UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Diplomová práce

2018 Přikrylová Tereza

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Přikrylová Tereza

Netradiční matematické úlohy k rozvoji logického myšlení žáků na 1. stupni ZŠ

2018 Přikrylová Tereza

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem zadanou diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Martiny Uhlířové, Ph.D. s použitím zdrojů uvedených v práci a odborných konzultací.

V Olomouci dne 8. 4. 2018 ……………………………….

Poděkování

Touto cestou děkuji RNDr. Martině Uhlířové, Ph.D. za odborné vedení mé diplomové práce a její cenné rady. Poděkování patří také ZŠ Červenka, kolegyním za spolupráci při psaní této diplomové práce a žákům, kteří pečlivě plnili mé úkoly v hodinách matematiky. Dále děkuji mé rodině a mým nejbližším za podporu a motivaci.

OBSAH

PRAKTICKÁ ČÁST – soubor úloh

VÝZKUMNÉ ŠETŘENÍ

Úvod

Téma mé diplomové práce jsem si vybrala proto, že už druhým rokem pracuji na Základní škole Červenka, kousek od Olomouce. Mohla jsem tedy žáky v hodinách matematiky více pozorovat, počítat s nimi různé úlohy a sledovat jejich myšlení. I já mám velice ráda tyto nestandardní úlohy, které rozvíjí logické myšlení. Přijdou mi zábavné a takové počítání mě baví, na základní i střední škole mě matematika velmi bavila.

Cílem teoretické části je seznámení s těmito úlohami, do jaké části Rámcového vzdělávacího programu patří, jak nestandardní úlohy dělíme, co vše si pod těmito úlohami můžeme představit. Nemohla jsem vynechat ani část, která se věnuje matematickým soutěžím, jako je například Klokan, kterého si určitě všichni ze základní školy pamatují. Dále jsem do obsahu mé diplomové práce přidala něco z didaktiky matematiky, jak by třeba taková hodina matematiky měla vypadat. Zajímavým mi přišlo se i zmínit o významu matematiky ve 21. století a jaké máme matematické dovednosti. Poslední kapitola je spíše z psychologie a věnuje se procesu myšlení.

Cílem praktické části bylo zpracovat soubor logických úloh, kdy jsem se zaměřila hlavně na slovní úlohy, číselné a obrázkové řady, magické čtverce, sudoku, tangramy, ale i také pro mě neznámé hry, jako je například Stánek na tržišti nebo Magická čísla, u kterých je podrobně popsaný postup řešení a jak vlastně můžeme trénovat zmiňované logické myšlení.

Cílem výzkumného šetření bylo na základě dotazníkového šetření zjistit, jak ostatní kolegové a pedagogičtí pracovníci pracují s nestandardními matematickými úlohami, jak často je používají, jakých využívají didaktických pomůcek anebo jaký mají na tyto úlohy názor. Další část obsahovala práci se žáky 1. třídy, kdy jsme v hodinách matematiky probírali geometrické tvary, jako je čtverec, obdélník, trojúhelník a kruh. Žáky jsem rozdělila do skupinek a z těchto různých tvarů měli za úkol poskládat různé obrazce. Cílem této práce s žáky bylo zjistit, jakou mají prostorovou představivost, jak zvládnou tyto tvary převést do obrazců, se kterými se setkávají v běžném životě. Velmi mě překvapila jejich kreativita.

TEORETICKÁ ČÁST

1 *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*

Rámcový vzdělávací program základního vzdělávání (dále jen RVP ZV), poskytuje učitelům pravomoc vytvářet a přizpůsobovat vzdělávací program specifikům konkrétní školy (MŠMT, 2013 – 2018).

RVP ZV vychází z nové strategie vzdělávání, která zdůrazňuje vytváření klíčových kompetencí žáků, jejich provázanost se vzdělávacím obsahem a uplatnění získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě. Vycházejí z koncepce společného vzdělávání a celoživotního učení, formulují očekávanou úroveň vzdělání stanovenou pro všechny absolventy jednotlivých etap vzdělávání. Podporují pedagogickou autonomii škol a profesní odpovědnost učitelů za výsledky vzdělávání.

Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti. V etapě základního vzdělávání jsou za klíčové považovány: **kompetence k učení; kompetence k řešení problémů; kompetence komunikativní; kompetence sociální a personální; kompetence občanské; kompetence pracovní.**

Vzdělávací obsah základního vzdělávání je v RVP ZV orientačně rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí. Jednotlivé vzdělávací oblasti jsou tvořeny jedním vzdělávacím oborem nebo více obsahově blízkými vzdělávacími obory:

- Jazyk a jazyková komunikace (Český jazyk a literatura, Cizí jazyk, Další cizí jazyk)
- **Matematika a její aplikace** (Matematika a její aplikace)
- Informační a komunikační technologie (Informační a komunikační technologie)
- Člověk a jeho svět (Člověk a jeho svět)
- Člověk a společnost (Dějepis, Výchova k občanství)
- Člověk a příroda (Fyzika, Chemie, Přírodopis, Zeměpis)
- Umění a kultura (Hudební výchova, Výtvarná výchova)
- Člověk a zdraví (Výchova ke zdraví, Tělesná výchova)
- Člověk a svět práce (Člověk a svět práce)

1.1 *Matematika a její aplikace*

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě, a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost. Pro tuto svoji nezastupitelnou roli prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další úspěšné studium.

Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití.

Cílové zaměření vzdělávací oblasti

Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:

- využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech – odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace
- rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojování si nezbytných matematických vzorců a algoritmů
- rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů
- rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů
- vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu
- vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely

- provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému
- přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu
- rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby
- rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru **Matematika a její aplikace** je rozdělen na čtyři tematické okruhy:

- *Číslo a početní operace*
  Číslo a proměnná – na druhém stupni (navázání na získané vědomosti a dovednosti na prvním stupni)
- *Závislosti, vztahy a práce s daty*
- *Geometrie v rovině a v prostoru*
- ***Nestandardní aplikační úlohy a problémy***

Vybrané **cíle** RVP ZV, jež jsou důležité pro efektivní výuku matematiky:

- umožnit žákům osvojit si strategie učení a motivovat je pro celoživotní učení
- podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů
- pomáhat žákům poznávat a rozvíjet vlastní schopnosti v souladu s reálnými možnosti a uplatňovat je spolu s osvojenými vědomostmi a dovednostmi při rozhodování o vlastní životní a profesní orientaci

S mou diplomovou prací úzce souvisí především poslední zmíněný tematický okruh, proto doslovně cituji navržený obsah (MŠMT, 2017):

NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY

Očekávané výstupy – 2. období

Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.

Učivo

- slovní úlohy
- číselné a obrázkové řady
- magické čtverce
- prostorová představivost

Smyslem zařazení (Nestandardní aplikační úlohy a problémy, 2005) tohoto tematického okruhu je ukázat žákům na řešení aplikačních úloh, pokud možno zábavnou formou, potřebnost matematiky pro řešení praktických problémů, její využitelnost v nejrůznějších oborech a životních situacích, rozvíjet u žáků logické myšlení, a tím nejen zvýšit zájem o matematiku u žáků s matematickým nadáním, ale také podchytit tento zájem u žáků prospěchově slabších. Tomu napomáhají i takové úlohy a problémy, jejichž řešení vyžaduje a rozvíjí logické uvažování a je více či méně nezávislé na znalostech školské matematiky.

Náročnost úloh a problémů by měla samozřejmě odpovídat jednak **rozumové vyspělosti** žáků vzhledem k jejich věku, ale také **individuálním schopnostem** jednotlivých žáků. Zařazování úloh s různou náročností významně napomáhá realizaci individuálního přístupu k žákům a dává možnost realizace i slabším žákům.

Při rozpracování vzdělávacího obsahu tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy je třeba mít stále na paměti, že tyto úlohy a problémy by měly prolínat všemi tematickými okruhy a měly by být organicky zařazovány do výuky v průběhu celého základního vzdělávání. Vzhledem k tomu, že tento tematický okruh nemusí tvořit samostatný celek, lze jej rozpracovat např. zařazením úloh a problémů do všech tematických okruhů v jednotlivých ročnících. Rozpracování lze také řešit např. zařazením tohoto vzdělávacího okruhu do jednotlivých ročníků jako samostatného tematického okruhu v každém ročníku.

Je samozřejmě možné tyto způsoby kombinovat, tj. rozpracovat zařazení úloh do ostatních tematických okruhů a na závěr zařadit i jako samostatný tematický okruh v každém ročníku apod.

V každém případě by měly být zařazovány úlohy a problémy s nejrůznější tématikou takové, aby jejich řešení vyžadovalo uplatnění poznatků nejen z izolovaných tematických okruhů, ale aby k jejich řešení byly potřebné poznatky komplexního charakteru z různých tematických okruhů a vzdělávacích oblastí, což může významně přispět i k řešení mezipředmětových souvislostí. Především je však třeba zařazovat takové úlohy, k jejichž řešení je třeba užívat logickou úvahu, popř. kombinační úsudek. Pro zpestření je vhodné zařazovat i úlohy a problémy ze zábavné matematiky.

2 Nestandardní úlohy

Vyhledáme-li si ve slovníku cizích slov (Klimeš, 2005) pojem standardní, najdeme, že standardní znamená ustálený; běžný; normální; nevybočující z průměru. Definice pojmu nestandardní úloha není pevně stanovena, a proto se pokusím o její formulaci.

Nestandardními úlohami rozumíme takové úlohy, jejichž řešení do značné míry nezávisí na obvyklých postupech užívaných na našich školách. Vyžadují určitou míru rozumové vyspělosti žáků a také schopnost logického uvažování a tvůrčího myšlení.

Cílem zařazení nestandardních úloh do vyučování je podporovat a **rozvíjet logické myšlení** a schopnost aplikovat osvojené matematické dovednosti.

2.1 Slovní úlohy

Slovní úlohy (Novák; Stopenová, 1993) netvoří ve školské matematice samostatný tematický celek, ale prolínají celým matematickým učivem. Jako ostatní typy úloh mají **funkci motivační, poznávací, procvičovací a diagnostickou**. Jsou významnou formou aplikace matematické teorie, i když se neomezují pouze na aplikaci matematických operací – početních výkonů. Ve vyučování matematice na nich aplikujeme celou šíři poznatků z didaktického systému učiva matematiky. Z tradičního učiva 1. stupně základní školy jsou to pojem přirozeného čísla a desítkové numerační soustavy, zlomků, porovnávání a zaokrouhlování čísel, základních pojmů dělitelnosti, elementů teorie množin a výrokové logiky, planimetrie a stereometrie včetně výpočtů obvodu a obsahu rovinných útvarů apod.

Kromě matematického obsahu, který je dán probíraným učivem, může být námětem slovní úlohy jakákoli reálná situace. Tématika slovních úloh na 1. stupni základní školy čerpá z prostředí školy a rodiny, obce, regionu, z historie, z technické a ekonomické praxe, využívá zábavnou a rekreační matematiku.

Slovní úlohy jsou verbálně formulované matematické problémy. Jejich řešení je jednou z nejobtížnějších partií učiva matematiky na 1. stupni ZŠ. Řešení slovních úloh vyžaduje do značné míry abstraktní myšlení, které se na prvním stupni ZŠ teprve rozvíjí. Jedním z hlavních problémů při řešení slovních úloh je pochopení textu úlohy a následné přeložení reálné situace vyjádřené běžným jazykem do jazyka matematického vyučování.

2.1.1 Jednoduché slovní úlohy

V souladu s Novákem (Novák; Stopenová, 1993), se jednoduché slovní úlohy se řeší jedním početním výkonem. Obvykle je v jednoduché slovní úloze vyjádřena reálná situace se dvěma známými údaji. Otázka úlohy je zaměřena na určení neznámého údaje, který je s údaji danými v určitém vztahu.

***Příklad**: Michal má 12 let, jeho otec je třikrát starší. Kolik let má Michalův otec?*

Ve vyučování matematice prvních ročníků základní školy jednoduché slovní úlohy převažují. Obvykle se zařazují do následující typologie:

1. **Úlohy na sčítání**
   Určení součtu: *Ve třídě je 12 chlapců a 15 děvčat. Kolik je ve třídě všech žáků?*
   Zvětšení čísla o několik jednotek: *Z jednoho pole se sklidilo 127 tun brambor, z druhého o 58 tun více. Kolik tun brambor se sklidilo z druhého pole?*
2. **Úlohy na odčítání**
   Určení rozdílu: *Dědeček natrhal 87 kg jablek. 45 kg prodal. Kolik mu zůstalo?*
   Zmenšení čísla o několik jednotek: *Petr má 20 knih, Ondra má o 6 knih méně. Kolik knih má Ondra?*
   Porovnávání rozdílem (jsou dána 2 čísla, má se určit, o kolik je jedno z nich menší/větší než druhé): *Jana má 50 korun, Mirka má 20 korun. O kolik korun má Mirka méně než Jana?*
3. **Úlohy na násobení**
   Určení součtu stejných sčítanců: *Závodů se zúčastnila 4 družstva po 6 závodnících. Kolik bylo všech účastníků závodu?*
   Zvětšení čísla několikrát: *Chodník je široký 2 metry. Silnice je pětkrát širší. Jak široká je silnice?*
4. **Úlohy na dělení**
   Dělení (rozdělování) na stejné části: *Tři chlapci se rozdělili stejným dílem o 12 bonbónů. Kolik dostal každý?*
   Dělení podle obsahu (je dán celek a velikost jedné části, má se určit počet částí): *Kolik chlapců si rozdělilo 12 bonbónů, když každý dostal 4 bonbóny?*
   Zmenšení čísla několikrát: *Topol je vysoký 20 metrů, jabloň je pětkrát nižší. Jak vysoká je jabloň?*

Porovnávání podílem (jsou dána 2 čísla, má se určit, kolikrát je jedno z nich menší/větší než druhé): *Auto ujede za hodinu 40 km. Chodec ujde za hodinu 4 km. Kolikrát méně ujde za hodinu chodec?*

2.1.1.1 Rozlišení jednoduchých slovních úloh na přímé a nepřímé

PŘÍMÉ úlohy jsou takové, v nichž formulace zadání souhlasí s početním výkonem, kterým se úloha řeší. Přímými úlohami jsou všechny, které byly uvedeny v naší typologii. Např. formulace „o 6 méně“ vede na odčítání, „pětkrát více“ vede na násobení (Novák; Stopenová, 1993).

***Příklad**: Ve třídě je 10 chlapců, děvčat je dvakrát více. Kolik je ve třídě děvčat?*

(formulace „dvakrát více“ vede k násobení, úloha se řeší násobením)

NEPŘÍMÉ úlohy se řeší opačným početním výkonem, než naznačuje formulace zadání. Text úlohy „svádí“ žáka k užití nesprávného početního výkonu.

***Příklad**: Ve třídě je 20 děvčat, to je dvakrát více než chlapců. Kolik je ve třídě chlapců?*

(formulace „dvakrát více“ vede k násobení, úloha se řeší dělením)

Především nepřímé úlohy typu zmenšení a zvětšení čísla několikrát a porovnání rozdílem a podílem způsobují žákům potíže při správné identifikaci početního výkonu, potřebného k řešení.

***Příklad**: Jana má 50 korun. Mirka má 20 korun. O kolik korun má Jana více než Mirka?*

***Příklad č.2**: Auto ujede za hodinu 40 km. Chodec ujde za hodinu 4 km. Kolikrát více ujede za hodinu auto?*

Zvýšenou pozornost vyžaduje správná identifikace úloh na porovnávání rozdílem (formulace „o kolik méně“, „o kolik více“) a na porovnávání podílem (formulace „kolikrát méně“, „kolikrát více“). Záměna obou typů a z ní plynoucí nesprávná řešení patří k velmi frekventovaným chybám žáků 1. stupně základní školy.

V učebnicích tzv. množinového pojetí, ale i v jiných didaktických materiálech, se objevují jednoduché slovní úlohy **„kombinatorického typu".** *Tento typ slovních úloh je, dle mého názoru, nejfrekventovanějším typem nestandardních úloh, které najdeme v matematických soutěžích a učebnicích.* Na prvním stupni ZŠ vyžaduje experimentální řešení, nejčastěji v podobě grafického řešení či zápisu o provedených pokusech do tabulky.

Klade vysoké nároky na systematičnost postupu při řešení úlohy a pochopení smyslu textu slovní úlohy.

Příklad*: Anička slaví narozeniny. Na oslavu pozvala své kamarádky Katku, Janu, Pavlu a Danu. Aby si mohly připít na zdraví, koupil jim tatínek „rychlé špunty". Kolik cinknutí se ozve při slavnostním přípitku, když si každá z děvčat připije s každou?*

Příklad č.2*: Na jídelním lístku jsou 3 polévky a 6 hlavních jídel. Kolika způsoby si může host sestavit oběd?*

Samostatné sestavování, formulování jednoduchých slovních úloh patří mezi důležité matematické dovednosti žáků. V 1. ročníku obvykle formulují úlohy, popisující obrázek v pracovním sešitu. Materiál pro sestavování úloh lze také najít v různých tabulkách, přehledech apod.

Ve vyučování matematice mají své místo i **úlohy s nadbytečnými nebo chybějícími údaji**. Jejich zadání je třeba pozorně analyzovat a využít pro rozvíjení úsudku žáků:

Příklad*: Na turistický výlet šlo 6 chlapců a 8 děvčat. Dopoledne ušli 5 km, odpoledne 4 km. Kolik km urazili za celý den?*

Příklad č.2*: Kolik zaplatíme za oplocení zahrady, stojí-li jeden metr pletiva 80 korun?*

2.1.2 *Složené slovní úlohy*

Obvyklé a žákům známé reálné situace můžeme vyjádřit jednoduchou slovní úlohou spíše ve výjimečných případech (Novák; Stopenová, 1993). Častější jsou situace, v nichž jsou vzájemně propojeny předmětové komponenty složitějšími vazbami. Jejich matematických modelem může být složená slovní úloha.

Složená slovní úloha vyžaduje k řešení alespoň dva početní výkony, které ovšem nemusejí být různé. Každý početní výkon řeší jednu úlohu jednoduchou. Lze tedy složenou slovní úlohu „rozložit“ na několik jednoduchých slovních úloh.

***Příklad**: Na jedné straně ulice je postaveno 35 domů, na druhé straně o 5 domů méně. a) Kolik domů je postaveno na druhé straně ulice?* Takto formulovaná otázka je otázkou jednoduché slovní úlohy, která se řeší odčítáním (úloha na zmenšení o několik jednotek: a – b = x). *b) Kolik domů je postaveno na obou stranách ulice?* Takto formulovaná otázka je otázkou složené slovní úlohy, kterou lze rozložit na dvě úlohy jednoduché: a + (a – b) = y. K řešení je třeba užít jednou odčítání, jednou sčítání.

Rozmanitost složených slovních úloh je dána jednak počtem dílčích jednoduchých úloh, jednak jejich typem. Tato skutečnost prakticky znemožňuje uplatnit jakoukoliv vyčerpávající typologii. Přesto je pro učitele užitečné a potřebné, aby dokázal postihnout logickou strukturu složené slovní úlohy, určité společné znaky úloh lišících se svými náměty s číselnými hodnotami, a využil těchto poznatků při vytváření dovedností řešení složené slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy.

Např. skupina složených slovních úloh se v řadě vnějších aspektů odlišuje:

1. *Na zájezd jely dva autobusy. V prvním cestovalo 36 osob, ve druhém o 4 osoby více. Kolik lidí cestovalo v obou autobusech?*
2. *V zahradě byly vysázeny jabloně a hrušně. Jabloní bylo 16, hrušní o 9 méně. Kolik jabloní a hrušní bylo vysázeno v zahradě dohromady?*
3. *Nákladní vlak měl 12 krátkých vagónů. Otevřených vagónů měl čtyřikrát více. Kolik vagónů měl vlak celkem?*
4. *Turista cestoval autobusem a vlakem. Za jízdenku na autobus zaplatil 24 korun, za jízdenku na vlak třikrát méně. Kolik korun zaplatil turista za obě jízdenky dohromady?*

Tvoří však určitý systém, neboť všechny úlohy této skupiny mají společné znaky. Označíme-li číselné údaje v jednotlivých úlohách písmeny a, b, pak můžeme logickou strukturu úloh vyjádřit takto:

1. úloha: a + (a + b)
2. úloha: a + (a – b)
3. úloha: a + (a · b)
4. úloha: a + (a : b)

Společným znakem uvedené skupiny úloh je zvětšení daného čísla a. Ve vyučování matematice může byť intuitivní pochopení vztahů mezi podmínkami a otázkou v nejlehčí úloze (1.) pravděpodobně usnadnit řešení úloh zbývajících.

Poměrně přehledná situace je u složených úloh, které se řeší **dvěma početními výkony** (stejnými nebo různými). Tyto úlohy nejsou příliš „složité“, i když mohou být různorodé a někdy i „obtížné“ pro žáka 1. stupně základní školy.

1. *Vagón naložený uhlím váží 24 tuny. Prázdný vagón je čtyřikrát lehčí. Kolik tun váží uhlí?* a – (a : b)
2. *Tři stejné sklenice kompotu jsou za 36 korun. Zač je 5 takových sklenic?* (a : b) · c
3. *Bedna se zbožím váží 35 kg. Kolikrát je bedna lehčí než zboží, když bedna váží 5 kg?* (a – b) : c
4. *Z místa A do místa B je to po dálnici 250 km. Kolik kilometrů zbývá do cíle řidiči po 2 hodinách jízdy, jede-li průměrnou rychlostí 80 km/h?* a – (b · c)

Komplikovanější strukturu mají složené úlohy, vyžadující k řešení **tři nebo více početních výkonů**. Složená slovní úloha totiž není prostou sekvencí několika jednoduchých úloh. Tyto dílčí úlohy na sebe významově navazují a jsou vzájemně propojeny. Žáky je proto třeba vést nejen k dovednosti řešit slovní úlohy určitého typu, ale především promýšlet situaci popsanou v úloze a uvážlivě volit přístup řešení.

1. *Na jednoho účastníka dětského tábora se plánuje spotřeba 50 l vody denně. Tábor má 197 účastníků. Odpovídá spotřebě pramen, ze kterého vyvěrá 5 litrů vody za minutu?*
2. *Do školy koupili 56 metrů záclon po 155 korunách na jeden metr. Na záclonách byly 3 drobné vady, na každou byla sleva 15 korun. Kolik zaplatili za záclony?*
3. *NA jednom platu je 30 vajíček. NA pultě v obchodě měli 8 plat plných a z jednoho plata bylo odebráno 10 vajec. Kolik vajec bylo na pultě?*

4. *V kině je 25 řad po 18 sedadlech. Kolik korun vybrala pokladní, když bylo vyprodáno? Vstupenky do 1. – 8. řady byly po 6 korunách, do 9. – 13. řady po 10 korunách, do 14. – 25. řady po 12 korunách.*

2.1.3 Fáze řešení slovních úloh na 1. stupni ZŠ

Fáze řešení slovních úloh na 1. stupni ZŠ lze shrnout do pěti bodů (Hošpesová, 2002):

1. **Seznámení s úlohovou situací a její rozbor**
   V této fázi je nutné, aby si žák slovní úlohu několikrát přečetl, pokusil se abstrahovat věcnou stránku problému a nalézt vztahy mezi údaji a otázkou.
2. **Vytvoření matematického modelu slovní úlohy**
   Tato fáze je nejdůležitějším a myšlenkově nejnáročnějším okamžikem řešení slovní úlohy. Ve škole se žák učí spíše hledat typ slovní úlohy, ve kterém by mohl uplatnit nacvičený postup než vhodné matematické vyjádření vztahů v úloze. Problém nastává při řešení nestandardních typů úloh.
3. **Řešení matematického modelu situace**
   S touto fází nemají žáci velké problémy, protože potřebné výpočty mají žáci již nacvičené.
4. **Kontrola**
   Kontrolu bychom neměli omezovat pouze na kontrolu správnosti výpočtu. Měli bychom kontrolovat i správnost matematického vyjádření (konfrontace zadání a výsledku a následné zvážení, zda je výsledek možný).
5. **Interpretace výsledků**
   Nečiní žákům větší potíže, protože žák se vrací k již známé úloze a formuluje odpověď, popř. další úlohy podle podobného schématu.

2.1.4 Další dělení (dle Hošpesové, 2002)

2.1.4.1 Inverzně formulované slovní úlohy

Inverzně formulované slovní úlohy jsou takové úlohy, kde situaci vyjádřenou ve slovní úloze nelze vyjádřit přímo aritmetickým příkladem. Text úlohy někdy navíc „napovídá“ inverzní početní operaci.

Inverzní zobrazení (Inverzní zobrazení, 2015) k nějakému zobrazení $f: A \rightarrow B$ přiřazuje prvkům z množiny B prvky množiny A, tedy obrazům zobrazení f jejich vzory. Laicky řečeno, inverzní zobrazení zobrazuje „opačným směrem“ než původní zobrazení.

Příklad: *Pavel si koupil jeden hrací los. Vyhrál na něj dvojnásobek ceny losu a prémii 28 Kč. Celkem vyhrál 58 Kč. Kolik korun stál Pavla los?*

2.1.4.2 „Kapitánské“ slovní úlohy

„Kapitánské“ slovní úlohy můžeme rozdělit do několika skupin, zde se budeme zabývat dvěma z nich:

1. Přeurčené - úlohy, kdy se ptáme na údaj, který je v textu buď přímo obsažen nebo je snadno vypočitatelný.
   Příklad: *Na lodi je 37 ovcí a 17 koz. Při bouři spadne 10 ovcí do moře. Kolik koz zůstalo na palubě?*
2. Nedourčené
   a) Údaje v textu napovídají určitý početní výkon, ale otázka se ptá na údaj, který ze zadaných údajů nemůžeme vypočítat (úloha uvedená jako příklad, případně její modifikace, dala název tomuto typu úloh).
      Příklad: *Loď je 13 m dlouhá a 5 m široká. Jak starý je kapitán?*
   b) Údaje v textu nenapovídají žádný početní výkon.
      Příklad: *V přístavu přistály 4 parníky. Je známo, že první parník se vrací do téhož přístavu vždy za 5 týdnů, druhý za 8 týdnů a třetí za 12 týdnů.*
      Za kolik týdnů připlouvá čtvrtý parník?

2.1.4.3 Slovní úlohy řešené logickým úsudkem

K bezchybnému řešení tohoto typu slovní úlohy je potřeba důkladné pochopení textu, vztahů mezi jednotlivými subjekty vyskytujícími se v textu úlohy a správný úsudek.

Příklad: *Adam, Robert, Dan a Franta našli v lese houby. Franta jich našel víc než Dan. Adam míň než Dan. Adam a Robert mají dohromady tolik hub, jako mají dohromady Dan s Frantou. Kdo z nich našel nejvíc hub? Kdo nejmíň? Vysvětlete, jak jste na to přišli.*

2.2 Úlohy řešené na základě objevení a uplatnění číselných vztahů

V číselných úlohách hojně využíváme základních početních operací: sčítání, odčítání, násobení či dělení. Řešení ovšem vyžadují jistou dávku důvtipu a logického úsudku vedoucí k objevení číselných vztahů. Velmi často žáci řeší většinu těchto typů úloh experimentálně.

2.2.1 Číselné a obrázkové řady (pravidelnosti)

Číselnými a obrázkovými pravidelnostmi jsou označovány řady, posloupnosti (Matematika online, 2005). Ty můžeme považovat za propedeutiku (Propedeutika, 2016 - předběžné vzdělávání, předběžná cvičení) funkčního myšlení. Velmi často se s nimi setkáváme v testech měřících inteligenční kvocient (numerická a vizuální inteligence). Musíme si zde uvědomit, že svým počátkem není řada určena jednoznačně. Vždy se tak mohou žáci rozhodnout a pravidlo změnit: např. 8, 14, 26, 50, 98, 50, 26, ... nebo 8, 14, 26, 50, 98, 99,101, 105, 113, ...

Příklad č.1: *Určete další tři členy této řady. Urči pravidlo, podle kterého je řada tvořena?*

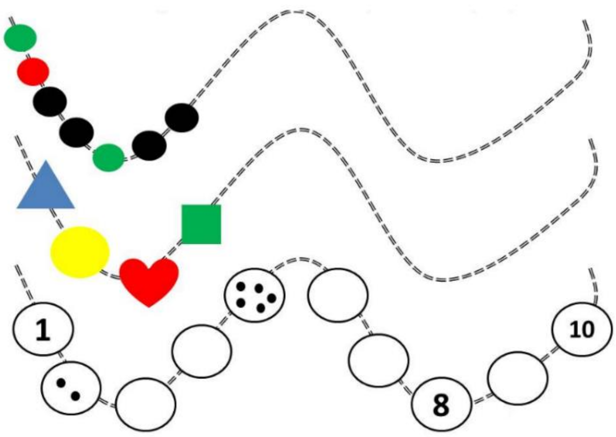
8; 14; 26; 50; 98; . ; . ; . ; . . .

Příklad č.2: *Který obrázek nakreslíš místo otazníku?*

🔔 ☎ ✉ 🕮 🔔 ☎ ✉ 🕮 🔔 ?

Příklad č.3:

Nejdříve dokresli korále, aby pravidelně pokračovaly. Korálků které barvy na obrázku máš nejvíce? Na spodní šňůrku dokresli korále tak, aby pravidelně rostla řada čísel. Můžeš si vybrat, zda dokreslíš puntíky nebo číslici.



Obrázek 1 - www.fortiq.cz

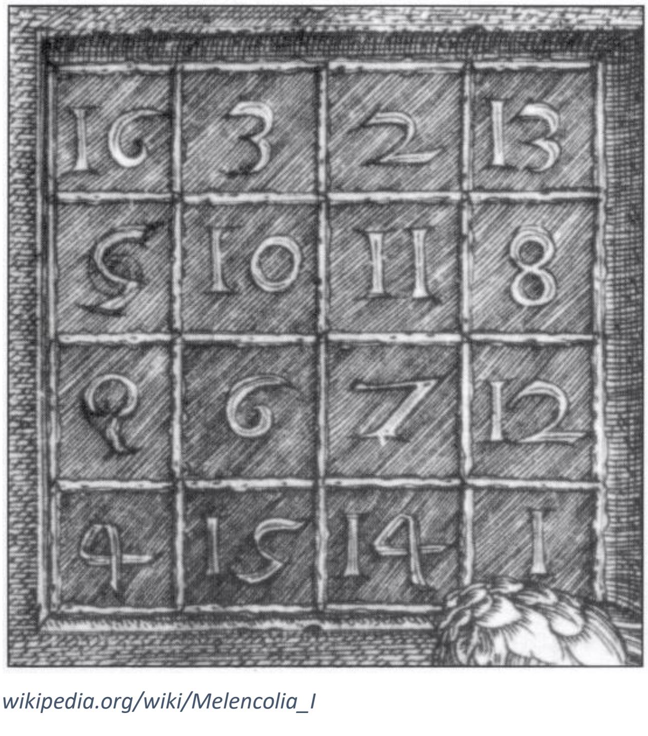
2.2.2 Magické čtverce

Dle internetového zdroje (Magic squares, 2009) nazýváme magickým čtvercem n-tého řádu rozmístění čísel 1, 2, ... n^2do čtverce o straně n, kde součet čísel v každém řádku, sloupci i v obou úhlopříčkách je stejný. Magické čtverce patří k nejstarším početním hříčkám. Dělí se na čtyři základní typy, a to:

- součtové
- rozdílové
- podílové
- součinové

Z historie: Nejstarší magický čtverec byl objeven v knize z 5. tisíciletí před naším letopočtem v Číně. Evropané se problémem magických čtverců začali zabývat v 15. století. Magickým čtvercům byla přisuzována tajemná moc, dnes je řadíme k početním hříčkám, kterých lze využít také v hodinách matematiky.

Světově proslulým se stal magický čtverec čtvrtého řádu (tj. tabulka 4 × 4). Za tento čtverec vděčíme německému malíři Albrechtu Dürerovi, který jej v roce 1514 zvěčnil na jeho rytině. Prostřední dvě čísla v dolním řádku udávají rok vzniku rytiny. Tento čtverec má součet 34 nejen v řádcích a sloupcích, ale i např. ve čtvercích se stejnou barvou.



Obrázek 2, 3 - www.en.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I

Příklad: *Doplň do tabulky 3 × 3 čtverečky čísla 1 až 9 tak, aby se každé číslo bylo použito právě jednou a součet v řádcích, sloupcích a diagonálách (úhlopříčkách) byl stejný.*

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Řešení: Zjistíme součet všech čísel (1+2+3+4+5+6+7+8+9=45) a výsledek vydělíme 3 (45:3=15). V každém sloupci a řádku vyjde součet 15.

2.2.3 Sudoku

Jedná se o tabulku o devíti sloupcích a devíti řádcích s několika doplněnými jednocifernými číslicemi (Pešková, 2011). Čtverec 9 × 9 je ještě rozdělen na 9 čtverců velikosti 3 × 3. Smyslem je v co nejkratším čase doplnit tabulku o zbývající číslice 1 až 9 tak, aby se žádná číslice v žádném sloupci, řádku a ani v jednom z devíti čtverců o straně 3 čtverečky neopakovala. To znamená, že v každém řádku, sloupci a tučně ohraničeném čtverečku musí být právě číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Každé Sudoku je ojedinělé a má jen jedno řešení.

Z historie: Hra Sudoku (Katrnoška, Křížek; Somer, 2008) se poprvé objevila v USA roce 1979 v časopise Dell Magazines pod názvem Number Place a vymyslel ji architekt Howard Garns, který bohužel o několik let později zemřel, a tak se nedočkal jejího obrovského rozkvětu, který tato hra získala ve 21. století. Sudoku za svůj rozkvět vděčí zejména Wayne Gouldovi z Nového Zélandu, který se během svého pobytu v Japonsku seznámil s touto hrou a později vytvořil program, který automaticky generuje úlohy Sudoku velikosti 9 x 9 dávající jediná řešení. Do sítě 9 × 9 se postupně a zcela náhodně přidávají cifry od 1 do 9 tak, aby byla splněna pravidla výsledného postavení Sudoku. Jakmile program zjistí, že úloha má právě jedno řešení, přestane přidávat cifry a zadání Sudoku je hotové.

Název Sudoku je vlastně japonská zkratka věty: „Suuji wa dokushin ni kagiru", což v překladu znamená „**číslice musí zůstat samotná**". Paradoxem je, že sami Japonci, kteří mají Sudoku velice v oblibě, používají pro ni původní anglický název Number Place. Název Sudoku vymyslelo nakladatelství Nikoli a nechalo si jej v Japonsku patentovat. Proto se japonští vydavatelé drží raději anglického názvu, aby se vyhnuli poplatkům. Tato registrace je platná pouze pro Japonsko, takže zbytek světa používá japonskou zkratku Sudoku.

Sudoku se stalo velkým hitem dnešní doby. Je určeno pro všechny věkové kategorie, nejmenšími počínaje, pro ty jsou určené především snadnější varianty sudoku. *Jako vhodnou webovou stránku na procvičování hry Sudoku bych zvolila* ***www.sudokuonline.cz****, kde si každý může zvolit svoji úroveň obtížnosti a na konci zkontrolovat správnost vyřešeného Sudoku pomocí tohoto webu. Stránku bych doporučovala do výuky matematiky jen jako zpestření hodiny, rozhodně bych děti nenechala celou hodinu hrát Sudoku online.*

Příklad:

1	3	4		5				8
		7					2	
2			1			3	4	5
		6	4			8	5	
	7		9	6	2		1	
	1	3			7	9		
7	4	9			3			1
	6					7		
5				9		2	3	6

1	3	4	2	5	9	6	7	8
6	5	7	3	4	8	1	2	9
2	9	8	1	7	6	3	4	5
9	2	6	4	3	1	8	5	7
8	7	5	9	6	2	4	1	3
4	1	3	5	8	7	9	6	2
7	4	9	6	2	3	5	8	1
3	6	2	8	1	5	7	9	4
5	8	1	7	9	4	2	3	6

Obrázek 4 - www. sudokuonline.cz

2.3 Prostorová představivost

Pod pojmem „prostorová představivost“ (Molnár, 2014) lze chápat soubor **schopností** (schopnost – soubor předpokladů nutných k úspěšnému vykonávání určité činnosti) týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických **představ** (obsah vědomí, vybavený či přepracovaný minulý zážitek a vjem) o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru. Tyto schopnosti jsou ovlivňovány vlastnostmi psychických procesů, například vnímáním, rozumnou činností s představami, vybavováním si, zobecňováním, využíváním paměti a jiné. Rozvoj těchto schopností se děje učením, získáváním zkušeností či různými aktivitami ve volném čase. Jedná se například o sport nebo počítačové hry – ty jsou ovlivňovány motivacemi, zájmy jednotlivce, podnětným prostředím v rodině a podobně.

Schopnost dobré prostorové představivosti je klíčová pro technickou či konstrukční oblast myšlení. Osoby s dobře rozvinutou prostorovou představivostí se rychle zorientují v neznámém prostředí, správně interpretují mapy, plánky a nákresy. Lidé s rozvinutou prostorovou představivostí mají často lepší uplatnění v technických a uměleckých směrech.

Milan Hejný (1990) si pod pojmem prostorová představivost představuje: „Něco, co nám umožňuje vidět to, co ještě není – tedy vytvářet si představy geometrických objektů a jejich rozmístění, umět v představě s těmito objekty manipulovat.“

Prostorové vnímání a prostorová představivost úzce souvisí s **geometrií**. Počáteční rozvíjení geometrické představivosti začíná v rovině. Děti se učí rozlišovat geometrické tvary a v obrazcích hledat různé geometrické útvary, ze kterých je obrazec složen. Později se žáci seznamují se základními tělesy jako jsou koule, válec, krychle, kvádr, kužel či jehlan. Skládají tělesa a sestavují sítě těles.

Lidské představy o prostoru vznikaly velmi pozvolna. Aby se člověk mohl snadněji orientovat v okolním světě, potřeboval vyjadřovat velikosti předmětů. Začal tak používat stopy, palce, pídě a lokty a se vznikem těchto a jiných měřítek získal velmi zajímavou možnost. Mohl měřit nejenom velikost samotných věcí, ale i místo, kam se věci mohly přesunout.

Tři formy prostorové představivosti rozlišuje Jirotková (1990). Za základ prostorové představivosti považuje obecně chápanou prostorovou představivost (ta se může rozvíjet i při vyučování geometrie), geometrickou představivost už považuje za její abstraktnější formu a nejvyšší formou je prostorové schematické myšlení.

Jirotková prostorovou představivostí rozumí „intelektovou schopnost – dovednost vybavovat si - představit si:

1. dříve viděné – vnímané objekty v trojrozměrném prostoru a vybavit si jejich vlastnosti, polohu a prostorové vztahy
2. dříve nebo v daném momentě viděné – vnímané objekty v jiné vzájemné poloze, než v jaké byly nebo jsou skutečně vnímány
3. objekt v prostoru na základě jeho rovinného obrazu
4. neexistující reálný objekt v trojrozměrném prostoru na základě jeho slovního popisu“.

Geometrickou představivost pak definuje jako schopnost:

1. Poznat geometrické tvary a jejich vlastnosti.
2. Z konkrétních objektů vyvodit jejich geometrické vlastnosti a spatřovat v nich geometrické útvary v čisté podobě.
3. Dokázat si představit geometrické útvary (na základě plošných obrazů) v jakýchkoliv vztazích (i v takových, které nelze demonstrovat pomocí hmotných modelů geometrických útvarů).
4. Být schopen představit si co nejvíce geometrických útvarů i s jejich nejrůznějšími podobami.
5. Představit si na základě popisu geometrické útvary i vztahy mezi nimi.

2.3.1 Rozvíjení prostorové představivosti

Prostorovou představivost pomáhají rozvíjet už v předškolním věku všechny aktivity, při kterých dítě přichází do styku s geometrickými objekty, především prostřednictvím didaktické hry. Zkušení učitelé - elementaristé - si jistě uvědomují, že v současném primárním matematickém vzdělávání patří didaktická hra k nejčastěji frekventovaným činnostem, při nichž dochází k obohacování žáků, neuvědomělému učení a mnohokrát má úspěch v řešení úloh i žák se slabším průměrem (Molnár, Perný; Stopenová, 2006).

Za dílčí učební cíle rozvíjení prostorové představivosti obvykle považujeme:

- vytvoření přesných představ tvaru základních geometrických útvarů,
- schopnost provést v představě analýzu geometrických útvarů (odhadnout nebo stanovit vzájemnou polohu podmnožin bodů tvořících geometrický útvar a odhadnout nebo popsat vztahy mezi nimi),
- číst s porozuměním a umět modelovat obrázek znázorňující prostorovou situaci (ve volném rovnoběžném promítání, ve sdružených pravoúhlých průmětech na dvě a tři průmětny, kótovaný půdorys apod.),
- vytvořit představu velikosti základních jednotek velikosti, odhadnout velikosti geometrických útvarů, - popsat situaci geometrickou terminologií a symbolikou,
- představit si složené geometrické útvary jako sjednocení základních geometrických útvarů,
- umět rozhodnout o prostorovém uspořádání geometrických útvarů („viditelnost" na obrázku znázorněných prostorových situací),
- vytvářet konstrukční dovednost (tj. podle představy znázornit obrázkem vzájemnou polohu a velikost geometrických útvarů), dovednost vytvořit názorný obrázek prostorové situace nebo tělesa ve volném rovnoběžném promítání, dovednost sestrojit sdružené průměty tělesa, vymodelovat stavbu z krychlí apod.

*V **PRAKTICKÉ ČÁSTI** této diplomové práce jsem uvedla náměty a soubor aktivit rozvíjející prostorovou představivost.*

3 Význam matematiky pro 21. století

Zde uvedeme některé základní myšlenky, které doporučila americká The National Council of Supervisors of Mathematics (Národní rada dohlížitelů nad školní matematikou) v květnu 1980 pro vyučování matematiky v 21. století. Za významné považuje ty matematické schopnosti, které jsou nutné pro zaměstnání a další vzdělávání. Současní žáci musí očekávat, že během života změní mnohokrát své zaměstnání. Rovněž i zaměstnání, které budou mít, se bude rozvíjet a měnit. Aby jako budoucí pracovníci byli dostatečně mobilní, musí se dnešní žáci učit důkladnému porozumění matematických pojmů a principů. Musí jasně umět zdůrazňovat a efektivně umět komunikovat. Musí rozeznat matematické aplikace všude kolem sebe, musí vědět, kdy a jak použít výpočty a musí získat zběhlost při řešení úloh (Růžičková, 2002).

3.1 Dvanáct hlavních oblastí matematických dovedností

Po prozkoumání a vyhledání různých učebních osnov jsem povinná zmínit, že ne všechny matematické dovednosti se týkají 1. stupně základní školy. Tyto dovednosti (Růžičková, 2002) mi ovšem přišly zajímavé, proto jsem je do své diplomové práce zařadila.

1) Řešení úloh – problémů

Učit se řešit úlohy – problémy je hlavním důvodem studia matematiky. Řešení úloh – problémů je proces aplikace dřívějších znalostí na nové a neznámé situace. Strategie řešení úloh – problémů zahrnuje položení otázek, analýzu situace, předložení výsledků, znázornění výsledků, nákres diagramů (strukturované grafické znázornění pojmů, myšlenek, vztahů, číselných, matematických nebo statistických údajů, prostorových nebo anatomických vztahů a podobně, sloužící názornému objasnění nebo jako pomůcka v myšlenkových postupech) a použití metody pokusu a omylu. Žáci by měli znát alternativní řešení úloh – problémů, měli by zvládnout úlohy s více než jedním řešením.

2) Sdělování matematických myšlenek

Žáci by se měli učit jazyk a symboliku matematiky. Dále by měli umět přijímat matematické myšlenky poslechem, čtením, a pomocí vizuální techniky. Měli by být schopni prezentovat matematické myšlenky řečí, psaním, kreslením obrázků a pomocí demonstrace s konkrétními modely. Měli by umět diskutovat a klást otázky.

3) Matematické zdůvodňování

Žáci by se měli učit samostatně provádět ověřování matematických myšlenek. Měli by být schopno využít znalosti řešení typových úloh na nové úlohy a svých zkušeností používat k vyslovování hypotéz (Hypotéza, 2017 - výpověď, jejíž platnost se pouze předpokládá, ale zároveň formulovanou tak, aby ji bylo možno potvrdit nebo vyvrátit). K vyvrácení hypotéz by se měli naučit používat protipříklady. Měli by být schopni rozlišovat mezi platnými a neplatnými argumenty.

4) Aplikace matematiky na každodenní situace

Žáci by měli být vedeni k tomu, aby si všímali každodenních situací, převáděli je na matematické situace (grafy, tabulky, diagramy, matematické výrazy), tyto situace matematicky zpracovávali a výsledky interpretovali v původních situacích. Měli by být schopno řešit procenta, poměry, trojčlenku, přímou a nepřímou úměrnost. Měli by poznat, že matematika se dá nejen aplikovat na okolní svět, ale měli by vidět, že matematika má svůj původ v okolním světe.

5) Hbitost při získávání „rozumových výsledků“

Při řešení úloh – problémů by žáci měli rychle najít řešení nebo hypotézu. Měli by mít cit pro to, aby určili, zda výsledky počítání jsou správné. Vzhledem ke stále většímu používání výpočetních prostředků, je tato schopnost mnohem důležitější než ostatní.

6) Odhady

Žáci by měli umět rychle určit přibližný výsledek užitím přibližných výpočtů a různých technik provádění odhadu. Odhady mohou být používány k ověření správnosti výsledků, ověřování hypotéz a provádění rozhodnutí. Žáci by si měli osvojit jednoduché techniky pro odhadování např. délky, plochy, objemu a hmotnosti. Měli by být schopni rozhodnout, kdy jistý výsledek je dostatečně přesný pro danou situace.

7) Vhodné výpočetní dovednosti

Žáci by měli získat zručnost při sčítání, odčítání, násobení a dělení celých a desetinných čísel. Dlouhé a komplikované výpočty se dnes provádějí pomocí kalkulátorů nebo počítačů. Pro kontrolu správnosti těchto výpočtů je nezbytná znalost základních číselných spojů a počítání zpaměti.

Žáci by měli k výběru výpočetní metody přistupovat prakticky a rozhodnout, kdy počítat zpaměti, kdy písemně a kdy užít výpočetní prostředek. Každodenní situace vyžadují i používání zlomků a velkou užitečnost má užití procent.

8) Algebraické myšlení

Žáci by měli učit užívat proměnné k vyjadřování matematických kvantit a výrazů: měli by umět prezentovat matematické funkce a vztahy užitím tabulek, grafů a rovnic. Měli by pochopit a správně používat kladná a záporná čísla, hierarchii operací (Hierarchie, 2017 - uspořádání nadřazenosti a podřízenosti tak, že každý prvek kromě nejvyššího je podřízen právě jednomu nadřízenému). Schéma hierarchie tak tvoří strom či pyramidu., vzorce, rovnice a nerovnice. Měli by rozeznat, kdy se jedna kvantita mění ve vztahu k jiné.

9) Měření

Základní pojmy měření by se měli žáci učit pomocí konkrétní zkušenosti. Měli by být schopni měřit vzdálenost, hmotnost, čas, objem, teplotu a úhly. Měli by se učit počítat jednoduché obvody, obsahy a objemy. Měření by měli být schopni provádět užitím vhodných prostředků s vhodnou úrovní přesnosti.

10) Geometrie

Žáci by měli pochopit geometrické pojmy nutné v trojrozměrném světe. Měli by znát takové pojmy, jako rovnoběžnost, kolmost, shodnost, podobnost a symetrie. Měli by znát vlastnosti jednoduchých rovinných útvarů a geometrických těles. Měli by si umět představit a slovně napsat, jak se objekty pohybují ve světě kolem nás, užitím takových termínů, jako posunutí, osová souměrnost a otáčení.

11) Statistika

Žáci by měli shromažďovat a organizovat údaje, které odpovídají na otázky jejich každodenního života. Měli by vědět, jak konstruovat, číst a zaznamenávat závěry z jednoduchých tabulek, map, karet a grafů. Měli by být schopno prezentovat informace o numerických údajích jako jsou střední hodnota, medián (Medián, 2016 - hodnota, jež dělí řadu vzestupně seřazených výsledků na dvě stejně početné poloviny), modus (Modus, 2017 - hodnota, která se v daném statistickém souboru vyskytuje nejčastěji - je to hodnota znaku s největší relativní četností, představuje jakousi typickou hodnotu sledovaného souboru a jeho určení předpokládá roztřídění souboru podle obměn znaku), rozsah a odchylka. Žáci by měli poznat základní užití a chyby statických hypotéz.

12) Pravděpodobnost

Žáci by měli pochopit elementární symboliku pravděpodobnosti, aby mohli určovat pravděpodobnost budoucích událostí. Měli by se seznámit s tím, jak je matematiky používána k tomu, aby pomáhala v provádění takových předpovědí jako jsou výsledky voleb, obchodní předpovědi a výsledky sportovních událostí. Měli by se naučit, jak se pravděpodobnost aplikuje na výsledky výzkumu a v procentu rozhodování.

4 *Didaktika matematiky*

Didaktika matematiky je v užším slova smyslu název pro tu část pedagogiky matematiky, která určuje **cíle, úkoly, obsah i metody** vyučování matematiky na školách.

Didaktika matematiky je vědecká disciplína, která se zabývá studiem procesu vyučování matematiky všude tam, kde se vyskytuje a na všech úrovních, tzn. počínaje dětmi předškolního věku až po studenty vysokých škol. Je to vědní obor zkoumající zákonitosti vyučování matematiky. Řeší otázku vědecké úrovně předmětu. Určuje, které axiomy (Axiom, 2017 - tvrzení, které se předem pokládá za platné, a tudíž se nedokazuje), definice a poučky se budou žákům vykládat, v jakém systému a v jaké formě. Usnadňuje soustavnost výkladu učiva podle témat i uvnitř témat a charakter výkladu. Řeší poměr mezi teoretickou částí, aplikacemi a stanovuje využití učiva při plnění výukových úkolů. Zkoumá a zjišťuje nejvhodnější formy, metody a postupy vyučování (Růžičková, 2002).

4.1 *Vztah logiky a didaktiky matematiky*

Každá věda, jak teoretická, tak experimentální, v rámci svého vývoje a běžné činnosti dospívá od určitých předpokladů k závěrům, a tak používá logiku. Didaktika matematiky, na rozdíl od matematiky, která používá především deduktivní logiku, využívá svých vyvození především pravděpodobnostní logiku. Proto závěry obdržené tímto způsobem v didaktice matematiky, jsou převážně pouze pravděpodobné hypotézy, které musí být experimentální cestou ověřeny jako pravdivé nebo zamítnuty.

V didaktice matematiky můžeme rozlišit použití logiky při zkoumání pedagogických problémů vznikajících při vyučování matematiky a použití prvků logiky přímo ve výuce. K použití prvního druhu patří například strukturální analýza (analýza logické struktury) matematické látky s cílem jejího didaktického zpracování, přizpůsobené školnímu vyučování, které často vyžaduje zjednodušení logiky tohoto materiálu. Problém bezprostředního zavedení prvků logiky do vyučování matematiky netkví v tom učit speciálně logiku, ale spočívá v tom, aby se nutné prvky logiky staly neoddělitelnou částí samotného vyučování matematiky. Aby se staly jeho důležitým pracovním nástrojem zvyšující efektivnost vyučování a aby měly vliv na logický rozvoj žáků.

4.2 *Didaktická hra*

Didaktická hra je pro pedagoga nejpřínosnější. Především v matematice, kde nezapomínáme na hádanky a hlavolamy (Růžičková, 2004).

Didaktická hra je činnosti, ve které dítě spontánně uplatňuje poznávací aktivity a realizuje poznávací činnost pod primárním vlivem příslušného pravidla, které způsobuje, že poznání a určení probíhá nezávisle jakoby ve druhém plánu.

Jsou hry, závody a soutěže s výrazným naučným účelem. Vymýšlejí je zpravidla vedoucí a učitelé přímo pro potřebu svého oddílu nebo třídy.

Didaktická hra je činnost, který rozvíjí rozumové schopnosti dětí různými úkoly, jako srovnávání, třídění, řazení a podobně. Uplatňuje se zvláště ve školce a v nižších třídách základních škol.

Didaktická hra je s pravidly, splňuje určitý didaktický cíl, záměrně evokuje produktivní aktivity a rozvíjí myšlení, účast na ní je povinná a podobá se učení. Každá didaktická hra obsahuje několik prvků:

- didaktický cíl (předpokládaný efekt)
- pravidla
- obsah (motivační rámec)
- prostředí (místo, kde se odehrává)
- čas (každá hra je ohraničena časovým rámcem v němž platí daná pravidla)
- účastníky
- pomůcky

V mladším školním věku mají děti rády hry na jednom místě, s nímž se seznámily, nepotřebují velký prostor, upřednostňují menší počet spoluhráčů. Starší děti naopak touží po změně, střádání, ve hře často uplatňují potřebu nezávislosti, ale i potřebu úspěchu. Určitou modifikací didaktických her jsou **soutěže**.

Při soutěžích je výsledek posuzován s ohledem na pořadí účastníků nebo skupin. Zatímco pro hru je typická činnost, pro soutěž je to organizace činnosti. Každou činnost lze chápat jako hru a zároveň ji organizovat jako soutěž. Didaktické hry v matematice, které jsou organizované formou soutěže, můžeme rozdělit na dva typy:

- Hry, jejichž vítězství závisí na rychlosti postupu bez snížení kvality řešení, tzn. hry na rychlost. Tento typ je vhodné zařadit zejména, je-li potřebná automatizace úkonů.
- Hry, kde o vítězství rozhoduje nejen rychlost, ale především kvalita. Tento typ je zaměřen na složitější výpočty, pro případy, kdy se uplatní přemýšlivá práce. Zde naopak spěch může narušit soustředěnou činnost.

Existuje řada kritérií pro **třídění didaktických her**. Například:

- dle doby trvání: krátkodobé, dlouhodobé
- dle místa, kde se odehrávají: ve třídě nebo mimo ni
- dle druhu převládající činnosti: osvojování vědomostí, intelektových a pohybových dovedností
- dle toho, co se hodnotí: kvalita, kvantita, čas výkonu
- dle toho, kdo je připravuje: žáci, učitel, jiné osoby

Zkušenosti ukazují, že je velmi efektivní zařazovat do vyučování soutěživé hry, neboť se díky nim zvyšuje spád aktivit.

Fáze didaktické hry:

- Příprava: zahrnuje přípravu podmínek pro realizaci hry, vytyčení cílů, vymýšlení aktivit, časové nároky, pomůcky atd.
- Motivace: je třeba žáky nadchnout, navnadit, podnítit jejich zvědavost, vytvořit atmosféru. Uvést název hry a námět.
- Vysvětlení pravidel: co nejsrozumitelněji.
- Realizace hry: učitel dohlíží na průběh.
- Vyhodnocení: mělo by následovat ihned po aktivitě, provádí se u her, kde chceme hodnotit výkon.
- Review/recenze: cílem je rozebrat hru, poskytnout zpětnou vazbu žákům, učitel řídí diskusi, klade otázky a usměrňuje tok myšlenek.

5 Formy vyučování matematice

Z didaktiky matematiky (Růžičková, 2002) jsem vypsala některé základní poznatky, které si myslím, že se mi do budoucí praxe budou hodit.

Pojem a charakter vyučovací formy, nebo také organizační formy vyučování, se měnil v průběhu vývoje teorie vyučování a nebyl vždy jasný. Vyučovací metody nebyly dostatečně odlišeny od forem, a dokonce i v současnosti se často zaměňují. **Vyučovací forma je chápána ve smyslu organizační formy vyučování**, tzn. jako vyučovací jednotka, která je časově limitována, která má přesně stanovený vyučovací a výchovný cíl a plní vzdělávací a výchovné úkoly. Používá se v ní velké množství vyučovacích metod, které tvoří organickou jednotu didaktických postupů a je v ní specifickým způsobem upravena aktivita objektu a subjektu podle věkových, tj. pedagogických, tělesných a psychických zvláštností.

5.1 Vyučovací hodina matematiky

Vyučovací hodina ve škole je základní organizační formou vyučování. Je relativně uzavřeným útvarem organizace učební práce objektu i subjektu vyučování a výchovy, útvarem, v němž jsou plněny cíle a úkoly vyučování a výchovy a s didaktickým a výchovným záměrem jsou použity vyučovací a také výchovné metody.

Vyučovací hodina je základním článkem vyučování matematiky. **Pomocný charakter mají domácí práce žáků, volitelné vyučování matematiky, individuální a skupinová práce se slabými a talentovanými žáky mimo vyučování apod.**

5.1.1 Struktura

Vyučovací hodina matematiky co do struktury obsahuje tyto elementy:

- seznámení s novým učivem
- upevnění nového učiva
- řešení nových úloh a cvičení
- opakování dříve probraného učiva
- kontrola výsledků domácí práce žáků
- formulace úkolů pro domácí cvičení
- praktické použití matematiky žáky
- prověřování a hodnocení vědomostí, dovedností a návyků žáků

Ne v každé vyučovací hodině je možné nalézt všechny tyto elementy. **Libovolná hodina je sestavena z jejich určité kombinace.** O tom, o jakou kombinaci půjde, rozhoduje cíl hodiny. Seznámení s novým učivem by mělo probíhat za aktivní účastí žáků a za jejich samostatného myšlení. Těžiště by mělo být v metodách problémového vyučování. Upevňování učiva při problémovém vyučování se děje v metodách problémového vyučování. Upevňování nového učiva napomáhá i jeho použití řešení úloh. V každé třídě se paralelně s výukou nových témat systematicky opakuje učivo z minulého roku i učivo starší. Je třeba volit takové formy opakování, které by vzbudily u žáků zájem o opakované učivo.

5.1.2 Typy vyučovacích hodin

V každé hodině matematiky existuje několik didaktických cílů, z nichž jeden je hlavní. **V závislosti na hlavním didaktickém cíli je možné rozlišit následující typy vyučovacích hodin matematiky:**

- hodiny počátečního osvojování vědomostí
- hodiny formování dovedností a návyků jejich aplikací
- hodiny celkového upevňování znalostí prostřednictvím zobecňujícího opakování
- hodiny závěrečné kontroly a hodnocení vědomostí, dovedností a návyků

1. <u>**Hodiny počátečního osvojování vědomostí rozdělujeme na dva druhy:** hodiny nových vědomostí a kombinované hodiny.</u>

Kombinovaná hodina obsahuje kontrolu domácího úkolu a zpravidla začíná tím, že zkontrolujeme osvojení si učiva minulé hodiny. Potom následuje výuka nového učiva, jeho upevnění a nakonec zadání domácího úkolu z nového či staršího učiva.

Mezi klady kombinované hodiny patří její pestrost. Tyto hodiny nevyžadují dlouhodobou myšlenkovou koncentraci. Častým nedostatkem je, že v nich chybí čas na osvojení nové látky. Rovněž upevňování učiva se často provádí ve spěchu**. Kombinované hodiny používáme tehdy, když nové učivo není rozsáhlé a není obtížné.**

Hodiny nových vědomostí. Cílem těchto hodin je výuka a upevnění nového učiva. Hodina zpravidla začíná dotazy, jejichž úkolem je připravit žáky k výuce nového učiva, tj. zopakovat vzorce, pravidla a poznatky, které budou opakovat. Potom se přistupuje k výuce nové látky. S novou látkou by měli být žáci seznamováni takovými metodami, při kterých by se do tohoto procesu sami zapojovali. Domácí úkoly musí dělat žáci samostatně, tj. základní podmínka úspěchu vyučování matematiky. Nejvhodnější by bylo, aby každý žák měl jiný úkol.

2. **Procvičovací hodiny** jsou určeny **k vytváření dovedností a návyků používat získané vědomosti.**

   V těchto hodinách by žáci měli většinu úloh řešit samostatně. Proto by měli mít učitelé k dispozici příklady k procvičování v několika variantách. Procvičovací hodina, která je plně věnována samostatnému řešení úloh, se nazývá hodina samostatné práce. K hodinám praktických aplikací matematiky patří hodiny laboratorních prací, kdy se před prováděním výpočtu nejdříve uskuteční různá měření a po jejich provedení následují výpočty. K hodinám praktických aplikací patří i topografické práce a matematické exkurze.

3. **Hodiny celkového upevňování znalostí prostřednictvím zobecňujícího opakování.**

Do této skupiny patří hodiny prověřování a hodnocení vědomostí, dovedností a návyků, hodiny písemných kontrolních prací. Doporučuje se, aby kontrolní práce byly zadávány alespoň ve čtyřech ekvivalentních variantách. Po provedení každé kontrolní práce se v následující hodině provede krátká analýza práce a žákům se zadají individuální úkoly k odstranění zjištěných nedostatků.

4. **Hodiny závěrečné kontroly a hodnocení vědomostí, dovedností a návyků.**

K nim patří hodiny ústního prověřování a hodnocení. V matematice se používají zejména koncem čtvrtletí a slouží k upřesnění čtvrtletní klasifikace.

5.1.3 Příprava učitele na vyučovací hodinu matematiky

Tato podkapitola úzce souvisí s rozborem hodiny. Kapitoly se navzájem doplňují.

Příprava vyučovacích hodin je obtížná a tvořivá činnost učitele. Aby učitel mohl tvořit, musí mít dobré teoretické znalosti z didaktiky matematiky, včetně znalostí z příprav vyučovacích hodin.

Systém plánovaní výuky ve školním roce obsahuje: **tematický celoroční plán**, který učitel vypracovává na začátku nového školního roku. Vychází z osnov a dává přehled o rozložení jednotlivých tematických celků, podle hodin předepsaných osnovami.

Před probíráním každého tématu je třeba připravit **plán systémů rozvržení daného tematického celku do vyučovacích hodin.** Při přípravě na jednotlivé vyučovací hodiny vychází učitel z plánu rozvržení učiva tematického celku. Nejdříve stanoví hlavní náplň hodiny, na kterou píše konkrétní přípravu. Například: Rozhodne-li se pro kombinovanou hodinu,

- připraví si otázky pro kontrolu látky minulé hodiny
- zvolí metody seznámení žáků s novými poznatky
- připraví potřebné pomůcky
- rozváží si zápisy na tabuli, vybere a propočte úlohy
- odhadne potřebný čas na jednotlivé části hodiny
- připraví zadání domácího cvičení
- rozhodne-li se zkoušet, určí koho a z čeho bude zkoušen

5.1.4 Rozbor hodiny

Po hodině provádí učitel její myšlenkovou analýzu. Vyčlení nejzdařilejší momenty, případně nedostatky a jejich příčiny. Je užitečné si tyto poznámky dělat do přípravy, aby se v dalších hodinách mohl nedostatků vyvarovat. Jestliže po hospitaci provádí vedení školy všestranný rozbor vyučovací hodiny, zkoumají v jednotě a vzájemných vztazích cíl, obsah, vyučovací metody a prostředky a organizaci činnosti v hodině. Tento **rozbor** se nazývá **komplexní**. Je ovšem možné vyčlenit i jednotlivé stránky hodiny a detailně je analyzovat. Takový způsob rozboru se nazývá **aspektový.**

Mezi aspekty analýzy patří:

- realizace cíle hodiny
- vědecká úroveň matematického obsahu hodiny
- analýza struktury hodiny
- vyučovací metody v hodině
- činnost učitele a žáků v hodině
- formování učebních dovedností a návyků žáků
- psychologické, etické, hygienické a jiné aspekty

Základem pro celkové hodnocení úrovně matematických hodin jsou výsledky činnosti žáků a učitele a nikoli vnější forma. Při přípravě na vyučovací hodiny matematiky si učitel musí uvědomit, že se žáci liší svými vlohami, typy paměti, tempem práce, myšlením, zvláštnostmi chápání učiva, a proto musí učitel diferencovat.

Rozlišujeme vnější a vnitřní diferenciaci. Vnější diferenciaci představují různé matematické zájmové kroužky, povinně volitelné a nepovinné předměty, třídy s rozšířeným vyučováním matematiky. Vnitřní diferenciací rozumíme vytváření homogenních skupin v podmínkách běžné heterogenní třídy.

Nejvýhodnější je vytvořit ve třídě tři skupiny: velmi dobré, průměrné a slabé. Učitel musí mít k dispozici vhodné úlohy pro všechny tři skupiny žáků. Zařazení žáků do jednotlivých obtížnostních variant by nemělo výt po celý rok neměnné, ale mělo by vyjadřovat skutečné znalosti a schopnosti žáka. Ke zvýšení efektivnosti vyučování pomáhá **individualizace vyučování**. Nedostatečná individualizace učební práce žáků má za následek snížení úrovně jejich znalostí, a proto je individuální samostatná práce tak důležitá.

Individuální samostatná práce je taková, která je individualizována buď obsahem, nebo způsoby provedení, nebo obsahem a způsoby provedení. Při organizaci individuálních samostatných prací podle způsobu provedení dostávají všichni žáci stejné zadání a práce je zindividualizována tím, jakým způsobem ji žáci dělají. Při individualizaci podle obsahu dostávají jednotliví žáci úkoly, jejichž obsah vyjadřuje jejich zájmy, ale plní je stejným způsobem jako ostatní žáci.

5.2 *Domácí práce z matematiky*

Domácí práce mají být co nejtěsněji spojeny s vyučovací hodinou s cílem pomáhat rozvíjet tvořivé schopnosti žáků. Hlavním požadavkem na správné vypracování domácích úloh je, že se tato práce nesmí redukovat jen na mechanické učení, ale má žákům umožnit podle stupně jejich vyspělosti samostatně a tvořivě přistupovat k učivu, uvědoměle, logicky a do hloubky si upevňovat vědomosti.

Domácí úlohy **mají být úměrné úrovni a schopnostem žáků** tak, aby je dovedli samostatně vypracovat. Domácí úlohy z matematiky je **potřeba ukládat žákům pravidelně**, neboť se jimi upevňují a prohlubují vědomosti žáků získané ve škole a přispívají k samostatnosti žáků.

Domácí práce zadává učitel v průběhu vyučovací hodiny, nikdy ne přes přestávku po ukončení hodiny.

Kontrola domácí práce se uskuteční způsobem, jaký si zvolí učitel. Například jednorázově u celé třídy, postupně po menších skupinách za delší období, realizací krátké písemné zkoušky, při které je tématika úloh stejná jako v domácí úloze.

Vypracování domácích úloh se obvykle neklasifikuje, ale učitel může ohodnotit žáka svým individuálním způsobem, které bere v úvahu při celkové klasifikaci. Nevypracování domácího úkolu nelze hodnotit klasifikačním stupněm nedostatečně.

6 *Matematické soutěže na 1. stupni ZŠ*

Dle Uhlířové (2001) matematickou soutěží rozumíme činnosti žáka související s řešením úloh realizované soutěživou formou. Tyto činnosti mohou probíhat jednorázově nebo v dlouhodobějším časovém intervalu, mohou být realizované v rámci třídy, školy či instituce s širší, regionální působností.

Uhlířová (2001) vymezila některá specifika matematických soutěží, která směřují matematické soutěže k nestandardním motivačním prostředím školské matematiky:

- Specifická atmosféra soutěže umožňuje žákům zažít pocit vzrušení, rivality, ale i úspěchu, dává přirozenou možnost konfrontace se spolužáky.
- Netradiční typy úloh dávají prostor k úspěchu i žákům, kteří jsou v „tradiční" matematice bezradní nebo neúspěšní.
- Volný časový prostor soutěží korespondenčního typu podporuje individuální tempo žáků, neznevýhodňuje žáky pomalejší.
- Nezvyklý námět, neobvyklý kontext úlohy umožňuje vidět nové souvislosti.
- Netradiční typy úloh poskytují žákovi zpětnou vazbu - žák má možnost nezávislého ověření, zda a na jaké úrovni je schopen aplikovat své poznatky v pro něj netradičních souvislostech.
- Možnost netradičních řešení směřuje žáka ke komunikaci s ostatními, ke komparaci jednotlivých autorských řešení.

Z výše uvedeného textu je zřejmé že matematické soutěže úzce korespondují s oddílem RVP ZV - Nestandardní aplikační úlohy a problémy, neboť obsahem těchto soutěží je především řešení takových typů úloh, které vyžadují použití netradičních postupů, logického úsudku apod. Úlohy z těchto soutěží pak mohou být pestrou inspirací pro výuku matematiky na 1. stup ni ZŠ a pro dosažení kompetencí a cílů RVP ZV.

Učitelé většinou znají a využívají soutěží v odlišných významech s různými didaktickými cíli, záměry a přístupy (Novák, 2004).

6.1 *Matematické soutěže „uvnitř“ a „vně“ vyučovací hodiny*

Novák (2004) shrnul matematické soutěže „uvnitř“ vyučovací hodiny jako krátké „pětiminutovky“, „denní cviky“ či „početní rozcvičky“ obvykle k procvičení a fixaci základních počtářských dovedností, často realizované **soutěživou formou jednorázové didaktické hry** v jedné vyučovací hodině. Hra může mít také charakter **etapové soutěže**, sestávajících z několika kol v několika hodinách – např. týdenní etapová soutěž, v níž jsou úlohy pro žáky diferencovaně náročné (zadávané učitelem nebo s možností výběru úloh z nabídnutého souboru samostatnými žáky). Takto koncipované soutěžení jednotlivců nebo skupin žáků je organickou součástí vyučovacího procesu (může vést ke krátkodobému nebo střednědobému školnímu projektu), metodou řízení učební činnosti žáků a prostředkem (nástrojem) učení žáků.

Mezi soutěže „vně“ vyučovací hodiny/procesu Novák (2004) zařadil **Matematickou olympiádu** a **Matematického klokana**. Jsou to celostátní soutěže vyhlašované MŠMT. Mezi tyto soutěže patří i **Pythagoriáda** (Pythagoriáda, 2003), která je určena pro žáky pátých až osmých tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Každé zadání sestává z patnácti příkladů na prostorovou představivost a logické uvažování. Aby řešitel byl úspěšný, musí mít 10 a více bodů. Ze školních kol mohou žáci postoupit do okresních, a následně až do krajských kol. Při této soutěži se nepoužívají tabulky ani kalkulačky.

6.2 *Stručný přehled matematických soutěží v ČR (dle Uhlířové)*

<u>A) CELOSTÁTNÍ MATEMATICKÉ SOUTĚŽE</u>

1. **Matematická olympiáda** (MO)
2. **Matematický klokan**
3. **Matematická soutěž žáků 4. a 5. tříd**

1. **Matematická olympiáda** (MO)

Pro talentované žáky **5. tříd** je určena kategorie **Z5**. MO se zaměřuje především na talentované žáky. Soutěž kategorie Z5 probíhá v rámci dvou kol. První kolo je „domácí“, žáci řeší šestici úloh. Do druhého, „školního“ kola soutěže postupují úspěšní řešitelé alespoň čtyř úloh kola prvního. V rámci školního kola žáci řeší tři úlohy (s časovým omezením 1 hodiny).

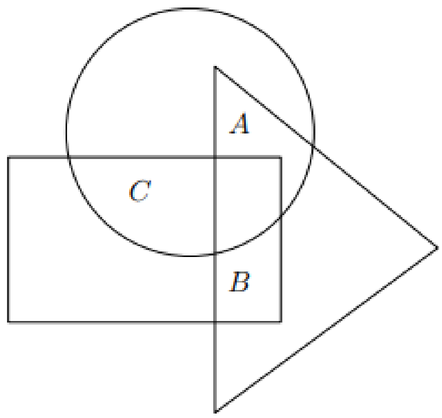
MO organizuje ÚV MO (úřední výbor matematické olympiády) za spolupráce JČMF (Jednota českých matematiků a fyziků, www.jcmf.cz), MŠMT (Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, www.msmt.cz) a MÚAV (Matematický ústav Akademie věd České republiky, www.math.cas.cz). Soutěž je realizována prostřednictvím systému oblastních důvěrníků.

Z webu **www.matematickaolympiada.cz** *si uvedeme pár příkladů:*

Příklad č.1: *Honzík dostal kapesné a chce si za ně koupit něco dobrého. Kdyby si koupil čtyři koláče, zbylo by mu 5 Kč. Kdyby si chtěl koupit pět koláčů, chybělo by mu 6 Kč. Kdyby si koupil dva koláče a tři koblihy, utratil by celé kapesné beze zbytku. Kolik stojí jedna kobliha?*

Příklad č.2: *Na obrázku je diagram se sedmi políčky. Nakreslete do něj hvězdičky tak, aby byly splněny všechny následující podmínky:*

- *Hvězdiček je celkem 21.*
- *V každém políčku je alespoň jedna hvězdička.*
- *V políčkách označených A, B, C je dohromady 8 hvězdiček.*
- *V políčkách označených A a B je dohromady méně hvězdiček než v políčku označeném C.*
- *V políčku označeném B je více hvězdiček než v políčku označeném A.*
- *V kruhu je celkem 15 hvězdiček, v trojúhelníku celkem 12 hvězdiček a v obdélníku celkem 14 hvězdiček.*



Příklad č.3: *Eva s Markem hráli badminton a Viktor jim počítal výměny. Po každých 10 výměnách nakreslil Viktor křížek (X). Poté místo každých 10 křížků nakreslil kolečko (O) a odpovídajících 10 křížků smazal. Když Eva a Marek hru ukončili, měl Viktor nakresleno toto:*

OOOXXXXXXX

Určete kolik nejméně a kolik nejvíce výměn Eva s Markem sehrála.

2. Matematický Klokan

Matematický klokan má dvě kategorie určené žákům z prvního stupně: **Cvrček** (určena žákům 2. a 3. tříd, která byla poprvé zařazena v roce 2006) a **Klokánek** (určena žákům 4. a 5. tříd).

Matematický Klokan je mezinárodní soutěží, které se účastní okolo 30 zemí světa. Soutěže se účastní zpravidla celé třídní kolektivy; nedochází k separování „lepších“ žáků. Obsahově úlohy vychází z učiva 4. ročníku ZŠ a jsou přístupné všem žákům. Úlohy jsou ovšem nestandardní (ať už svým námětem, způsobem prezentace nebo neobvyklými souvislostmi a vztahy mezi „známými“ jevy) a vyžadují aplikaci dosud známých postupů v jiných souvislostech a nutnost logického myšlení. Soutěžní úlohy mají testových charakter. Obtížnost úloh je rozlišena různým bodovým ohodnocením. Za nevyřešenou úlohu se žákům nestrhává žádný bod, ovšem za špatně zvolené řešení se žákům body strhávají. Samotný systém bodování je pro žáky netypický a vyžaduje nutnost volby určité strategie řešení úloh. Mnohdy se tak stává, že ve standardních podmínkách úspěšný žák je v této soutěži neúspěšný a opačně.

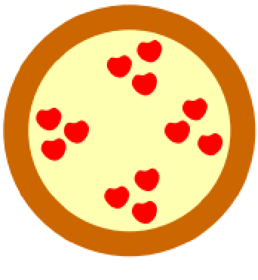
Z webu **www.matematickyklokan.net** *si uvedeme pár příkladů:*

Příklady z kategorie Cvrček:

(za 3 body) *Maminka rozdělila koláč na obrázku několika dětem. Každé z dětí dostalo kousek koláče ozdobený třemi třešněmi. Kolik dětí maminka podělila?*

(A) 3

(B) 4



(C) 5

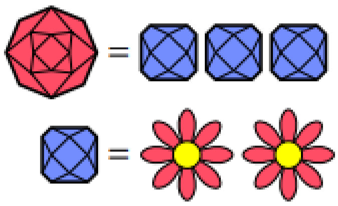
(D) 6

(E) 8

(za 4 body) *V zemi drahokamů tři safíry koupíš za jeden rubín. Za jeden rubín koupíš dva kvítky. Kolik kvítků získáš za dva rubíny?*

(A) 6

(B) 8



(C) 10

(D) 12

(E) 14

(za 5 bodů) *Pan Doležal má na statku jednoho koně, dvě krávy a tři vepře. Kolik krav potřebuje koupit, aby polovina jeho zvířat byly krávy?*

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

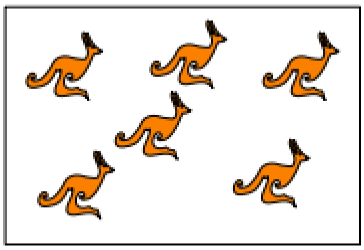
(E) 4

Příklady z kategorie Klokánek:

(za 3 body) *Janek vidí z okna to, co je na obrázku. Je to polovina všech klokanů v parku. Kolik klokanů je v parku?*

(A) 12

(B) 14



(C) 16

(D) 18

(E) 20

(za 4 body) *Balónky se prodávají v krabičkách po 5, 10 a 25. Martin chce koupit přesně 70 balónků. Zjisti nejmenší počet krabiček, které musí Martin koupit.*

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

(za 5 bodů) *V ZOO jsou pavilony opic, ptáků, šelem a žiraf. Zuzka chce navštívit pouze 2 různé pavilony. Nechce ale začít v pavilonu šelem. Kolik různých tras si může naplánovat?*

(A) 3 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 12

3. Matematická soutěž žáků 4. a 5. tříd

Tato soutěž je určena všem žákům, kteří se zajímají o matematiku. Soutěž probíhá korespondenční formou ve spolupráci s učitelem matematiky. Žáci řeší deset sérií po pěti úlohách. (Všechny úlohy nejsou povinné, některé jsou označené jako prémiové.) V propozicích soutěže se doporučuje řešit úlohy přímo v hodinách matematiky (jako doplňková činnost) nebo v rámci domácí přípravy.

Odpovědi žáků zpracovává učitel matematiky, organizátoři provádějí až závěrečné vyhodnocení. Soutěž je organizována Klubem malotřídních škol okresu Chrudim a je šířena prostřednictvím Internetu.

B) OBLASTNÍ MATEMATICKÉ SOUTĚŽE

1. **Matýsek** (určen žákům 4. a 5. tříd; okres Svitavy) - Soutěž má korespondenční charakter, probíhá ve třech kolech. Nejúspěšnější řešitelé jsou zváni na závěrečné soustředění.
2. **Matík** (určen žákům 5. tříd; okres Zlín) - Soutěž má 4 kola. První tři kola mají korespondenční charakter, nejlepší z řešitelů jsou pozváni do čtvrtého – finálového kola, kde soutěží o ceny.
3. **Zamat** (určen žákům 4. a 5. tříd; okres Mělník) - Soutěž má korespondenční charakter, probíhá v osmi sériích, v každé sérii žáci řeší tři úlohy. Kromě bodů za správné řešení, může žák získat i bonus 5 bodů za nápaditost a originalitu řešení. Nejúspěšnější řešitelé jsou zváni na závěrečné klání, které je kromě matematiky zaměřeno i na pohybové a jiné dovednosti.

4. **Pikomat** - kategorie **Filip** (určen žákům 5. tříd; Praha) - Soutěž má korespondenční charakter, probíhá ve třech kolech. Nejúspěšnější řešitelé jsou zváni na závěrečné soustředění.
5. **Plus** (určen žákům 5. tříd; okres Kolín) - Soutěž probíhá jednorázově (na okresní úrovni). Pozvaní žáci řeší soubor 10 soutěžních úloh ve stanoveném limitu 1 hodiny.
6. **Matematická soutěž V. tříd** (okres Olomouc) - Soutěž má dvě kola – školní a okresní. Žáci vždy řeší soubor 6 soutěžních úloh ve stanoveném limitu 40 minut.

7 *Myšlení*

Myšlení (Boudová, 2008) je **poznávací proces**, kterým získáváme zprostředkované a zobecňující poznání skutečnosti, zejména jejich podstatných znaků. Myšlením poznáváme skutečnost a také řešíme nejrůznější problémy v teorii a v praxi.

Největší úspěchy lidí pramení ze schopnosti vytvářet myšlenky a sdělovat je druhým (Plevová; Petrová, 2012). Proces myšlení v sobě zahrnuje velké množství duševních aktivit. Přemýšlíme, když řešíme nějaké úkoly, když nakupujeme a rozhodujeme se, co koupíme, přemýšlíme nad přečtenou knihou, přemýšlíme, když plánujeme, co budeme podnikat o víkendu nebo jak strávíme dovolenou, přemýšlíme nad chováním svého partnera či svých dětí.

Myšlení je možné definovat jako proces řešení problémů. Pokud řešíme nějaký problém, probíhají v nás základní myšlenkové operace. Spojujeme, analyzujeme a srovnáváme své zkušenosti a vědomosti, vyvozujeme závěry a podle toho se chováme. Mezi základní **myšlenkové operace**, které při přemýšlení používáme, jsou (Vágnerová, 2003):

- **Analýza a syntéza**. Jde vlastně o analyticko-syntetickou činnost mozku. Analýza je myšlenkové rozdělení problému na části, na jednotlivé vlastnosti. Opakem analýzy je syntéza, kde se jedná o myšlenkové sjednocení, spojení. Tyto dvě operace jsou v nerozlučném spojení.
- **Srovnávání a třídění**. Jsou myšlenkové operace, které souvisí s analýzou i syntézou. Srovnáváním zjišťujeme podobnosti a odlišnosti mezi předměty a jevy. Tyto podobnosti a souvislosti potom spojíme do nového celku.
- **Abstrakce a zobecnění**. Abstrakce je myšlenková operace, pomocí které vyčleňujeme podstatné a všeobecné vlastnosti, přičemž si nevšímáme ostatních, především nepodstatných vlastností. Zobecnění bezprostředně navazuje na srovnávání předmětů a jevů. Pomocí zobecnění (jinak též generalizace), zařadíme jev do nějaké skupiny (tedy srovnáme, zobecníme, zařadíme).
- **Konkretizace**. Je opačnou myšlenkovou operací ve vztahu k abstrakci. Znamená to, že všeobecné poznatky použijeme na jednotlivý předmět, všeobecný vzorec použijeme na konkrétní jev.

Myšlenkové operace (Plevová; Petrová, 2012) většinou probíhají na **vědomé úrovni, jde o racionální myšlení**. Každý myšlenkový proces nemusí mít vědomý charakter, někdy se rozhodneme zcela intuitivně. V tomto případě hovoří psychologie o tzv. **intuitivním myšlení**, které probíhá zdánlivě mimo vědění. Ke kreativnímu, překvapivému a nekonvenčnímu myšlení nám pomáhá **divergentní myšlení**. Divergence znamená rozbíhavost, umožňuje nám najít nové způsoby řešení. Naproti tomu stojí **myšlení konvergentní**, kde jde o cílené, postupné a pochopitelné řešení. Konvergence je opakem divergence a znamená sbíhavost, sbližování. Směřuje známým řešením k nějakému cíli. Abychom si poradili s problémem, potřebujeme oba způsoby myšlení.

Myšlením docházíme k trojím **základním formám myšlení** (Boudová, 2008 - formami myšlení rozumíme řečovou podobu, do které člověk zachycuje a v jaké vyjadřuje výsledky svého myšlení):

- <u>Pojem</u> je vystižení obecných a podstatných znaků jevu (Plevová; Petrová, 2012). **Pojem se označuje slovem** a reprezentuje celou skupinu objektů, je představován souborem vlastností, které jsou spojeny s touto skupinou. Mezi důležitou vlastnost pojmů patří to, že podporují „kognitivní ekonomii“ tím, že rozdělují svět na zvládnutelné jednotky. V okolním světě se nachází tolik rozdílných objektů, že pokud bychom každý z nich brali jako jedinečný, byli bychom zahlceni, komunikace by se stala nemožnou. Představme si, jaké by bylo, kdybychom měli zvláštní název pro každý ze sedmi milionů odstínů barev, které rozeznáváme. Naštěstí nepojímáme každý objekt jako jedinečný, ale spíše ho vnímáme jako jednotlivý případ pojmu. Takto vidíme mnoho různých objektů jako představitele jednoho pojmu. Tímto redukujeme složitost světa, který musíme reprezentovat ve své mysli. U každého pojmu rozlišujeme obsah (co zahrnuje) a rozsah (počet označených předmětů). *Např. hodiny – obsah: ciferník, ručičky, strojek; rozsah: hodiny náramkové, přesýpací, sluneční (Boudová, 2008).* Pokud přiřazujeme objekt k pojmu, hovoříme o kategorizaci. Pokud tedy objekt kategorizujeme, pojímáme jej, jako by měl mnoho vlastností, které jsou spojeny s pojmem.

- Soud vyjadřuje vztah mezi dvěma pojmy. Potřebujeme porozumět nejenom podstatě jednotlivých pojmů, ale také tomu, jak je navzájem při vytváření myšlenek spojujeme. Spojováním pojmů vzniká „tvrzení“, které obsahuje podmět a přísudek.

  Spojování pojmů do „tvrzení“ je prvním krokem ke kompletním myšlenkám. **V soudech obyčejně něco tvrdíme nebo popíráme**. *Např. Venku svítí slunce. Neprší.*
- Podle Boudové (Boudová, 2008) úsudek vyjadřuje vztah mezi dvěma nebo několika soudy – **premisami**. Vyvozený soud se nazývá závěr. *Např. Jablka obsahují vitamíny (premisa). Hrušky obsahují vitamíny (premisa). Ovoce obsahuje vitamíny (závěr).*

Individuální zvláštnosti myšlení (Boudová, 2008)

- hloubka X povrchnost
- šířka X úzké myšlení bez souvislosti
- přesnost X nepřesnost
- pružnost, nesvázanost s tradičními schématy X rigidnost (tuhost, neohebnost)
- kritičnost X nekritičnost, podléhání autoritám

Individuální rozdíly vyjádřené uvedenými výrazy jsou důležité, ale jsou to spíše charakteristiky osobnosti, jejího stylu práce a řešení životních problémů než vlastnosti jednoho dílčího poznávacího procesu.

7.1 *Rozvoj myšlení žáků ve vyučování matematice*

Sedláčková (Sedláčková, 1993) napsala, že vyučování matematice sehrává významnou roli k rozvoji myšlení. Proto je **rozvoj myšlení jedním z důležitých cílů** vyučování matematice na všech typech škol.

Již v historii vyučování matematice vznikla v 19. století teorie formálního vzdělání, jejíž podstatou bylo zdůraznit vlivu výuky matematiky na zdokonalování a rozvíjení rozumových schopností žáků. Matematika se např. na tehdejších gymnáziích vyučovala nikoliv pro její obsah, ale proto, aby se „tříbil rozum žáků“. Tato teorie byla jednostranná a je dnes překonána. Ukazuje ovšem, že se již v 19. století uznával vliv vyučování matematice na rozvoj myšlení.

Později se začal v souvislosti s potřebou technicky vzdělaných lidí zdůrazňovat obsah vyučování a vznikla teorie materiálního vzdělání, podle níž se stala kritériem pro výběr učiva jeho užitečnost a vhodnost pro život. Tato teorie opět jednostranně zdůrazňovala praktické užití matematiky a nedoceňovala, respektive snižovala úlohu teorie. Její zastánci se domnívali, že k rozvoji schopností dochází bez zvláštního úsilí při osvojování užitečných vědomostí.

Při současné vyučovací praxi nepreferujeme žádnou z obou teorií, ale obě chápeme v souvislosti a jednotě a rozvíjíme myšlení žáků jak osvojováním vzdělávacího obsahu, tak metodami a formami práce. Nejnovější výzkumy v tomto směru totiž ukazují, že rozvoj myšlení žáků nezávisí ani tak na učivo, jako na způsobu a přístupu, kterým ho učitel předkládá žákům. Proto je při vyučování matematice kladen důraz také na metody práce, přičemž jsou preferovány metody, které podceňují myšlenkovou aktivitu žáků. Matematika jako vyučovací předmět má pro rozvoj myšlení, zejména **logického**, lepší předpoklady než jiné vyučovací předměty.

Z charakteru matematiky jako vědy vyplývá, že postupné uvědomělé osvojování učiva školské matematiky **rozvíjí ve značné míře abstraktní myšlení.** Abstrahování jako myšlenková operace je každodenní záležitostí výuky matematiky zejména při vytváření nových matematických pojmů.

Součástí abstraktního myšlené je logické myšlení charakterizované v užším smyslu dovedností vyvodit z předpokladů závěry, dále schopností zobecňovat získané závěry a schopností umět vyčlenit z obecného tvrzení zvláštní případy.

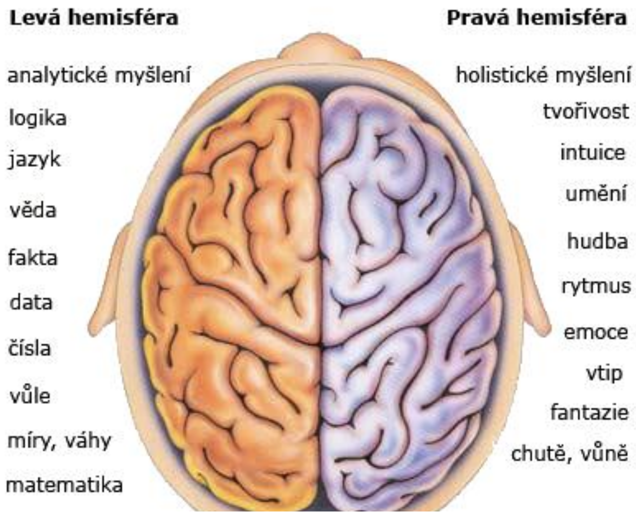
Kromě rozvoje logického myšlení je školská matematiky příležitostí k rozvoji myšlení funkčního, a to zejména při práci s proměnnou veličinou, myšlení prostorového, které je hlavním cílem vyučování geometrie, myšlením kombinatorického a pravděpodobnostního.

7.2 Logické myšlení

V psychologickém slovníku (Hartl, Hartlová; 2015) je logické myšlení charakterizováno jako vývojově vyšší forma myšlení, které je založeno na správném usuzování podle zákonů formální logiky. Slovník cizích slov vymezuje formální logiku jako učení o zákonech a pravidlech nutných pro získávání pravdivých závěrů při usuzování. Za jejího zakladatele je považován Aristoteles (Můžeme se naučit logicky myslet, 2007).

Abecedou logického myšlení je práce s pojmy, zejména definování pojmů, klasifikace pojmů, formulace matematických vět, rozlišování podmínek nutných a postačujících v matematické větě, provádění důkazů, práce s logickými funktory pro implikaci, disjunkci, konjunkci a ekvivalentních výroků, ovládnutí myšlenkových operací jako analýzy a syntézy, zobecňování apod.

Někdy se rozvoj logického myšlení žáků nesprávně zužuje pouze na osvojení základních poznatků z výrokové, resp. predikátové logiky. Tímto učivem se ovšem logické myšlení žáků nerozvíjí o nic víc než například úpravou algebraických výrazů. Jestliže se však žáci naučí užívat poznatky z matematické logiky jako nástroj, kterým mohou poznávat a odstraňovat nedostatky v myšlení, pak je zařazení těchto poznatků do matematiky opodstatněné.



Obrázek 5 - www.vladimirbohm.cz

Už dávno je známo, že logika sídlí v levé hemisféře mozku, zatímco intuice je doménou pravé hemisféry. Je dokázáno, že jsou mezi námi jedinci, kteří mají dáno při myšlení využívat více levou část mozku (což je nutné pro vědeckou práci a systematické uspořádání vědomostí), ale i ti, kteří více využívají pravou intuitivní hemisféru (mnoho dyslektiků a také umělecky nadaných, tvořivých bohémů), a také nemnoho jedinců, kterým funguje v rovnováze obojí najednou.

7.2.1 Můžeme se naučit logicky myslet?

Mgr. Stanislava Emmerlingová sepsala hezký článek o tom, jestli se můžeme naučit logicky myslet. Napsala, že dnešní věda i školství vyžadují řešit problémy pružně, rychle, přesně, dle daných pravidel a postupů. Kdo to neumí, mívá při studiu a potom i v mnoha směrech v praktickém životě problémy. Z toho vyplývá, že je prospěšné logické myšlení rozvíjet. A jde to vůbec, když nám "není dáno"?

Téměř po celé dvacáté století se psychologové domnívali, že většina našeho chování, myšlení i dovedností je podmíněna a ovlivněna společenskými faktory. Díky novým vyšetřovacím metodám (např. tomografii) se začala rozvíjet neuropsychologie a fyziologie mozku. Od roku 1990 věda disponuje ohromujícím množstvím důkazů, které svědčí o tom, že náš mozek je již ve chvíli narození určitým způsobem naprogramován, že trochu jinak funguje mozek muže i ženy a že naučíme-li se nové dovednosti, předáme je geneticky svým dětem. Základem pro jakoukoliv dovednost, v našem případě pro logické myšlení, je dostatečné množství nervových buněk a silná struktura nervových spojů v dané oblasti mozku.

To podmiňuje rozvoj tzv. dílčích funkcí, což jsou základní schopnosti, které umožňují diferenciaci a rozvoj vyšších psychických funkcí, jako jsou řeč a myšlení. V dalším vývoji jsou předpokladem, o který se opírá dovednost čtení, psaní, počítání i přiměřeného chování" (Sindelárová, 1996). To je z větší části dědičně dáno.

Optimální počet neuronů a nervových spojů lze ovlivnit detoxikací organismu obou budoucích rodičů před početím dítěte, bezproblémovým průběhem těhotenství, prenatálním výukovým programem, ale i optimálním pohybovým vývojem dítěte dle vývojových pravidel a jeho eventuální stimulací nejen v prvním roce života, ale v celém předškolním období.

Zatímco neurony po narození narostou skutečně výjimečně, nervové spoje lze natrénovat do 13 let natrvalo, nejlépe však do sedmi let, formou cíleně volených her, protože do té doby je lidský mozek nejpružnější ke změnám.

Již od tří let lze u dětí rozvíjet základ pro logické myšlení, např. napodobováním významů slov v říkankách a písničkách pohybem tak, jak to známe z pohybových her našich předků. Zvláště holčičkám je třeba v předškolním období připravovat víc matematických, pokusných a prostorových činností, aby se naučily učit pomocí praktického zacházení a experimentování stejně, jako se učí řeči.

Nervové spoje se vytvářejí při jakékoliv činnosti po celý život člověka. Existují i vědeckým výzkumem podložené postupy, kterými lze základ - dílčí funkce důležité pro logické myšlení - docvičit.

PRAKTICKÁ ČÁST – SOUBOR ÚLOH

1 Jak se naučit a trénovat logické myšlení

Do praktické části mé diplomové práce jsem si dovolila citovat obsah z knihy Jak se naučit a trénovat logické myšlení: 144 matematicko-logických hádanek od Rolfa Dietricha, Reinharda Müllera a Waltera Wenzela. To proto, že mě velice zaujaly úlohy, které jsou gradovány a v knize je velice dobře popsaný postup řešení.

1.1 LODĚ

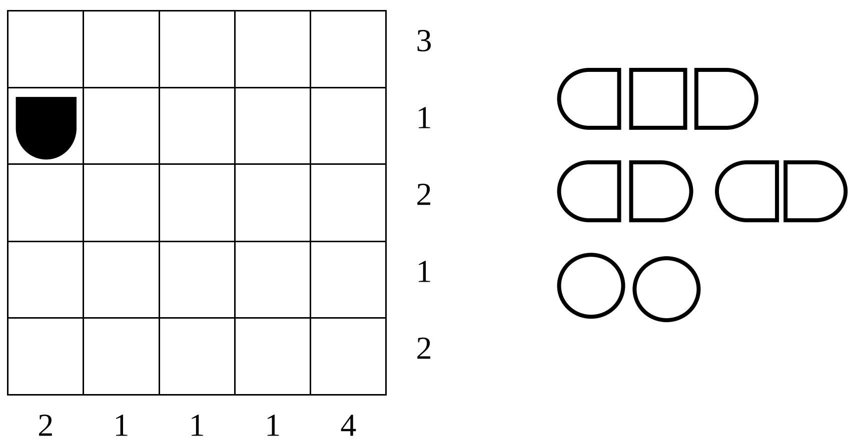
Pravidla:

Na mřížce podobné šachovnici je ukrytý určitý počet lodí, které máme za úkol najít. Všechny lodě, které jsou v mřížce ukryty, jsou nakresleny pod hrací mřížkou. Na pravém a spodním okraji jsou čísla, která udávají počet částí lodi v příslušném řádku nebo sloupci.

Kromě toho platí ještě následující pravidla:

- Lodě jsou zakresleny vodorovně nebo svisle. Žádná loď se nedotýká druhé, ani diagonálně.
- Existuje jen jedno jediné (správné) řešení, které lze určit logickou úvahou.

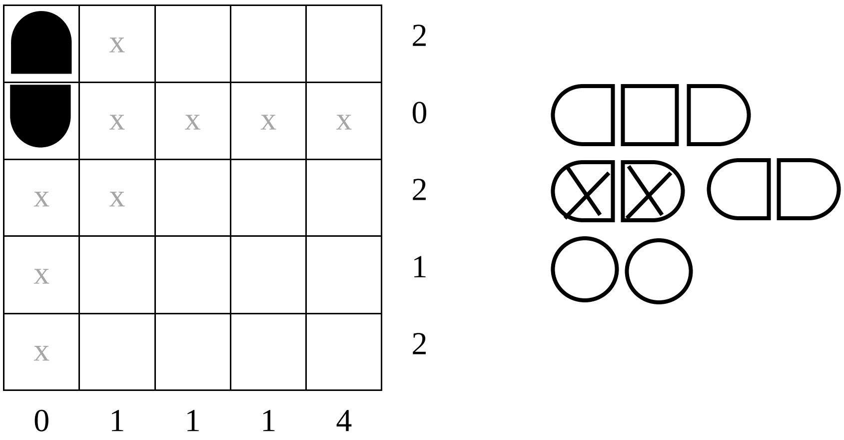
Příklad:



Podívejme se nyní pozorně na obrázek. V prvním sloupci jsou přesně dvě části lodí. První část je – jako pomůcka – již odkryta. Z tvaru, který je dole zaoblený, je jasné, že přímo nad touto částí lodě musí bát další část. Našli jsme tedy všechny části lodí v prvním sloupci, *zbytek sloupce proto musí být voda (X).*

Protože se žádná loď nesmí dotýkat jiné (nesmí spolu sousedit), jsou horní tři pole druhého sloupce rovněž voda. Ve druhém řádku by měla být jedna část lodě. Protože je už odkrytá, mohou být ostatní pole v tomto řádku pouze voda.

Pokud teď ještě opravíme čísla na pravém a spodním okraji mřížky tak, že zde bude uveden počet částí lodí, které je nutné ještě odkrýt, vznikne nový obrázek.

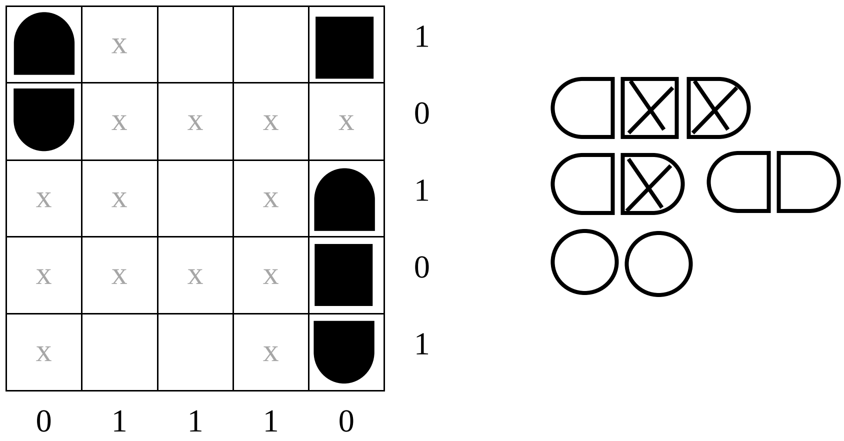


V pátém sloupci by měly být čtyři části lodí. Protože jedno pole je již označeno jako voda, jsou všechna ostatní pole části lodí. Znamená to také, že jsme našli loď dlouhou tři pole.

Zakreslíme dlouhou loď a pole nahoře vpravo označíme jako část lodi, u které si ještě nejsme jisti, k jaké lodi patří.

Kolem dlouhé lodi zakreslíme vodu (X).

Snížíme počet ještě neodkrytých částí lodí (sloupec 5 -> 0, řádek 3 -> 1, řádek 4 -> 0 a řádek 5 -> 1). Protože nyní počet ještě nenalezených částí lodí v řádku 4 klesl na 0, můžeme udělat křížek i do zbývajících polí tohoto řádku (X).

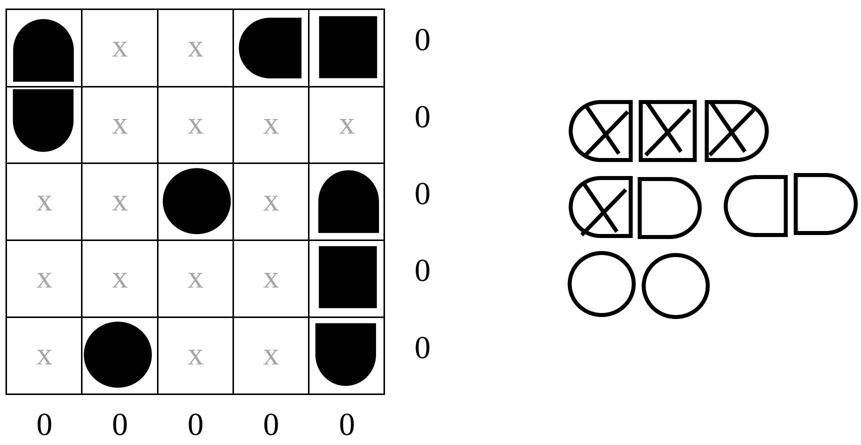


V řádku 3 již zbývá určit jen jedno jediné pole. Protože v tomto řádku musí ležet ještě jedna část lodi a kolem tohoto pole je jen voda, našli jsme nejmenší loď.

Zakreslíme ji a snížíme počet u řádku tři a sloupce tři na nulu.

Protože nyní ve třetím sloupci již nemá být žádná část lodi, zakreslíme křížek i do zbývajících polí tohoto sloupce. *Ve sloupci 2 a řádku 5 jsme tedy našli druhou nejmenší loď. Zakreslíme ji a snížíme počet na nulu.*

Poslední volné pole tak určuje druhou část prostřední lodě. Zakreslíme ji, snížíme počet na nulu a dostáváme konečný výsledek.

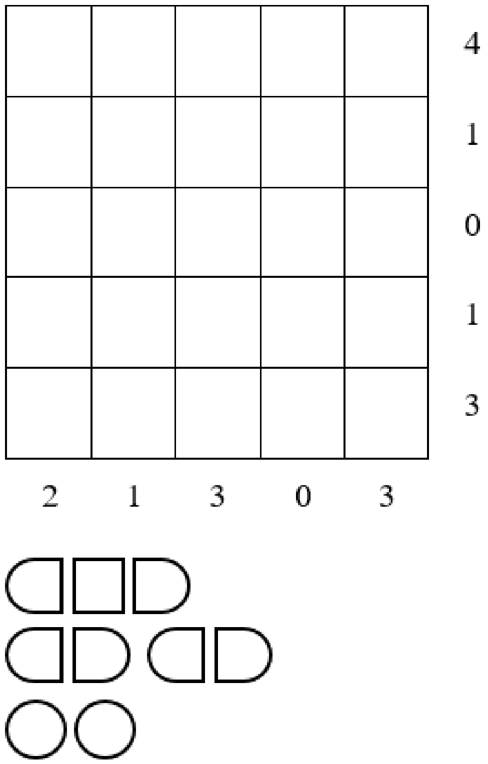


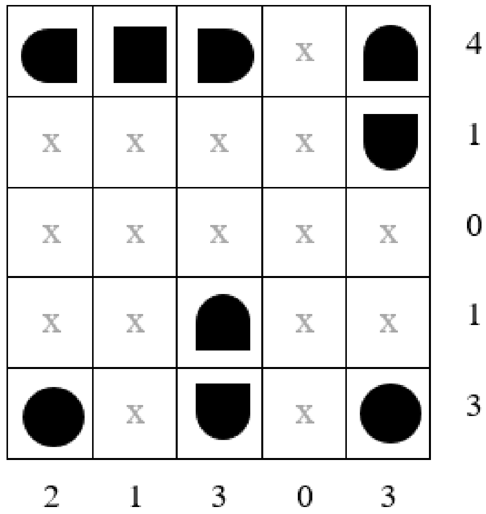
Další příklady:

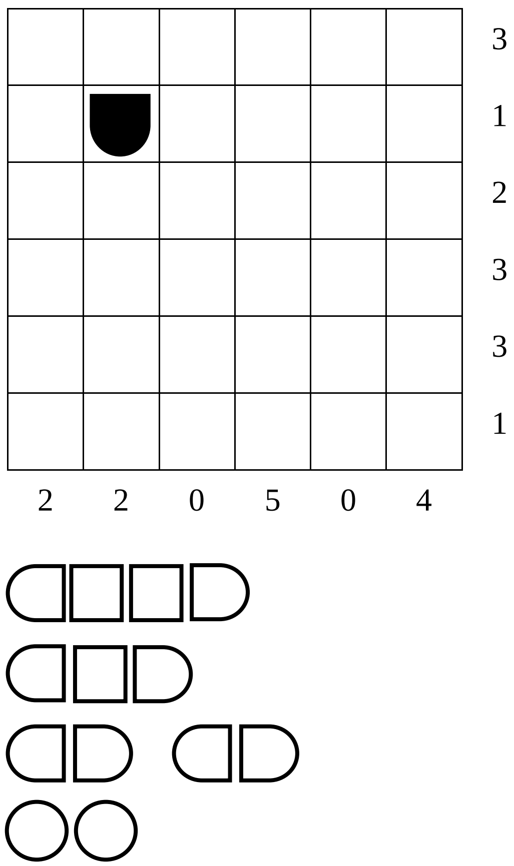
Řešení:

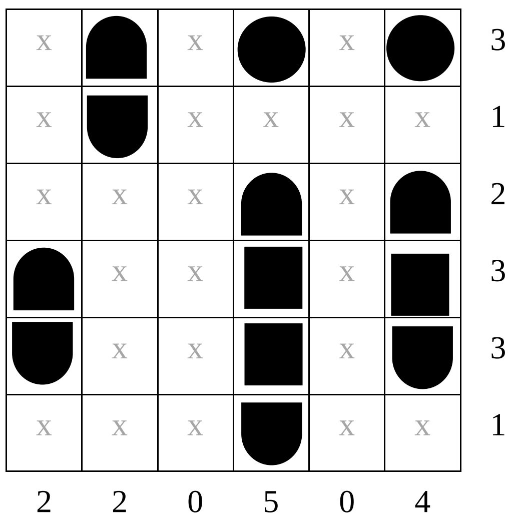
Opakujte, dokud nenajdete všechny lodě.

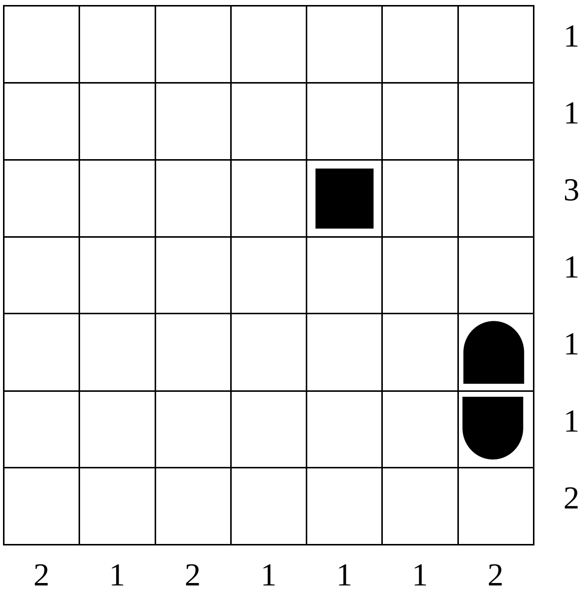
1. Zkontrolujte všechny řádky a sloupce, jestli počet částí lodí, které se mají objevit, není (nyní) roven nule. Pokud ano, vyškrtejte všechna pole těchto řádků nebo sloupců, můžete je samozřejmě také vyšrafovat nebo vybarvit.
2. Vyškrtejte u všech částí lodí, které znáte (popřípadě i částečně), příslušná sousedící pole (X).
3. Zkontrolujte všechny řádky a sloupce, jestli počet částí lidí, který se má ještě nalézt, není (nyní) stejný jako počet volných polí (tj. polí, ve kterých není ani část lodi ani křížek). Pokud ano, potom:
   a) Zakreslete do všech polí části lodi.
   b) U každé zakreslené části lodi zmenšete v příslušných řádcích a sloupcích počet částí lodi, které je ještě potřeba najít, o jedničku. Můžete si to pro začátek napsat vedle, později to budete dělat jednoduše v duchu.
   c) Vyškrtejte pod hracím polem části lodí, které jste kompletně našli, abyste věděli, jaké lodě jste ještě nenašli.
4. Pokud kvůli délce lodi nebo kvůli zbývajícímu počtu částí lodí v řádku nebo sloupci existuje jen jedna možnost pro umístění lodi (zajímavé je to u nejdelší lodi!), označte části lodi, které tím lze jednoznačně určit (délka místa = menší než dvojnásobná délka lodi).

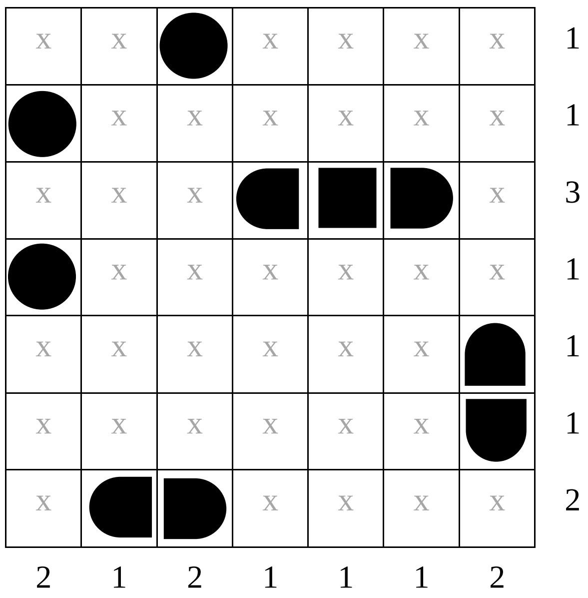

4
1
0
1
3
2 1 3 0 3

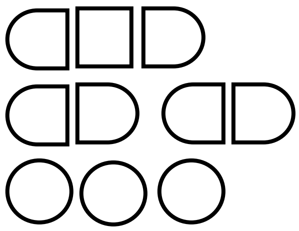

4
1
0
1
3
2 1 3 0 3

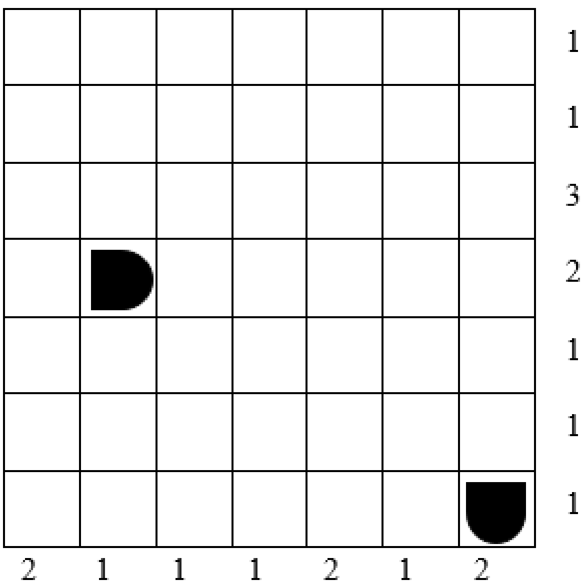

3
1
2
3
3
1
2 2 0 5 0 4

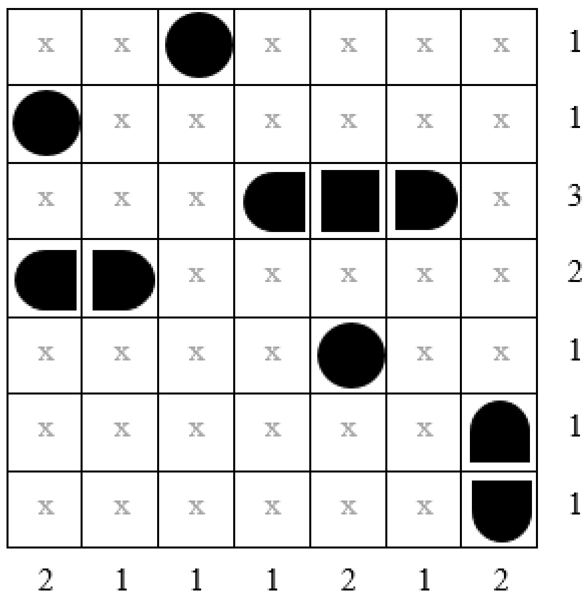

3
1
2
3
3
1
2 2 0 5 0 4

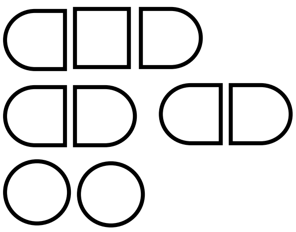


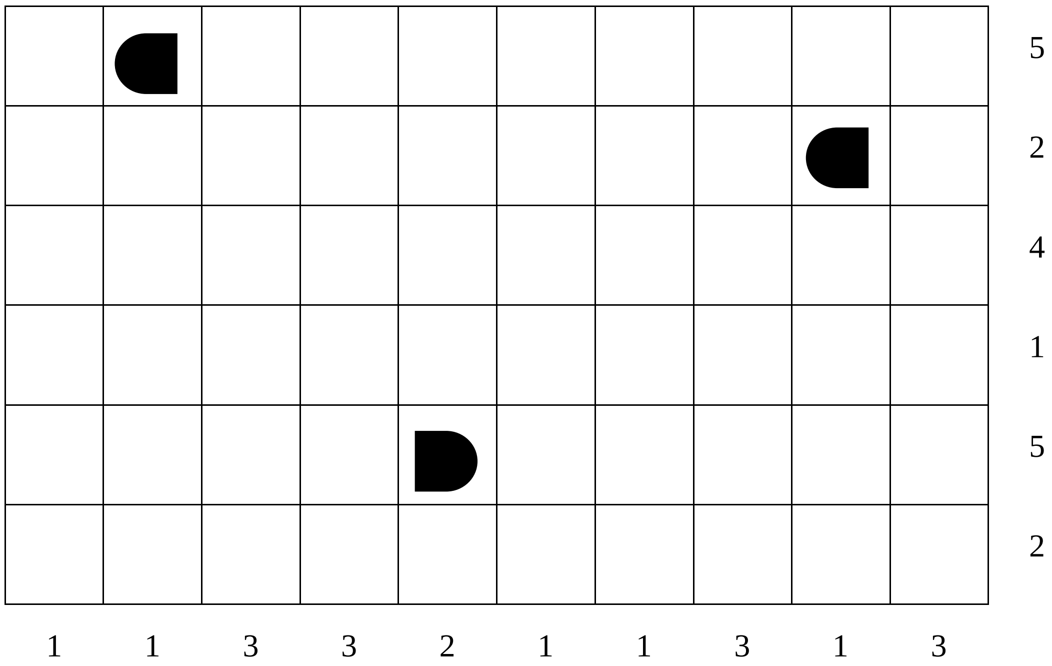


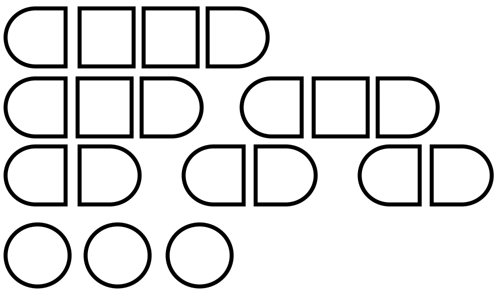


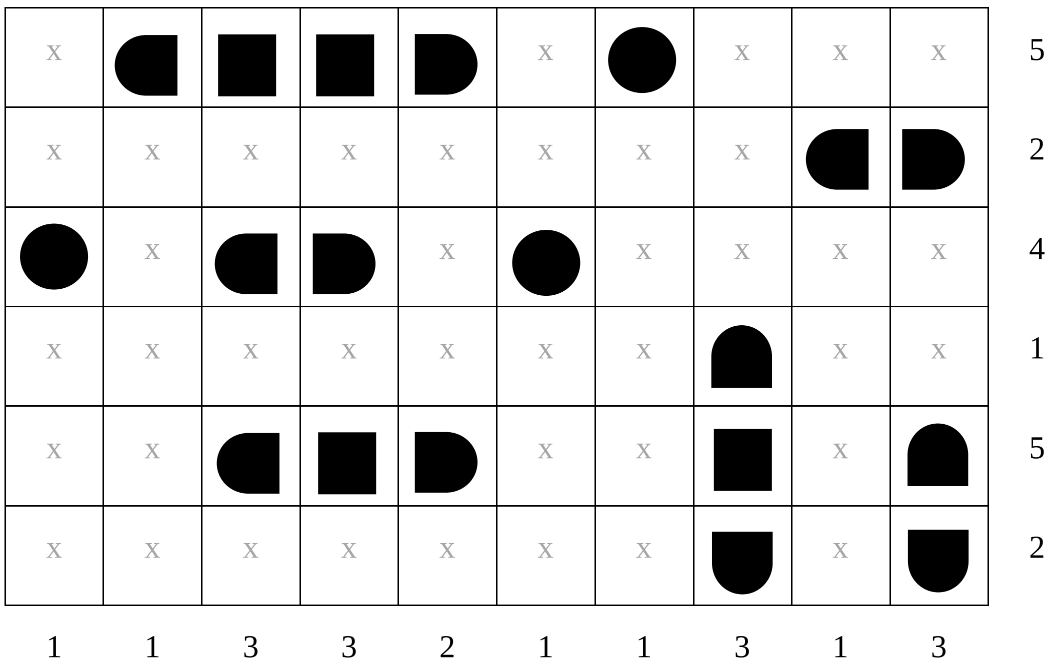


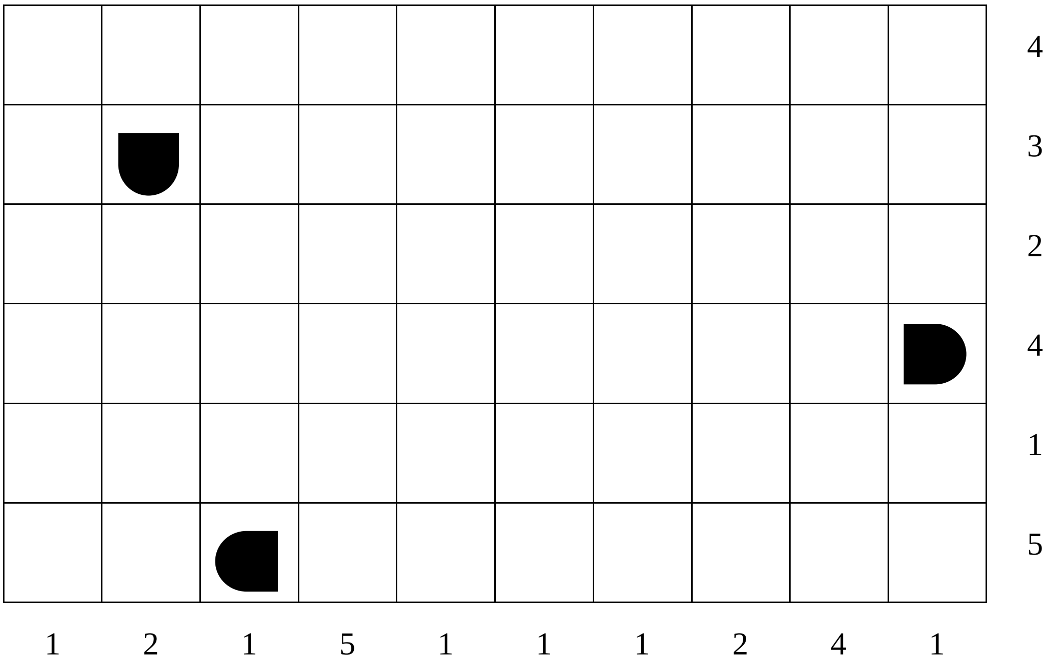


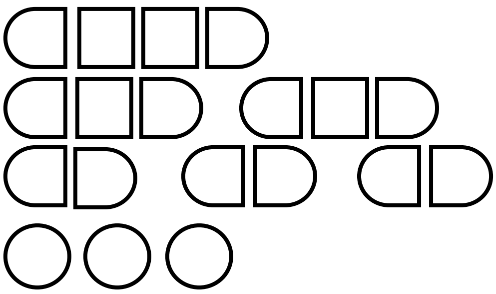


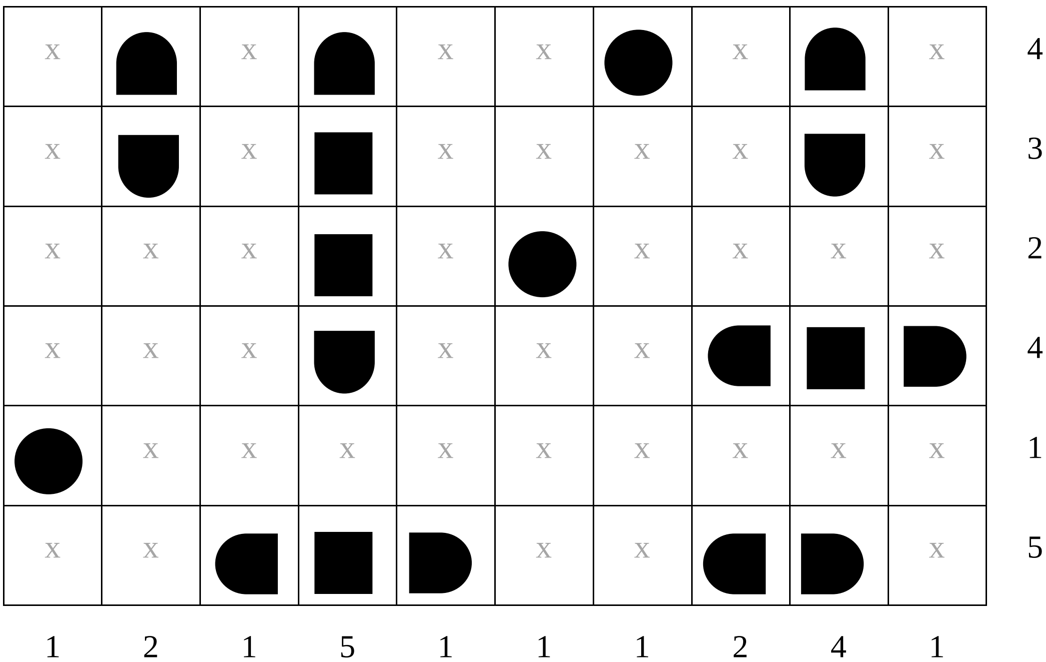







4
3
2
4
1
5
1 2 1 5 1 1 1 2 4 1




4
3
2
4
1
5
1 2 1 5 1 1 1 2 4 1

1.2 *STÁNEK NA TRŽNICI*

Pravidla:

Na tržišti rozděleném na čtverce nechal starosta postavit stánky. Stánky jsou znázorněny čísly jako čtverce s čísly.

Čísla udávají, na kolika sousedních čtvercích stojí osoba. Nula (0) znamená, že kolem stánku není žádná osoba. Podobně dvojka (2), znamená, že kolem stánku stojí dvě osoby, to znamená v přímo sousedících polích. Přímo sousedící znamená, že pole leží přímo nad, pod, nalevo, napravo, ale také diagonálně. Pro čtverec uprostřed tedy existuje maximálně osm sousedících polí (čtverců).

Cílem úlohy je umístit jednoznačně všechny osoby.

Příklady:

Na tržišti, rozděleném do čtvercové sítě, nechal starosta postavit stánky v jednotlivých čtvercích znázorňují umístění stánků. Kromě toho udávají, na kolika sousedních čtvercích stojí osoba (v příkladu znázorněno smajlíkem). Nula (0) znamená, že u stánku nestojí žádná osoba. Cílem je jednoznačně umístit do čtverce všechny osoby (v následujícím příkladu čtyři).

4 ☺ *(Tento symbol udává, kolik osob hledáme)*

	2			
			0	
	2	**2**		**1**
			1	
1				

- *V jednom ze čtverců je 0. To znamená, že kolem tohoto stánku není žádná osoba. Proto označíme křížkem všechna sousední pole.*
- *Po zakreslení křížků sousedí s číslem 1 v poli (5, 3) jen jedno neobsazené pole. V tomto neobsazeném poli tedy musí být osoba.*

- *Protože jsme našli jednu osobu, musíme si nyní (v duchu) upravit všechna pole, která s touto osobou sousedí a obsahují číslo. Tato čísla v duchu snížíme o jedničku. Z obou jedniček budou nuly. Všechna pole sousedící s těmito nulami můžeme nyní označit křížkem. Pak s polem s 2 (2,3) sousedí jen dvě obsazená pole. V těch se tedy musí nacházet osoby.*
- *Poté, co jsme určili obě osoby v polích (2, 2) a (2, 4), můžeme také označit křížkem tři pole, která sousedí s polem s dvojkou (2, 3).*
- *Stejně tak se nemůže nacházet žádná osoba v poli (2, 5), protože toto pole sousedí s jedničkou v poli (1,5) a protože pro tuto jedničku již jedna osoba nalezena byla (2, 4). Jediné volné pole je nyní (1 ,1). Skutečně ještě nebyla nalezena druhá osoba pro pole (2, 1). V poli (1, 1) je tedy osoba.*

☺	**2**	x	x	x
x	☺	x	**0**	x
x	**2**	**2**	x	**1**
x	☺	x	**1**	☺
1	x	x	x	x

5 ☺

			2	
		4		**3**
1				**2**
		1		

- *S trojkou sousedí přesně tři pole – musí zde být osoby.*
- *Tím jsme rovnou zvládli i obě dvojky, stejně jako jedničku. Zbývající sousedící pole jsou tedy prázdná.*
- *Se čtyřkou teď sousedí jen dvě volná pole, ve kterých musí být osoby, protože pro čtyřku byly dosud nalezeny jen dvě osoby.*

x	☺	x	**2**	☺
x	☺	**4**	☺	**3**
1	x	x	☺	**2**
x	x	**1**	x	x
x	x	x	x	x

Další příklady:

Řešení:

Najděte všechna pole, která nesousedí s polem s číslem. Označte je křížkem (X).

Opakujte, dokud nenajdete všechny osoby:

- Najděte všechna pole, ve kterých jsou (nyní) nuly (0).
- Označte křížkem všechna pole, se kterými pole s nulou sousedí (vyškrtejte i diagonálně sousedící pole).
- Najděte všechna pole, u kterých číslo souhlasí s počtem volných sousedících polí (tj. ještě neobsazených polí).
- Do všech takto nalezených polí nakreslete osoby.
- Nahraďte příslušnou číslici nulou.
- Zmenšete každé číslo, které sousedí s již nalezenou osobou, (vždy) o jedničku.

Pro lepší přehlednost byste měli čísla zmenšovat jen v duchu. S trochou cviku se to rychle naučíte.

11 😊

					0
	2	**2**	**2**		**1**
1	**1**				
1	**1**	**2**	**3**		
	1			**3**	**2**
2		**3**			
			2	**2**	
		3		**0**	

				x	**0**
😊	**2**	**2**	**2**	x	**1**
1	**1**				
1	**1**	**2**	**3**		
😊	**1**			**3**	**2**
2		**3**			
	😊	😊	**2**	**2**	x
x	😊	**3**	x	**0**	x

x	😊	x	x	x	**0**
😊	**2**	**2**	**2**	x	**1**
1	**1**	x	😊	😊	x
1	**1**	**2**	**3**	x	x
😊	**1**	x	😊	**3**	**2**
2	x	**3**	x	😊	😊
x	😊	😊	**2**	**2**	x
x	😊	**3**	x	**0**	x

11 😊

1					
	2				**0**
1		**2**		**2**	
1			**2**	**4**	
	2	**2**	**2**		
	2	**3**		**4**	
1	**2**				
	1	**2**		**1**	

1				x	x
	2			x	**0**
1		**2**		**2**	x
1			**2**	**4**	
	2	**2**	**2**		
	2	**3**	😊	**4**	
1	**2**	😊	😊	x	x
x	**1**	**2**	x	**1**	x

1	😊	😊	x	x	x
x	**2**	x	x	x	**0**
1	x	**2**	😊	**2**	x
1	😊	x	**2**	**4**	😊
x	**2**	**2**	**2**	😊	😊
😊	**2**	**3**	😊	**4**	x
1	**2**	😊	😊	x	x
x	**1**	**2**	x	**1**	x

1.3 MAGICKÁ ČÍSLA

Pravidla:

V mřížce podobné šachovnici jsou v každém řádku a každém sloupci ukryty všechny číslice.

V každém řádku, každém sloupci a obou diagonálách jsou číslice 1, 2, 3, atd. obsaženy právě jednou.

Některé číslice jsou již odkryté. Zbývající číslice máme za úkol také odkrýt, tzn. nalézt logickou úvahou.

U úloh typu „magická čísla“, které mají symetrické nebo nesymetrické vnitřní tvary, nehrají diagonály žádnou roli: číslice se v nich mohou opakovat. Důvodem je, že podstatné informace, které u klasické úlohy mohou podat pouze diagonály, poskytují u úloh s vnitřními tvary právě vnitřní tvary.

Příklady:

V každém řádku, každém sloupci a obou diagonálách se vyskytují čísla 1 až 4 vždy právě jednou. Některá čísla jsou již zapsaná. Vaším úkolem je zapsat i zbývající čísla. Existuje jen jedno jediné řešení.

		2	**1**
		4	
4	**3**		
	1		

- *Některá čísla jsou již zapsaná. Jen dejte pozor na to, že se čísla 1, 2, 3 a 4 smí objevit jen jednou i v obou hlavních diagonálách.*
- *Protože v diagonále vedoucí z pravého rohu do levého spodního rohu jsou nám již tři čísla známá (3, 4 a 1), musí být chybějící číslo 2. Zapíšeme dvojku.*
- *Pole (1, 1) patří jak do prvního řádku, tak i do prvního sloupce. V prvním řádku jsou již čísla 2 a 1. Jako možné číslo pro pole (1, 1) připadá tedy v řádku v úvahu číslo 3 nebo 4.*

V prvním sloupci jsou již čísla 2 a 4, zbývají tedy čísla 1 a 3. Protože musí být současně splněny obě podmínky (pro řádek i sloupec), může být v poli (1, 1) pouze číslo 3.

- *Pro pole (2, 1) zbývá tedy jen číslo 4.*
- *V prvním a druhém sloupci chybí vždy jen jedno číslo. Zapíšeme čísla 1 a 2. Tím je druhý řádek plný až na jedno číslo, 3.*
- *Takto jednoduše postupujeme dále až do úplného řešení.*

3	4	**2**	**1**
1	2	**4**	3
4	**3**	1	2
2	**1**	3	4

Řešení:

Opakujte, dokud nenajdete všechny čísla:

- Napište si do bloku všechna čísla a při každém jejich výskytu v mřížce si vedle nich udělejte čárku.
- Pokud je u některého z čísel počet čárek jen o jednu menší, než je počet řádků/sloupců, existuje již jen jedno pole, kde toto číslo může být. Zapište číslo do příslušného pole a vyškrtněte ho z pomocného bloku.
- Zamyslete se nad každým (volným) polem, jaké číslo by v něm ještě mohlo být. Začněte vždy u 1 a otestujte každé možné číslo. Zkontrolujte přitom, jestli číslo, které chcete zapsat, již není ve stejném řádku nebo sloupci jako pole, které testujete.
- U varianty s vnitřními rámečky zkontrolujte, jestli se myšlené číslo již vyskytuje v rámečku. U „normální“ varianty zkontrolujte také diagonály.
- Jakmile najdete pro zkoumané pole dvě možná čísla, pole ignorujte a otestujte další. Na pořadí, v jakém přitom budete postupovat, vlastně nezáleží: když prozkoumáte všechna volná pole, najdete aspoň jedno nové číslo. Nalezené číslo zapište.
- Jakmile zapíšete nové číslo, zkontrolujte nejdříve okolí tohoto nového čísla – protože právě tam se něco změnilo. Pokud v okolí nic dalšího nenajdete, musíte znovu otestovat všechna volná pole.

2 Slovní úlohy

V závorce za textem úlohy nalezneme správné řešení.

2.1 Slovní úlohy pro 2. a 3. ročník

SLOVNÍ ÚLOHY Z MATEMATICKÉHO KLOKANA, KATEGORIE CVRČEK (2015 - 2017)

1. Standa uviděl na dvorku 2 kachny, 1 kočku a 3 husy. Po chvíli přiběhlo dalších 5 hus, 3 kočky a 4 kachny. Kolik zvířat je nyní na dvoře? (18)

2. Na Alešovu párty přišlo deset kamarádů. Šest z nich bylo děvčat. Kolik bylo na párty chlapců? (3)

3. Matouš má doručit letáky do všech domů s čísly 25 až 57. Do kolika domů má letáky doručit? (33)

4. Babička vyšla na dvůr a přivolala všechny svoje slepice a kočku. K babičce přispěchalo 20 nožek. Kolik slepic má babička? (8)

5. V domě je 12 pokojů. Každý pokoj má dvě okna a jedno světlo. Minulou noc bylo vidět světlo v osmnácti oknech. V kolika pokojích bylo zhasnuto? (3)

6. Agátka a Evička mají dohromady 12 let. Kolik let budou mít dohromady za 4 roky? (20)

7. Klokan udělá 10 skoků za minutu, potom 3 minuty odpočívá, pak zase udělá 10 skoků za minutu a 3 minuty odpočívá, a tak dále. Zjisti nejkratší dobu, za kterou udělá 30 skoků. (9)

8. Bětka a Klárka stojí v řadě před divadlem. Bětka vidí, že před ní stojí 7 lidí. Klárka spočítala, že je v řadě celkem 11 lidí. Bětka stojí hned před Klárkou. Kolik lidí stojí za Klárkou? (2)

9. Marek má 9 bonbónů a Dan má 17 bonbónů. Kolik bonbónů má dát Dan Markovi, aby měli stejně? (4)

10. Na oslavě Věrčiných narozenin se sešlo 14 dětí (i s Věrkou). Maminka objednala 2 pizzy a každou rozdělila na 8 stejných dílků. Každé dítě jeden z nich snědlo. Kolik dílků zbylo? (2)

2.2 *Slovní úlohy pro 4. a 5. ročník*

SLOVNÍ ÚLOHY Z MATEMATICKÉHO KLOKANA, KATEGORIE KLOKÁNEK (2012 - 2014)

1. Bedřich píše slovo MATEMATIKA na list papíru. R ˚uzná písmena píše různými barvami, stejná písmena stejnou barvou. Kolik různých barev bude potřebovat? (6)

2. Na schovávanou si hraje 13 dětí. Jedno z nich hledá. Nalezeno už bylo 9 dětí. Kolik dětí je ještě schovaných? (3)

3. Tři stejné balónky stojí o 12 korun více než jeden balónek. Kolik stojí jeden balónek? (6)

4. Babička upekla pro svá vnoučata 20 perníčků. Každý ozdobila rozinkami nebo oříšky. Rozinkami ozdobila 15 perníčků, oříšky 15 perníčků. Do kolika perníčků dala rozinky i oříšky? (10)

5. Na vánoční besídce stálo celkem 15 svícnů. Pětiramenných bylo 6 svícnů, zbývající svícny byly trojramenné. Kolik svíček na slavnosti svítilo, když byly všechny rozsvícené a na každém rameni byla právě jedna svíčka? (57)

6. Do zvířecí školy chodí 3 koťata, 4 káčátka, 2 housata a několik oveček. Jejich učitelka sova zjistila, že dohromady mají 44 nohou. Kolik je ve škole oveček? (5)

7. Kolik let uplyne od 1. ledna 2013, než poprvé nastane situace, že bude součin číslic daného roku větší než součet číslic daného roku? (102)

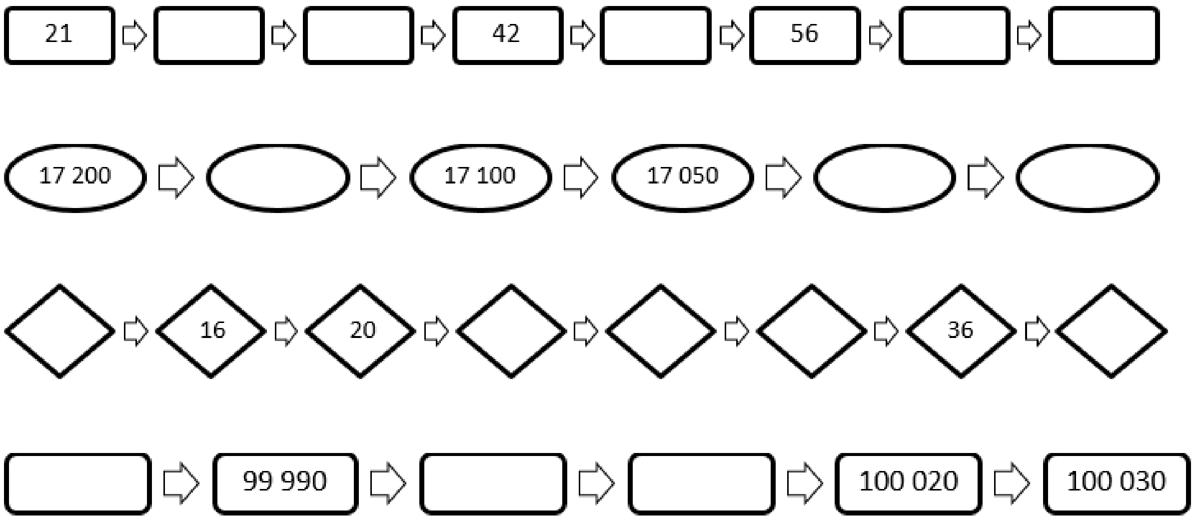
8. Radka si hrála s kartičkami, na kterých byly číslice 0 a 1. Poskládala z nich několik čísel. Součet všech jejích čísel byl 2013. Vyber nejmenší počet čísel, které Radka mohla složit. (3)

9. Když koala Koko nespí, sní 50 gramů listů za hodinu. Včera spala 20 hodin. Kolik gramů listů včera snědla? (200)

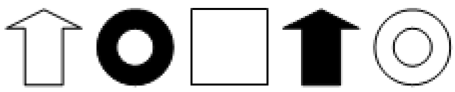
10. Králík Ušák má nejraději zelí a mrkev. Každý den sní buď 1 zelí a 4 mrkve, nebo jen 9 mrkví, nebo jen 2 zelí. Během jednoho týdne Ušák snědl 30 mrkví. Kolik zelí snědl v tomto týdnu? (7)

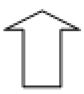
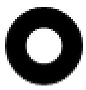
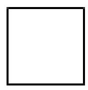
3 *Číselné a obrázkové řady*

Doplň čísla, která patří do číselných řad.



Kterým znakem bude pokračovat obrázková řada? Vyber správnou možnost.



A)  B)  C)  D) 

Jaká dvojice písmen bude následovat v řadě? Vyber správnou možnost.

AB aB ab Ba CA cA

A) Ca B) CB C) ca D) cb

Kterým znakem bude pokračovat obrázková řada? Vyber správnou možnost.

← → ↔ ↑ ↓ ↕ ↖ ↘

A) ⤡ B) ↔ C) ↕ D) ↙

(www.zscerncice.cz)

4 *Magické čtverce*

Doplň čísla do čtverce tak, aby součet v každém řádku, sloupci i v obou úhlopříčkách byl:

12

5	**1**	
	4	

33

		16
	11	
		9

18

9		**8**
4		

30

13		
11		
	17	

30

15		
		12
7		

36

15		**14**
	12	

(www.dum.rvp.cz)

	4	
12	20	28
		8

		18
9		21
	27	6

20		
45	25	
10		30

(www.slideplayer.cz)

456	100	244
156		373

		239
238	347	185
333		

292		
	156	
247	255	368

	89	
	620	157
342	111	

226		
421		325
99	356	

356		528
268	429	253

(www.1zdar.cz)

5 *Sudoku*

1		5	4					
				7	9		3	8
9		7						
4		8		2				
2			6		1			5
				4		9		1
						4		7
7	9		3	5				
					4	5		3

			6	3	1	2		
			8				6	9
3								4
1				2		7	9	
		3				1		
	2	7		9				5
2								7
8	5				3			
		6	2	1	9			

	8						1	9
			6					2
6				8	1	3		
				9				3
9	4		3		5		8	1
5				4				
		6	2	5				4
3					6			
7	9						2	

	1		2					7
3		8				5	2	
5			9	4			8	
				1				
		1	3		5	8		
				2				
	8			9	4			5
	3	9				6		4
1					2		9	

6	2	3	8	1				5
1					7			
		8	5					
3	6	5	9					
					3	5	6	7
					9	1		
			1					4
7				3	8	9	5	2

			8	9	1	7		
	5				6			
					2	3		9
		1					7	5
	7						9	
4	2					8		
3		2	6					
			9				8	
		5	2	7	8			

(www.sudokuonline.cz)

6 Prostorová představivost

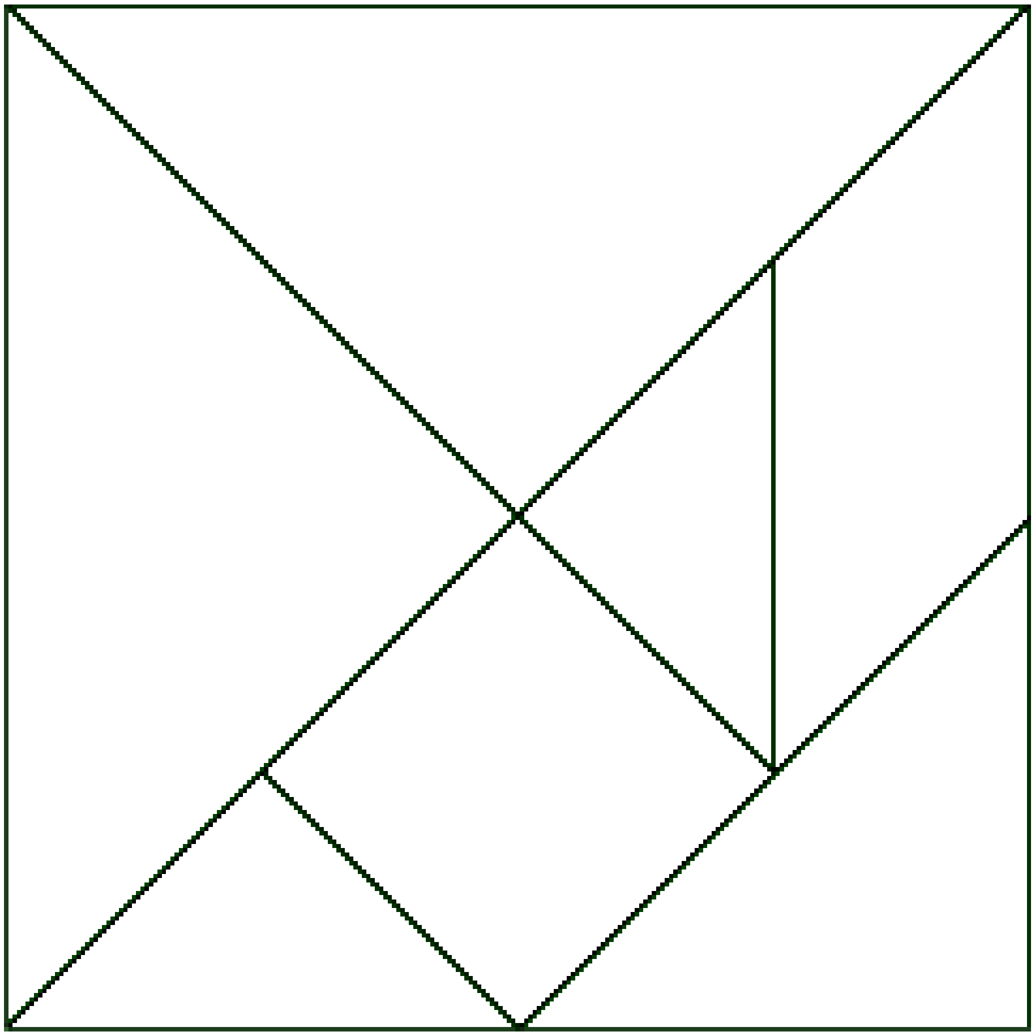
6.1 Tangramy

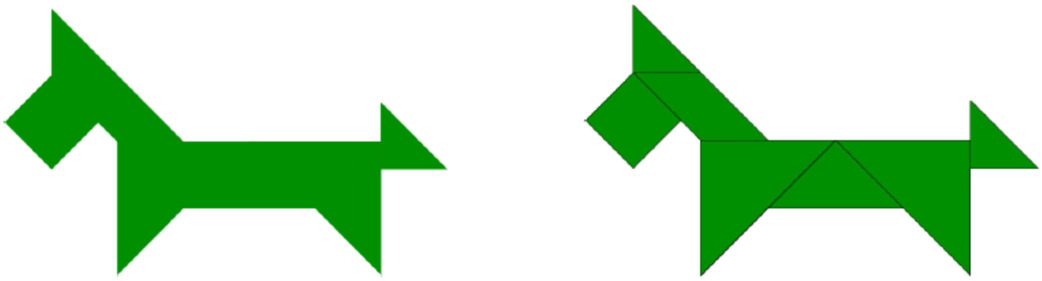
Hlavolam který pochází ze staré Číny. Tvoří ho sedm geometrických tvarů ze kterých lze sestavit spoustu obrázků.

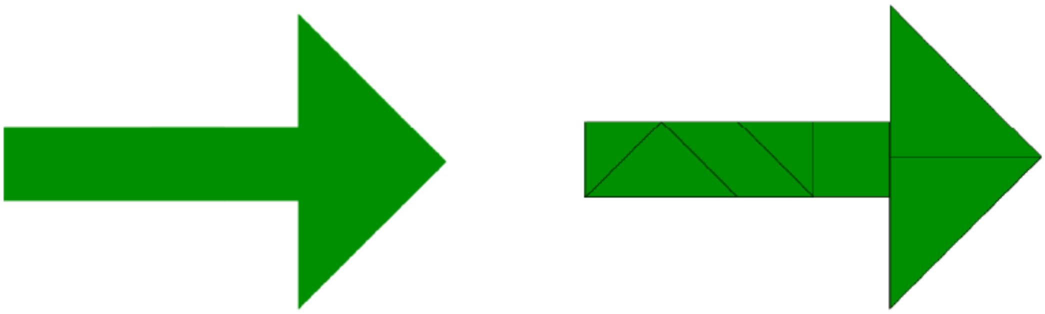
Pravidla

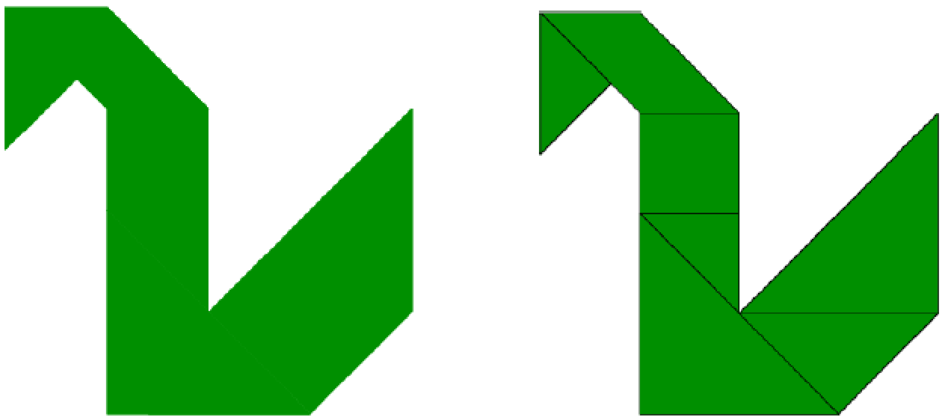
- Cílem hry je sestavit obrázek, když znáte pouze jeho obrys.
- Při skládání použijte všechny části, žádný díl nesmí zůstat stranou.
- Jednotlivé díly leží vedle sebe na podložce, nepokládejte jeden přes druhý. Dotýkají se hranou nebo alespoň rohem.
- Části lze libovolně převracet.

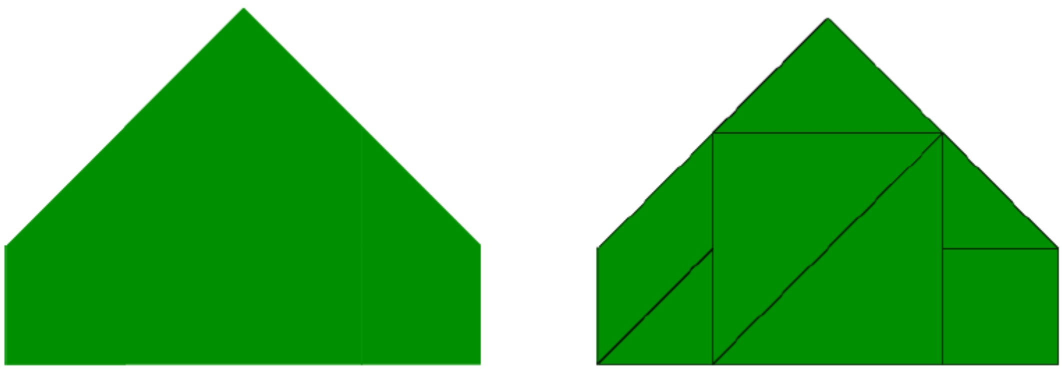
Pokud si ho chcete vyrobit, postačí vám k tomu kousek tvrdého papíru. Papír rozstříhejte podle obrázku.











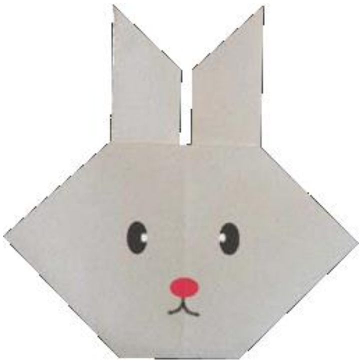
Další možné varianty: Cívka, Husa, Kočka, Kůň, Lampa, Miska, Obdélník, Palma, Pohár, Slepice, Stan, Svíčka, Talíř, Tučňák, Věž, Žehlička

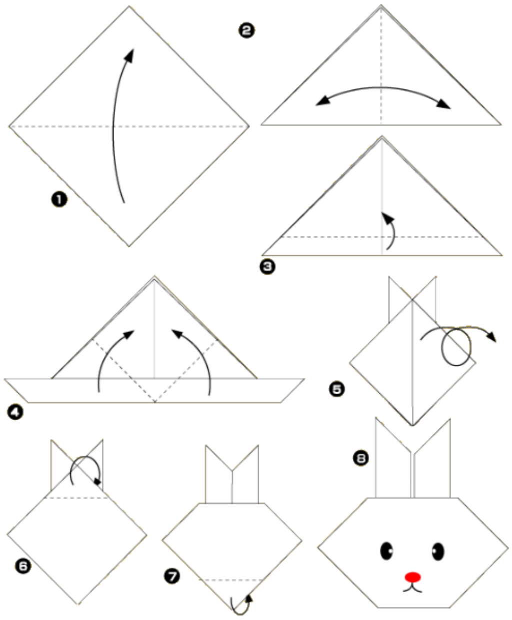
(www.kle.cz/tangram)

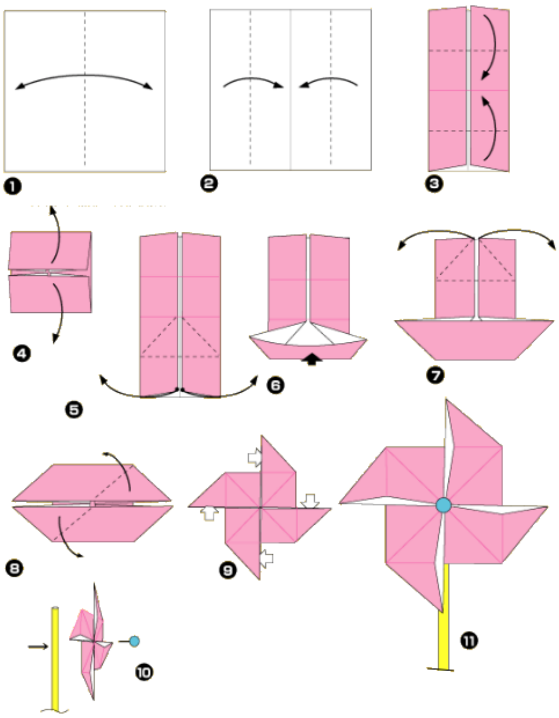
6.2 Origami

Origami je japonské slovo, které znamená "skládat papír". Skládání papíru má v Japonsku dlouhou tradici, ale rozvíjelo se i v jiných zemích a dnes je známé po celém světě (www.origami.cz).

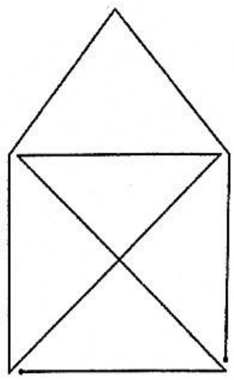
Doporučuji internetovou stránku ***www.origami.alyss.cz****, kde se nachází spoustu návodů na origami skládačky, které jsou rozděleny i podle obtížnosti. Skládáním origami rozvíjíme orientaci v rovině i v prostoru.*

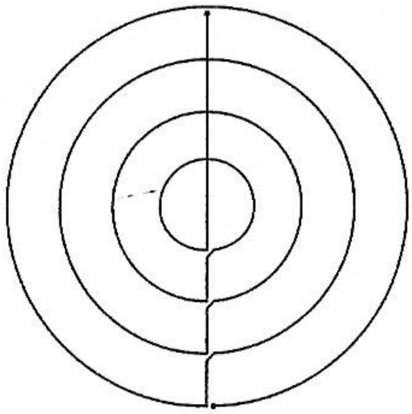


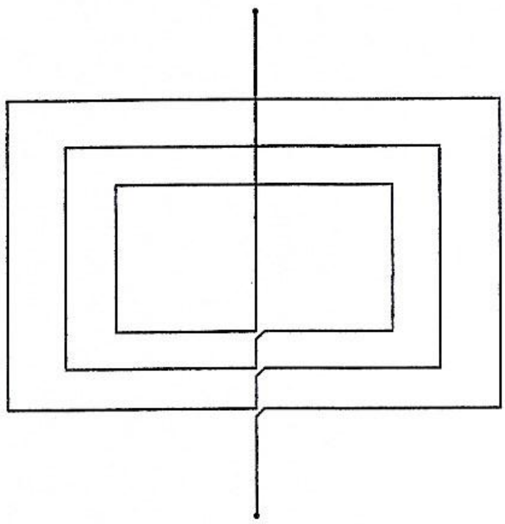


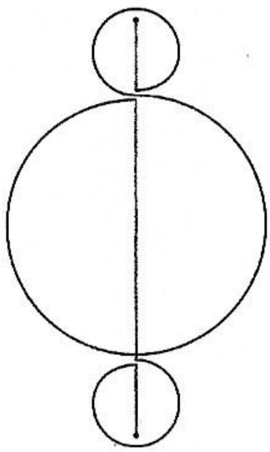


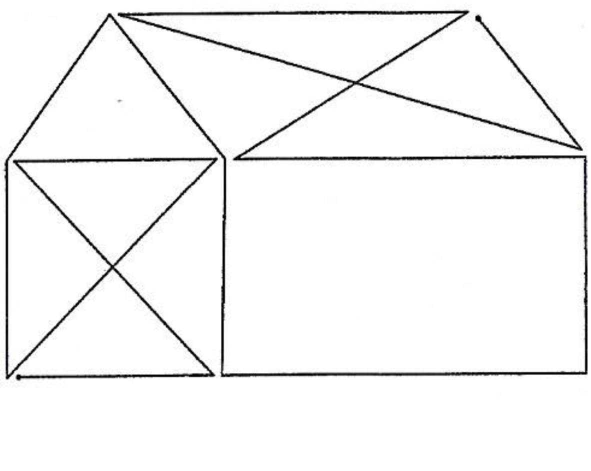
6.3 *Obrázky jedním tahem*

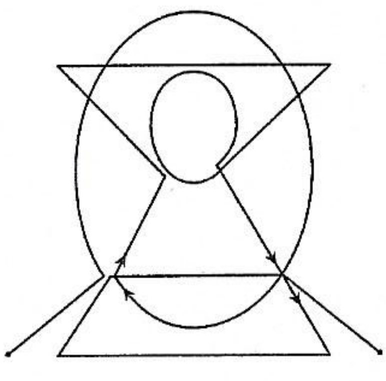






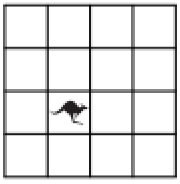


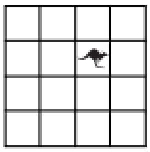
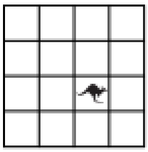
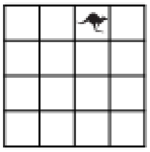
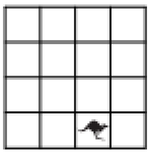
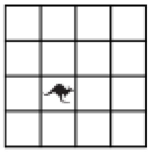




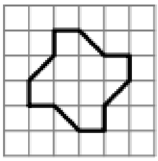
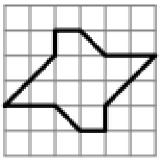
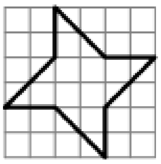
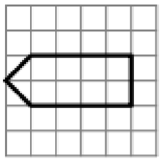
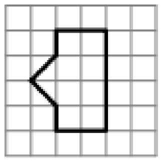
6.4 *Čtvercová síť*

1. Petřík položil hračku klokana na políčko čtvercové desky jako na obrázku vpravo. Potom ji přesouval vždy na sousední pole. Nejprve doprava, poté nahoru, dále doleva, potom dolů a nakonec doprava. Kde klokan skončil? (B)



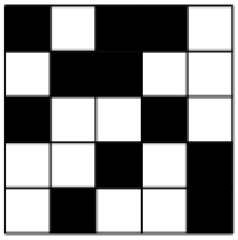
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Který z útvarů ve čtverečkovaném sešitě má největší obsah? (C)

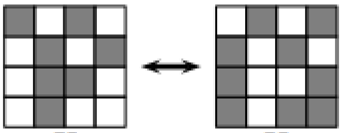
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

3. Kolik černých polí na obrázku musíme přebarvit bílou barvou, aby na každém řádku a v každém sloupci bylo právě jedno černé pole? (C)

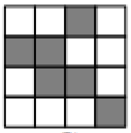
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7



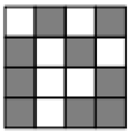
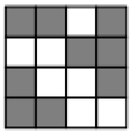
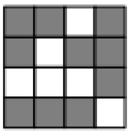
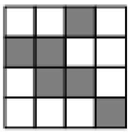
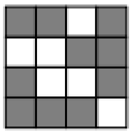
4. Obrázek X patří k obrázku Y. Který z obrázků patří k obrázku G? (E)



X *Y*



G

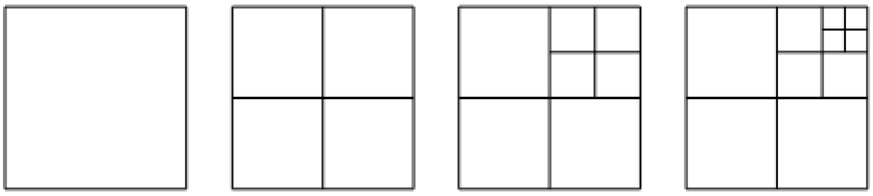
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Na obrázku je část tabulky násobení. Které číslo napíšeš na šedé políčko? (D)

×	2	3
2	4	6
4	8	

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 12

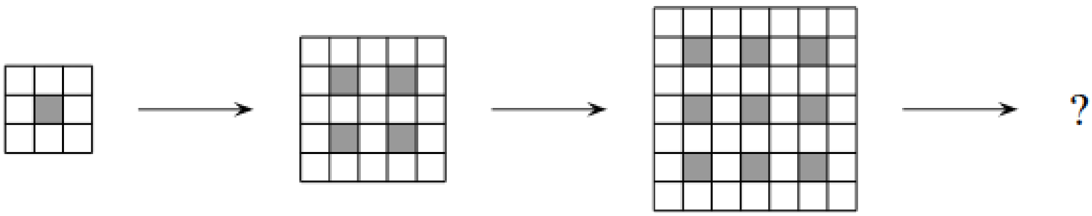
6. Ze čtverců jsme vytvořili řadu obrazců. První obrazec je složen z 1 čtverce, druhý ze 4, třetí ze 7 a čtvrtý z 10 čtverců.



Z kolika čtverců bude vytvořen pátý obrazec? (B)

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15

7. U každého ze čtverců zjišťujeme počet malých bílých čtverečků. Kolik jich bude mít následující čtverec? (C)



8 bílých čtverečků 21 bílých čtverečků 40 bílých čtverečků

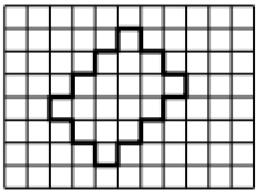
(A) 50 (B) 60 (C) 65 (D) 70 (E) 75

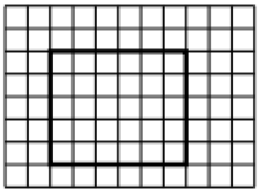
8. Kolika způsoby můžeš přečíst slovo FERDA? (A)

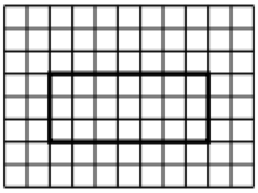
F	E	R
E	R	D
R	D	A

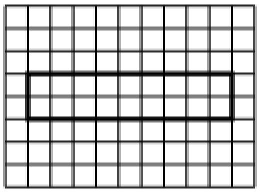
(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

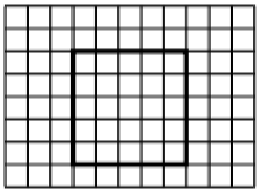
9. Na čtverečkovaném listu papíru Eva uviděla svázaný provázek položený tak, jak vidíš na obrázku vpravo. Potom ho vzala a vytvořila jeden z následujících tvarů. Který? (E)

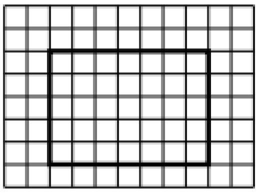


(A) 

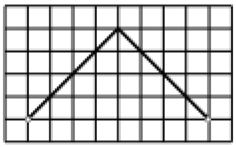
(B) 

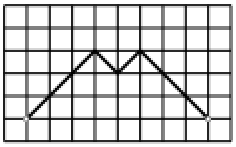
(C) 

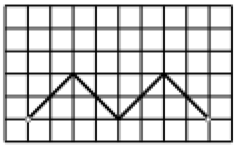
(D) 

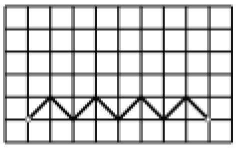
(E) 

10. Na obrázcích vidíš čtyři různé cesty mezi dvěma body. Která cesta je nejkratší? (E)

(A) 

(B) 

(C) 

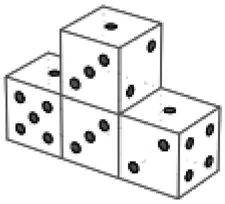
(D) 

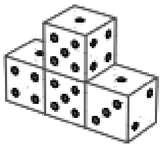
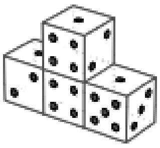
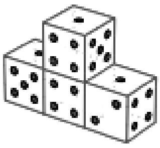
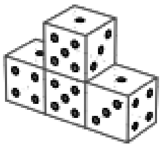
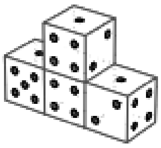
(E) všechny jsou stejně dlouhé

(www.matematickyklokan.net)

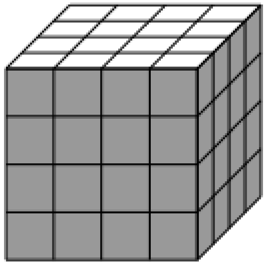
6.5 Krychle

1. Mirek postavil stavbu ze čtyř stejných hracích kostek (podívej se na obrázek vpravo). Součet teček na každé dvojici protilehlých stěn hrací kostky je 7. Jak vypadá Mirkova stavba zezadu? (C)



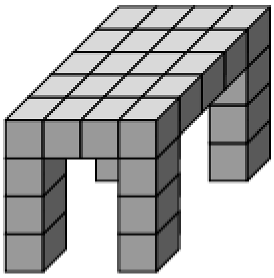
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Velká krychle (podívej se na obrázek vpravo) byla sestavena z 64 malých bílých stejně velkých krychliček. Tomáš natřel 5 stěn velké krychle zelenou barvou. Kolik malých krychliček má 3 stěny zelené? (A)



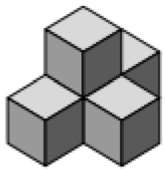
(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 20 (E) 24

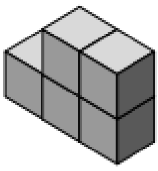
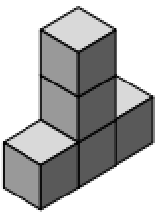
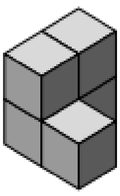
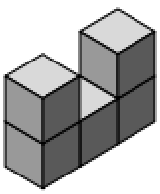
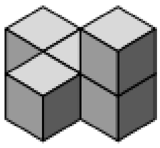
3. Tomáš slepil stůl z malých krychliček (podívej se na obrázek vpravo). Kolik krychliček použil? (D)



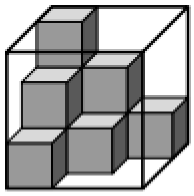
(A) 24 (B) 26 (C) 28 (D) 32 (E) 36

4. Anička vytvořila stavbu z pěti kostek (podívej se vpravo). Klárka jednu z kostek přemístila. Kterou stavbu nemůžeš vidět? Stavbou můžeš otáčet. Tedy se na ni můžeš dívat z různých stran. (D)



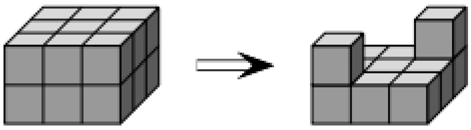
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Ron má krychličky (délka hrany je 1 dm). Některé dal do akvária ve tvaru krychle (délka hrany je 3 dm). Způsob uložení krychliček vidíš na obrázku. Kolik krychliček musí ještě přidat, aby zaplnil celé akvárium? (C)



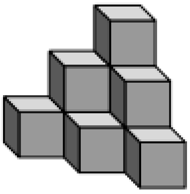
(A) 9 (B) 13 (C) 17 (D) 21 (E) 27

6. Kolik kostek jsme odebrali? (D)



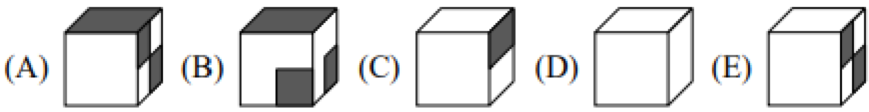
(A) 8 (B) 5 (C) 6 (D) 7

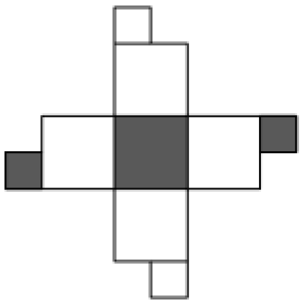
7. Stavba na obrázku je slepena z 10 kostek. Roman celou stavbu namočil do inkoustu. Kolik stěn všech 10 kostek je modrých? (D)



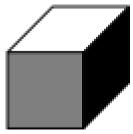
(A) 18 (B) 24 (C) 30 (D) 36 (E) 42

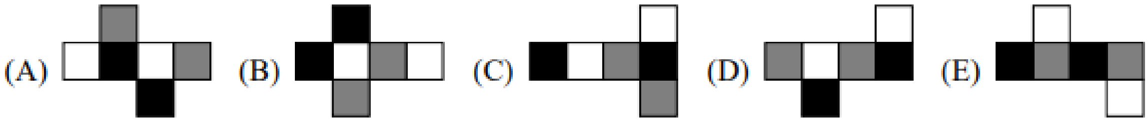
8. Na obrázku vpravo vidíš „síť“ krychle. Které z následujících krychlí „síť”“ odpovídá? (E)



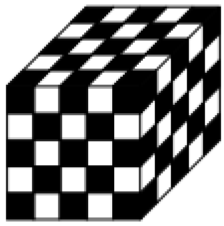


9. Na krychli vpravo jsou každé dvě protější stěny vybarveny stejnou barvou. Na kterém obrázku je síť této krychle? (E)





10. Krychle na obrázku je složena pouze z černých a bílých kostek. Žádné dvě kostky stejné barvy nemají společnou stěnu. Všechny vrcholy krychle jsou černé. Kolik bílých kostek bylo použito? (B)



(A) 60 (B) 62 (C) 64 (D) 65 (E) 68

(www.matematickyklokan.net)

6.6 *Další možné činnosti:*

- Stavebnice: Bloco, Geomag, Grindo maxi, Happy cubes, iGeo cube, Lego, Neocube, Polydron, Seva, Zometool

Obrázek 6 - z časopisu Vláček

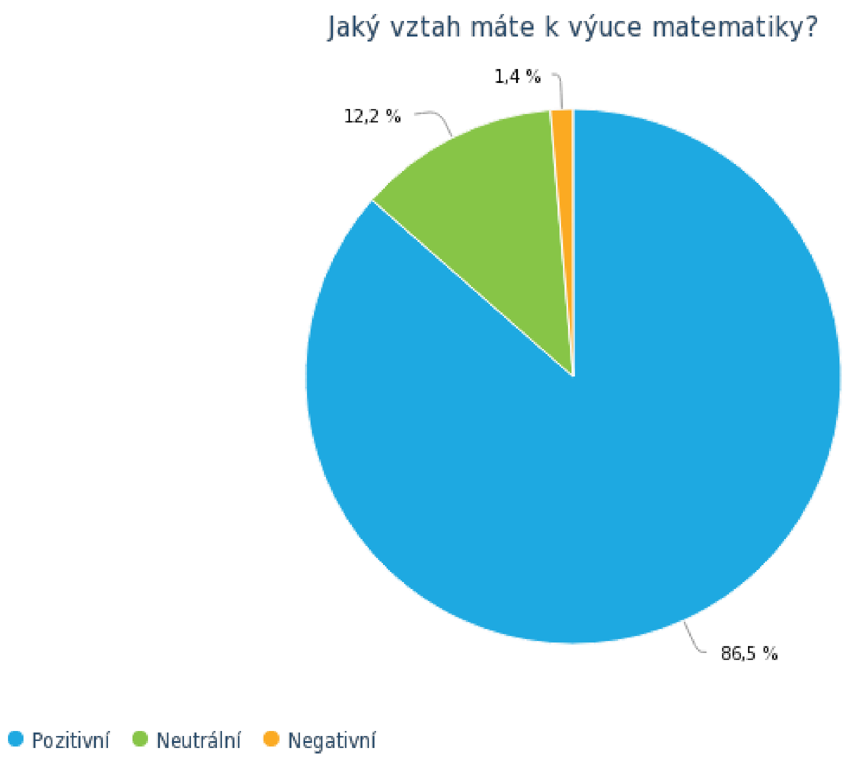
- Puzzle
- Hry se zápalkami
- Bingo
- Labyrinty
- Bludiště
- Lodě
- Společenské hry

VÝZKUMNÉ ŠETŘENÍ

1 *Dotazník pedagogům*

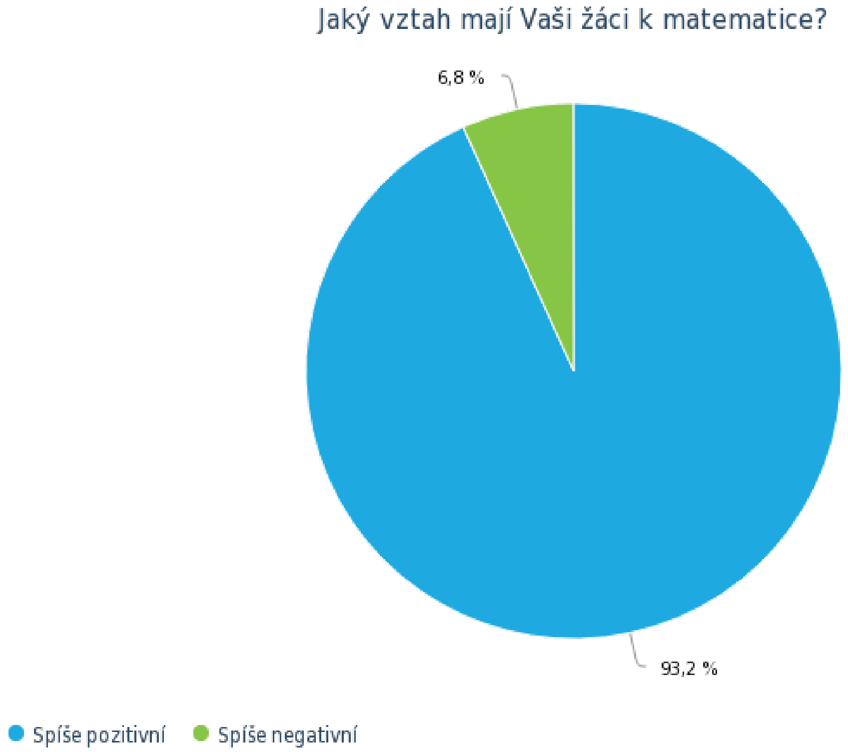
Přes webovou stránku www.my.survio.com jsem vytvořila dotazník pro pedagogy, který se týkal vyučování matematiky a nadstandardních úloh. Dotazník byl anonymní, celkem ho tvořilo 8 otázek (s výběrem odpovědí) a do devátého políčka mohl každý napsat svůj názor. Celkem mi přišlo 100 odpovědí, tedy odpovědělo 100 lidí.

1. Jaký vztah máte k výuce matematiky?
2. Jaký vztah mají Vaši žáci k matematice?
3. Jaké učební pomůcky využíváte v hodině matematiky nejraději?
4. Využíváte v hodině matematiky nestandardních matematických úloh?
5. Pokud ano, kterých nejvíce?
6. Jak Vaši žáci chápou texty slovních úloh?
7. Jak tyto úlohy plní svůj význam ve Vaší hodině matematiky?
8. Zapojují se žáci z Vaší školy do matematických soutěží?
9. Chcete něco k nestandardním úlohám napsat?



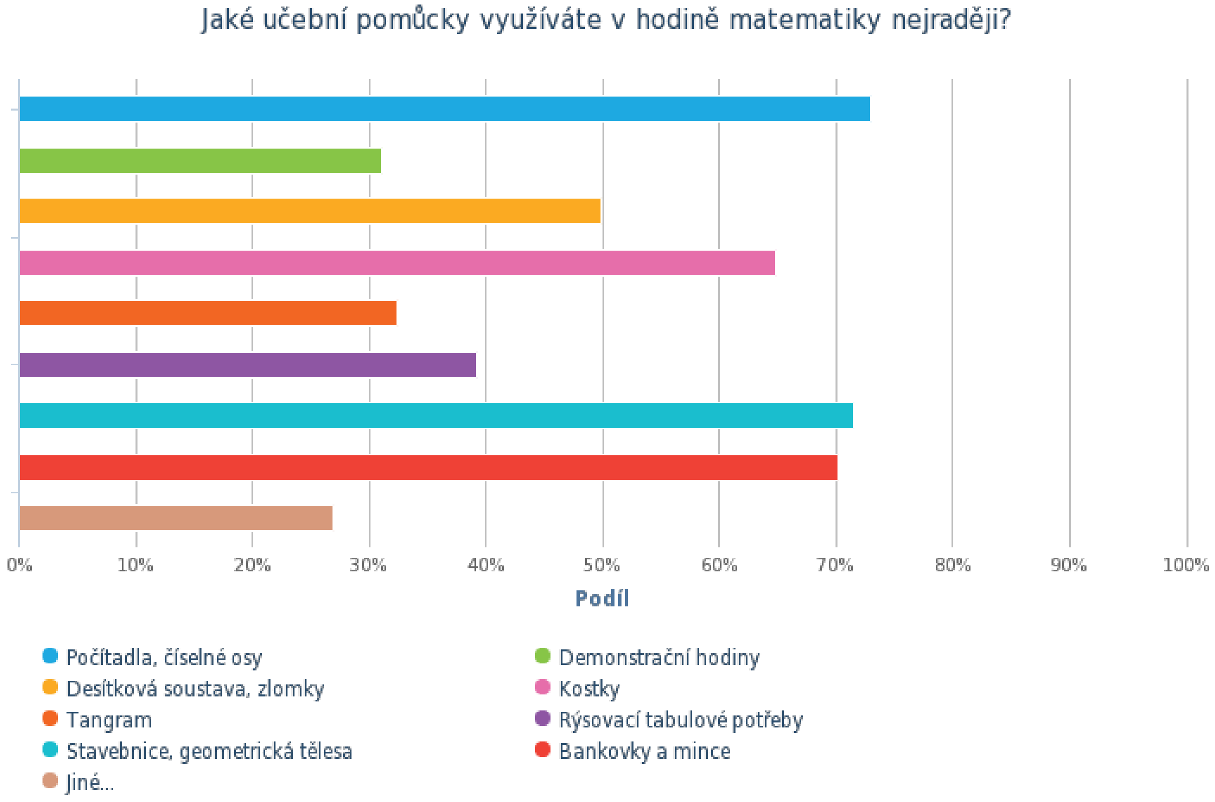
Graf č. 1 – Vztah učitelů k výuce matematiky.

Na tuto otázku jsem se ptala proto, protože sama mám k vyučování matematiky kladný vztah a velmi mě práce s žáky v těchto hodinách baví. Zjistila jsem, že většina tázaných má k výuce matematiky kladný vztah. Negativní vztah má vážně málo, což mě překvapilo, protože ne každého může matematika bavit, nebo nemusí mít pro vyučování tohoto předmětu vlohy.



Graf č. 2 – Vztah žáků k matematice.

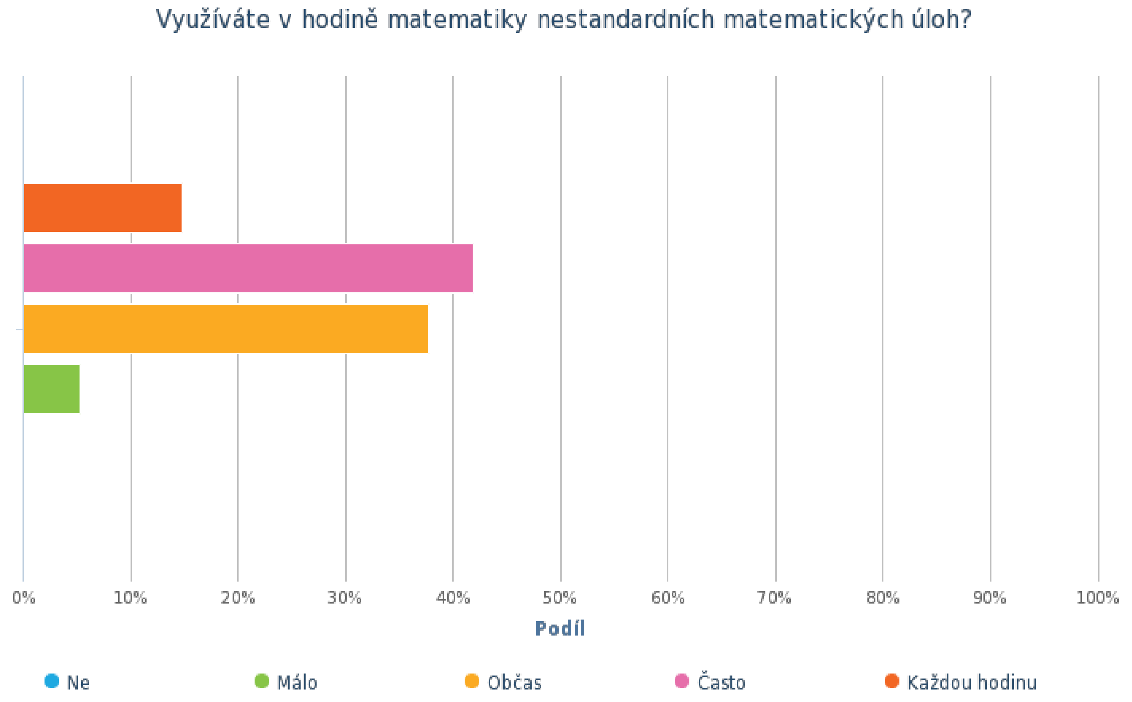
Žáků, co má negativní vztah k matematice byla také menšina, čehož jsem si všimla i v praxi. Více než polovinu žáků matematika velmi baví a v hodinách jsou aktivní. Vždy jen pár žáků z třídy potřebovalo více pomoci od pedagoga.



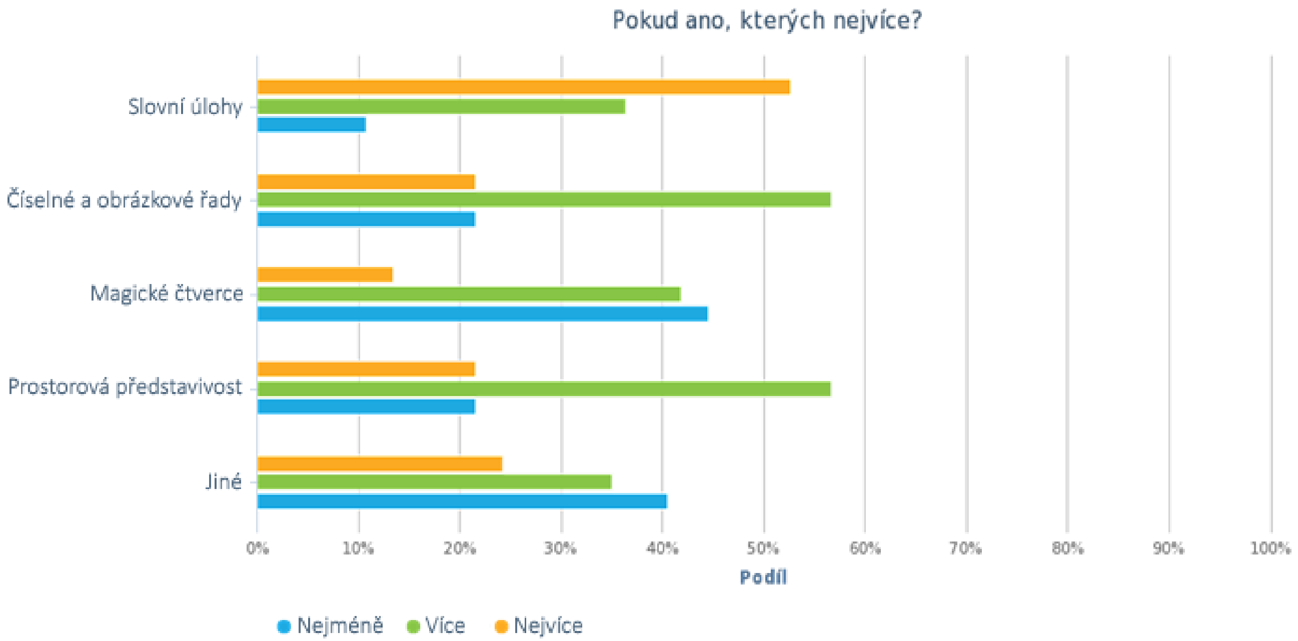
Graf č. 3 – Využití učebních pomůcek v hodině matematiky.

Zjistila jsem, že nejvíce pedagogové využívají různé počítadla a stavebnice. Já osobně mám ráda všechny pomůcky, protože se tak ozvláštní hodina a žáky práce více baví. Pozitivní zkušenost mám např. s bankovkami a mincemi *v 1. třídě, tato pomůcka je také dle dotazníku mezi třemi prvními nejvíce využívaných.*

V kolonce JINÉ se mi nasbíraly tyto odpovědi: Barevné kartičky, dřevěné špachtle, mazací tabulka, kolíčky, víčka od láhví, kartičky s čísly, perlový materiál, smart tabule, krokovadla, fazole, korálky, plata od vajíček, stolní hry, žetony, karty, Montessori banka, pracovní listy, matematické hry, pomůcky na Hejného matematiku, pyramidy, magické čtverce, reálné věci.



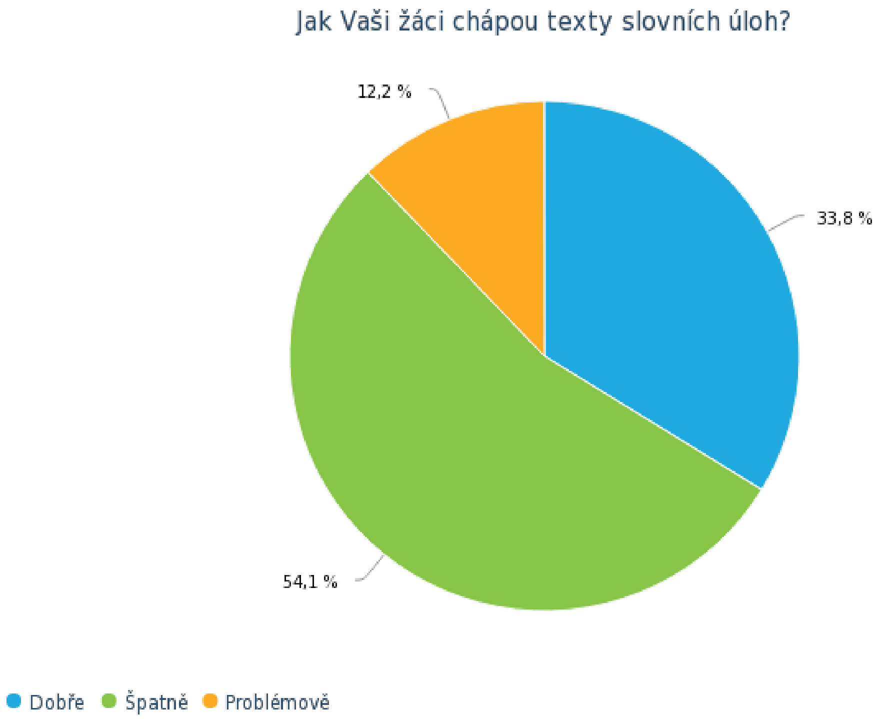
Graf č. 4 – Využití nestadardních úloh.



Graf č. 5 – Konkrétní využití nestandardních úloh.

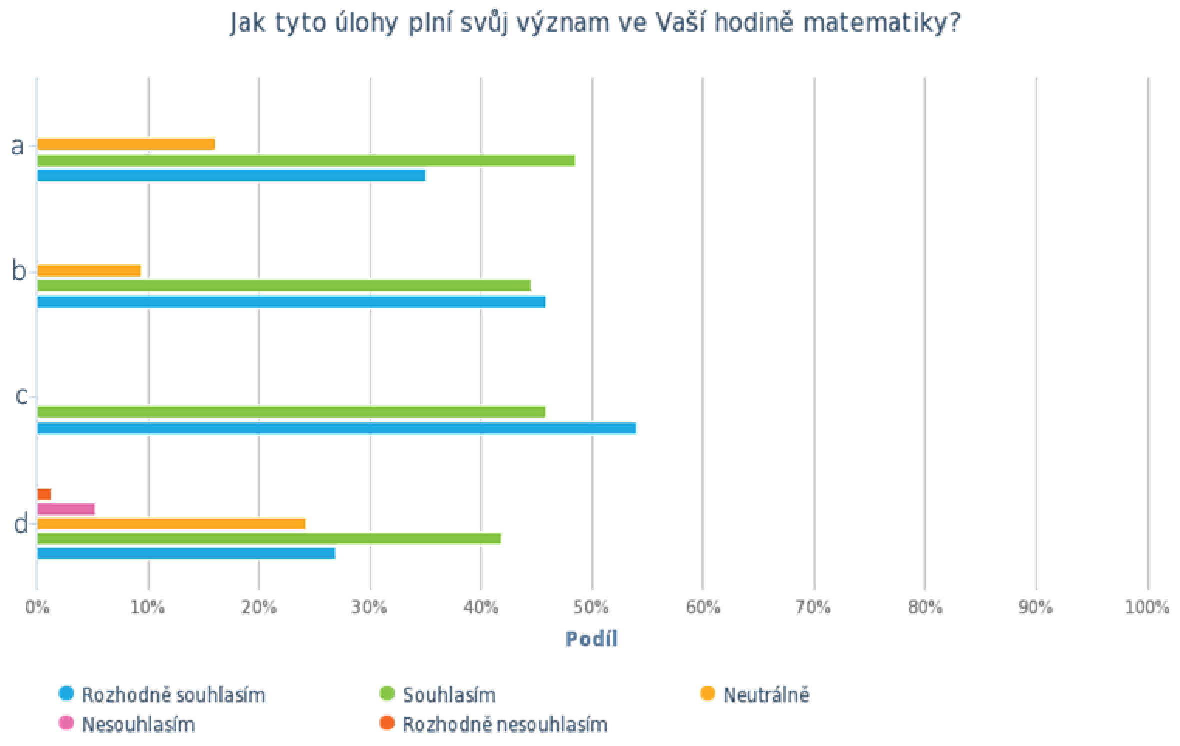
Podle čtvrté a páté otázky jsem zjistila, že pedagogové využívají v hodinách matematiky nestandardních matematických úloh a to často, nebo každou hodinu. Tyto odpovědi mě vzhledem k předchozím odpovědím nepřekvapily. Z praxe také vím, že tyto úlohy učitelé často do hodin zařazují. Odpověď „Ne" se nenašla ani jedna, protože jak už víme, v každé učebnici najdeme alespoň nějaké slovní úlohy, které do nestandardních úloh také patří.

Na grafu č. 5 můžeme vidět, že nejvíce učitelé využívají právě slovních úloh, dále číselných a obrázkových řad, úloh týkajících se prostorové představivosti a nejméně využívají magických čtverců. Z těchto odpovědí mám radost, protože když si vzpomenu já na naše hodiny matematiky, tak těmito úlohami nebyly tolik obohacovány.



Graf č. 6 – Pochopení textu slovních úloh.

Nejvíce využívané jsou slovní úlohy a mě velmi překvapilo, že více než polovina žáků chápe zadání slovních úloh špatně a někteří dokonce problémově. Pouze 33,8 % chápe texty dobře. Žáci sice mají kladný vztah k matematice, ale pochopení úloh jim může dělat problémy, proto je velmi důležité, jak pedagog zvládne žákům zadání vysvětlit. Z praxe jsem si všimla, že je dobré převádět matematické úlohy do situací každodenního života. U slovních úloh také platí dobrý zápis, či přehledová tabulka pro lepší představu.



Graf č. 7 – Význam nestandardních úloh v hodině matematiky.

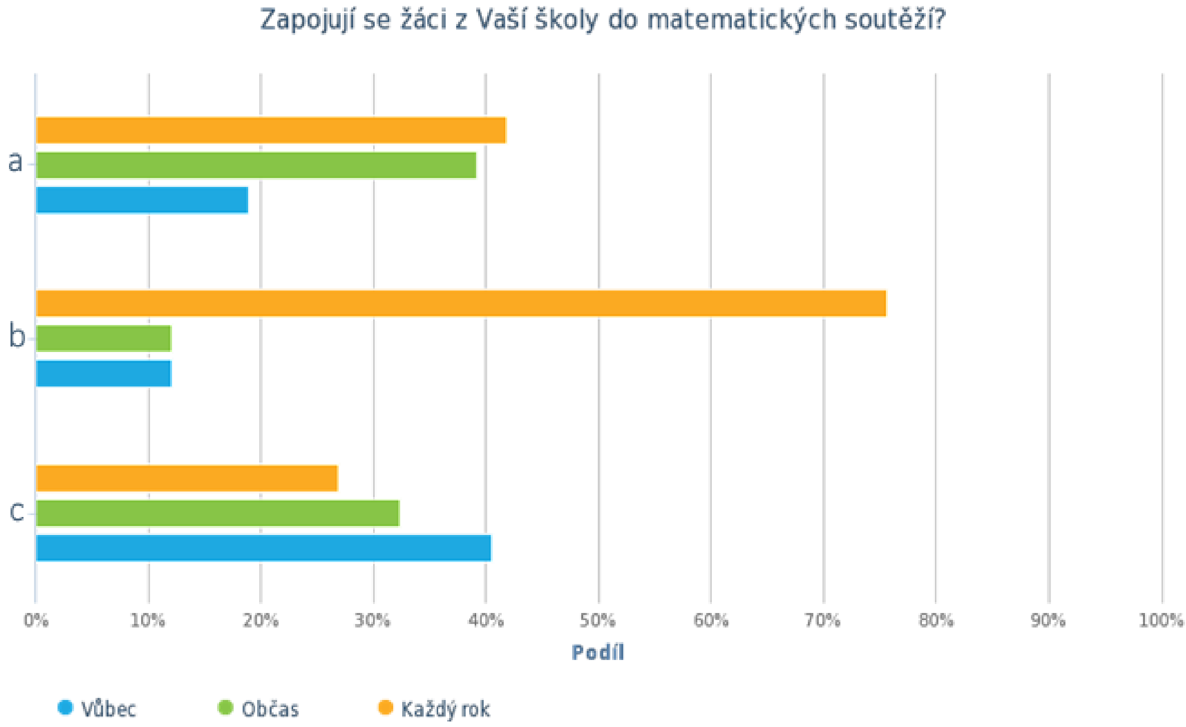
a – Nestandardní úlohy vedou žáky k pochopení matematiky zábavnou formou.

b – Nestandardní úlohy, např. jako slovní úlohy vedou žáky pochopit potřebnost matematiky pro praktický život.

c – Nestandardní úlohy rozvíjí logické myšlení.

d – Nestandardní úlohy zvyšují zájem o matematiku u žáků s matematickým nadáním, ale také podchycují tento zájem u žáků prospěchově slabších.

*Já osobně souhlasím s tvrzením **a**, rozhodně souhlasím s tvrzením **b** a **c**, tvrzení **d** je pro mě spíše neutrální, protože vždy záleží na individuálních zvláštnostech žáka. Proto si myslím, že se našly i odpovědi nesouhlasím a rozhodně nesouhlasím.*



Graf č. 8 – Zapojení žáků do matematických soutěží.

a – Matematická olympiáda

b – Matematický klokan (Cvrček, Klokánek)

c – Oblastní matematické soutěže (podle okresů)

Skoro 80 % škol se každý rok zúčastňují Matematického klokana, přes 40 % Matematické olympiády a skoro 30 % oblastích matematických soutěží. Škola, kde pracuji se letos také zúčastnila Matematického klokana, dokonce i Pythagoriády. Hodina matematiky byla velice zajímavá, kdy jsme úlohy ze soutěží plnili společně. Překvapilo mě, jak každý žák přemýšlí o úkolu jinak, proto se nám nasbíralo více možných řešení.

Z grafu můžeme vidět, že některých matematických soutěží se školy nezúčastňují vůbec, což je podle mě škoda, protože si myslím, že žáky tyto soutěže baví a je pro ně zajímavé se porovnat např. s žáky z ostatních škol.

Chcete něco k nestandardním úlohám napsat?

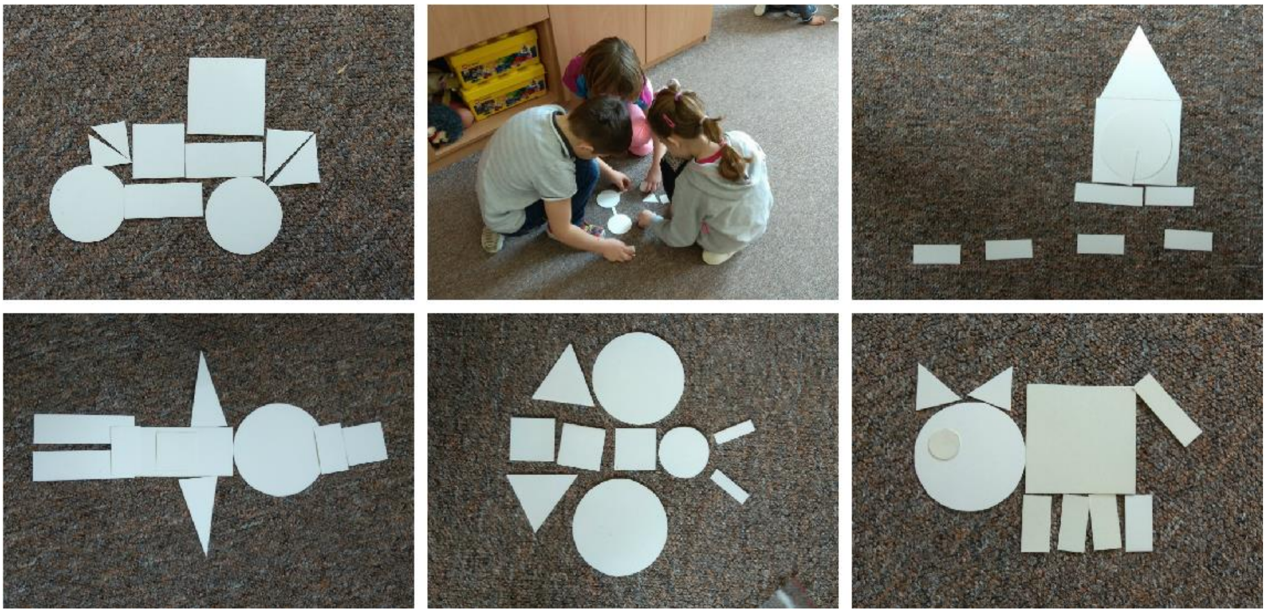
- ✓ *Pro výuku matematiky jsou velice prospěšné.*
- ✓ *V učebnicích matematiky by mohly být zařazovány častěji.*
- ✓ *Pro moji třídu už je to spíše standard.*
- ✓ *Mám třídu s velkými rozdíly, 1/3 dětí opravdu dobrých, u těchto dětí používám vše. 1/3 slabých, u těchto nic, mají velký problém zvládat základy.*
- ✓ *Domnívám se, že pan Hejný přispívá k využití nestandardních a zajímavých úloh. Při výuce používám jeho učebnice jako doplněk.*
- ✓ *Vzhledem k současné úrovni děti a nabytým osnovám není na nadstandardní úlohy příliš čas.*
- ✓ *Máme zvl. sešit, tzv. Potterovník" se slovními úlohami převážně ekologického charakteru. Každá úloha má kromě klasické otázky ještě další podotázky, týkající se daného ekologického tématu (barvy kontejnerů, zakládání národních parků, množství vyprodukovaného odpadu, ...). Za každou vyřešenou úlohu děti získávají obrázek na téma Harry Potter, za každých 5 vyřešených úloh nalepovací drahokam. 5 drahokamů = 1. "Potteroviny" zařazuji každý týden 1 hodinu, děti jsou nadšené, často pracují i přes přestávku.*
- ✓ *Tyto úlohy mohou obohatit hodiny matematiky a dávají šanci i dětem, kterým běžné numerické počítání tolik nejde. Navíc např. motivované úlohy (na vzniklou situaci ve třídě, se jmény dětí apod.) vždy zaujmou více, než úkoly zadávané bez konkrétních údajů.*
- ✓ *Myslím, že žáky s matematickým nadáním takové úlohy vedou k dalšímu poznání, baví je, podněcují jejich zájem. Ale žáky bez takového nadání spíše odrazují od práce, protože je to opět něco, čemu nerozumějí, nedokáží si to představit, neví, jak mají samostatně postupovat, atd.*
- ✓ *Všeho s mírou, je potřeba i počítat klasiku.*
- ✓ *Učím podle metody Hejného a tam je plno nestandardních úloh.*
- ✓ *Zabírají sice hodně času, ale jsou oživením hodin matematiky. Učitel na nich pozná, zda to, co žáky učí, umí převést do praktického života, přejít od abstraktního ke konkrétnímu.*
- ✓ *Nestandardní úlohy jsou pro mě manipulativní. V mé 1.třídě to tvoří většinu času hodin matematiky. Práce v pracovním sešitě na tzv. příkladech je spíše domácí příprava dětí.*
- ✓ *Učím ve speciální třídě pro děti s ADHD - dle běžného RVP ZV. Kromě ADHD má většina dětí IQ v hraničním pásmu, dost z nich má SPU.*

2 Práce s geometrickými tvary

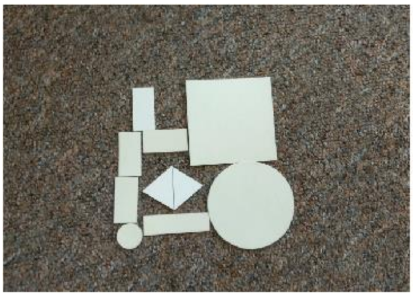
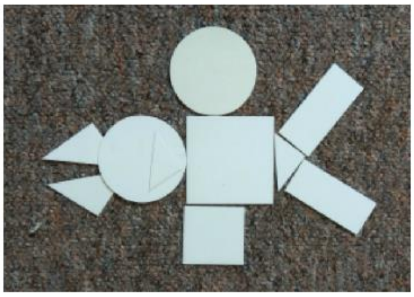
Z činností pro rozvoj logického myšlení jsem si vybrala práci s geometrickými tvary a ověřila si ji se žáky 1. třídy ve školské praxi.

Pro žáky jsem si do hodiny matematiky připravila 5 obálek s různými geometrickými tvary. Povídali jsme si o čtverci, obdélníku, trojúhelníku a kruhu. Tyto tvary jsem různě nastříhala z tvrdého papíru. Různý počet a různé velikosti. Žáky jsem rozdělila do 5 skupinek tak, aby každá měla jednu obálku.

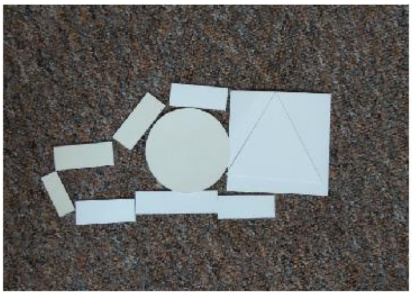
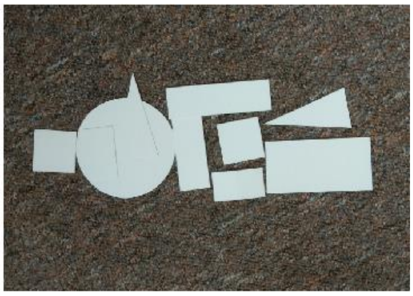
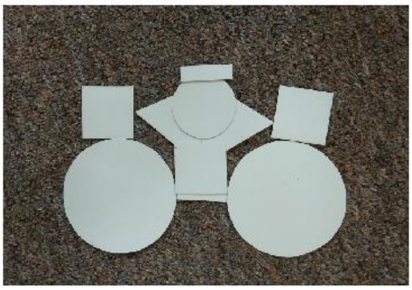
Nejdříve jsme měli jeden daný úkol. Poté žáci skládali dál, podle své fantazie a skupiny se samozřejmě střídaly od stanoviště s obálkou k druhému. Skupina 1 měla za úkol z tvarů poskládat auto. Pravidlo bylo takové, že žáci musí použít všechny geometrické tvary a tvary by se neměly překrývat (to jim však dělalo trošku problém). Skupina 2 skládala domeček, skupina 3 panáčka, skupina 4 motýla a skupina 5 kočku.



Cílem bylo rozvíjet u žáků prostorovou představivost a umět si tvary, tělesa a věci, se kterými se setkáváme každý den, představit v hodině matematiky. Takže když na procházce vidíme domy, víme, že je můžeme nakreslit třeba jako čtverce (později v probíranému učivu jako krychle). V této činnosti jsme rozvíjeli i logické myšlení, protože jsme museli využít všech tvarů a žádný nemohl zůstat. Žáci si museli uvědomit, jak který geometrický tvar využijí.

Žákům se práce velmi dařila, vymysleli a poskládali ještě například traktor, čerty, sněhuláka nebo váhu.

3 Hra Léčení čísla

Dovoluji si do své diplomové práce zařadit i tuto hru na rozvoj logického myšlení, kterou jsem hrála se žáky 4. tříd a velmi je bavila. Hru jsem vždy volila na začátek hodiny k procvičení početních operací, jako je sčítání, odčítání, násobení a dělení.

Pravidla: Číslo, např. 152 onemocnělo a stalo se z něj číslo 63. My pomoci lékařů (čísla 3, 6, 8) a pomoci léků (+, -, ·, :) musíme toto číslo co nejkratším způsobem zase vyléčit, aby se z něj stalo zase číslo 152. Můžeme použít všechny lékaře a léky, ale nemusíme.

Žáci přišli na tyto způsoby:

63 + 8	63 – 8	63 – 8	63 – 3	63 – 8	63 · 3
71 · 6	55 – 6	55 · 3	60 · 3	55 – 3	189 – 8
426 : 3	49 · 3	165 – 8	180 – 8	52 · 3	181 – 8
143 + 6	147 + 8	157 – 8	172 – 8	156 – 6	173 – 8
149 + 3 = 152	155 – 3 = 152	149 + 3 = 152	164 – 6	150 – 3	165 – 8
			158 – 6 = 152	147 + 8	157 + 3
				155 – 3 = 152	160 – 8 = 152

Na tuto činnost měli žáci zhruba 10 minut, během kterých každý přišel alespoň na jeden způsob. Čísla jsem napsala na tabuli, aby měli vše před očima a žáci poté počítali do sešitu. Společně jsme si pár způsobů ukázali u tabule.

Závěr

Cílem diplomové práce bylo seznámení s netradičními – nestandardními matematickými úlohami k rozvoji logického myšlení u žáků na 1. stupni základních škol. V teoretické části jsem se věnovala Rámcovému vzdělávacímu programu a tomu, jak nestandardní úlohy dělíme, matematickým soutěžím a didaktice matematiky. Do práce jsem zařadila i něco málo z psychologie, a to proces myšlení. Vše doplňuje praktická část, která obsahuje soubor logických úloh a výzkumné šetření, kde jsem na základě dotazníkového šetření zjistila, jak kolegové s nestandardním matematickými úlohami pracují.

Zjistila jsem taky to, že máme různé druhy matematických úloh a že dobrým postupem, trénováním a zařazováním těchto úloh do hodin matematiky můžeme hodinu matematiky ozvláštnit a zpestřit. Pro žáky jsou tyto úlohy velice zajímavé a nesetkala jsem se se žáky, které by řešení těchto úloh nebavilo. Úlohy můžeme použít v jakékoli části hodiny, můžeme je připravit žákům jako úkoly navíc, můžeme je řešit hravým způsobem, nebo je použít za účelem motivace.

Seznam použité literatury

BOUDOVÁ, Vlasta. *Psychologie: Učební texty obecné a vývojové psychologie*. Kroměříž: Vyšší odborná škola pedagogická a sociální a Střední pedagogická škola Kroměříž, 2008.

DIETRICH, Rolf, Reinhard MÜLLER a Walter WENZEL. *Jak se naučit a trénovat logické myšlení: 144 matematicko-logických hádanek*. Praha: Euromedia Group, 2007. Universum (Euromedia Group). ISBN 978-80-242-1871-7.

JIROTKOVÁ, D. *Rozvoj prostorové představivosti žáků*. In: Komenský, r. 114, č. 5, 1990

HARTL, Pavel a Helena HARTLOVÁ. *Psychologický slovník*. Třetí, aktualizované vydání. Praha: Portál, 2015. ISBN 978-80-262-0873-0.

HARTL, Pavel. *Stručný psychologický slovník*. Praha: Portál, 2004. ISBN 8071788031.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3

HOŠPESOVÁ, Alena. *Matematika pro všechny děti*. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2002

HOŠPESOVÁ, Alena. *Matematická gramotnost a vyučování matematice*. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2011, 231 s. ISBN 978-80-7394-259-5.

KATRNOŠKA, František, KŘÍŽEK, Michal, SOMER, Lawrence. *Magické čtverce a sudoku*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 2008, roč. 53, č. 2, s. 113-124.

KLIMEŠ, Lumír. *Slovník cizích slov*. 7. vyd., V SPN vyd. 2., rozš. a dopl. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2005. ISBN 80-7235-272-5.

MOLNÁR, Josef. *Geometrická představivost.* V Olomouci: Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, 2014. ISBN 978-80-244-4057-6.

NOVÁK, Bohumil a Anna STOPENOVÁ. *Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1993. ISBN 80-7067-294-3.

NOVÁK, Bohumil. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 2*. Univerzita Palackého v Olomouci: Křížkovského 8, 771 47 Olomouc, 2004. ISBN 80-244-0916-X.

PEŠKOVÁ, Lucie. *Matematika Sudoku*. Diplomová práce, Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc 2011, 65 s.

PHILLIPS, Charles. *Logické myšlení: 50 cvičení pro rozvoj logického myšlení*. Praha: Grada, 2012. Trénink myšlení. ISBN 978-80-247-4510-7.

PLEVOVÁ, Irena a Alena PETROVÁ. *Obecná psychologie*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. ISBN 978-80-244-3247-2.

RŮŽIČKOVÁ, Bronislava. *Didaktika matematiky: pro distanční studium*. 1. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2002. ISBN 80-244-0534-2.

RŮŽIČKOVÁ, Bronislava. *Didaktika matematiky 2*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2004. ISBN 80-244-0815-5.

SEDLÁČKOVÁ, Jarmila. *Rozvíjení myšlení žáků ve vyučování matematice: (vybrané partie z didaktiky matematiky)*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1993. ISBN 80-7067-292-7.

REJZEK, Jiří. *Český etymologický slovník*. Voznice : Leda, 2001. ISBN 80-85927-85-3

Internetové zdroje:

Axiom – Wikipedie. [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Axiom

Co je prostor?. Filozofická fakulta MU [online]. Dostupné z: https://www.phil.muni.cz/fil/texty/prostor.html

Článek - 8. LOGICKÉ MYŠLENÍ. *Fort IQ* [online]. Copyright © FortIQ, 2014. [cit. 11.02.2018]. Dostupné z: http://www.fortiq.cz/clanek/8-logicke-mysleni/32/

Hierarchie – Wikipedie. [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Hierarchie

Hypotéza – Wikipedie. [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Hypot%C3%A9za

Inverzní zobrazení – Wikipedie. [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Inverzn%C3%AD_zobrazen%C3%AD

Magic squares - Wikipedie. [online]. Dostupné z:https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_squares

Matematická Olympiáda. Úvod - Matematická Olympiáda [online]. Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz

MATEMATIKA online - Číselné řady. MATEMATIKA online - ÚVOD [online]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Ciselne-rady/sc-37-sr-1-a-27/default.aspx

Matematické soutěže na 1. stupni ZŠ. UHLÍŘOVÁ, Martina [online]. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_81.pdf

Medián – Wikipedie. [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Medi%C3%A1n

Modus – Wikipedie. [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Modus

MOLNÁR, Josef, Jaroslav PERNÝ a Anna STOPENOVÁ. *Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji: Studijní materiály k projektu, Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP* [online]. 2006, Dostupné z: http://www.class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=100

Můžeme se naučit logicky myslet? | Energycentrum Olomouc. *Energycentrum Olomouc* [online]. Dostupné z: http://www.energycentrum.cz/clanek/115_muzeme-se-naucit-logicky-myslet

Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Metodický portál RVP - Modul Články [online]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/o/z/253/NESTANDARDNI-APLIKACNI-ULOHY-A-PROBLEMY.html/

Propedeutika - Wikipedie. [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Propedeutika

Pythagoriáda – Wikipedie. [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pythagori%C3%A1da

RVP ZV 2017.pdf, MŠMT ČR. MŠMT ČR [online]. Copyright ©2013 [cit. 10.02.2018]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/41216/

Sborníky. Home [online]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/index.php/sborniky

www.sudokuonline.cz

Tangram. kle.cz [online]. Dostupné z: https://kle.cz/tangram/

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Tereza Přikrylová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	RNDr. Martina Uhlířová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2018

Název práce:	Netradiční matematické úlohy k rozvoji logického myšlení žáků na 1. stupni ZŠ
Název v angličtině:	Unconventional mathematical promblems to develop logical thinking of pupils in the first grade of elementary school
Anotace práce:	Teoretické a praktické zpracování netradičních (nestandardních) matematických úloh v hodinách matematiky k rozvoji logickému myšlení. Práce se zabývá teoretickým popisem těchto úloh a obsahuje zpracovaný soubor úloh do praxe.
Klíčová slova:	netradiční, nestandardní, úlohy, matematika, myšlení, logika, hry, učení, představivost
Anotace v angličtině:	Theoretical and practical processing of unconventional mathematical problems to develop logical thinking in a math lesson. The thesis deals with the theoretical description of these tasks and contains the processed set of tasks to practice.
Klíčová slova v angličtině:	Unconventional, tasks, mathematics, math, thinking, logic, games, learning, imagination
Rozsah práce:	103 stran
Jazyk práce:	český