UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁRSKA PRÁCA

Koherentné miery rizika

Vedúci bakalárskej práce:
RNDr. 0ndřej Pavlačka, Ph.D.
Rok odovzdania: 2011

Vypracovala:
Dagmar Martinková
MATPOJ, III. ročník

Prehlásenie

Prehlasujem, že som vytvorila túto bakalársku prácu samostatne pod vedením RNDr. 0ndřeje Pavlačky, Ph.D. a že som v zozname použitej literatúry uviedla všetky zdroje použité pri vypracovaní práce.

V Olomouci dňa 16. apríla 2011

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu bakalárskej práce RNDr. 0ndřeji Pavlačkovi, Ph.D. za veľkú pomoc, ochotu, odborné vedenie a za všetok čas, ktoré mi venoval pri písaní práce.

Obsah

1 Úvod

Veľká časť našich rozhodnutí v rôznych oblastiach či už v ekonomike, v poisťovníctve, ale aj rozhodnutí v iných životných situáciách, prináša určité riziká. Otázkou je, ako toto riziko definovať, ako určiť veľkosť následkov tohoto rizika a nakoniec podľa čoho sa správne rozhodnúť či riziko prijať alebo odmietnuť.

Riziká, ktorých možné následky sú podobné, môžeme zaradiť do určitých skupín. Vieme rozlíšiť skupiny prijateľných a neprijateľných rizík. Skupiny prijateľných rizík budeme označovať ako akceptačné množiny.

Správne sa rozhodnúť nám môžu pomôcť rôzne miery rizika. Miery rizika číselne kvalifikujú jeho rizikovosť. V tejto práci sa preto pokúsime týmito mierami určité riziká zmerať a následne vyhodnotiť.

V prvej časti práce uvedieme základné pojmy z teórie pravdepodobnosti, ktoré sú potrebné k práci a pochopeniu riešených matematických problémov v ďalších jej častiach.

Každá osoba má iný postoj k riziku, a preto riziká pre niekoho prijateľné, môžu byť pre iného neprijateľné. V druhej časti práce bude naším cieľom zistiť, aké základné vlastnosti by akceptačné množiny mali spĺňať.

Ďalej definujeme miery rizika a budeme analyzovať koherentnosť, čiže rozumnosť mier rizík. Koherentnosťou a koherentnými mierami rizika sa zaoberala skupina autorov Artzner, Delbaen, Eber, Heath, ktorých článkom *Coherent measures of risk* z roku 1999 sme sa nechali inšpirovať.

V tretej časti tejto práce sa budeme zaoberať mierami rizika Value-at-Risk a Podmienenou Value-at-Risk. Predstavíme si tiež jednu z najpoužívanejších metód na výpočet Value-at-Risk simuláciu Monte Carlo. Tieto miery rizika definujeme, budeme riešiť ich koherentnosť a na príkladoch si ukážeme splnenie či nesplnenie jednej z vlastností koherencie - subaditivity.

Nakoniec uvedieme príklad z oblasti poisťovníctva, konkrétne neživotného poistenia, v ktorom určíme miery rizika Value-at-Risk a Podmienenú Value-at-Risk. Na výpočet použijeme počítačové programy MS Excel a MATLAB.

Práca je vysádzaná typografickým systémom LaTeX.

2 Vybrané pojmy z teórie pravdepodobnosti

Keďže sa budeme pohybovať v oblasti pravdepodobnosti a matematickej štatistiky, tak sa v prvej kapitole zoznámime s hlavnými pojmami z teórie pravdepodobnosti, ktoré sú základom pre danú tématiku práce. Použijeme literatúru [3] a [5].

Definícia 2.1. Ω je neprázdna množina. Každá množina $M \subset \Omega$ sa nazýva *jav*, jednoprvkové podmnožiny nazývame elementárne javy.

Definícia 2.2. Nech $\Omega \neq \emptyset$ je ľubovoľná množina. Neprázdny systém $\mathcal{M}$ podmnožín množiny Ω sa nazýva *javové pole*, ak platí

1. $M \in \mathcal{M} \Rightarrow M^c \in \mathcal{M}$,
2. $M_n \in \mathcal{M}, n = 1, 2, ... \Rightarrow \bigcup_1^\infty M_n \in \mathcal{M}$.

Prvky množiny $\mathcal{M}$ sa nazývajú *náhodné javy.*

Definícia 2.3. Nech je daná neprázdna množina Ω a na nej javové pole $\mathcal{M}$. *Pravdepodobnosťou* nazývame každú reálnu funkciu P(.) definovanú na $\mathcal{M}$, ktorá vyhovuje nasledujúcim axiómam :

1. $P(\Omega) = 1,$
2. $P(\Omega) \geq 0,$ pre každé $M \in \mathcal{M}$,
3. Pre ľubovoľnú postupnosť $M_n \in \mathcal{M}, n = 1, 2, ...$ nezlučiteľných náhodných javov platí
$$P\left(\bigcup_1^\infty M_n\right) = \sum_1^\infty P(M).$$

Definícia 2.4. Usporiadanou trojicou $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ nazývame *pravdepodobnostný priestor* alebo *Kolmogorovo pravdepodobnostné pole.*

Väčšina náhodných pokusov, s ktorými sa stretávame v aplikáciach, má výsledok vyjadrený číslom. I v prípade, že výsledok pokusu má kvalitatívny charakter, môžeme každému výsledku priradiť reálne číslo. Na množine Ω teda definujeme reálnu funkciu $X(\omega)$.

Definícia 2.5. Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{M}, P)$. Reálnu funkciu $X : \Omega \to R^1$ nazývame *náhodná veličina*, ak pre každé $x \in R^1$ platí

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{M}.$$

Definícia 2.6. Neprázdny systém φ podmnožin množiny Ω sa nazýva *množinový okruh*, ak spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $A \in \varphi, B \in \varphi \Rightarrow A \cup B \in \varphi,$

2. $A \in \varphi, B \in \varphi \Rightarrow A \setminus B \in \varphi.$

Definícia 2.7. Okruh φ sa nazýva σ-okruh, ak platí implikácia

$$A_n \in \varphi, n = 1, 2, ... \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \varphi.$$

Definícia 2.8. Nech je $\Omega \in R = (-\infty, \infty)$ a nech Ψ je systém všetkých intervalov typu $(a, b\rangle, -\infty < a \leq b < \infty$. Najmenší σ-okruh $L(\Psi)$ nad Ψ sa nazýva *systém borelovských množín v R*, označený ako $B_1 = L(\Psi)$.
Množiny $B \in B_1$ nazývame *borelovské množiny v R.*

Príklad 2.1. Borelovské množiny sú napríklad:
všetky jednoprvkové množiny $\{x\}, x \in R$,
všetky intervaly v R,
všetky spočetné podmnožiny R,
všetky otvorené, uzavreté množiny v R.

Definícia 2.9. *Rozdelenie pravdepodobností náhodnej veličiny* X je množinová funkcia $P_X(B) : B_1 \to R^1$ definovaná pre každé B $\in B_1$ vzťahom

$$P_X(B) = P(X \in B).$$

Definícia 2.10. Nech X je náhodná veličina definovaná na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{M}, P)$. Reálna funkcia F_X definovaná pre každé $x \in R^1$ predpisom

$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

sa nazýva *distribučná funkcia náhodnej veličiny X.*

Definícia 2.11. Predpokladajme, že existuje konečná alebo nekonečná prostá postupnosť reálnych čísel $\{x_n\}$ taká,že

$$\sum_n P(X = x_n) = 1.$$

Označme $p_n = P(X = x_n)$. Postupnosť $\{x_n\}$ hodnot, ktoré nadobúda náhodná veličina X a postupnosť $\{p_n\}$ pravdepodobností, s ktorými náhodná veličina svoje hodnoty nadobúda, určujú tzv. *diskrétne rozdelenia pravdepodobností náhodnej veličiny X*. *Náhodná veličina*, ktorá má diskrétne rozdelenie pravdepodobností, sa nazýva *diskrétna* resp. *diskrétneho typu.* Distribučná funkcia diskrétnej náhodnej veličiny je daná vzťahom

$$F_X(x) = \sum_{n: x_n \leq x} p_n, \forall x \in R^1.$$

Táto funkcia sa nazýva *diskrétna distribučná funkcia.*

Poznámka 2.1. Špeciálnym prípadom náhodnej veličiny diskrétneho typu je náhodná veličina, ktorá nadobúda len jednu hodnotu c s pravdepodobnosťou rovnou 1, tj.

$$P(X = c) = 1, P(X = x) = 0, \text{ pre každé } x \neq c.$$

Je to tzv. *degenerovaná náhodná veličina (konstanta).*

Definícia 2.12. Hovoríme, že náhodná veličina X má *spojité rozdelenie pravdepodobností (má rozdelenie spojitého typu, je spojitá),* ak existuje nezáporná, borelovsky merateľná funkcia $f_X(x) : R^1 \to R^1$ taká, že

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \forall x \in R^1.$$

Funkcia f_X sa nazýva *hustota* (rozdelenie pravdepodobností) náhodnej veličiny X.

Distribučná funkcia podáva o náhodnej veličine X úplnú informáciu. V rôznych prípadoch však túto informáciu vyjadríme pomocou niekoľkých čísiel, ktoré nazývame číselné charakteristiky náhodnej veličiny. Uvedieme dve základné - strednú hodnotu a rozptyl.

Definícia 2.13. 1. Nech X je diskrétna náhodná veličina s rozdelením $\{x_n\}, \{p_n\}$. Ak

$$\sum_n |x_n| p_n = \sum_n |x_n| P(X = x_n) < \infty,$$

nazývame súčet rady

$$\sum_n x_n p_n = \sum_n P(X = x_n)$$

stredná hodnota $E(X)$ náhodnej veličiny X. Pokiaľ nie je uvedená podmienka splnená, hovoríme, že náhodná veličina X nemá strednú hodnotu.

2. Nech $\varphi(x) : R^1 \to R^1$ je borelovská funkcia. Ak

$$\sum_n |\varphi(x_n)| p_n = \sum_n |\varphi(x_n)| P(X = x_n) < \infty,$$

nazývame súčet rady

$$\sum_n \varphi(x_n) p_n = \sum_n \varphi(x_n) P(X = x_n)$$

stredná hodnota $E(\varphi(X))$ náhodnej veličiny $\varphi(X)$. Pokiaľ nie je uvedená podmienka splnená, hovoríme, že $\varphi(X)$ nemá strednú hodnotu.

Pre spojitú náhodnú veličinu vychádzame z definície strednej hodnoty z rovnakých úvah, ale namiesto sčítania integrujeme.

Definícia 2.14. 1. Nech X je spojitá náhodná veličina s hustotou $f_X(x)$. Ak

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty,$$

nazývame integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

stredná hodnota E(X) náhodnej veličiny X. Pokiaľ nie je uvedená podmienka splnená, hovoríme, že náhodná veličina X nemá strednú hodnotu, jej stredná hodnota neexistuje.

2. Nech $\varphi(x) : R^1 \to R^1$ je borelovská funkcia. Ak

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| f_X(x) dx < \infty,$$

nazývame integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x) dx$$

stredná hodnota $E(\varphi(X))$ *náhodnej veličiny* $\varphi(X)$. Ak uvedená podmienka neplatí, hovoríme, že $\varphi(X)$ nemá strednú hodnotu.

Ak náhodná veličina X musí spĺňať určitú podmienku hovoríme, že X má *podmienenú strednú hodnotu*.

Definícia 2.15. Nech $A \subset R$ je borelovská množina.

1. Ak X je diskrétna náhodná veličina s rozdelením $\{x_n\}$ a $\{p_n\}$, potom *podmienenú strednú hodnotu náhodnej veličiny* X, za podmienky, že $X \in A$, definujeme

$$E[X|A] = \frac{\sum_{i:x_i \in A} p_i x_i}{\sum_{i:x_i \in A} p_i}.$$

2. Ak X je spojitá náhodná veličina s hustotou $f_X(x)$, potom *podmienenou strednou hodnotou náhodnej veličiny* X, za podmienky, že $X \in A$, rozumieme
$$E[X|A] = \frac{\int_A x \cdot f_x(x)dx}{\int_A f_x(x)dx}.$$

Definícia 2.16. *Rozptyl (variancia, disperzia) náhodnej veličiny* X je definovaný vzťahom
$$Var(X) = E(X - E(X))^2.$$
Druhá odmocnina z roztylu $\sqrt{Var(X)}$ sa nazýva *smerodajná (štandardná,stredná kvadratická) odchýlka náhodnej veličiny* X.

V praxi je často výsledkom náhodného pokusu usporiadaná n-tica reálnych čísel, napr. zisťovanie n údajov skúmaného ukazovateľa. Preto je nutné definovať *náhodný vektor.*

Definícia 2.17. Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{M}, P)$. Usporiadanú n-ticu $\mathbb{X} = (X_1, ..., X_n)$ náhodných veličin $X_1, ..., X_n$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ nazývame *(n-rozmerný) náhodný vektor.*

Špecifickým pojmom v teórii pravdepodobnosti je *nezávislosť náhodných veličin.*

Definícia 2.18. Nech $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_n\}$ je systém náhodných veličin. Hovoríme, že *náhodné veličiny* tohoto *systému sú nezávislé*, ak pre ľubovoľné reálne $x_1, ..., x_n$, sú nezávislé náhodné javy $(X_1 \leq x_1), ..., (X_n \leq x_n)$. To znamená, že pre každé $k \geq 2$ a každú k-ticu náhodných veličin $(X_{i_1}, ..., X_{i_k})$ vybranú zo systému $\mathcal{X}$ platí
$$F_{(X_{i_1},...,X_{i_n})}(x_1, ..., x_k) = \prod_{j=1}^{k} F_{X_{i_j}}(x_j), \text{ pre každú } (x_1, ..., x_k) \in R^k,$$
kde $F_{(X_{i_1},...,X_{i_n})}(x_1, ..., x_k)$ je distribučná funkcia náhodného vektoru $(X_{i_1}, ..., X_{i_n})$ a $F_{X_{i_j}}(x)$ je distribučná funkcia náhodnej veličiny $X_{i_j}, j = 1, ..., k$.

Dôležitými číselnými charakteristikami náhodnej veličiny sú *kvantily*. Používajú sa hlavne v matematickej štatistike.

Definícia 2.19. Nech $\alpha \in (0, 1)$. *α-kvantil náhodnej veličiny* X je také reálne číslo x_α, pre ktoré platí

$$P(X \leq x_\alpha) \geq \alpha \text{ a súčasne } P(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha.$$

Ak distribučná funkcia F_X náhodnej veličiny X je spojitá a rastúca všade tam, kde $0 < F_X(x) < 1$, je α-kvantil x_α jednoznačne určený vzťahom

$$F_X(x_\alpha) = \alpha.$$

V názornom príklade z oblasti poisťovníctva použijeme dve známe rozdelenia, poissonove rozdelenie pre diskrétne náhodné veličiny a beta rozdelenie pre spojité náhodné veličiny.

Poissonove rozdelenie pravdepodobností

Poissonove rozdelenie s parametrom λ má náhodná veličina X, ktorá nadobúda hodnoty $k = 0, 1, ...$ s pravdepodobnosťami

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

kde $\lambda > 0$. Označujeme $X \backsim Po(\lambda)$.

Príslušná distribučná funkcia má tvar

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x < 0, \\ \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$$

Stredná hodnota poissonovho rozdelenia má tvar $E(X) = \lambda$ a rozptyl má tvar $Var(X) = \lambda$.

Beta rozdelenie pravdepodobností

Beta rozdelenie s parametrami a, b má náhodná veličina X, ktorá má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x \notin (0,1), \\ \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & \text{pre } x \in (0,1). \end{cases}$$

kde $a > 0, b > 0$. Označujeme $X \backsim B(a,b)$.

Príslušná distribučná funkcia má tvar

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x \notin (0,1), \\ \frac{B_x(a,b)}{B(a,b)}, & \text{pre } x \in (0,1). \end{cases}$$

Stredná hodnota beta rozdelenia má tvar $E(X) = \frac{a}{a+b}$ a rozptyl má tvar $Var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

3 Riziko

Množinu všetkých možných budúcich situácií určitého procesu označíme Ω. Prvky tejto množiny, tj. jednotlivé situácie, ktoré môžu nastať, budeme označovať ω.

Finančný dôsledok realizovanej rizikovej činnosti pre nás závisí na tom, ktorá z možných situácií v budúcnosti nastane. Riziko možno vyjadriť ako náhodnú veličinu X. Náhodná veličina prevedie situácie na reálnu os a ukáže nám zisk alebo stratu. $X(\omega) > 0$ znamená, že ak nastane práve táto situácia, tak výsledkom realizácie varianty X bude zisk, a ak nastane situácia $X(\omega) < 0$, tak výslekom bude strata.

Označme množinu všetkých možných rizík, to znamená, množinu všetkých náhodných veličin definovaných na pravdepodobnostnom poli (Ω, M, P), písmenom G. Jednotlivé riziká, tj. jednotlivé náhodné veličiny z G, však potrebujeme rozlíšiť na tie, ktoré sme ochotní podstúpiť, a na tie, ktorým sa chceme vyhnúť.

3.1 Akceptačné množiny

Rizikové činnosti, ktoré sme ochotní podstúpiť, tvoria riziká prijateľné. Prvkami akceptačných množín sú práve tieto prijateľné riziká.

Definícia 3.1. Nech G je množina všetkých náhodných veličin definovaných na pravdpodobnostnom poli (Ω, M, P) . *Akceptačnou množinou* nazveme množinu $\mathcal{A} \subset G$ obsahujúcu všetky náhodné veličiny, ktoré predstavujú riziká, ktoré sme ochotní podstúpiť.

Môžeme si zaviesť množiny rizík L_+, L_-, L_{--}, o ktorých ihneď vieme, či sme ich ochotní podstúpiť alebo nie.

Do množiny L_+ patria náhodné veličiny dosahujúce iba nezáporné hodnoty, tj.

$$L_+ = \{X \in G \mid X(\omega) \geq 0 \text{ pre každé } \omega \in \Omega\}.$$

L_+ obsahuje prijateľné riziká. Čo znamená, že nastanú len situácie, ktoré nás neohrozia, čiže neprinesú stratu.

Poznámka 3.1. *Bezriziková operácia, ktorá prináša iba zisk a nemôže mať stratu je arbitráž. Arbitráže sú prvkami množiny L_+. V reálnom živote sa vyskytujú, ale sú krátkodobé. Najjednoduchšou arbitrážou je tzv. priestorová arbitráž, ktorá je založená na nákupe určitej meny na lacnejšom trhu a jej okamžitým predajom na drahšom trhu. Uvedieme si konkrétny príklad.*

Príklad 3.1. Prvá banka má kurz EUR/CZK nákup - predaj: $26,040 - 26,060$. Druhá banka má kurz EUR/CZK nákup - predaj: $26,065 - 26,085$. *Priestorová menová arbitráž* znamená, že u prvej banky nakúpime jeden milión eur za 26 060 000 Kč a hneď u druhej banky tento milión eur predáme za 26 065 000 Kč. Táto operácia nám prinesie bezrizikový zisk 5 000 Kč. Príležitosť arbitráže je obchodníkmi ihneď využitá, a tým aj následne odstránená. Vyplýva to zo skutočnosti, že rastúcim dopytom po mene na lacnejšom trhu sa jej cena zvýši a následným predajom na drahšom trhu rastie ponuka, a tým klesá cena meny. Kurzy sa približujú a možnosť arbitráže úplne vymizne. Veľký obnos peňazí neprinesie príliš veľký zisk, ale banka s nižším kurzom v danej chvíli, v tomto príklade tá druhá, je stratová, lebo nezistila aktuálnu situáciu na trhu (viz[6]).

Množina L_- obsahuje náhodné veličiny nadobúdajúce nekladné hodnoty, tj.

$$L_- = \{X \in G \mid X(\omega) \leq 0 \text{ pre každé } \omega \in \Omega\}.$$

L_- obsahuje riziká, ktoré nie sme ochotní podstúpiť, čiže sú neprijateľné, ale obsahuje tiež riziko, ktorého akýkoľvek možný výsledok nás neovplyvní, jeho prijateľnosť nemusíme riešiť.

Toto riziko označíme $\mathbf{0}$ a vyjadruje degenerovanú náhodnú veličinu, pre ktorú platí $\mathbf{0}(\omega) = 0$ pre každé $\omega \in \Omega$. $\mathbf{0}$ je akceptovateľná, lebo aj keď neprináša zisk, tak neprináša ani stratu, znamená to, že nás ničím neohrozuje. Je to jediné riziko s nulovou pravdepodobnosťou zisku, ktoré akceptujeme. Toto riziko patrí nielen do množiny L_-, ale patrí aj do množiny L_+, ktorá okrem neho obsahuje už len prvky prinášajúce zisk s nenulovou pravdepodobnosťou.

Do tretej množiny L_{--} patria náhodné veličiny dosahujúce len záporné hodnoty, tj.

$$L_{--} = \{X \in G \mid X(\omega) < 0 \text{ pre každé } \omega \in \Omega\}.$$

L_{--} obsahuje riziká, ktoré sú určite neakceptovateľné a chceme sa im vyhnúť. Je zrejmé, že $L_{--} \subset L_{-}$.

Rozhodujúca sa osoba má vlastný postoj k riziku. Riziko pre jedného prijateľné, môže byť pre druhého neprijateľné. Záleží na jeho sklonu k riziku a na jeho majetkovej situácií. Čo znamená, že množinu prijateľných rizik si každý volí sám. Jednotlivé akceptačné množiny rozumne uvažujúcich osôb by však mali mať určité podobné vlastnosti. V literatúre [1] sa predpokladá, že akceptačná množina spĺňa nasledujúce 4 axiómy. My sa im budeme teraz venovať podrobnejšie.

Axióma 1. Akceptačná množina $\mathcal{A}$ obsahuje L_{+}.

Axióma 2. Pre akceptačnú množinu $\mathcal{A}$ a L_{--} platí

$$\mathcal{A} \cap L_{--} = \emptyset. \tag{1}$$

Pre akceptačnú množinu uvažujeme axiómu 2., tj. splnenie vzťahu (1), čo znamená, že v $\mathcal{A}$ môžu byť i riziká, ktoré s nulovou pravdepodobnosťou nedosiahnu zisk, ale ktorých realizácia s nenulovou pravdepodobnosťou, ktorá nesmie byť rovná 1, môže byť strata. V praxi tak môžeme akceptovať i riziká, pri ktorých sa nestane nič alebo nastane strata, ktorej hodnota nás nejako neovplyvní alebo jej pravdepodobnosť je zanedbateľná.

Typickým príkladom v oblasti poisťovníctva je havarijné poistenie.

Príklad 3.2. Autu bez tohoto poistenia s určitou pravdepodobnosťou pri vzniku poistnej udalosti, tj. havárii, hrozí riziko škody. Uzatvorením havarijného poistenia na auto toto riziko prevedieme na nulové, lebo v prípade havárie škodu platí poisťovňa. Tento druh poistenia môže byť uzatvorený aj so spoluúčasťou. Spoluúčasť vyjadruje výšku sumy, ktorou sa poistený podieľa na poistnej udalosti. Tu nám už pri havárii určitá strata hrozí, ale pre nás je prijateľná.

Ak by sme chceli riziká, v ktorých nemôžeme dosiahnuť zisk a naviac nám hrozí určitá strata, brať ako neakceptovateľné, tak musíme uvažovať splnenie silnejšieho predpokladu uvedeného v nasledujúcej axióme.

Axióma 2'. Pre akceptačnú množinu $\mathcal{A}$ a L_- platí

$$\mathcal{A} \cap L_- = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Axióma 3. Akceptačná množina $\mathcal{A}$ je konvexná.

Vlastnosť konvexnosti sa v literatúre vyžaduje, ale môže byť v určitých prípadoch sporná, čo si ukážeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 3.3. Uvažujme tenisový zápas. Chceme si staviť na jedného z tenistov a vyhrať. Pre jednoduchosť majú tenisti vyrovnané šance zvíťaziť. S pravdepodobnosťou 0,5 vyhrá prvý a s tou istou pravdepodobnosťou 0,5 druhý. Remízu neuvažujeme. Kurz na víťazstvo každého z hráčov je $1,8$. V stávkovej kancelárii stavíme čiastku 1 000 Kč. Spolu s poplatkami, ktoré obyčajne predstavujú 10% stavenej čiastky, zaplatíme 1 100 Kč . Ak stavíme na prvého hráča a on zvíťazí, vyhráme 1 800 Kč, čo pre nás predstavuje čistý zisk 700 Kč. Ale ak náš hráč prehrá, prídeme o 1 100 Kč. Ak stavíme na druhého hráča, možné výsledky budú s tou istou pravdepodobnosťou rovnaké. Keďže sú tieto riziká pre nás prijateľné, patria do našej akceptačnej množiny. Na jedného hráča stávku podáme. Konvexnou kombináciou rozumieme stavenie si súčasne na obidvoch hráčov. Na prvého stavíme 550 Kč a na druhého rovnakú sumu 550 Kč. Nech zápas vyhral ktorýkoľvek z nich, výsledok našej stávky je daný následne: vyhrali sme 990 Kč, po odčítaní vkladu máme čistý zisk 440 Kč a súčasne sme z prehry druhého hráča prišli o náš vklad 550 Kč: $(990 - 550) - 550 = -110$. Výsledok je istá strata -110 Kč. Táto stávka je teda prvkom množiny L_{--}, čo je v rozpore s axiómou 2. Toto riziko je neprijateľné, na obidvoch hráčov zároveň stávku určite nepodáme. Akceptačná množina $\mathcal{A}$ v tomto prípade nie je konvexná.

Axióma 4. Akceptačná množina $\mathcal{A}$ je pozitívne homogénny kužeľ, čo znamená, že ak $X \in \mathcal{A}$, tak pre každé $c > 0$ je i prvok $c \cdot X$ z $\mathcal{A}$.

Táto vlastnosť by sa mohla zdať tiež sporná, ale ukážeme si, že nie je. Problém si vysvetlíme na príklade hry s dvomi tenistami z príkladu 3.3.

Príklad 3.4. Uvažujme stávku z príkladu 3.3., kde stavíme 1 000 Kč a výsledky môžu byť zisk 700 Kč alebo strata 1 100 Kč. Tým, že podstúpime takúto stávku, jej riziko sa stáva akceptovateľným. Ďalej preskúmame, čo sa stane, ak náhodnú veličinu V, ktorá predstavuje výsledok stávky, ktorý môže byť aj záporný, vynásobíme kladným číslom c. Zmení sa nám stavená čiastka a aj hodnoty výhry a prehry. Ak je $c < 1$, čiastky sa zmenšia, a ak je $c > 1$, čiastky sa zväčšia. Zvolíme $c = 1\ 000$. Hodnota možného čistého zisku bude 700 000 Kč, ale hodnota straty je 1 100 000 Kč. Možná strata je príliš vysoká, a mohla by nám prísť neakceptovateľná.

Dôležité je však uvedomiť si, že posúdenie, či je toto riziko pre nás akceptovateľné alebo nie, závisí na našej finančnej situácii. Majme voľný kapitál K v hodnote 100 000 Kč. Riziko stávky v skutočnosti posudzujeme podľa náhodnej veličiny K+V, čiže podľa nášho kapitálu spolu s výsledkom stávky. Prvá situácia s výhrou 700 Kč a stratou 1 100 Kč je akceptovateľné riziko. Druhá situácia s výhrou 700 000 Kč a stratou 1 100 000 Kč by nám po vynásobení K+V konštantou $c = 1\ 000$ prišla tiež ako akceptovateľné riziko, lebo by sa nám tisíckrát zvýšil i voľný kapitál. Riziká takejto stávky teda patria do akceptačnej množiny, a to znamená, že táto akceptačná množina je pozitívne homogénny kužeľ.

Poznámka 3.2. *Všetky množiny rizík, ktoré môžu byť pre niekoho akceptačnými, tj. spĺňajú axiómy 1., 2., 3., 4., budú tvoriť triedu akceptačných množín $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$. Ak naviac množiny rizík spĺňajú axiómy 1., 2'., 3., 4., budú tvoriť triedu akceptačných množín označenú $\mathcal{A}'_{\mathcal{G}}$. Je zrejmé, že $\mathcal{A}'_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$.*

3.2 Miery rizika

Ak sa chceme rozhodovať na základe rizika, musíme ho vedieť zmerať, to znamená, musí existovať miera, ktorá toto riziko kvalifikuje. V praxi nás zaujímajú iba miery rizika, ktoré určujú riziko číselne a primeraným spôsobom ho ohodnocujú.

Definícia 3.2. Nech $\mathbb{R}^*$ je rozšírená reálna os, tj. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, zobrazenie $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ nazveme *mierou rizika* .

Poznámka 3.3. *Miera rizika je definovaná ako ľubovoľné zobrazenie z množiny všetkých možných rizík G do množiny reálny čísiel. V literatúre [1] sa uvažuje toto zobrazenie do množiny $\mathbb{R}$. My budeme podľa literatúry [2] uvažovať $\mathbb{R}^*$, kde nevlastné hodnoty predstavujú špecifické prípady, o ktorých sa neskôr zmienime.*

Poznámka 3.4. *Priradenie jedného čísla cez mieru rizika môže znamenať určitú stratu informácií o tomto riziku. Avšak skutočné rozhodnutie, či riziko prijať alebo nie, má v podstate len dve možnosti, a to áno alebo nie. Toto rozhodnutie sa obyčajne realizuje na základe jednej číselnej charakteristiky.*

Pre každé riziko patriace do G reprezentované náhodnou veličinou X, $\rho(X)$ predstavuje ocenenie tohoto rizika, a tým tiež vyjadruje jeho rizikovosť. V už spomínaných literatúrach [1] a [2] sa ďalej miere rizika prisúdila nasledujúca interpretácia: keď je miera rizika ρ nekladná, tak je toto riziko akceptovateľné, a keď je ρ kladná, tak je riziko neakceptovateľné.

Táto interpretácia ukazuje, že vyššia hodnota miery rizika odpovedá vyššiemu riziku, a tiež naopak, čím nižšia hodnota miery rizika, tým nižšie riziko.

Pokiaľ sa budeme riadiť touto interpretáciu a poznáme akceptačnú množinu $\mathcal{A}$, tak môžeme mieru rizika definovať ako "vzdialenosť" rizika od prijateľnosti.

Definícia 3.3. Miera rizika priradená akceptačnej množine $\mathcal{A}$ je zobrazenie z množiny G do $\mathbb{R}^*$ označené $\rho_{\mathcal{A}}(X)$ také, že pre každé $X \in G$ platí

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = inf\{m \in \mathbb{R}^* \mid m + X \in \mathcal{A}\}. \tag{3}$$

Vysvetlíme si túto definíciu na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 3.5. Prvá činnosť, ktorej jediným možným výsledkom je strata -100 Kč, má riziko neprijateľné a jej miera rizika sa rovná 100. Keď túto hodnotu pripočítame k výsledku prvej činnosti, stáva sa jej riziko prijateľné. Z toho vyplýva, že činnosti s kladnými hodnotami mier rizík neakceptujeme. Hraničným bodom je 0, kde činnosť s touto mierou rizika rovnou 0 neprináša žiaden zisk a nehrozí z nej žiadna strata. Druhá činnosť má jediný možný výsledok zisk 100 Kč. Jej riziko je prijateľné, miera rizika je -100, a preto výsledok takejto činnosti môžeme o 100 Kč znížiť a stále pôjde o prijateľné riziko. Činnosti so zápornými hodnotami mier rizík sú určite prijateľné.

Príklad 3.6. Poisťovňa má určiť výšku vlastného kapitálu. Na základe uzavretých poistných zmlúv vyberá stanovené predpísané poistné. S určitou pravdepodobnosťou v budúcnosti vzniknú poistné udalosti a bude musieť vyplatiť poistné plnenia, ktorých veľkosť v tejto chvíli nepozná. Náhodnou veličinou X je pre nás súčet vlastného kapitálu a predpísaného poistného mínus poistné plnenia. Regulátor v oblasti poisťovníctva[1] určuje prijateľnú výšku kapitálu v poisťovni, ktorý zaručuje jej solventnosť. Akú veľkú časť kapitálu musíme dodať, aby X bola akceptovateľná, ukazuje miera rizika $\rho_{\mathcal{A}}(X)$. Ak je $\rho_{\mathcal{A}}(X) > 0$, čo predstavuje neprijateľnosť, m určuje infimum z čiastky, o ktorú musí byť navýšený vlastný kapitál poisťovne, aby sa X stala akceptovateľnou. Ak $\rho_{\mathcal{A}}(X) < 0$, tak m určuje supremum z čiastky, o ktorú keď znížime vlastný kapitál poisťovne, X bude ešte stále akceptovateľná. V kapitole 4.3 tejto práce bude riešený príklad, ktorý sa venuje tejto problematike.

Poznámka 3.5. *Nevlastné hodnoty $\mathbb{R}^*$ interpretujeme následovne: miera rizika rovná $+\infty$ predstavuje úplnú neprijateľnosť, lebo neexituje hodnota m, ktorú keď k nej pridáme, bude jej riziko prijateľné. Platí to aj opačne. Ak bude miera rizika rovná $-\infty$, čo predstavuje úplnú prijateľnosť, neexistuje hodnota m, ktorú keď od nej odpočítame, tak sa riziko stane neprijateľným.*

V praxi môžeme uvažovať nekonečne mnoho rizík, čo znamená, že určenie ak-

[1] Regulátorom oblasti poisťovníctva je v Českej republike Česká národná banka a na Slovensku Národná banka Slovenska.

ceptačnej množiny vymenovaním prvkov je v podstate nemožné. Opačný postup, kedy máme danú funkciu predstavujúcu našu mieru rizika a akceptačnú množinu tvoria také riziká, ktorých miera je nekladná, sa teda ukazuje ako lepší.

Definícia 3.4. Akceptačná množina spojená s mierou rizika ρ je množina

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in G \mid \rho(X) \leq 0\}. \tag{4}$$

3.3 Koherentné miery rizika

Aká miera rizika znamená správne rozhodnutie pre rozhodujúcu sa osobu? Odpovede sa z teoretického a praktického pohľadu rôznia. V praxi sú najviac používanými mierami volatilita a value at risk. Teória však varuje, že bežne používané miery môžu vytvárať ďalšie riziká. Tu vznikajú príčiny pre vyvinutie určitej teórie miery finančného rizika, ktorá vymedzuje pravidlá *ideálnej miery rizika* a posudzuje zaužívané varianty z vymedzeného kriteriálneho hľadiska.

Volatilita sa najčastejšie vyjadruje ako smerodajná odchýlka potenciálnych výnosov a strát. S rozvojom teórie portfólia v 50. – 70. rokoch 20. storočia sa začala jej kritika vhodnosti. V tomto období zo snahy zoradiť varianty rozhodovania v prostredí neistoty, vznikli prvé úvahy založené na kritériu stochastickej dominancie.

V polovici 90. rokov 20. storočia, v období veľkého záujmu o value at risk, začína úsilie zaviesť pojem miery rizika, definovať jej vhodné vlastnosti a zistiť známe miery rizika z hľadiska stanovených vlastností. Sú dva rozhodujúce pokusy o formulovanie *ideálnej miery rizika*. V roku 1997 skupina autorov Artzner, Delbaeu, Aber a Heath uviedli axiomatickú koncepciu ideálnej miery rizika určenú *koherentnosťou*, ktorej sa budeme ďalej venovať. Neskôr v roku 2006 na základe porovnávania niektorých mier rizika bola stanovená ako požiadavka ideálnej miery rizika jej *konzistentnosť* so stochastickou dominanciu (viz[5]). Konzistentnosťou sa zaoberať v tejto práci nebudeme, ale čitateľ sa o nej bližšie môže dozvedieť v článku [2].

V roku 1999 Artzner, Delbaeu, Aber a Heath predstavili koncepciu koherentných, čiže rozumných mier rizika. "Rozumnosťou" miery rizika myslia skutočnosť, že $\mathcal{A}_\rho$ patrí do $\mathcal{A}_\mathcal{G}$. Najprv si predstavíme jednostlivé vlastnosti, ktoré by taká rozumná miera rizika mala spĺňať. Pre jasnosť budeme nasledujúce axiómy označovať písmenami.

Axióma T. (Translačná invariantnosť) Pre každú náhodnú veličinu $X \in G$ a pre každé $a \in R$ platí

$$\rho(X + a) = \rho(X) - a. \tag{5}$$

Táto axióma znamená, že pripočítaním istej hodnoty k výsledku rizikovej činnosti, zmeníme mieru rizika práve o túto hodnotu.

Príklad 3.7. Translačná invariantnosť je ukázaná v príklade 3.6. a táto vlastnosť znamená, že navýšenie vlastného kapitálu, ktorý je súčasťou náhodnej veličiny X, o hodnotu a znamená rovnocenné zníženie požiadavku regulátora o túto hodnotu a. Napríklad, ak vlastný kapitál zvýšime o $a = 1\,000\,000$ Kč, tak požiadavka sa zníži o 1 000 000 Kč. A naopak, ak vlastný kapitál znížime o $a = 1\,000\,000$ Kč, požiadavkou bude jeho navýšenie o 1 000 000 Kč.

Axióma S. (Subaditivita) Pre všetky náhodné veličiny $X_1 \in G$ a $X_2 \in G$ platí

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2). \tag{6}$$

Vlastnosť subaditivity hovorí, že miera rizika celku je menšia alebo rovnako veľká ako súčet mier rizík jeho jednotlivých častí.

Príklad 3.8. Túto vlastnosť si vysvetlíme na činnosti upisovateľov (underwriterov). Vedúci poisťovne rozdelí kapitál niekoľkým upisovateľom, a tí za istých podmienok, ktoré na základe informácií o firmách oni sami určia, uzavrú poistné zmluvy s týmito firmami. Každý upisovateľ musí zmluvy upísať tak, aby prijaté riziko, ktoré tieto zmluvy obsahujú, bolo prijateľné vzhľadom k výške jeho kapitálu. Pokiaľ platí vlastnosť subaditivity, tak po upísaní celého zvereného kapitálu, má spojenie súborov zmluv od jednotlivých upisovateľov riziko prijateľné vzhľadom k celkovému kapitálu, ktorý mali upisovatelia rozdelený. Poisťovni tak stačí kontrolovať iba samostatných upisovateľov.

Príklad 3.9. Príkladom je tiež pravidlo diverzifikácie rizika portfólia, ktorý nájdeme v literatúre [2]. Znamená to, že riziko celého portfólia je menšie alebo rovnako veľké ako súčet jednotlivých rizík jeho čiastočných portfólií. Ak by táto vlastnosť neplatila, výhodnejšie by pre nás bolo portfólio rozdeliť na menšie časti. Podobný príklad je uvedený v literatúre [1], kde sa pojednáva o firme, pre ktorú v prípade, že neplatí subaditivita, je lepšie rozdeliť sa, lebo jej oddelene pracujúce časti by tak boli menej rizikové.

Axióma PH. (Pozitívna homogenita) Pre každú náhodnú veličinu $X \in G$ a pre každú $\lambda \geq 0$ platí

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X). \tag{7}$$

Vlastnosť pozitívnej homogenity znamená, že ak zmeníme proporcionálne objem finančných prostriedkov, ktoré máme v portfóliu, pri nezmenenej relatívnej štruktúre, rovnako úmerne sa zmení i rizikovosť portfólia (viz[2]).

Axióma M. (Monotónia) Pre všetky náhodné veličiny $X_1 \in G$ a $X_2 \in G$ také, že $P(X_1 \leq X_2) = 1$, platí

$$\rho(X_1) \leq \rho(X_2). \tag{8}$$

Vlastnosť monotónie vyjadruje, že ak v jednom nami zvolenom portfóliu sú za všetkých okolností straty vyššie a zisky nižšie ako v druhom portfóliu, tak i riziko prvého portfólia je väčšie ako riziko druhého portfólia (viz[2]).

Axióma R. (Relevancia) Pre každú náhodnú veličinu $X \in G$, kde $X \neq 0$ a $P(X \leq 0) = 1$, platí

$$\rho(X) > 0. \tag{9}$$

V nasledujúcich vetách si ukážeme, že vyššie uvedené vlastnosti korešpondujú s vlastnosťami uvažovanými pre "rozumnú" akceptačnú množinu.

Veta 3.1. Ak množina B spĺňa axiómy 1., 2., 3. a 4., tj. patrí do triedy akceptačných množín $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$, miera rizika ρ_B je koherentná. Navyše $\mathcal{A}_{\rho_B} = \bar{B}$, čo je uzáver množiny B.

Důkaz: Viz [1]. ■

Veta 3.2. Ak miera rizika ρ je koherentná, potom akceptačná množina $\mathcal{A}_\rho$ je uzavretá a patrí do $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$. Navyše $\rho = \rho_{\mathcal{A}_\rho}$.

Důkaz: Viz [1]. ■

Veta 3.3. Ak množina B spĺňa axiómy 1., 2'., 3. a 4., potom ρ_B je koherentná miera rizika spĺňujúca naviac axiómu R. Ak koherentná miera rizika ρ spĺňa axiómu R, potom akceptačná množina $\mathcal{A}_\rho$ patrí do $\mathcal{A}'_{\mathcal{G}}$.

Důkaz: Viz [1]. ■

Z vyššie uvedených viet plynie výber axióm, ktoré by už spomínaná koherentná miera rizika mala spĺňať.

Definícia 3.5. (Koherencia) Mieru rizika splňujúcu 4 axiómy: translačnú invariantnosť, subaditivitu, pozitívnu homogenitu a monotóniu, nazveme *koherentnou mierou rizika.*

Relevancia nemusí byť ako koherentná vlastnosť, ak by sme uvažovali silnejšiu axiómu 2'., ktorá bola vysvetlená v príklade 3.2. o havarijnom poistení.

4 Value-at-Risk a Podmienená Value-at-Risk

V tejto kapitole si predstavíme jedny z najpoužívanejších mier rizík, Value-at-Risk a podmienenú Value-at-Risk, a budeme sa zaoberať ich koherentnosťou. Túto problematiku si ukážeme na názornom príklade.

4.1 Value-at-Risk

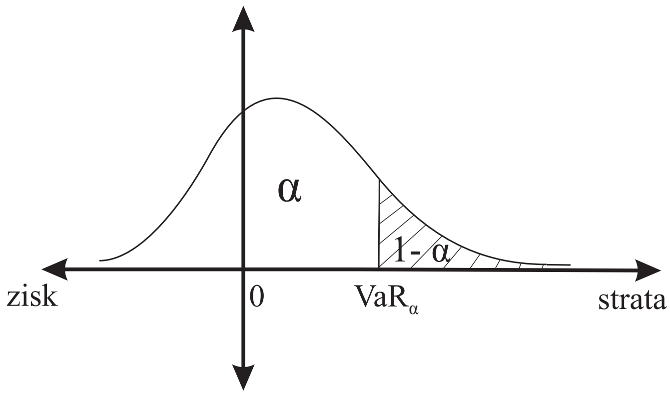
Value-at-Risk (VaR) je významnou mierou rizika, ktorá je v súčasnosti často využívaná obchodníkmi s derivátmi, finančnými investormi, ale aj nefinančnými podnikmi. Koncom 80. rokov bola prvýkrát použitá americkými finančnými inštitúciami na meranie rizika ich portfólií. Jej základom je stanovenie hodnoty kritéria, ktorá bude prekročená alebo nedosiahnutá za určitý časový interval s vopred určenou pravdepodobnosťou.

Poznámka 4.1. *V ďalšom texte budeme uvažovať opačnú interpretáciu náhodnej veličiny ako doposiaľ a to, že pri realizácii náhodnej veličiny X jej kladné hodnoty budú predstavovať stratu a záporné hodnoty zisk.*

Definícia 4.1. (Value-at-Risk) Nech $\alpha = (0, 1)$. VaR_α náhodnej veličiny X definujeme

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = inf\{x \mid P(X \leq x) > \alpha\}.$$

Value-at-Risk (VaR_α) je definovaná ako jednostranný α-kvantil spoľahlivosti možných strát hodnoty portfólia počas určitej doby držania. To znamená, že ak máme 95 %-ný VaR portfólia rovný 100 000 Kč, tak s 95 %-nou pravdepodobnosťou hodnota straty nepresiahne 100 000 Kč v určitej danej dobe.



Obr.1: Funkcia hustoty zisk/strata 1

Miera rizika VaR_α spĺňa translačnú invariantnsť, monotóniu a pozitívnu homogenitu, avšak z článku [1] zistíme, že miera rizika VaR_α niekedy nespĺňa vlastnosť subaditivity, a to znamená, že nie je koherentnou mierou rizika. Naviac VaR_α nie je konvexná, čo môže byť v niektorých prípadoch väčším problémom. A z toho vyplýva otázka jej dôveryhodnosti.

V nasledujúcom príklade si ukážeme nesplnenie subaditivity mierou rizika VaR_α.

Príklad 4.1. Požičiame určitú čiastku peňazí dlžníkovi. Nech náhodná veličina X označuje veľkosť našej straty. X nadobúda s pravdepodobnosťou 0,99 hodnotu 0, to znamená, že nám dlžník čiastku vráti, a s pravdepodobnosťou 0,01 hodnotu danej čiastky v prípade, že dlžník túto čiastku nevráti. Mieru rizika VaR_α máme definovanú na hladine $\alpha = 0,95$. Pravdepodobnosť, že požičanú čiastku dlžník vráti je vyššia ako hladina $\alpha = 0,95$, čiže miera rizika bude

$$\mathrm{VaR}_{0,95}(X) = 0.$$

Danú čiastku požičiame viacerým dlžníkom. Jednotlivých dlžníkov, ktorým tú danú čiastku požičiame, označíme ako náhodné veličiny $X_1, X_2, ..., X_n$. Budeme predpokladať nezávislosť týchto náhodných veličin, čo znamená, že jeden splatí čiastku nezávisle na tom, či splatí druhý. Pre každého samostatného i-tého dlžníka platí $\mathrm{VaR}_{0,95}(X_i) = 0$. Súčet všetkých takýchto mier rizík jednotlivých dlžníkov teda je

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{VaR}_{0,95}(X_i) = 0.$$

Ďalej postupne vypočítame pravdepodobnosti hodnôt $\mathrm{VaR}_{0,95}$ pre 2 dlžníkov, 3 dlžníkov, až n dlžníkov, ktorým požičiame danú čiastku peňazí. Budeme počítať dovtedy, kým pravdepodobnosť vrátania všetkých peňazí bude menšia ako 0,95. Táto pravdepodobnosť určí počet dlžníkov n, pre ktorý $\mathrm{VaR}_{0,95}$ je už nenulová.

$$\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{2} X_i = 0) = 0,980, \mathrm{P}(\sum_{i=1}^{3} X_i = 0) = 0,970,$$

$$\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{4} X_i = 0) = 0,961, \mathrm{P}(\sum_{i=1}^{5} X_i = 0) = 0,951,$$

$$\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{6} X_i = 0) = 0,942.$$

S narastajúcim počtom dlžníkov pravdepodobnosť vrátenia všetkých peňazí klesá. Pokiaľ je pravdepodobnosť $\mathrm{VaR}_{0,95}$ väčšia ako 0,95, tak je $\mathrm{VaR}_{0,95}$=0. Keď však klesne pod hodnotu 0,95, tak miera rizika $\mathrm{VaR}_{0,95}$ bude nenulová. Šesť dlžníkov je minimálny počet, pre ktorý je pravdepodobnosť vrátenia všetkých peňazí už menšia ako hodnota 0,95. V tomto prípade vlastnosť subaditivity nie je splnená, čo znamená, že hodnota miery rizika súčtu je väčšia ako súčet samostaných hodnôt mier rizík. Pre každé $n' \geq 6$ platí

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(\sum_{i=1}^{n'} X_i) > \sum_{i=1}^{n'} \mathrm{VaR}(X_i).$$

Poznámka 4.2. *Miera rizika VaR_{α} sa ukazuje ako nekoherentná, a aj napriek tomu je často používaným ukazovateľom v oblasti rozhodovania a analýzy rizika.*

Ďalej si predstavíme metódy, ktorými túto mieru rizika určíme. Tradičnými spôsobmi výpočtu VaR_{α} sú:

1. historická simulácia,
2. variančno-kovariančná metóda (nazývaná tiež analytická metóda),
3. Monte Carlo simulácia.

Hlavným rozdielom medzi jednotlivými metódami je problém odhadu rozdelenia zmien hodnoty portfólia.

O historickej simulácii a variančno-kovariančnej metóde sa čitateľ bližšie dočíta v literatúre [4]. Teoreticky najlepšou metódou je simulácia Monte Carlo, ktorú si ďalej bližšie predstavíme.

Pri simulácii Monte Carlo zvolíme ľubovoľné rozdelenie, o ktorom si myslíme, že bude vhodné na popísanie budúcich zmien rizikových faktorov. Výber vhodného rozdelenia a jeho parametrov je časť, ktorou sa simulácia Monte Carlo odlišuje od predchádzajúcich dvoch metód. Keď vyberieme vstupné rozdelenia, využitím pseudo-náhodných čísel vygenerujeme tisíce predpokladaných zmien trhových faktorov. Následne ich použijeme na zostrojenie tisícok očakávaných ziskov a strát daného portfólia. VaR_α určíme ako opačnú hodnotu empirického $(1-\alpha)$-percentilu, to znamená, že α % našich hodnôt je z našeho pohľadu horších.

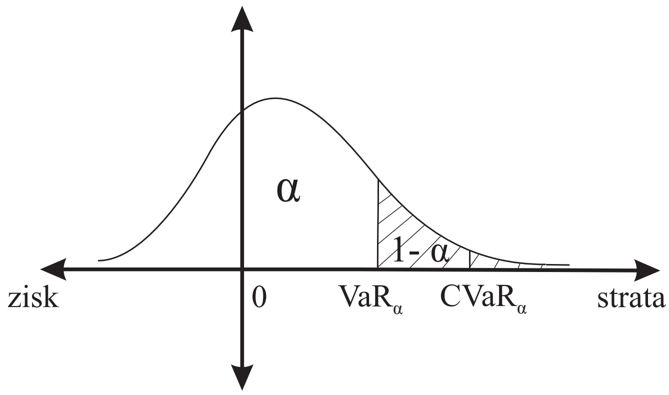
Problémom simulácie Monte Carlo môže byť jej časová náročnosť a hlavne táto metóda vyžaduje veľa skúseností a profesionality od jej autorov (viz[4]).

4.2 Podmienená Value-at-Risk

Lepšiou mierou rizika sa ukazuje podmienená Value-at-Risk (Conditional Value-at-Risk, CVaR), pretože na rozdiel od VaR, CVaR je koherentnou mierou rizika, lebo spĺňa všetky štyri axiómy: translačnú invariantnosť, monotóniu, pozitívnu homogenitu a aj subaditivitu (viz[1]). Miera rizika CVaR je definovaná ako podmienená stredná hodnota jednostranného intervalu $[\mathrm{VaR}_\alpha, +\infty)$, v ktorom sa realizuje strata.

Definícia 4.2. (Podmienená Value-at-Risk) Nech $\alpha = (0, 1)$. Miera rizika CVaR_α je definovaná

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = E[X \mid X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)].$$



Obr.2: Funkcia hustoty zisk/strata 2

Poznámka 4.3. *CVaR$_\alpha$ je podmienená stredná hodnota strát väčších ako VaR$_\alpha$ a platí Var$_\alpha(X) \leq$CVaR$_\alpha(X)$.*

V ďalšom príklade si ukážeme splnenie subaditivity mierou rizika CVaR$_\alpha$.

Príklad 4.2. Budeme vychádzať z predchadzajúceho príkladu 4.1. Požičiame dlžníkovi konkrétnu čiastku peňazí v hodnote 100 Kč. Predpokladáme náhodnú veličinu X, ktorá predstavuje veľkosť našej straty. Náhodná veličina X nadobudne hodnotu 100 s pravdepodobnosťou 0,99, kedy nám dlžník vráti celú požičanú čiastku peňazí a hodnotu 0 s pravdepodobnosťou 0,01, kedy nám túto čiastku nevráti. CVaR$_\alpha$ definujeme na hladine spolahlivosti $\alpha = 0,95$. Pre jedného dlžníka bude miera rizika

$$\mathrm{CVaR}_{0,95}(X) = \frac{1}{1-0,95} \cdot (0,99-0,95) \cdot 0 + \frac{1}{1-0,95} \cdot (1-0,99) \cdot 100 = 20.$$

Požičiame čiastku 100 Kč šiestim dlžníkom. Jednotlivých dlžníkov označíme ako náhodné veličiny $X_1, X_2, ..., X_6$ a tiež predpokladáme ich nezávislosť. Ako sme už vypočítali, pre jedného dlžníka je CVaR$_{0,95} = 20$, a preto súčet takýchto mier rizík šiestich jednotlivých dlžníkov je

$$\sum_{i=1}^{6} \mathrm{CVaR}_\alpha(X_i) = 6 \cdot 20 = 120.$$

Ďalej zistíme mieru rizika pre všetkých šiestich dlžníkov spolu. Budeme počítať mieru rizika CVaR$_{0,95} \sum_{i=1}^{6}(X_i)$. Uvažujeme všetky možnosti, ktoré môžu nastať, čo znamená, že nám túto čiastku peňazí vrátia všetci dlžníci, nevráti jeden dlžník, nevrátia dvaja dlžníci, až nám ju nevrátia všetci šiesti dlžníci.

$$\mathrm{CVaR}_{0,95}\sum_{i=1}^{6}(X_i) = \frac{0,99^6 \cdot 0,01^0 \cdot 0}{1-0,95} + \frac{0,99^5 \cdot 0,01^1 \cdot \binom{6}{1}}{1-0,95} +$$

$$+\frac{0,99^4 \cdot 0,01^2 \cdot \binom{6}{2}}{1-0,95} + \frac{0,99^3 \cdot 0,01^3 \cdot \binom{6}{3}}{1-0,95} + \frac{0,99^2 \cdot 0,01^4 \cdot \binom{6}{4}}{1-0,95} +$$

$$+\frac{0,99^1 \cdot 0,01^5 \cdot \binom{6}{5}}{1-0,95} + \frac{0,99^0 \cdot 0,01^6 \cdot \binom{6}{6}}{1-0,95} = 120$$

Z toho vyplýva

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\sum_{i=1}^{6} X_i) = \sum_{i=1}^{6} \mathrm{CVaR}_\alpha(X_i).$$

V tomto prípade $\mathrm{CVaR}_{0,95}$ vlastnosť subaditivity spĺňa.

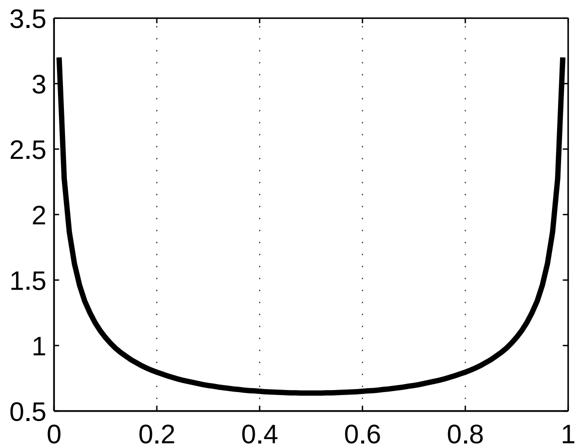
4.3 Využitie VaR a CVaR v oblasti poisťovníctva

Ukážeme si praktické využitie VaR_α a CVaR_α v príklade z oblasti neživotného poistenia, špeciálne poistenia objektu proti požiaru.

Poisťovňa sa rozhodla poveriť troch underwriterov zjednaním zmlúv s podnikmi v oblasti neživotného poistenia, a to konkrétne uzatvorenie poistenia proti požiaru budov, ktoré podniky vlastnia. Na túto činnosť má poisťovňa k dispozícii vlastný kapitál VK v hodnote 70 000 000 Kč. Tento kapitál rozdelí jednotlivým underwriterom, ktorých označíme U_1, U_2 a U_3. Všetkých underwriterov spolu budeme značiť U. Pridelený kapitál jednotlivým underwriterov označíme VK_i, $i = 1, 2, 3$. Platí $\mathrm{VK}_1 + \mathrm{VK}_2 + \mathrm{VK}_3 = \mathrm{VK}$.

Každý z underwriterov upíše určitý počet zmlúv, označme ich n_1, n_2 a n_3. Prvý underwriter uzavrel 15 poistných zmlúv, druhý uzavrel 20 poistných zmlúv a tretí underwriter uzavrel rovnako ako prvý 15 poistných zmlúv. Poistné zmluvy sa uzatvárajú na období 1 roku a hodnoty ich poistných čiastok sú uvedené v miliónoch Kč. Poistnú sadzbu β, ktorá je uvedená v promile, si každý underwriter stanoví pre jednotlivé poistné zmluvy sám. V našom príklade sme zvolili poistnú sadzbu $\beta = 0,008$, ktorá je rovnaká pre všetky zmluvy každého z underwriterov. Poistné sa tak vypočíta ako poistná sadzba z poistnej čiastky a pre jednotlivých underwriterov ho označíme ako poistné$_i$. Poistnú čiastku z j-tej zmluvy od i-tého underwritera za 1 rok označíme PČ^i_j, $j = 1, 2, ..., n_i$.

Pre jednoduchosť budeme uvažovať, že všetky zmluvy majú rovnaké parametre a líšia sa len v poistných čiastkach. Počet poistných plnení z jednej zmluvy za 1 rok je vyjadrený náhodnou veličinou N^i_j s poissonovým rozdelením s parametrom $\lambda = 0,001$, čiže $N^i_j \backsim \text{Po}(0,001)$. Výška škody poistnej udalosti $\check{\text{S}}^i_{\{j,k\}}$, $k = 1, 2, ..., N^i_j$, nech má beta rozdelenie s parametrami $a = 0,5$, $b = 0,5$, čiže $\check{\text{S}}^i_{\{j,k\}} \backsim \text{B}(0{,}5,\ 0{,}5)$. Jej hodnota je vyjadrená ako percento z poistnej čiastky.



Obr.3: Beta rozdelenie so škodovými extrémami pre $a = 0,5$, $b = 0,5$

Poistné plnenie z j-tej zmluvy u i-tého underwritera za 1 rok označíme X^i_j a vypočítame ho ako

$$X^i_j = \text{PČ}^i_j \cdot \sum_{k=1}^{N^i_j} \check{\text{S}}^i_{\{j,k\}}.$$

Poistné plnenie pre každého z underwriterov PP_i je

$$\mathrm{PP}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_j^i,$$

teda súčet plnení z jednotlivých zmlúv. Celkové poistné plnenie PP vypočítame ako súčet týchto poistných plnení od jednotlivých underwriterov

$$\mathrm{PP} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{PP}_i.$$

Kalkulované náklady na správnu réžiu, tj. na činnosť poisťovne, budú predstavovať 25% z vybraného poistného. Podľa Solvency II[2] je miera rizika VaR_α definovaná na hladine spoľahlivosti $\alpha = 0,995$. VaR_α budeme porovnávať s CVaR_α, ktorú určíme tiež na hladine spoľahlivosti $\alpha = 0,995$. $\mathrm{CVaR}_{0,995}$ vypočítame ako aritmetický priemer z hodnôt vyšších ako $\mathrm{VaR}_{0,995}$.

Náhodná veličina V_i, kde $i = 1, 2, 3$, vyjadruje postačiteľnosť vlastného kapitálu i-tého undrewritera, z ktorej budeme počítať miery rizika. Táto náhodná veličina je určená ako

$$V_i = \mathrm{PP}_i - \text{poistné}_i \cdot (1 - 0,25) - \mathrm{VK}_i.$$

Zaujíma nás tiež náhodná veličina V, ktorá vyjadruje postačiteľnosť vlastného kapitálu poisťovne a rovnako tiež vypočítame miery rizika, ktorými zistíme rizikovosť všetkých súborov zmlúv spolu. Náhodnú veličinu V vypočítame ako

$$V = V_1 + V_2 + V_3.$$

Našou úlohou je vypočítať $\mathrm{VaR}_{0,995}(\mathrm{V}_i)$ a $\mathrm{CVaR}_{0,995}(\mathrm{V}_i)$ pre súbory uzavretých poistných zmlúv od jednotlivých underwriterov a $\mathrm{VaR}_{0,995}(\mathrm{V})$ a $\mathrm{CVaR}_{0,995}(\mathrm{V})$ pre tieto súbory underwriterov spolu. Dosiahnuté výsledky budeme potom porovnať a analyzovať.

---

[2]Solvency II je projekt, ktorého cieľom je poskytnúť väčšiu ochranu poisteným a podporu stability trhu vďaka vyššej kvalite hodnotenia rizík a efektívnemu umiestneniu kapitálu. Solvency II sa bude zavádzať na poistný sektor v celej Európskej únii a umožní tak vytvorenie jednotného trhu poistných služieb[7].

Pri riešení príkladu sme použili počítačové programy MS Excel a MATLAB. V prílohe na CD-ROM je uvedený m-file súbor použitý k riešeniu príkladu. Na výpočet sú použité simulácie Monte Carlo.

Začneme navolením poistných čiastok. Zjednané poistné čiastky na poistných zmluvách od jednotlivých underwriterov sú uvedené v tabuľke 1. Po načítaní týchto poistných čiastok do priloženého súboru, program prevedie 10 000 simulácií poistných plnení, z ktorých následne vypočíta VaR a CVaR pre jednotlivých underwriterov i pre všetky uzavreté poistné zmluvy dohromady.

Tabuľka 1: Poistné čiastky z uzavretých poistných zmlúv

PČ v miliónoch Kč			
	U_1	U_2	U_3
1.	10	10	10
2.	15	15	15
3.	34	34	34
4.	13	13	13
5.	17	21	21
6.	15	20	20
7.	8	31	31
8.	24	9	9
9.	37	11	11
10.	13	17	102
11.	13	15	99
12.	67	8	15
13.	130	37	8
14.	102	13	310
15.	500	13	250
16.		9	
17.		450	
18.		130	
19.		300	
20.		99	

Z vyššie uvedeného výpočtu sme zistili hodnoty $\mathrm{VaR}_{0,995}(V_i)$ a $\mathrm{CVaR}_{0,995}(V_i)$, čo sú miery rizika samostatných súborov uzavretých zmlúv od jednotlivých underwriterov, a tiež hodnoty $\mathrm{VaR}_{0,995}(V)$ a $\mathrm{CVaR}_{0,995}(V)$, čiže miery rizika všetkých súborov uzavretých zmlúv. Tieto hodnoty sú uvedené v tabuľke 2.

Tabuľka 2: Hodnoty mier rizík VaR a CVaR

	$\mathrm{VaR}_{0,995}$	$\mathrm{CVaR}_{0,995}$
U_1	-10 804 564,76	74 906 508,33
U_2	-19 796 117,99	91 904 263,01
U_3	-9 053 731,32	63 202 340,31
U	4 675 967,13	151 894 840,11

Z dosiahnutých výsledkov pri zvolených hodnotách parametrov vidíme, že miery rizika samostatných súborov od jednotlivých underwriterov U_1, U_2 a U_3, merané pomocou ukazateľa VaR, sú záporné. Znamená to, že jednotlivé súbory zmlúv by boli prijateľné a samostatne by underwriteri požiadavku postačiteľnosi vlastného kapitálu splnili. Avšak dôležité je všimnúť si celkovú $\mathrm{VaR}_{0,995}(V)$ zo súborov zjednaných zmlúv spolu. Jej hodnota je kladná, čiže súbor všetkých zmlúv od každého z underwriterov by požiadavku postačiteľnosti vlastného kapitálu nesplnil. Z toho plynie, že pri hodnote $\mathrm{VaR}_{0,995}(V)$ =4 675 967,13, by poiťovňa nesplnila podmienky vykázania solventnosti v rámci Solvency II. Všimnime si tiež, že súčet mier rizík jednotlivých súborov je menší ako miera rizika súčtu týchto súborov, čo ukazuje nesplnenie vlastnosti koheretných mier rizika - subaditivity. Zistili sme, že miera rizika VaR môže v určitých špeciálnych prípadoch spôsobovať problémy.

Ďalej sme vypočítali hodnoty miery rizika $\mathrm{CVaR}_{0,995}$. Celková miera rizika $\mathrm{CVaR}_{0,995}(V)$ je kladná. Ale rozdiel od predchádzajúcej miery rizika $\mathrm{VaR}_{0,995}$ vidíme na vypočítaných mierach rizika $\mathrm{CVaR}_{0,995}(V_i)$ jednotlivých underwriterov U_1, U_2 a U_3, ktoré sú už kladné. V prípade, že by požiadavku postačiteľnosti vlastného kapitálu určovala miera rizika CVaR, underwriteri, či už samostatne alebo spolu, by ju nesplnili. Môžeme si všimnúť, že CVaR je subaditivní. Z jej dosiahnutých hodnôt ale vidíme, že ako požiadavka postačiteľnosti vlastného kapitálu je príliš vysoká a jej splnenie by bolo pre poisťovňu veľmi náročné.

Pri hodnotách, ktoré sme sami zvolili, vidíme rozdielnosť skúmaných mier rizík VaR a CVaR. Zistili sme, že Value-at-Risk môže byť v určitých špecifických situáciach nespoľahlivá a ukázali sme náročnosť podmienenej Value-at-Risk. Napriek tomu sú však obe tieto miery rizík často využívané v rôznych oblastiach rozhodovania.

5 Záver

V bakalárskej práci sme sa venovali prijateľnosti rizík, koherentným mieram rizika a ukázali sme si využitie vybraných mier rizika Value-at-Risk a Podmienenej Value-at-Risk.

Cieľom práce bolo zistiť a skúmať základné vlastnosti skupiny prijateľných rizík, čiže akceptačných množín, predstaviť koherentné miery rizika a v názornom príklade ukázať využitie a porovnanie mier rizika Value-at-Risk a Podmienenej Value-at-Risk.

Z výsledkov názorného príkladu neživotného poistenia, poistenia objektu proti požiaru, sme zistili, že Value-at-Risk a Podmienená Value-at-Risk sa môžu líšiť. Výsledky sú však ovplyvnené voľbou parametrov, sadzieb, uzavretých poistných čiastok a samozrejme náhodou. Nikdy nebudeme poznať všetky situácie, ktoré v budúcnosti nastanú. Avšak môžeme ich odhadnúť a určitými mierami s vysokou pravdepodobnosťou ohodnotiť a následne sa na základe dosiahnutých výsledkov čo najrozumnejšie rozhodnúť.

Existuje veľa mier rizík a určite by bolo zaujímavé venovať sa tejto problematike ďalej. Anglický článok *Coherent measures of risk*, z ktorého sme pri písaní práce vychádzali je náročný, ale veľmi zaujímavý.

Téma mojej bakalárskej práce sa mi páči a pri písaní práce som lepšie pochopila vlastnosti akceptačných množín a koherentných mier rizika, naučila som sa pracovať s mierami rizika Value-at-Risk a Podmienenou Value-at-Risk a zoznámila som sa s matematickým software MATLAB.

Literatura

[1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D., *Coherent measures of risk,* Mathematical Finance 9 (3), 203-228(1999).

[2] Boďa M., *Stručné poznámky k finančnej riskmetrike,* In: Forum Statisticum Slovacum 3 (2), 8-13 (2007).

[3] Kunderová, P., *Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky,* Skriptum PřF, Olomouc, 2004.

[4] Rimarčík M., *Využitie metód Value-at-Risk na meranie kurzového rizika,* dizertačná práca, Ekonomická univerzita v Bratislave, Košice, 2004.

[5] Schmid, F., Trede, M., *Finanzmarkt-statistik,* Berlin Helidelberg, Springer 2006.

[6] Menové arbitráže na devizových trhoch [online], dostupné z:

http://www.finance.sk/investovanie/informacie/forex/arbitraze,

[citované 18.2.2011].

[7] Solventnosť II [online], dostupné z:

http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom/dohlad-nad-poistovnictvom/solventnost-ii, [citované 10.4.2011].