \mathrm{U}(x_0) \cap \mathrm{D}_f$ platí: $f(x) \geq f(x_0)$.

Nutnou podmínku pro lokální extrém funkce v bodě, ve kterém má derivaci, vyjadřuje věta:

Věta 16: Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak platí $f'(x_0) = 0$.

Tyto body x_0 se nazývají **stacionární body funkce f**. Stacionární body společně s body, ve kterých funkce derivaci nemá, nazýváme „body podezřelé z extrémů“. Toto označení odpovídá skutečnosti, že v těchto bodech funkce f lokální minimum mít může, ale nemusí, což je pro žáky výhodná pomůcka.

Zbývá tedy otázka, jak určit, zda má funkce f v těchto bodech skutečně lokální extrémy. První možností, jak tuto skutečnost určit, je zkoumání znaménka derivace v okolí stacionárního bodu. Jestliže derivace funkce mění ve stacionárním bodě znaménko z kladného na záporné, pak má funkce v tomto bodě lokální maximum. V opačném případě jde o lokální minimum. Pokud změna znaménka derivace ve stacionárním bodě nenastává, nejedná se o extrém funkce. Druhým způsobem určení je využití druhé derivace. Platí, že je-li druhá derivace funkce ve stacionárním bodě kladná, pak je v tomto bodě lokální minimum; je-li záporná, pak je v tomto bodě lokální maximum. Pokud je však druhá derivace rovna nule, musíme použít první zmíněný způsob.

Druhou derivaci dále využijeme k určení konvexnosti a konkávnosti funkce. Funkce je konvexní na intervalu, jestliže je její graf nad jeho tečnou ve všech bodech tohoto intervalu. Graf konkávní funkce v daném intervalu je vždy pod tečnou ve všech bodech tohoto intervalu.

Věta 17: Funkce je v daném bodě **konvexní**, je-li v tomto bodě 2. derivace **kladná**. Funkce je v daném bodě **konkávní**, je-li v tomto bodě 2. derivace **záporná**.

Nulové body druhé derivace se nazývají body podezřelé z inflexe (inflexní body) a jsou to body, v nichž se může měnit konvexnost v konkávnost nebo naopak. Tyto body rozdělí definiční obor funkce na intervaly; v každém z těchto intervalů určíme znaménko 2. derivace a podle Věty 17 rozhodneme o konvexnosti a konkávnosti funkce.

Kromě těchto geometrických aplikací má derivace funkce využití i pro výpočet limit. Metoda je založena na následující větě:

Věta 18 (l'Hospitalovo pravidlo): Nechť pro dané funkce f, g a daný bod $a \in \mathbb{R}$, resp. $a = +\infty$ nebo $a = -\infty$ platí

1. buď $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, anebo $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$,
2. existuje limita $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní nebo nevlastní).

Pak existuje také limita $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (l'Hospitalovo pravidlo).

Obdobná věta platí i pro limity jednostranné.

2.4.3. Průběh funkce

Pro vyšetření průběhu funkce provádíme následující kroky:

1. Určíme definiční obor funkce, průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami a další speciální vlastnosti (parita, periodicita, omezenost).
2. Vypočteme limity v $\pm\infty$ a v bodech nespojitosti.
3. Určíme první derivaci funkce, její nulové body (stacionární body) a podle Věty 15 monotónnost.
4. Určíme druhou derivaci funkce, rozhodneme o existenci lokálních extrémů ve stacionárních bodech.
5. Vypočteme nulové body druhé derivace a rozhodneme o konvexnosti a konkávnosti funkce.
6. Určíme rovnice asymptot, pokud existují.
7. Načrtneme graf funkce.

2.5. Integrální počet

Základním problémem integrálního počtu je najít k funkci f funkci F tak, aby platilo $F'(x) = f(x)$.

2.5.1. Neurčitý integrál

Def. 38: Mějme dány funkce F, f definované v otevřeném intervalu (a,b). Jestliže pro všechna $x \in (a,b)$ platí $F'(x) = f(x)$, říkáme, že **funkce F je primitivní funkcí k funkci f** v intervalu (a,b). Množinu všech primitivních funkcí v daném intervalu značíme symbolem $\int f(x)\ \mathrm{d}x$, který nazýváme **neurčitý integrál funkce f**.

Z Def. 38 plyne, že integrování je proces opačný k derivaci. Pokud se chceme přesvědčit o správnosti určení primitivní funkce, zderivujeme ji a porovnáme s funkcí integrovanou – tyto funkce se musí rovnat.

Primitivní funkce F v intervalu (a,b) existuje, jestliže je funkce f na tomto intervalu spojitá.

Věta 19: Každé dvě primitivní funkce F, G k funkci f na intervalu (a,b) se liší o reálnou konstantu c, tj. $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + c$. Konstanta c se nazývá **integrační konstanta**.

Tato věta plyne z nulové derivace konstanty. Pro množinu všech primitivních funkcí v daném intervalu tedy platí $\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + c$.

Pro výpočet integrálů platí následující věty:

Věta 20: Nechť k funkci f existuje neurčitý integrál $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ na intervalu (a,b) a nechť k je libovolná reálná konstanta. Pak existuje na intervalu (a,b) také neurčitý integrál $\int kf(x)\ \mathrm{d}x$ a platí $\int kf(x)\ \mathrm{d}x = k\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

Věta 21: Nechť k funkcím f, g existují neurčité integrály $\int f(x)\ \mathrm{d}x$, $\int g(x)\ \mathrm{d}x$ na intervalu (a,b). Pak existuje také neurčitý integrál $\int [f(x) \pm g(x)]\ \mathrm{d}x$ na intervalu (a,b) a platí $\int [f(x) \pm g(x)]\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x \pm \int g(x)\ \mathrm{d}x$. Tuto větu lze rozšířit na libovolný počet funkcí.

2.5.2. Určitý integrál

Def 39.: Mějme dány funkce F, f definované na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Jestliže pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ platí $F'(x) = f(x)$, přičemž derivací funkce F v bodě a rozumíme derivaci v bodě a zprava a derivací funkce F v bodě b derivaci v bodě b zleva, říkáme, že funkce F je **primitivní funkcí** k funkci f na **uzavřeném intervalu** $\langle a,b\rangle$.

Opět platí, že ke každé funkci spojité v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ existuje v tomto intervalu primitivní funkce.

Def. 40: Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu I. Rozdíl $F(b) - F(a)$ funkčních hodnot funkce F v libovolných bodech a, b tohoto intervalu se nazývá **určitý integrál funkce f v mezích od a do b** a značí se $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Integrál definovaný v **Def. 40** se nazývá **Newtonův určitý integrál** a platí $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Číslo a nazýváme **dolní mez** a číslo b **horní mez** integrálu.

Věty 20 a 21 můžeme obdobně vyslovit i pro určitý integrál.

2.5.3. Integrační metody

Integrační metody používané ve středoškolské matematice jsou integrace metodou per partes a substitucí.

Metoda per partes (česky „po částech“) je založena na derivaci součinu dvou funkcí. Vyjadřuje ji následující věta:

Věta 22: Mají-li funkce u, v v intervalu (a,b) spojité derivace, pak v (a,b) platí $\int u(x)v'(x) = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$.

Metodu substituční užíváme pro integraci složených funkcí.

Věta 23: Nechť funkce $F(t)$ je primitivní funkcí k funkci $f(t)$ v intervalu (α,β). Nechť funkce $t = g(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu (a,b). Pro každé $x \in (a,b)$ nechť hodnota $g(x)$ patří do intervalu (α,β). Pak v intervalu (a,b) je funkce $F(g(x))$ primitivní funkcí k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$, tj. $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = F(g(x)) + C$.

Výsledek této věty zapisujeme $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(t)\ \mathrm{d}t = F(t) + C$, kde $t = g(x)$.

Při výpočtu integrálu substituční metodou vhodně zvolíme výraz $g(x) = t$. Tuto rovnici zderivujeme a vyjádříme $\mathrm{d}x$. Dosadíme za $g(x)$ a $\mathrm{d}x$ a určíme primitivní funkci $F(t)$. Opětovným dosazením za t získáme primitivní funkci $F(g(x))$.

Při užití této metody pro výpočet určitého integrálu můžeme přepočítat integrační meze a hodnotu integrálu určit přímo z $F(t)$.

2.5.4. Užití integrálního počtu

Určitý integrál můžeme využít k výpočtu délky křivky, obsahu rovinného útvaru nebo objemu rotačního tělesa. Integrální počet má široké využití i v dalších oblastech, například ve fyzice nebo fyzikální chemii.

Obsah S útvaru $\mathrm{U} = \mathrm{U}(a,b,f,g)$ v daném intervalu $\langle a,b\rangle$ omezeného grafy funkcí $f(x)$, $g(x)$ určíme podle vzorce $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru $\mathrm{U} = \mathrm{U}(a,b,f)$ kolem osy x, vypočteme podle vztahu $V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

2.6. Vzorce pro derivace a integrály elementárních funkcí

Přehled některých základních vzorců pro derivace a neurčité integrály je uveden v následující tabulce. U některých funkcí není vzorec pro derivaci nebo neurčitý integrál uveden. Neznamená to však, že tyto neexistují. Důvodem neuvedení těchto vzorců je fakt, že na střední škole se s nimi žáci nesetkávají a není vyžadována jejich znalost.

Tabulka 1: *Vzorce pro derivace a integrály*

Funkce $f : y = f(x)$	**Vzorec pro derivaci**	**Vzorec pro neurčitý integrál**
$y = c; c \in \mathbb{R}$	$y' = 0$	$\int c\mathrm{d}x = cx + C$
$y = x^k; k \in \mathbb{Z}$	$y' = kx^{k-1}$	$\int x^k \mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$
$y = cx^k; k \in \mathbb{Z}; c \in \mathbb{R}$	$y' = ckx^{k-1}$	$\int cx^k \mathrm{d}x = c \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	–
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	–
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	–
$y = \mathrm{cotg}\, x$	$y' = \frac{1}{\sin^2 x}$	–
$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	–	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + C$
$y = \frac{1}{\sin^2 x}$	–	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = \mathrm{cotg}\, x + C$

Kapitola 3

VYUŽITÍ INFINITEZIMÁLNÍHO POČTU VE STŘEDOŠKOLSKÉ FYZICE

Druhá část bakalářské práce se bude zabývat konkrétním využitím infinitezimálního počtu ve fyzice a možnostmi jeho využití ve výuce fyziky na střední škole.

3.1. Mechanika

První oblastí fyziky, se kterou se žáci setkávají již na základní škole, je mechanika, která se zabývá popisem (kinematika) a příčinami (dynamika) pohybu těles.

V kinematice se žáci nejprve seznámí s relativností klidu a pohybu, popisem polohy hmotného bodu ve vhodné vztažné soustavě, naučí se rozlišit pojmy trajektorie a dráha a klasifikovat pohyby na základě tvaru trajektorie. Hlavní náplní středoškolské kinematiky je pak studium různých typů pohybu podle rychlosti a zrychlení a jejich výpočet.

3.1.1. Rychlost hmotného bodu

Jedním z prvních fyzikálních vztahů, se kterými se žáci setkávají, je vztah pro výpočet průměrné rychlosti v_p hmotného bodu. Jeho dráha s je závislá na čase, ve kterém je hmotný bod v pohybu, říkáme, že je jeho funkcí a píšeme $s = s(t)$. Žáci již z hodin fyziky na základní škole vědí, že pohyb hmotného bodu po určité dráze můžeme charakterizovat jeho rychlostí.

Při výkladu nejprve definujeme průměrnou rychlost po celou dobu pohybu jako podíl dráhy s a času t, za který hmotný bod tuto dráhu urazí. Tedy platí vztah $v_p = \frac{s}{t}$. Žáci jistě ze své každodenní zkušenosti vědí, že rychlost pohybu se v jeho průběhu může měnit – např. autobus se během svojí cesty rozjíždí na určitou stálou rychlost, poté brzdí při příjezdu na zastávku, opět se rozjíždí, v obci a mimo ni udržuje jinou rychlost, v zatáčkách zpomaluje a na konci svojí trasy zastaví.[1] V takovém případě se můžeme ptát na průměrnou rychlost na určitém úseku (mezi dvěma zastávkami, v obci, na dálnici apod.). Zavádíme vztah $v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, což je podíl daného úseku dráhy Δs a časového intervalu Δt, za který je tento úsek překonán. V této chvíli musíme ještě zmínit, že průměrná rychlost během celkové doby pohybu t není průměrem průměrných rychlostí na jednotlivých úsecích, a určíme ji jako podíl celkové dráhy s a celkového času t, jak bylo zavedeno dříve.

Od průměrné rychlosti na určitém úseku můžeme přejít k zavedení velikosti **okamžité rychlosti** v daném bodě. Ta se většinou ve středoškolské fyzice pouze slovně definuje takto:

Def. 41: Velikost okamžité rychlosti v daném bodě trajektorie a v daném čase je definována jako průměrná rychlost ve velmi malém časovém intervalu na odpovídajícím úseku trajektorie s daným bodem.

Více se však středoškolská fyzika okamžitou rychlostí zpravidla nezabývá. Označení „velmi malý" v **Def. 41** nám nedává žádnou informaci o tom, s jakým časovým intervalem Δt bychom měli pracovat, a prostředky běžné středoškolské matematiky nám ani neumožňují velikost okamžité rychlosti vypočítat. Pokud však žáci znají alespoň základy infinitezimálního počtu, nebo je v rámci fyziky vhodně zavedeme, můžeme s pojmem okamžité rychlosti dále pracovat.

Pro velikost okamžité rychlosti z **Def. 41** platí, že čím menší je daný časový interval, tím přesnější je její určení. Proto se tento interval musí blížit nule, tedy být *nekonečně malý*. To naznačuje možnost využití infinitezimálního počtu k řešení tohoto problému.

V některých učebnicích středoškolské fyziky se v rámci rozšiřujícího učiva můžeme setkat se vztahem $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, avšak bez dalšího vysvětlení. Tento vztah zohledňuje požadavek na nekonečně malý časový interval použitím limity pro časový interval Δt blížící se k nule. Pro výpočet můžeme vztah přepsat na tvar $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$, který odpovídá definici derivace funkce (**Def. 33**). Velikost okamžité rychlosti v daném okamžiku t_0 tedy vypočítáme derivací dráhy podle času $v(t) = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$.

Okamžitá rychlost je **vektorová veličina**, kromě velikosti ji tedy charakterizuje i její směr. Vektor okamžité rychlosti leží na přímce, která je tečnou trajektorie v daném bodě. Rovnici této přímky určíme podle **Def. 36**, kde směrnicí je právě velikost okamžité rychlosti v daném bodě.

Ve středoškolské fyzice se nejčastěji setkáme s pohybem rovnoměrným přímočarým, u kterého je okamžitá rychlost v každém bodě shodná s průměrnou

[1] SVOBODA, Emanuel, BEDNAŘÍK, Milan, ŠIROKÁ, Miroslava, 2013. Fyzika pro gymnázia – mechanika. 5., přepracované vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. s. 35. ISBN 978-80-7196-385-1.

rychlostí pohybu a směr rychlosti je shodný se směrem pohybu. Dále rozlišujeme pohyb rovnoměrný křivočarý, při kterém se mění pouze směr rychlosti, pohyb rovnoměrně zrychlený a obecně pohyb nerovnoměrný.

3.1.2. Zrychlení hmotného bodu

Další veličinou charakterizující pohyb hmotného bodu je **vektorová veličina zrychlení**. Vyjadřuje změnu vektoru rychlosti v čase. V případě rovnoměrného pohybu, kdy je rychlost konstantní (nemění se), je zrychlení nulové.

Ve středoškolské fyzice se, obdobně jako v případě rychlosti, pracuje s průměrným zrychlením jako podílem změny okamžité rychlosti Δv a časového intervalu Δt, za který tato změna proběhla, což zapíšeme jako $a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Dále se pouze slovně definuje velikost **okamžitého zrychlení**:

Def. 42: Velikost okamžitého zrychlení v daném bodě trajektorie je definována jako průměrné zrychlení ve velmi malém časovém intervalu na odpovídajícím úseku trajektorie s daným bodem.

Stejně jako v případě velikosti okamžité rychlosti, i u velikosti okamžitého zrychlení se setkáváme s nepřesným označením „velmi malý“, což i tentokrát řešíme využitím diferenciálního počtu. Pro nekonečně malý časový interval píšeme $a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t)$. Velikost okamžitého zrychlení je tedy derivace rychlosti podle času. A jelikož rychlost je první derivací dráhy podle času, je zrychlení její druhou derivací, $a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = s''(t)$. Zavedením těchto vztahů můžeme určit okamžité zrychlení v libovolném bodě trajektorie i u nerovnoměrných pohybů.

Vektor okamžitého zrychlení leží na přímce, která je tečnou ke grafu rychlosti v daném bodě, její rovnici tedy opět určíme podle **Def. 36**. Směrnicí tečny je v tomto případě velikost okamžitého zrychlení.

U rovnoměrně zrychleného (resp. zpomaleného) pohybu je velikost okamžitého zrychlení v každém bodě rovna průměrnému zrychlení po celou dobu pohybu (je konstantní).

3.1.3. Rychlost a dráha zrychleného pohybu

Ve středoškolské fyzice se žáci seznamují s výpočtem dráhy a rychlosti pohybu rovnoměrně zrychleného (resp. zpomaleného), případy s časově proměnným zrychlením se neuvažují. Rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu je lineární funkcí času, tedy platí $v(t) = v_0 + at$, kde v_0 je počáteční rychlost hmotného bodu. Pro dráhu se následně zavede vztah $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Nikdo se však na střední škole příliš nezabývá tím, „kde se tyto vztahy vzaly“. Pouze v rámci rozšiřujícího učiva se můžeme setkat s grafickou interpretací a odvozením, které je v podstatě využitím integrálního počtu bez jeho skutečného zavedení. Zkušenost je ovšem taková, že žáci se raději pouze naučí dané vztahy a rozšiřujícímu učivu nevěnují pozornost.

V případě, že jsme zavedli okamžitou rychlost a okamžité zrychlení pomocí derivací, je již odvození vztahů pro dráhu a rychlost zrychleného pohybu jednoduché. Jestliže v rámci základů infinitezimálního počtu zavedeme integrování jako proces opačný k derivaci, samy žáky jistě napadne, že když od dráhy k rychlosti přejdeme derivací, zpět od rychlosti ke dráze přejdeme napak integrováním. Stejná úvaha platí pro vzájemný vztah rychlosti a zrychlení. Můžeme tedy psát $s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$ a $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$ a tyto vztahy platí pro všechny typy pohybů.

Integrací můžeme ověřit výše uvedené vztahy pro pohyb rovnoměrně zrychlený, kdy je zrychlení konstantní: $v(t) = \int a\mathrm{d}t = a\int \mathrm{d}t = at + c$. Integrační konstanta je rovna počáteční rychlosti, tedy skutečně platí $v(t) = v_0 + at$. A dále $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int (v_0 + at)\mathrm{d}t = v_0 \int \mathrm{d}t + a\int t\mathrm{d}t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + c$, kde položíme $c = s_0$, což je dráha hmotného bodu v čase t_0, a platí tedy vztah $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Speciálním případem rovnoměrně zrychleného pohybu, se kterým se žáci na střední škole setkají, je volný pád, pro který platí $a = g$. Platí pro něj vztahy $v(t) = gt$ a $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

3.1.4. Úhlová rychlost hmotného bodu

Při pohybu hmotného bodu po kružnici jej charakterizujeme místo rychlosti v úhlovou rychlostí $\omega = \frac{v}{r}$. Její definice je analogií definice rychlosti v, dráhu s nahradíme úhlovou dráhou φ udávanou v radiánech, pro kterou platí $\varphi = \frac{s}{r}$. Žáci se seznámí se vztahem pro průměrnou úhlovou rychlost ve tvaru $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ a s pojmy perioda a frekvence.

Vzhledem k analogii úhlové rychlosti ω s rychlostí v můžeme zavést také velikost okamžité rychlosti pomocí limity pro časový interval Δt blížící se k nule: $\omega(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, tedy derivace úhlové dráhy podle času.

3.1.5. Úhlové zrychlení hmotného bodu

Časovou změnu úhlové rychlosti charakterizuje veličina úhlové zrychlení ε, pro které platí vztah $\varepsilon(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \omega'(t) = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \varphi''(t)$. Tedy analogicky jako u zrychlení a, i úhlové zrychlení je druhou derivací úhlové dráhy podle času.

Středoškolská fyzika se zpravidla zabývá pouze rovnoměrným pohybem po kružnici, kdy je úhlová rychlost konstantní a na pohybující se hmotný bod působí pouze konstantní zrychlení dostředivé. Vztah pro úhlové zrychlení v některých učebnicích není ani uveden.

3.1.6. Dráha a rychlost pohybu po kružnici

Stejně jako jsme v kapitole 4.1.3 popsali vzájemné vztahy mezi rychlostí a dráhou, resp. mezi zrychlením a rychlostí, můžeme tyto vztahy použít i pro veličiny popisující pohyb po kružnici. Úhlovou rychlost získáme integrováním úhlového zrychlení $\omega(t) = \int \varepsilon \, \mathrm{d}t$ a úhlová dráha je pak integrálem úhlové rychlosti $\varphi(t) = \int \omega \, \mathrm{d}t$. Tyto vztahy však ve středoškolské fyzice příliš nevyužijeme.

3.1.7. Druhý Newtonův pohybový zákon, hybnost

V dynamice se žáci seznamují se vzájemným působením těles, Newtonovými pohybovými zákony a hybností hmotného bodu. Tato část obsahuje spíše teoretické poznatky, s výpočty se žáci setkají pouze u druhého pohybového zákona a hybnosti.

2. Newtonův pohybový zákon (zákon síly) říká, že působí-li na hmotný bod o hmotnosti m tělesa a fyzikální pole silami o výslednici $\boldsymbol{F}$, má hmotný bod takové zrychlení $\boldsymbol{a}$, že platí $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Dosazením za zrychlení $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ dostává vztah tvar $F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ a nazýváme jej pohybová rovnice.

V souvislosti se zákonem síly se zavádí hybnost $\boldsymbol{p}$, která je definovaná jako součin hmotnosti m a okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$: $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Hybnost je vektorová veličina a má stejný směr jako rychlost, můžeme tedy počítat pouze její velikost $p = mv$. Změna velikosti hybnosti je úměrná změně velikosti rychlosti podle vztahu $\mathrm{d}p = m \, \mathrm{d}v$. Dosazením získá 2. pohybový zákon tvar $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ a výsledná síla působící na hmotný bod je rovna časové změně hybnosti.

Integrováním uvedených vztahů získáme pro hybnost vztahy $p = \int m \, \mathrm{d}v$ a $p = \int F \, \mathrm{d}t$.

3.1.8. Práce

Mechanická práce je veličina související se silovým působením na těleso a jeho pohybem. Hodnota vykonané práce závisí na velikosti působící síly $\boldsymbol{F}$ a na úhlu α, který tato síla svírá s trajektorií tělesa. Ve středoškolské fyzice se zabýváme pouze případy, kdy je působící síla konstantní, těleso se pohybuje po přímce a úhel α je konstantní. Pro tyto případy platí pro vykonanou práci vztah $W = Fs\cos\alpha$.

Pokud bychom chtěli žáky seznámit s obecným výpočtem mechanické práce, kdy je síla proměnná nebo dráha zakřivená, musíme využít infinitezimálního počtu. Síla $\boldsymbol{F}$ vykoná při velmi malém posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ elementární práci $\mathrm{d}W$. Platí tedy vztah $\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = F\cos\alpha\mathrm{d}s$. Integrací tohoto vztahu přejdeme od elementární práce k práci vykonané na celé délce dráhy (nebo její libovolné části). Pro práci W vykonanou silou $\boldsymbol{F}$ na dráze s tedy obecně platí vztah $W = \int_0^s F\cos\alpha\mathrm{d}s$. Graficky je tedy práce dána plochou pod křivkou grafu závislosti síly na dráze.

3.1.9. Výkon

Výkon je veličina, podle které můžeme posuzovat činnost strojů, vyjadřuje, jak rychle vykonávají práci. Ve středoškolské fyzice pracujeme zpravidla s průměrným výkonem jako podílem práce vykonané za daný čas $P_P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$. Někdy se zavádí i okamžitý výkon jako součin síly působící na těleso a jeho okamžité rychlosti $P = Fv$.

Okamžitý výkon můžeme však pomocí diferenciálního počtu počítat i pomocí prvního uvedeného vztahu. Stejně jako v případě výpočtu okamžitých hodnot předchozích veličin, i tentokrát použijeme limitu pro omezení časového intervalu na nekonečně malý. Platí tedy vztah $P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = W'(t)$. Ve středoškolském výkladu o výkonu dále zmiňujeme příkon a účinnost, výpočet těchto veličin však nemá smysl rozšiřovat pomocí infinitezimálního počtu.

3.1.10. Řešené příklady

1) Hmotný bod se pohybuje po ose Ox tak, že jeho souřadnice závisí na čase podle vztahu $x = At - Bt^2$, kde $A = 3$ m·s^{-1} a $B = 1$ m·s^{-2}. Určete: velikost rychlosti jako funkci času; velikost rychlosti v okamžicích $t_1 = 0{,}5$ s, $t_2 = 1$ s, $t_3 = 2$ s.[2]

Řešení:

Zadaný vztah pro x je dráha hmotného bodu. Velikost rychlosti tedy podle kapitoly 3.1.1 určíme derivací tohoto výrazu podle času. Při derivaci využijeme Větu 11 a vzorce uvedené v kapitole 2.6:

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = 1 \cdot A \cdot t^{1-1} - 2 \cdot B \cdot t^{2-1} = A - 2Bt.$$

Po dosazení hodnot A, B je vztah pro rychlost $v = 3 - 2t$.
Velikosti rychlosti v daných okamžicích získáme dosazením do tohoto vztahu za t:

$$v_1 = (3 - 2 \cdot 0{,}5)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

$$v_2 = (3 - 2 \cdot 1)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

$$v_3 = (3 - 2 \cdot 2)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = -1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Záporné znaménko u hodnoty v_3 značí, že v tomto okamžiku se bude hmotný bod pohybovat v záporném směru osy x, velikost rychlosti je tedy $v_3 = 1$ m·s^{-1}.

[2] ŠANTAVÝ, Ivan, TROJÁNEK Aleš, 2002. Fyzika – příprava k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. s. 81. ISBN 80-7196-138-8.

Odpověď:
Velikost rychlosti jako funkce času má tvar $v = |A - 2Bt|$. Velikosti rychlosti v daných okamžicích jsou $v_1 = 2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_2 = 1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_3 = 1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

2) Hmotný bod se pohybuje po přímce. Závislost jeho dráhy s v metrech na čase t v sekundách je dán vztahem $s(t) = 32t - t^4$. Určete okamžitou rychlost a okamžité zrychlení v časech $t_1 = 1$ s a $t_2 = 2$ s.[3]

Řešení:

Vztah pro velikost okamžité rychlosti získáme první derivací dráhy podle času:

$$v(t) = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 32 \cdot 1 \cdot t^0 - 4 \cdot t^{4-1} = 32 - 4t^3.$$

Okamžitou rychlost v daných časech $t_1 = 1$ s a $t_2 = 2$ s získáme dosazením do vztahu pro $v(t)$ za t:

$$v(t_1) = (32 - 4 \cdot 1^3)\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 28\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$

$$v(t_2) = (32 - 4 \cdot 2^3)\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Okamžité zrychlení vypočteme podle vztahu, který získáme druhou derivací dráhy podle času, tj. první derivací rychlosti podle času:

$$a(t) = s''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 0 - 4 \cdot 3 \cdot t^{3-1} = -12t^2.$$

Za t dosadíme hodnoty $t_1 = 1$ s a $t_2 = 2$ s a získáme velikosti okamžitého zrychlení v těchto časech:

$$a(t_1) = (-12 \cdot 1^2)\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = -12\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}},$$

$$a(t_2) = (-12 \cdot 2^2)\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = -48\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Odpověď:

Velikost okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení v zadaných časech jsou $v(t_1) = 28\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v(t_2) = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $a(t_1) = -12\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a $a(t_2) = 48\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

[3] Význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://mat.fsv.cvut.cz/capova/MA01/Cv6.pdf

3) Určete počáteční rychlost přímočarého pohybu tělesa, pro jehož dráhu platí $s(t) = 12 + 200t - 5t^2$, kde t je čas od začátku pohybu. Kdy se těleso zastaví? Jaké je zrychlení pohybu?[4]

Řešení:

Nejprve určíme vztah pro závislost okamžité rychlosti na čase první derivací dráhy podle času:

$$v(t) = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 0 + 200 \cdot 1 \cdot t^0 - 5 \cdot 2 \cdot t^{2-1} = 200 - 10t.$$

Počáteční rychlost je rychlost v čase $t_0 = 0$ s, její hodnota je:

$$v(t_0) = (200 - 10 \cdot 0)\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 200\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Těleso se zastaví v takovém čase t, pro který platí $v(t) = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Tuto hodnotu tedy dosadíme do vztahu pro okamžitou rychlost a zjistíme, pro který čas t rovnost platí:

$$0 = 200 - 10t,$$

odkud úpravou získáme

$$t = \frac{200}{10}\mathrm{s} = 20\ \mathrm{s},$$

těleso se tedy zastaví po 20 sekundách pohybu.

Velikost zrychlení pohybu určíme první derivací okamžité rychlosti podle času (druhou derivací dráhy podle času):

$$a(t) = s''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 0 - 10 \cdot 1 \cdot t^0 = -10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Zrychlení není závislé na čase, a proto je po celou dobu pohybu stálé (konstantní). Jeho hodnota je záporná, jedná se tedy o rovnoměrně zpomalený pohyb.

Odpověď:

Počáteční rychlost pohybu tělesa je $v(t_0) = 200\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, těleso se zastaví v čase $t = 20$ s a zrychlení pohybu je $a = -10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

[4]Fyzikální význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: http://www.jitkakrickova.cz/diferencialni-pocet/261-fyzikalni-vyznam-derivace

4) Kámen vyhozen z výšky $h = 10$ m kolmo vzhůru má počáteční rychlost $v_0 = 20$ m·s^{-1}. Jakou rychlost bude mít kámen v čase $t_1 = 1,5$ s? Za jaký čas dosáhne maximální výšku? Jakou výšku dosáhne? ($g = 10$ m·s^{-2})[5]

Řešení:

Jedná se o vrh svislý vzhůru, pro jehož dráhu platí vztah $s(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. Vztah pro okamžitou rychlost získáme derivací tohoto vztahu podle času:

$$v(t) = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 0 + 1 \cdot v_0 \cdot t^0 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot g \cdot t^{2-1} = v_0 - gt.$$

Rychlost v čase $t = 1,5$ s získáme dosazením hodnot do vztahu pro $v(t)$:

$$v(t_1) = (20 - 10 \cdot 1,5)\text{m·s}^{-1} = 5 \text{ m·s}^{-1}.$$

Maximální výšku vrhu kámen dosáhne ve chvíli, kdy bude okamžitá rychlost nulová, tj. $v(t) = 0$ m·s^{-1}. Dosazením do vztahu pro okamžitou rychlost získáme

$$0 = 20 - 10t,$$

odkud úpravou určíme $t = 2$ s.

Maximální výšku určíme dosazením do vztahu pro $s(t)$, kdy za t dosadíme hodnotu vypočtenou v předchozím kroku.

$$s(t) = (10 + 20 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2)\text{m} = 30 \text{ m}.$$

Odpověď:

V čase $t_1 = 1,5$ s je okamžitá rychlost kamene $v(t_1) = 5$ m·s^{-1}. Maximální výška vrhu je 30 m a kámen jí dosáhne po 2 sekundách od vyhození.

5) Dva hmotné body se pohybují po stejné přímce. Závislosti jejich drah s_1, s_2 v metrech na čase t v sekundách jsou $s_1(t) = 2t^3$, $s_2(t) = 3t^2$. Určete jejich vzájemnou rychlost v časech $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s a $t_3 = 3$ s.[6]

Řešení:

Vztahy pro velikosti okamžitých rychlostí získáme první derivací drah podle času:

$$v_1(t) = s'_1(t) = \frac{\mathrm{d}s_1(t)}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot 3t^{3-1} = 6t^2,$$

$$v_2(t) = s'_2(t) = \frac{\mathrm{d}s_2(t)}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot 2t^{2-1} = 6t.$$

[5] Priklady.eu – cvičení z učiva středních škol – matematika, fyzika a chemie: Fyzikální význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/matematika/derivace/fyzikalni-vyznam-derivace.alej

[6] Význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://mat.fsv.cvut.cz/capova/MA01/Cv6.pdf

Vzájemná rychlost v_{vz} je rovna absolutní hodnotě rozdílu rychlostí obou hmotných bodů, tedy platí $v_{vz}(t) = |v_1(t) - v_2(t)| = |6t^2 - 6t|$. Dosazením za t získáme vzájemnou rychlost v daných okamžicích.

$$v_{vz1} = \left|6 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1\right| \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$

$$v_{vz2} = \left|6 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2\right| \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 12\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$

$$v_{vz3} = \left|6 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right| \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 36\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Odpověď:

Vzájemná rychlost hmotných bodů v zadaných časech je $v_{vz1} = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_{vz2} = 12\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_{vz3} = 36\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

6) Těleso se pohybuje po dráze $s(t) = t^2 - \frac{t^3}{3} + 3t + 8$. Vypočtěte, za jaký čas zastaví, jaké bude jeho zrychlení v čase $t = 0,5$ s a jakou dráhu přejde těleso do zastavení.[7]

Řešení:

Těleso se zastaví ve chvíli, kdy jeho rychlost bude nulová, tj. $v(t) = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Nejprve tedy určíme vztah pro závislost okamžité rychlosti na čase první derivací dráhy podle času:

$$v(t) = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot t^{2-1} - 3 \cdot \frac{t^{3-1}}{3} + 3 \cdot 1 \cdot t^0 + 0 = 2t - t^2 + 3.$$

Do tohoto vztahu dosadíme $v(t) = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a určíme, pro jaké t rovnost platí:

$$0 = t^2 - 2t - 3 = (t+1)(t-3),$$

což je kvadratická rovnice, která má dva kořeny. Jelikož ale čas není záporný, zajímá nás pouze kladný kořen této rovnice $t = 3$ s.

Dráhu, kterou těleso přejde do zastavení, určíme dosazením vypočteného času do zadaného vztahu pro dráhu:

$$s(3) = (3^2 - \frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3 + 8)\mathrm{m} = 17\ \mathrm{m}.$$

Dále určíme vztah pro velikost okamžitého zrychlení první derivací vztahu pro rychlost podle času (druhou derivací dráhy podle času):

$$a(t) = s''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot 1 \cdot t^0 - 2t^{2-1} + 0 = 2 - 2t.$$

[7] Priklady.eu – cvičení z učiva středních škol – matematika, fyzika a chemie: Fyzikální význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/matematika/derivace/fyzikalni-vyznam-derivace.alej

Velikost okamžitého zrychlení v čase $t = 0,5$ s je

$$a(t) = (2 - 2 \cdot 0,5)\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Odpověď:

Těleso zastaví za 3 sekundy a přejde přitom dráhu 17 metrů. Jeho zrychlení v čase $t = 0,5$ s je 1 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

7) Dráha hmotného bodu závisí na čase podle vztahu $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Určete velikost okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení v časech $t_1 = 2$ s a $t_2 = 4$ s. Načrtněte graf závislosti $s = s(t)$.

Řešení:

Vztah pro výpočet velikosti okamžité rychlosti získáme první derivací dráhy podle času:

$$v(t) = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot t^{3-1} - 6 \cdot 2 \cdot t^{2-1} + 9 \cdot 1 \cdot t^0 = 3t^2 - 12t + 9.$$

Dosazením $t_1 = 2$ s a $t_2 = 4$ s za t získáme velikosti okamžité rychlosti v těchto časech:

$$v(t_1) = (3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9)\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = -3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},$$

$$v(t_2) = (3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9)\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Druhou derivací dráhy podle času (tj. první derivací rychlosti podle času) získáme vztah pro výpočet velikosti okamžitého zrychlení:

$$a(t) = s''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot 2 \cdot t^{2-1} - 12 \cdot 1 \cdot t^0 + 0 = 6t - 12.$$

Dosazením za t opět získáme velikosti okamžitého zrychlení v zadaných časech:

$$a(t_1) = (6 \cdot 2 - 12)\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2},$$

$$a(t_2) = (6 \cdot 4 - 12)\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Podle kapitoly 2.4.3 vyšetříme průběh funkce $s = s(t)$ a načrtneme její graf.

1. Definiční obor je $\mathrm{D}(s) = \langle 0, +\infty)$, neboť čas musí být nezáporný. Průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami jsou $[0;0]$ a $[3;0]$. Funkce není ani sudá, ani lichá, není periodická.

2. Vypočteme limitu $\lim_{t\to+\infty}(t^3 - 6t^2 + 9t) = +\infty$.

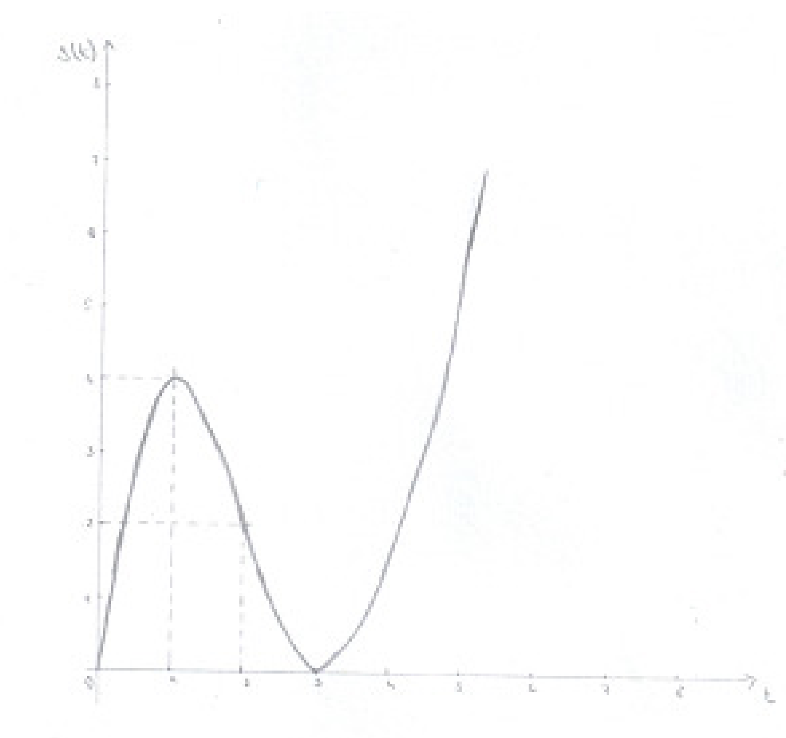
3. První derivace funkce je $s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$, nulová je pro $t = 1$ a $t = 3$. Stacionární body jsou $[1;4]$ a $[3;0]$. První derivace je kladná na intervalech $(0;1)$ a $(3;+\infty)$, a tedy na těchto intervalech je funkce rostoucí. V intervalu $(1;3)$ je první derivace záporná a funkce klesající.

4. Druhá derivace funkce má tvar $s''(t) = 6t - 12$. Pro $t = 1$ je záporná, v bodě $[1; 4]$ má funkce lokální maximum. Pro $t = 3$ je kladná a v bodě $[3; 0]$ je tedy lokální minimum funkce.

5. Druhá derivace je nulová pro $t = 2$. V intervalu $\langle 0; 2\rangle$ je druhá derivace záporná, funkce je konkávní. V intervalu $\langle 2\,; +\infty)$ je kladná a funkce je na tomto intervalu konvexní. Bod $[2; 2]$ je inflexní bod funkce.

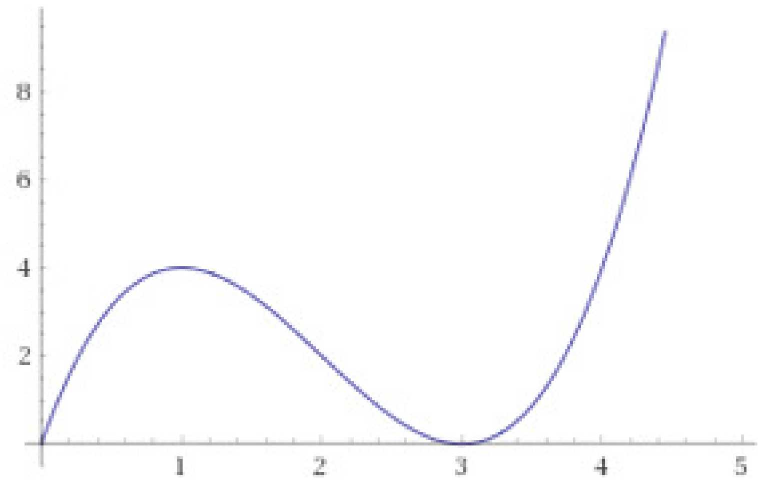
6. Funkce nemá asymptoty bez směrnice a protože $\lim_{t\to+\infty}(t^2 - 6t + 9) = +\infty$, nemá ani asymptoty se směrnicí.

7. Načrtneme graf funkce:



Obr. 1: Náčrt grafu závislosti $s = s(t)$.

Správnost našeho náčrtu grafu této funkce můžeme ověřit využitím některého matematického softwaru pro zobrazování grafu funkcí.



Obr. 2: Graf závislosti $s = s(t)$ vytvořený pomocí matematického softwaru.

Odpověď:

Velikosti okamžité rychlosti v daných časech jsou $v(t_1) = 3$ m·s^{-1} a $v(t_2) = 9$ m·s^{-1}, velikosti okamžitého zrychlení jsou pak $a(t_1) = 0$ m·s^{-2} a $a(t_2) = 12$ m·s^{-1}. Graf $s = s(t)$ je zobrazen na Obr. 1.

8) Při pohybu tělesa je dráha popsána rovnicí $s(t) = t^2 + 3t - 5$, přičemž v čase $t = 0$ s byla jeho rychlost nulová. Určete dráhu, rychlost a zrychlení v čase $t = 5$ s. Určete také jeho kinetickou energii, pokud jeho hmotnost je $m = 8$ kg.[8]

Řešení:

Nejprve určíme vztah pro okamžitou rychlost (resp. okamžité zrychlení) první (resp. druhou) derivací vztahu pro dráhu podle času:

$$v(t) = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot t^{2-1} + 3 \cdot 1 \cdot t^0 - 0 = 2t + 3,$$

$$a(t) = s''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot t^0 + 0 = 2.$$

Dosazením $t = 5$ s do jednotlivých vztahů zjistíme dráhu, rychlost a zrychlení v tomto čase:

$$s(5) = (5^2 + 3 \cdot 5 - 5)\mathrm{m} = 35\ \mathrm{m},$$

$$v(5) = (2 \cdot 5 + 3)\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 13\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$

$$a(5) = 2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

[8] Priklady.eu – cvičení z učiva středních škol – matematika, fyzika a chemie: Fyzikální význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/matematika/derivace/fyzikalni-vyznam-derivace.alej

Jak vidíme, vztah pro velikost zrychlení není závislý na čase a po celou dobu pohybu je konstantní $a = 2$ m·s^{-2}, těleso se tedy pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným.

Vztah pro kinetickou energii je $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Dosazením získáme hodnotu kinetické energie v čase $t = 5$ s:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13^2 = 676 \text{ J.}$$

Odpověď:

V čase $t = 5$ s je dráha tělesa 35 metrů, velikost okamžité rychlosti 13 m·s^{-1}, zrychlení 2 m·s^{-2} a kinetická energie tělesa je 676 Joulů.

9) Rychlík jedoucí rychlostí 90 km·h^{-1} má zabrzdit tak, aby se rovnoměrně zpomaleným pohybem zastavil na vzdálenosti 1 km. Po jakém čase zastaví? Určete jeho rychlosti po 10 sekundách od okamžiku, kdy začal brzdit.[9]

Řešení:

Nejprve převedeme rychlost a vzdálenost na základní jednotky:

$$v = 90 \text{ km·h}^{-1} = 25 \text{ m·s}^{-1},$$

$$s = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m.}$$

Pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu platí vztah

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2,$$

jehož derivací získáme vztah pro rychlost:

$$v = s' = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - at.$$

V okamžiku, kdy se rychlík zastaví, bude jeho rychlost $v = 0$ m·s^{-1}. Dosazením do předchozího vztahu a vyjádřením zrychlení máme

$$a = \frac{25}{t},$$

což dosadíme do vztahu pro dráhu:

$$1000 = 25t - \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{t} \cdot t^2,$$

odkud $t = 80$ s. Hodnota zrychlení (resp. zpomalení) je $a = 0{,}3125$ m·s^{-2}.

[9] Priklady.eu – cvičení z učiva středních škol – matematika, fyzika a chemie: Fyzikální význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/matematika/derivace/fyzikalni-vyznam-derivace.alej

Dosazováním času po 10 sekundách do vztahu pro rychlost získáme velikosti okamžité rychlosti v jednotlivých okamžicích:

$$v(10) = (25 - 0,3125 \cdot 10)\text{m·s}^{-1} = 21,875 \text{ m·s}^{-1},$$

$$v(20) = (25 - 0,3125 \cdot 20)\text{m·s}^{-1} = 18,75 \text{ m·s}^{-1},$$

$$v(30) = (25 - 0,3125 \cdot 30)\text{m·s}^{-1} = 15,625 \text{ m·s}^{-1},$$

$$v(40) = (25 - 0,3125 \cdot 40)\text{m·s}^{-1} = 12,5 \text{ m·s}^{-1},$$

$$v(50) = (25 - 0,3125 \cdot 50)\text{m·s}^{-1} = 9,375 \text{ m·s}^{-1},$$

$$v(60) = (25 - 0,3125 \cdot 60)\text{m·s}^{-1} = 6,25 \text{ m·s}^{-1},$$

$$v(70) = (25 - 0,3125 \cdot 10)\text{m·s}^{-1} = 3,125 \text{ m·s}^{-1},$$

$$v(80) = (25 - 0,3125 \cdot 10)\text{m·s}^{-1} = 0 \text{ m·s}^{-1}.$$

Odpověď:

Aby se rychlík zastavil rovnoměrným zpomaleným pohybem na vzdálenosti 1 km, musí mít jeho zpomalení velikost $a = 0,3125 \text{ m·s}^{-2}$. Brzdění bude trvat 80 sekund.

10) Brzděné kolo se otočí za čas t o úhel φ, který je kvadratickou funkcí času. Zastaví se za 5 sekund a vykoná za tuto dobu 150 otáček. Jaká je počáteční rychlost ω_0 kola a jaké je úhlové zrychlení ε?[10]

Řešení:

Závislost úhlu φ na čase můžeme zapsat rovnicí

$$\varphi(t) = at^2 + bt + c.$$

Vztah pro velikost okamžité úhlové rychlosti získáme derivací tohoto vztahu podle času:

$$\omega(t) = \varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = 2at + b.$$

Platí $\omega(5) = 0$ a $\varphi(0) = 0$, tedy

$$10a + b = 0,$$

$$c = 0.$$

Za 5 sekund bod na obvodu kola urazí úhlovou dráhu $\varphi(5) = 150 \cdot 2\pi = 300\pi$ rad, platí tedy

$$300\pi = 25a + 5b.$$

[10] Fyzikální význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: http://www.jitkakrickova.cz/diferencialni-pocet/261-fyzikalni-vyznam-derivace

Pro koeficienty a, b jsme získali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jejíž řešením je $a = -12\pi$ a $b = 120\pi$.

Vztah pro úhlovou vzdálenost má tedy tvar $\varphi(t) = -12\pi t^2 + 120\pi t$ a vztah pro velikost úhlové rychlosti $\omega(t) = -24\pi t + 120\pi$. Rychlost na počátku pohybu, tedy kdy $t = 0$ s, je

$$\omega(0) = (-24\pi \cdot 0 + 120\pi)\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} = 120\pi\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}.$$

Vztah pro úhlové zrychlení získáme druhou derivací úhlové dráhy podle času, tedy první derivací úhlové rychlosti podle času:

$$\varepsilon(t) = \varphi''(t) = \frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = 2a = -24\pi\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-2}}.$$

Úhlové zrychlení je tedy konstantní a má hodnotu -24π rad·s^{-2}. Záporné znaménko značí, že jde o pohyb rovnoměrně zpomalený.

<u>Odpověď:</u>
Počáteční rychlost pohybu je 120π rad·s^{-1} a zrychlení pohybu je -24π rad·s^{-2}.

3.2. Mechanické kmitání a vlnění

3.2.1. Kmitání mechanického oscilátoru

Rozlišujeme kmitání tlumené a netlumené, přičemž středoškolská fyzika se více zabývá „ideálním modelem“ – kmitáním netlumeným, a navíc jen takovým, kdy trajektorií je úsečka a mechanický oscilátor se pohybuje mezi jejími krajními body. Kmitání reálného oscilátoru je však vždy tlumené. Vztahy, které budou v této kapitole uvedeny, platí pro oba typy kmitání.

Netlumené kmitání je nerovnoměrný periodický pohyb kolem rovnovážné polohy. Žáci se nejprve seznámí s popisem okamžité výchylky oscilátoru z rovnovážné polohy, při jejímž výkladu se nejčastěji používají počítačové animace, které znázorňují kmitání oscilátoru a zároveň i časový diagram jeho kmitání. Z něj odvodíme popis okamžité výchylky y v čase t pomocí goniometrické funkce, zpravidla $y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi)$, kde y_m je maximální výchylka (amplituda), ω je úhlová frekvence (odpovídá úhlové rychlosti u pohybu po kružnici) a φ je počáteční výchylka oscilátoru.

Stejně jako v učivu mechaniky, i v učivu o mechanickém kmitání se dále zabýváme okamžitou rychlostí a zrychlením pohybu. Při jejich zavádění se využívá analogie s pohybem po kružnici nebo jen pozorování kmitání pružinového oscilátoru, kdy zjistíme, že v amplitudě $y = y_m$ je rychlost nulová, a naopak v rovnovážné poloze $y = 0$ je rychlost maximální. Při srovnání s pohybem po kružnici zjistíme, že okamžitá rychlost oscilátoru je průmětem vektoru okamžité rychlosti hmotného bodu pohybujícího se po kružnici, odkud se odvodí vztah pro okamžitou rychlost jako $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Pro obvodovou rychlost platí $v_0 = \omega r$ a amplituda y_m je vlastně rovna poloměru kružnice r, pak vztah pro rychlost píšeme ve tvaru $v(t) = \omega y_m \cos(\omega t + \varphi)$. Stejnou úvahou se také zavede vztah pro zrychlení, které vždy směřuje do rovnovážné polohy; je v ní tedy nulové a v maximální výchylce je maximální. Vztah pro okamžité zrychlení má tvar $a(t) = -\omega^2 y_m \sin(\omega t + \varphi)$, kde $y_m \sin(\omega t + \varphi) = y$ a pro zrychlení tedy platí, že je přímo úměrné okamžité výchylce $a(t) = -\omega^2 y$. Jestliže byli žáci seznámeni s derivací funkce, mohou si sami všimnout, že vztah pro rychlost je derivací okamžité výchylky a zrychlení pak derivací rychlosti.

Pokud jsme již v učivu mechaniky zavedli velikost okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení pomocí derivací, můžeme pro odvození výše uvedených vztahů použít jiný postup. Stejně jako jsme v mechanice popisovali polohu hmotného bodu v čase funkcí $s = s(t)$, popisujeme polohu mechanického oscilátoru funkcí $y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi)$. Velikost okamžité rychlosti byl pak podíl dráhy překonané v nekonečně malém časovém intervalu a tohoto intervalu. Užitím limity jsme odvodili, že vztah pro velikost rychlosti získáme časovou derivací dráhy. Změna okamžité výchylky v daném čase je vlastně dráha překonaná za tento čas, a proto i pro mechanické kmitání platí, že vztah pro okamžitou rychlost získáme časovou derivací okamžité výchylky: $v(t) = y'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega y_m \cos(\omega t + \varphi)$. Stejná úvaha platí i pro okamžité zrychlení, pro které platí $a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = y''(t) = -\omega^2 y_m \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y$.

Okamžitou výchylku tlumeného kmitání popisujeme rovnicí $y = e^{-bt} y_m \sin(\omega t + \varphi)$, kde b je koeficient tlumení. Velikost okamžité rychlosti a zrychlení získáme stejně jako v případě netlumeného kmitání první a druhou derivací okamžité výchylky podle času. Se vztahy pro tlumené kmitání se však ve středoškolské fyzice zpravidla nesetkáváme.

3.2.2. Řešené příklady

1) Těleso se pohybuje po přímce a pro jeho výchylku z rovnovážné polohy platí $y(t) = 2\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)$. Najděte jeho rychlost v čase $t = 1$ s a největší výchylku z rovnovážné polohy. (y je v cm.)[11]

Řešení:

Vztah pro okamžitou rychlost získáme první derivací vztahu pro okamžitou výchylku podle času:

$$v(t) = y'(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -2\sin(2\pi t) \cdot 2\pi - 3\cos(2\pi t) \cdot 2\pi = -4\pi \sin(2\pi t) - 6\pi \cos(2\pi t).$$

[11] Priklady.eu – cvičení z učiva středních škol – matematika, fyzika a chemie: Fyzikální význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/matematika/derivace/fyzikalni-vyznam-derivace.alej

Dosazením $t = 1$ s získáme velikost okamžité rychlosti v tomto čase:

$$v(1) = (-4\pi \sin(2\pi \cdot 1) - 6\pi \cos(2\pi \cdot 1))\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}} = (-4\pi{\cdot}0 - 6\pi{\cdot}1)\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}} = -6\pi\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}.$$

Pro maximální výchylku platí $v = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, dosazením získáme rovnici

$$0 = -2\pi(2\sin(2\pi t) + 3\cos(2\pi t)),$$

a úpravou

$$tg(2\pi t) = -\frac{3}{2},$$

tedy $2\pi t = 123°42'$. Dosazením této hodnoty do vztahu pro okamžitou výchylku získáme její maximální hodnotu:

$$y_m = (2\cos(123°42') - 3\sin(123°42'))\mathrm{cm} = -3,606\ \mathrm{cm}.$$

Záporné znaménko značí pouze směr výchylky, amplituda je však vždy kladná, proto $y_m = 3,606$ cm.

Odpověď:

Velikost okamžité rychlosti tělesa v čase $t = 1$ s je $6\pi\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$. Amplituda výchylky je 3,606 cm.

2) Kmitání oscilátoru je popsáno rovnicí $y(t) = 3{\cdot}\cos(\frac{\pi}{2}{\cdot}t)$. Určete okamžitou výchylku, velikost okamžité rychlosti a zrychlení v čase $t = 3$ s.

Řešení:

Nejprve určíme vztahy pro okamžitou rychlost (zrychlení) první (druhou) derivací vztahu pro okamžitou výchylku podle času:

$$v(t) = y'(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot \left[-\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\right] \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right),$$

$$a(t) = y''(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right).$$

Dosazením $t = 3$ s do těchto vztahů získáme hodnoty

$$y(3) = 3 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\mathrm{cm} = 0\ \mathrm{cm},$$

$$v(t) = -\frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = \frac{3\pi}{2}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$

$$a(t) = -\frac{3\pi^2}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Odpověď:

V čase $t = 3$ s je okamžitá výchylka 0 cm, okamžitá rychlost $\frac{3\pi}{2}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a okamžité zrychlení $0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Oscilátor se nachází v rovnovážné poloze, kdy je zrychlení nulové a rychlost maximální.

3.3. Elektřina a magnetismus

3.3.1. Elektrický proud

Elektrický proud I se ve středoškolské fyzice většinou definuje pouze pro rovnoměrný průchod náboje vodičem jako podíl celkového náboje Q, který projde za čas t průřezem vodiče, a této doby t: $I = \frac{Q}{t}$. Ne vždy je však průchod náboje vodičem ideálně rovnoměrný. Pro takové případy zavádí rozšiřující učivo střední hodnotu proudu jako podíl náboje ΔQ, který projde průřezem vodiče za časový interval Δt, a tohoto intervalu: $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$.

V případě časově proměnného náboje můžeme také chtít zjistit, jaký je okamžitý proud i ve vodiči. Ten získáme, jestliže v předchozím vztahu zvolíme časový interval Δt nekonečně malý, využijeme tedy limitu pro Δt blížící se nule a vztah získá tvar $i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, který můžeme přepsat jako $i(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$, což odpovídá definici derivace funkce. Pokud jsme žáky s pojmy limita a derivace funkce seznámili, můžeme pro okamžitý proud i tedy užít derivaci časově proměnného náboje podle času: $i(t) = Q'(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}$.

3.3.2. Výkon elektrického proudu

Podobně jako v mechanice, i v elektřině je výkon veličinou, která vyjadřuje, jak rychle elektrické spotřebiče vykonávají práci. Na střední škole většinou definujeme pouze průměrný výkon vztahem $P = \frac{W}{t} = U \cdot \frac{Q}{t}$, kde $\frac{Q}{t} = I$, jak bylo definováno v kapitole 4.3.1. Průměrný výkon při konstantním napětí a proudu je $P = UI$. V tomto případě je okamžitý výkon v každém okamžiku roven průměrnému výkonu po celou dobu konání práce.

Situace je složitější, pokud chceme počítat výkon při nerovnoměrném průchodu náboje vodičem. Průměrný výkon je roven součinu konstantního napětí a střední hodnoty proudu definované v kapitole 3.3.1: $P = U \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Okamžitý výkon je pak součin konstantního napětí U a okamžitého proudu i v daném čase, což můžeme zapsat jako $P = \lim_{\Delta t \to 0} U \cdot \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t} = U \cdot \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = Ui$. Středoškolská fyzika se však touto problematikou zpravidla nezabývá a je vhodné ji zmínit pouze v případě, že jsme zavedli veličinu okamžitý proud i.

3.3.3. Indukované napětí

Při výkladu indukovaného napětí je nejprve nutné zavést pojem magnetický indukční tok ϕ. Jedná se o skalární veličinu, která slouží ke kvantitativnímu popisu elektromagnetické indukce B. Platí pro něj vztah $\phi = BS\cos\alpha$, kde B je magnetická indukce magnetického pole působící na plochu S pod úhlem α. Jestliže se plocha S v čase otáčí s úhlovou rychlostí ω, platí pro tento úhel $\alpha = \omega t$.

Napětí se ve vodiči indukuje při změně magnetického toku plochou ohraničenou vodičem o $\Delta\phi$ za dobu Δt, jeho střední hodnota je $U_i = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$. Jeho okamžitou hodnotu získáme volbou nekonečně malého časového intervalu Δt, tedy užitím limity $u_i(t) = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t} = -\lim_{t\to t_0}\frac{\phi(t)-\phi(t_0)}{t-t_0} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \phi'(t)$. Indukované napětí je v daném okamžiku derivací magnetického indukčního toku podle času.

V případě cívky prochází jejími závity magnetický indukční tok, který je vytvořen vlastním magnetickým polem. Platí pro něj vztah $\phi = LI$, kde L je indukčnost cívky, I proud procházející cívkou. Pro napětí indukované v cívce tedy platí $U_i = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Indukované napětí u_i v daném čase určíme opět pro nekonečně malou dobu Δt, tedy $u_i(t) = -\lim_{\Delta t\to 0} L\cdot\frac{\Delta I(t)}{\Delta t} =$
$= -\lim_{t\to t_0} L\cdot\frac{I(t)-I(t_0)}{t-t_0} = -L\cdot\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -L\cdot I'(t)$.

Žáci se na střední škole seznamují pouze se vztahy pro střední hodnotu indukovaného napětí, s jeho hodnotou v daném okamžiku se však ve středoškolských učebnicích nesetkáme.

3.3.4. Řešené příklady

1) Množství elektrického náboje Q, který prochází vodičem, se mění s časem podle vztahu $Q(t) = 3t^2 + 2t + 2$. Vypočtěte hodnotu okamžitého proudu i v době $t = 1$ s. Zjistěte také, kdy bude hodnota $i = 20$ A.[12]

Řešení:

Vztah pro okamžitý proud je derivací časově proměnného náboje podle času, platí tedy

$$i(t) = Q'(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = 3\cdot 2\cdot t^{2-1} + 2t^0 = 6t + 2.$$

Dosazením $t = 1$ s získáme pro okamžitý proud hodnotu

$$i(1) = (6\cdot 1 + 2)\mathrm{A} = 8\ \mathrm{A}.$$

Dosazením $i = 20$ A získáme rovnost

$$20 = 6t + 2,$$

které vyhovuje řešení $t = 3$ s.

Odpověď:

Hodnota okamžitého proudu v čase 1 s je 8 A. Hodnota okamžitého proudu dosáhne 20 A v čase $t = 3$ s.

[12] Priklady.eu – cvičení z učiva středních škol – matematika, fyzika a chemie: Fyzikální význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/matematika/derivace/fyzikalni-vyznam-derivace.alej

2) V indukční cívce protéká proud $i(t) = 15\sin^5(3t)$, indukčnost cívky je $L = 0,03$ H. Vypočtěte indukované elektromotorické napětí v čase $t = \frac{2\pi}{9}$ s.[13]

Řešení:

Pro napětí indukované v cívce platí vztah $u_i = -L \cdot \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$, nejprve tedy vypočteme derivaci proudu i podle času:

$$i'(t) = \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 15 \cdot 5\sin^{5-1}(3t) \cdot \cos(3t) \cdot 3 = 225\sin^4(3t) \cdot \cos(3t).$$

Pro indukované napětí získáváme vztah

$$u_i = -L \cdot 225\sin^4(3t) \cdot \cos(3t).$$

Dosazením zadaných hodnot získáme indukované napětí

$$u_i = -0,03 \cdot 225\sin^4\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{V} = 1,898 \text{ V}.$$

Odpověď:

Indukované napětí v čase $t = \frac{2\pi}{9}$ s je $u_i = 1,898$ V.

3) Množství elektrického náboje, který prochází vodičem, se mění podle vztahu $Q(t) = 2te^{-t}$. Zjistěte čas, kdy se intenzita proudu bude rovnat nule.[14]

Řešení:

Pro okamžitý proud platí vztah

$$i = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = 2t^0e^{-t} + 2te^{-t} \cdot \left(-t^0\right) = 2e^{-t} - 2te^{-t} = 2e^{-t}(1-t).$$

Dosazením $i = 0$ A získáváme rovnost

$$2e^{-t}(1-t) = 0.$$

Exponenciální funkce nemůže být rovna nule, a proto řešíme pouze $1 - t = 0$. Této rovnici vyhovuje řešení $t = 1$ s.

Odpověď:

Intenzita proudu bude nulová v čase $t = 1$ s.

[13] Priklady.eu – cvičení z učiva středních škol – matematika, fyzika a chemie: Fyzikální význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/matematika/derivace/fyzikalni-vyznam-derivace.alej

[14] Priklady.eu – cvičení z učiva středních škol – matematika, fyzika a chemie: Fyzikální význam derivace [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/matematika/derivace/fyzikalni-vyznam-derivace.alej

Kapitola 4

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo prohloubit středoškolské poznatky o funkcích, rozšířit učivo o základy infinitezimálního počtu a následně navrhnout jeho zavedení ve středoškolském učivu fyziky. Podařilo se mi vytvořit text, podle kterého můžeme ve výuce matematiky a fyziky žáky seznámit s infinitezimálním počtem, abychom jej mohli dále aplikovat. Důkazy uvedených matematických vět a tvrzení nejsou předmětem této práce, a proto nejsou uvedeny. Pro výuku matematiky je tedy tento text spíše podpůrný, avšak pro zavedení a aplikaci infinitezimálního počtu ve fyzice jej považuji za plně dostačující.

V další části práce pojednává o oblastech fyziky, v jejichž výkladu by bylo na střední škole možné infinitezimální počet využít, pokud s ním žáky seznámíme. Tento text je tedy možné využít jako doplňující materiál pro výuku, nebo například v rozšiřujících hodinách fyziky a pro nadané žáky. Pokud bychom text chtěli využít pro přípravu žáků na fyzikální olympiády, bude potřeba jej rozšířit o další témata a poznatky z fyziky, které nejsou tradičně obsahem středoškolské fyziky, a v nich opět vhodně využít infinitezimálního počtu.

Řešené příklady, které jsou součástí práce, mohou být využity nejen ve fyzice při procvičování daného tématu, ale také v rámci matematiky, pokud chceme v rámci výkladu infinitezimálního počtu zmínit i jeho aplikace.

Literatura

[1] BUŠEK, Ivan, 2012. *Středoškolská matematika ve vzorcích a větách*. Dotisk 3. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. 136 s. ISBN 978-80-7196-351-6.
[2] HRUBÝ, Dag, KUBÁT, Josef, 2012. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet.* Dotisk 3. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. 212 s. ISBN 978-80-7196-363-9.
[3] LEPIL, Oldřich, 2012. *Fyzika pro gymnázia – Mechanické kmitání a vlnění*. Dotisk 4. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. 136 s. ISBN 978-80-7196-387-5.
[4] LEPIL, Oldřich, ŠEDIVÝ, Přemysl, 2013. *Fyzika pro gymnázia – Elektřina a magnetismus*. Dotisk 6. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. 348 s. ISBN 978-80-7196-385-1.
[5] ODVÁRKO, Oldřich, 2013. *Matematika pro gymnázia – Funkce.* Dotisk 4. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. 168 s. ISBN 978-80-7196-357-8.
[6] ODVÁRKO, Oldřich, 2013. *Matematika pro gymnázia – Goniometrie.* Dotisk 4. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. 140 s. ISBN 978-80-7196-359-2.
[7] POLÁK, Josef, 2012. *Přehled středoškolské matematiky.* Dotisk 9. přepracovaného vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. 660 s. ISBN 978-80-7196-356-1.
[8] SVOBODA, Emanuel, BARTUŠKA, Karel, BEDNAŘÍK, Milan, LEPIL, Oldřich, ŠIROKÁ, Miroslava, 2012. *Přehled středoškolské fyziky*. Dotisk 4., upraveného vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. 532 s. ISBN 978-80-7196-307-3.
[9] SVOBODA, Emanuel, BEDNAŘÍK, Milan, ŠIROKÁ, Miroslava, 2013. *Fyzika pro gymnázia – Mechanika*. 5., přepracované vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. 232 s. ISBN 978-80-7196-385-1.
[10] ŠANTAVÝ, Ivan, TROJÁNEK Aleš, 2002. *Fyzika – Příprava k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Dotisk 1. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. 288 s. ISBN 80-7196-138-8.
[11] *Diferenciální počet ve fyzice* [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difpoc.pdf

[12] *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z:
http://fyzika.jreichl.com
[13] *Fyzika 007* [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: http://www.fyzika007.cz
[14] *Fyzikální význam derivace* [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z:
http://www.jitkakrickova.cz/diferencialni-pocet/261-fyzikalni-vyznam-derivace
[15] *Integrální počet ve fyzice* [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z:
http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/intpoc.pdf
[16] *Priklady.eu – cvičení z učiva středních škol – matematika, fyzika a chemie* [online].[cit. 2018-05-21]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/index.alej
[17] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: www.msmt.cz/file/10427_1_1/
[18] *Význam derivace* [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z:
https://mat.fsv.cvut.cz/capova/MA01/Cv6.pdf