VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA A MATEMATICKÉ KYVADLO

FUNCTIONAL ANALYSIS AND THE MATHEMATICAL PENDULUM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Daniel Čaputa

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.

SUPERVISOR

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Daniel Čaputa**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Funkcionální analýza a matematické kyvadlo

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diferenciální rovnice související s modelováním pohybu kyvadla jsou pro svou důležitost stále předmětem zájmu matematiků. Jedním z významných aspektů studia je otázka existence periodických řešení (nelineárních) modelů s pravou stranou. Právě na tento aspekt se bude práce soustředit, a to zejména s využitím (a porozuměním) nástrojů, které poskytuje funkcionální analýza.

Cíle bakalářské práce:

Odvození rovnice matematického kyvadla a velmi stručný popis historie problematiky.
Přehled vybraných výsledků z funkcionální analýzy potřebných pro zkoumání modelu.
Důkazy existenčních výsledků pomocí vhodných vět o pevném bodu a interpretace těchto výsledků.

Seznam doporučené literatury:

BROWN, R. F. A Topological Introduction to Nonlinear Analysis, 3rd ed., Birkhauser, 2014.

GRIFFEL, D. H. Applied Functional Analysis, Dover, 2002.

MAWHIN, J. Seventy-five years of global analysis around the forced pendulum equation, Proceedings of Equadiff 9, Brno, 1998, pp. 115-145.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá existenciou periodických riešení nelineárneho modelu matematického kyvadla so spojitou, nepárnou a periodickou pravou stranou. V práci je odvodená diferenciálna rovnica výchylky kyvadla a príslušný okrajový problém je prevedený na integrálnu rovnicu. Túto rovnicu zaradíme do širšej množiny integrálnych rovníc (Hammersteinových). Na tieto rovnice sú aplikované vety o pevnom bode, ktorých dôsledkom je existencia, resp. jednoznačnosť riešenia. Tieto výsledky sú aplikované na model matematického kyvadla a je hlbšie diskutovaná podmienka pre jednoznačnosť riešenia.

Abstract

This thesis is focused on existence of periodic solutions of nonlinear model of mathematical pendulum with continuous, odd and periodic forcing term. In thesis, the differential equation of motion of pendulum is derived and the associated boundary value problem is rewritten as the integral equation. This equation is considered in a wider set of integral equations (Hammerstein equations). Fixed point theorems are applied on these equations what results in existence and uniqueness of solution. These results are applied on model of mathematical pendulum and the condition for uniqueness of solution is deeper discussed.

Kľúčové slová

matematické kyvadlo, Banachova veta o pevnom bode, Schauderova veta o pevnom bode, Hammersteinova integrálna rovnica

Keywords

mathematical pendulum, Banach fixed point theorem, Schauder fixed point theorem, Hammerstein integral equation

ČAPUTA, Daniel. Funkcionální analýza a matematické kyvadlo [online]. Brno, 2019 [cit. 2019-05-22]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116097. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Pavel Řehák.

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Funkcionální analýza a matematické kyvadlo* vypracoval samostatne pod vedením doc. Mgr. Pavla Řeháka, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Daniel Čaputa

Na tomto mieste by som rád sa poďakoval vedúcemu mojej práce, doc. Mgr. Pavlovi Řehákovi, Ph.D., za odborné vedenie, prístup, pripomienky a čas, ktorý mi pri tvorbe práce venoval.

Daniel Čaputa

OBSAH

ÚVOD

Diferenciálnymi rovnicami týkajúcimi sa modelovaním pohybu matematického kyvadla sa zaoberali mnohí matematici. Spomenúť môžeme napríklad Hamela, ktorý skúmal otázku existencie periodického riešenia modelu s pravou stranou. Práve tento model budeme aj my s pomocou vybraných výsledkov, ktoré nám funkcionálna analýza poskytuje, pre nepárnu, periodickú pravú stranu rozoberať.

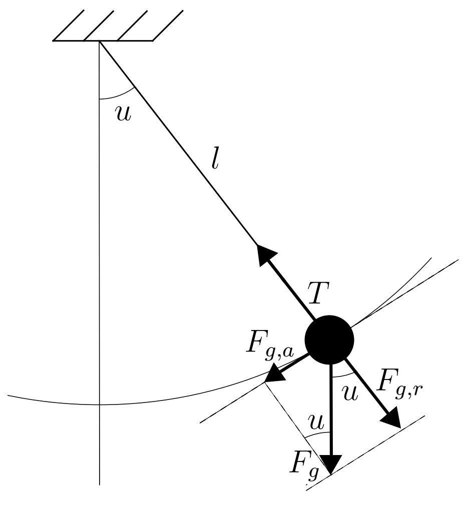
Otázka existencie a jednoznačnosti nepárnych, periodických riešení je riešená v niektorých učebniciach, napríklad v [2], avšak bez detailnejšieho spracovania. V tejto práci chceme doplniť chýbajúce časti a poskytnúť alternatívne možnosti pri dokazovaní. Ďalej chceme hlbšie diskutovať podmienky zaručujúce jednoznačnosť riešenia.

V kapitole 1 odvodíme pohybovú rovnicu matematického kyvadla, priblížime vybrané úseky z histórie problematiky a popíšeme možnú linearizáciu rovnice a problémy, ktoré prináša. Kapitola 2 obsahuje vybrané výsledky z funkcionálnej analýzy, ktoré budeme potrebovať pri analýze našeho problému. Dve najdôležitejšie tvrdenia sú Schauderova, resp. Banachova veta o pevnom bode. V kapitole 3 najprv priblížime náš problém – dokázať existenciu (a prípadne jednoznačnosť) nepárneho, periodického riešenia diferenciálnej rovnice matematického kyvadla. Vďaka charakteru úlohy vieme previesť nelineárnu diferenciálnu rovnicu na okrajový problém, ktorý prepíšeme na ekvivalentnú integrálnu rovnicu, ktorú zaradíme do širšej množiny integrálnych rovníc (Hammersteinových). Na tieto rovnice budeme aplikovať vety o pevnom bode. Na záver tejto kapitoly načrtneme možné zovšeobecnenia tohto problému, resp. ďalšie smery, ktorými sa dá uberať.

KAPITOLA 1

MATEMATICKÉ KYVADLO

Matematické kyvadlo je jedným z najjednoduchších modelov nelineárneho oscilátora, napriek tomu ale môže ísť o netriviálny problém. Uvažujme hmotný bod o hmotnosti m zavesený na konci rovného, tenkého lana dĺžky l, ktorého druhý koniec je pevne ukotvený. Počas pohybu si lano zachováva tvar – nedeformuje sa a jeho vlastnú hmotnosť zanedbávame. Hmotný bod sa nachádza v homogénnom gravitačnom poli s gravitačným zrýchlením g, odporové sily prostredia a trenie neuvažujeme.



1.1 Zostavenie rovnice

Po vychýlení z rovnovážnej polohy pôsobia na hmotný bod dve sily. Ťahová sila od lana T pôsobí vždy v radiálnom smere, na pohybe sa nepodieľa. Sila spôsobená gravitačným zrýchlením $F_g = mg$ sa rozdelí na radiálnu a axiálnu zložku. Radiálna zložka $F_{g,r}$ kompenzuje ťahovú silu od lana, axiálna zložka $F_{g,a} = -mg \sin u$, kde u je uhol medzi kyvadlom a vertikálou, sa snaží vrátiť hmotný bod do rovnovážnej polohy. Nech x má význam času a $y = lu$ je dĺžka oblúku. Z druhého Newtonovho zákona dostávame

$$m\frac{d^2y}{dx^2} = \sum F = F_{g,a} = -mg \sin u.$$

Medzi uhlovým zrýchlením a zrýchlením platí vzťah $lu'' = y''$. Potom

$$mlu'' = -mg \sin u$$

a úpravou dostávame pohybovú rovnicu hmotného bodu

$$u'' + \alpha^2 \sin u = 0,$$

kde $\alpha = \sqrt{g/l}$ je vlastná frekvencia kyvadla. Ak na hmotný bod pôsobí aj externá sila $f(x)$, pohybová rovnica vyzerá nasledovne

$$u'' + \alpha^2 \sin u = f(x). \tag{1.1}$$

Napriek veľmi jednoduchým predpokladom sme dospeli k nelineárnej diferenciálnej rovnici druhého rádu, ktorú nevieme analyticky riešiť. Poznamenajme, že túto rovnicu sme mohli odvodiť aj inými spôsobmi, napríklad pomocou zákona zachovania mechanickej energie alebo pomocou druhej impulzovej vety.

1.2 História

V tejto časti priblížime vybrané úseky histórie problematiky súvisiace s naším problémom, viac informácii sa dá nájsť napríklad v [4]. Jednou z najdôležitejších prác, týkajúcou sa rovnicami nútených kmitov kyvadla, bol článok nemeckého matematika Hamela publikovaný v časopise *Mathematische Annalen* v roku 1922. Hamel v tomto článku nadviazal na Duffingovu monografiu z roku 1918, ktorá sa zaoberala približným určením periodických riešení rovnice (tzv. Duffingovej rovnice)

$$u'' + au - cu^3 = b \sin x,$$

kde sa využili prvé dva členy Taylorovho rozvoja $\sin u$. Hamel vo svojom článku ako prvý dokázal existenciu 2π-periodického riešenia rovnice

$$u'' + a \sin u = b \sin x \tag{1.2}$$

pomocou variačného počtu. Jeho dôkaz založený na variačnom princípe sa dá rozšíriť na všeobecnejšiu pravú stranu, kde $b \sin x$ je nahradená ľubovoľnou spojitou, 2π-periodickou funkciou so strednou hodnotou nula. Hamel sa ďalej zaoberal existenciou nepárnych riešení (1.2), kde s využitím nepárneho a periodického charakteru úlohy prevedie okrajový problém, pozostávajúci z (1.2) a $u(0) = u(\pi) = 0$, na ekvivalentnú nelineárnu integrálnu rovnicu a pomocou metódy postupných aproximácií dokáže jednoznačnosť riešenia za predpokladu $a < 1$. Článok Birkhoffa a Kellogga o pevných bodoch publikovaný v tom istom roku obsahuje aplikáciu, ktorá by implikovala existenciu riešenia pre každé a. Touto časťou článku inšpiruje Hammersteina k jeho výskumu nelineárnych integrálnych rovníc. Hamel v tomto článku použil viaceré zo základných metód nelineárnej analýzy, pričom niektoré z nich sám vymyslel, čím ďalej rozvinul záujem o túto disciplínu.

Po Hamelovi sa problematike periodických riešení rovnice (1.2) venovali viacerí matematici. Záujem o rovnicu nútených kmitov kyvadla znovu vzbudil Fučík v roku 1970, keď skúmal periodické riešenia rovnice

$$-u'' + \sin u = f(x),$$

a napriek tomu, že dosiahol len čiastočné výsledky, jeho práca motivovala Castra, Dancera a Willema, ktorí využili pri analýze nútených kmitov variačný počet, a po viac ako šesťdesiatich rokoch po Hamelovom prvom periodickom riešení bolo dokázané druhé periodické riešenie. Poznamenajme ešte, že na začiatku deväťdesiatych rokov sa stala rovnica nútených kmitov (dvojitého) kyvadla jedným zo symbolov pre teóriu chaosu.

1.3 Linearizácia

Nakoľko $\lim_{u \to 0} \sin u / u = 1$, pre malé výchylky u vieme približne aproximovať sinus jeho argumentom. Použitím tohto odhadu v rovnici (1.1) dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu v tvare

$$u'' + \alpha^2 u = f(x), \tag{1.3}$$

ktorú vieme analyticky vyriešiť. Ak je budiaca sila $f(t)$ periodická, s uhlovou frekvenciou ω, tak všeobecne má táto rovnica periodické riešenie s rovnakou uhlovou frekvenciou ω. Z fyzikálneho pohľadu to znamená, že ak na kyvadlo pôsobí oscilačná sila, tak kyvadlo začne kmitať v súlade s touto silou. Problém nastáva, ak má vonkajšia sila rovnakú uhlovú frekvenciu ako je vlastná frekvencia kyvadla. V tomto prípade neexistuje periodické riešenie (1.3) a všetky riešenia sú neobmedzené, hovoríme o nekonečnej rezonancii.

Jednou z možností, ako mať lineárny model nevykazujúci tento jav, je nezanedbanie trecích a odporových síl. Pohybová rovnica takéhoto systému môže vyzerať nasledovne

$$u'' + cu' + \alpha^2 u = f(x), \tag{1.4}$$

kde tlmiaci člen má podobu výrazu s prvou deriváciou a c je konštanta. Ak v rovnici zahrnieme tieto sily, tak nekonečná rezonancia nenastane a rovnica (1.4) má vždy periodické riešenie. Z fyzikálneho hľadiska to môžeme vysvetliť tak, že konečná sila nemôže vyprodukovať nekonečnú odozvu, pri prítomnosti trecích síl je amplitúda pohybu obmedzená. Tento fakt naznačuje, že pre plynulú periodickú vonkajšiu silu bude vždy existovať plynulá periodická odozva, nekonečná rezonancia nenastane. Pre malé trecie sily je amplitúda odozvy pri $\alpha = \omega$ veľká a analytické riešenie je stále nepresné, takže má zmysel zaoberať sa nelineárnym modelom. Prirodzená otázka je, či nelinearita v našom modeli dokáže rovnako, ako trecie sily zamedziť nekonečnej rezonancii, a teda, či má rovnica (1.1) vždy periodické riešenie, čo intuitívne očakávame.

KAPITOLA 2

NÁSTROJE FUNKCIONÁLNEJ ANALÝZY

V tejto kapitole pripomenieme pojmy a poznatky z funkcionálnej analýzy, ktoré budeme potrebovať pre skúmanie modelu matematického kyvadla. Ide o štandardný aparát, ktorý sa dá nájsť v rôznych podobách v rôznych učebniciach a textoch, ako napr. [2], [3] a [5].

Definícia 2.1 (Metrický priestor)**.** Nech M je neprázdná množina. *Metrikou* na M nazveme zobrazenie $\varrho : M \times M \to [0, \infty)$, ktoré spĺňa pre každé $x, y, z \in M$ nasledujúce tri axiómy:

(1) $\varrho(x, y) = 0$, práve vtedy keď $x = y$ (axióm totožnosti; metrika rozlišuje body);

(2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (axióm symetrie);

(3) $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$ (trojuholníková nerovnosť).

Metrickým priestorom nazývame dvojicu (M, ϱ).

V ďalšej kapitole využijeme nasledujúce metrické priestory.

Príklad 2.2 (Metriky na množine funkcií)**.** (i) Označme $C[a, b]$ množinu funkcií, ktoré sú spojité na $[a, b]$. Zobrazenie ϱ_C (označované tiež ϱ_∞) definované predpisom

$$\varrho_C(f, g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|\,, \quad f, g \in C[a, b]\,, \tag{2.1}$$

je metrika na množine $C[a, b]$ a označuje sa ako metrika rovnomernej konvergencie. Dvojica $(C[a, b], \varrho_C)$ je metrický priestor.

(ii) Nech $L^p[a, b]$ je množina Lebesgueovsky integrovateľných funkcií na $[a, b]$ (tj. takých funkcií f, že $\int_a^b |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$) pre $p \in [1, \infty)$. Zobrazenie ϱ_p definované ako

$$\varrho_p(f, g) := \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}, \quad f, g \in L^p[a, b] \tag{2.2}$$

je metrikou, ktorú označujeme ako L^p-metriku. Dvojica $(L^p[a, b], \varrho_p)$ je pre $p \in [1, \infty)$ metrický priestor.

Definícia 2.3 (Konvergentná postupnosť)**.** Nech (M, ϱ) je metrický priestor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M$ postupnosť. Hovoríme, že postupnosť $\{x_k\}$ *konverguje* v metrickom priestore (M, ϱ) k bodu $x \in M$, ak

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } k_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tak, že pre každé } k \geq k_\varepsilon \text{ platí } \varrho(x_k, x) < \varepsilon.$$

Bod $x \in M$ sa nazýva *limita postupnosti* $\{x_k\}$, pričom píšeme $x_k \to x$ (resp. $x_k \xrightarrow{\varrho} x$) pre $k \to \infty$.

Definícia 2.4 (Cauchyovská postupnosť)**.** Nech (M, ϱ) je metrický priestor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M$ postupnosť. Hovoríme, že postupnosť $\{x_k\}$ je *cauchyovská* (tiež *fundamentálna*) v (M, ϱ), ak

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } k_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tak, že pre každé } m, n \geq k_\varepsilon \text{ platí } \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Pojmy v (nielen) nasledujúcej definícii sa dajú ekvivalentne definovať aj inými spôsobmi, avšak pre účely tohto textu nám táto forma vyhovuje.

Definícia 2.5 (Uzavrená množina, ohraničená množina, uzáver množiny)**.** Nech (M, ϱ) je metrický priestor a $N \subseteq M$ podmnožina.

(i) Množina N sa nazýva *uzavrená* (v metrickom priestore (M, ϱ)), ak pre každú konvergentnú postupnosť $\{x_k\} \subseteq N$ takú, že $x_k \to x$, platí $x \in N$.

(ii) Množina N sa nazýva *ohraničená* (v metrickom priestore (M, ϱ)), ak

$$\sup \{\varrho(x, y), x, y \in N\} < \infty.$$

(iii) Množinu $\overline{N} = \{x \in M, \inf \{\varrho(x, y), y \in N\} = 0\}$ nazveme *uzáverom* množiny N.

Definícia 2.6 (Úplný metrický priestor)**.** Metrický priestor (M, ϱ) sa nazýva *úplný*, ak v ňom každá cauchyovská postupnosť konverguje, tj. má limitu (ktorá do tohto priestoru patrí).

Príklad 2.7 (Príklady úplných metrických priestorov)**.**

(i) Metrický priestor $(C\,[a, b]\,, \varrho_C)$, je úplný metrický priestor.

(ii) Metrický priestor $(L^p\,[a, b]\,, \varrho_p)$, $p \in [1, \infty)$, je úplný metrický priestor.

Definícia 2.8 (Spojité zobrazenie)**.** Nech (M, ϱ) a (N, σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$ zobrazenie. Zobrazenie f sa nazýva *spojité* v bode x_0, ak pre každú postupnosť $\{x_k\} \subseteq M$ takú, že $x_k \xrightarrow{\varrho} x_0$, platí $f(x_k) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$. Zobrazenie f *je spojité na množine* M, ak je spojité v každom bode množiny M.

Definícia 2.9 (Rovnomerne spojité zobrazenie)**.** Nech (M, ϱ) a (N, σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$ zobrazenie. Povieme, že f je *rovnomerne spojité* na M, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky $x, y \in M$ spĺňajúce $\varrho(x, y) < \delta$ platí $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Definícia 2.10 (Lipschitzovské zobrazenie, kontrakcia)**.** Nech (M, ϱ) a (N, σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$ zobrazenie. Zobrazenie f sa nazýva *lipschitzovské*, ak existuje nezáporná reálna konštanta L s vlastnosťou

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq L\varrho(x, y) \text{ pre každé } x, y \in M.$$

Číslo L je tzv. *Lipschitzova konštanta* zobrazenia f. V prípade, že $L \in [0, 1)$, zobrazenie f nazývame *kontraktivným zobrazením*, resp. *kontrakciou.*

Definícia 2.11 (Pevný bod zobrazenia)**.** Nech M je ľubovoľná neprázdna množina a $F : M \to M$ zobrazenie. Bod $x \in M$ sa nazýva *pevný bod zobrazenia* F, ak platí

$$F(x) = x.$$

Veta 2.12 (Banachova veta o pevnom bode)**.** *Nech (M, ϱ) je úplný metrický priestor. Potom každá kontrakcia $F : M \to M$ má práve jeden pevný bod v M.*

Definícia 2.13 (Kompaktný metrický priestor)**.** Metrický priestor (M, ϱ) sa nazýva *kompaktný*, ak sa dá z každej postupnosti jeho bodov vybrať konvergentná podpostupnosť.

Veta 2.14. *Nech (M, ϱ) je kompaktný metrický priestor, (N, σ) metrický priestor a $f : M \to N$ spojité zobrazenie. Potom je f rovnomerne spojité.*

Definícia 2.15 (Relatívne kompaktná množina)**.** Nech (M, ϱ) je metrický priestor. Hovoríme, že množina $N \subseteq M$ je *relatívne kompaktná* (v priestore(M, ϱ)), ak je jej uzáver kompaktný v (M, ϱ).

Poznámka 2.16. Upozornime, že terminológia týkajúca sa relatívne kompaktných množín nie je jednotná. V literatúre sa niekedy pre relatívne kompaktnú množinu používa pojem *prekompaktná* množina. My používame tento pojem pre podmnožinu metrického priestoru, v ktorom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-ová sieť tejto množiny, a pre ktorú sa niekedy používa pojem *totálne obmedzená* množina. Dôvodom, prečo sú tieto pojmy v literatúre zamieňané môže byť, že v úplných metrických priestoroch tieto pojmy splývajú.

Určiť podľa definície, či je množina relatívne kompaktná, je zložité. V priestore $(C\,[a, b]$, $\varrho_C)$ nám poslúži Arzeláova-Ascoliho veta, pre ktorú potrebujeme nasledujúce pojmy.

Definícia 2.17 (Rovnomerná ohraničenosť, rovnomocná spojitosť)**.** Pre dané $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, uvažujme neprázdnu množinu N funkcií $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(i) Povieme, že funkcie z množiny N sú *rovnomerne ohraničené* na intervale $[a, b]$, ak existuje kladná reálna konštanta L s vlastnosťou

$$|f(x)| \leq L \text{ pre každé } x \in [a, b] \text{ a každé } f \in N.$$

(ii) Povieme, že funkcie z množiny N sú *rovnomocne spojité* na intervale $[a, b]$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že

$$\begin{aligned}&\text{pre všetky } x, x^* \in [a, b] \text{ s vlastnosťou } |x - x^*| < \delta\\&\text{a pre všetky funkcie } f \in N \text{ platí } |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Veta 2.18 (Arzeláova-Ascoliho veta)**.** *Množina $N \subseteq C\,[a, b]$ je relatívne kompaktná v priestore $(C\,[a, b]\,, \varrho_C)$ práve vtedy, keď funkcie z množiny N sú rovnomerne ohraničené a rovnomocne spojité.*

Jednou z možností dôkazu tejto vety je zostrojenie konečnej ε-ovej siete, čo je charakteristika prekompaktnej množiny a využije sa fakt, že v úplnom metrickom priestore $(C\,[a, b]\,, \varrho_C)$ pojmy prekompaktnej množiny a relatívne kompaktnej množiny splývajú.

Definícia 2.19 (Normovaný lineárny priestor)**.** Nech X je lineárny priestor nad $\mathbb{R}$ a $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ zobrazenie, ktoré pre každé $x, y \in X$ a každý skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienky

(1) $\|x\| = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$ (norma rozlišuje body),

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (absolútna homogenita),

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojuholníková nerovnosť).

Zobrazenie $\|\cdot\|$ sa nazýva *norma* na priestore X a dvojicu $(X, \|\cdot\|)$ nazývame *normovaný lineárny priestor* (nad $\mathbb{R}$).

Poznámka 2.20 (Metrika indukovaná normou)**.** Pre každý normovaný lineárny priestor X s normou $\|\cdot\|$ je zobrazenie

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| , \quad x, y \in X, \tag{2.3}$$

metrikou na množine X, a teda dvojica (X, ϱ) je *metrický priestor*. Tento fakt umožňuje preniesť a aplikovať na normovaný lineárny priestor všetky pojmy a výsledky z teórie metrických priestorov. O vyššie uvedenej metrike ϱ hovoríme, že je *indukovaná normou* $\|\cdot\|$, túto úvahu nejde obrátiť.

Definícia 2.21 (Ohraničená podmnožina normovaného lineárneho priestoru)**.** Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$. Podmnožinu $A \subset X$ budeme považovať za *ohraničenú* v normovanom priestore X, ak existuje nezáporná reálna konštanta K taká, že $\|x\| \leq K$ pre každé $x \in A$.

Definícia 2.22 (Banachov priestor)**.** Normovaný lineárny priestor X nad $\mathbb{R}$, ktorý je úplný vzhľadom k metrike (2.3) indukovanej danou normou na X, sa nazýva *Banachov priestor*.

Príklad 2.23 (Príklady Banachových priestorov)**.** (i) Množina $C\,[a, b]$ všetkých spojitých funkcií na $[a, b]$ s normou

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a,b]} |f(x)| , \quad f \in C\,[a, b]$$

je Banachov priestor.

(ii) Lebesgueove priestory $L^p\,[a, b]\,, p \in [1, \infty]$ s normou

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

sú Banachove priestory.

Veta 2.24 (Spojitosť normy)**.** *Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor. Potom $\|\cdot\|$ je spojité zobrazenie priestoru X do eukleidovského priestoru $\mathbb{E}$.*

Definícia 2.25 (Konvexná množina)**.** Podmnožina S vektorového priestoru sa nazýva *konvexná*, ak pre ľubovoľné $x, y \in S$ platí $\alpha x + (1 - \alpha) y \in S$ pre všetky $\alpha \in [0, 1]$.

Veta 2.26 (Schauderova veta o pevnom bode)**.** *Nech X je Banachov priestor, $S \subseteq X$ je neprázdna, ohraničená, uzavrená a konvexná množina a $F : S \to S$ je spojité zobrazenie také, že $F(S)$ je relatívne kompaktná množina (v S). Potom má F pevný bod v S.*

Veta 2.27 (Lebesgueova veta o dominantnej konvergencii)**.** *Predpokladajme, že $f_n : I \to \mathbb{R}$ je postupnosť merateľných funkcií a $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pre $x \in I$. Nech $g \in L^1(I)$ je funkcia taká, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$ pre $x \in I$. Potom $f \in L^1(I)$ a f_n konverguje k f v norme L^1, tj. $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_I |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0$.*

Veta 2.28 (Hölderova nerovnosť, Cauchyho-Schwarzova nerovnosť)**.** *Nech* $p, q \in (1, \infty)$ *spĺňajú* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Ak sú* f, g *merateľné funkcie na meratelnej množine* M*, potom platí*

$$\int_M |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_M |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \left(\int_M |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/q}.$$

Špeciálnym prípadom Hölderovej nerovnosti, pre $p = q = 2$*, je Cauchyho-Schwarzova nerovnosť.*

KAPITOLA 3

ANALÝZA ROVNICE MATEMATICKÉHO KYVADLA

Pripomeňme rovnicu výchylky matematického kyvadla, ktorú sme odvodili v sekcii 2.1

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \alpha^2 \sin u = f(x), \tag{3.1}$$

kde $u(x)$ je uhol medzi kyvadlom a vertikálou, α je konštanta závisiaca na dĺžke kyvadla a gravitačnom zrýchlení a funkcia $f(x)$ je sila pôsobiaca na kyvadlo. Predpokladajme, že táto sila je spojitá, nepárna a periodická s uhlovou frekvenciou ω a zaujíma nás, či má za týchto predpokladov rovnica (3.1) periodické riešenie. Zjednodušme problém preškálovaním času tak, aby vonkajšia sila mala periódu 2. Zavedením substitúcie $t = \omega x/\pi$ nadobudne rovnica (3.1) tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha^2\pi^2}{\omega^2} \sin u = f(t)\frac{\pi^2}{\omega^2}.$$

Označme

$$\beta = \frac{\alpha\pi}{\omega} \quad \text{a} \quad F(t) = f(t)\frac{\pi^2}{\omega^2}. \tag{3.2}$$

Rovnica potom vyzerá nasledovne

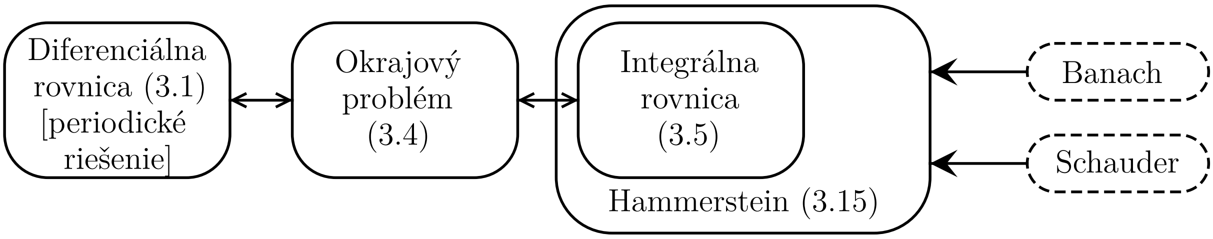
$$u''(t) + \beta^2 \sin u = F(t). \tag{3.3}$$

Chceme redukovať problém nájdenia periodického riešenia (3.3) na dvojbodovú okrajovú úlohu na $[0, 1]$. Predpokladajme, že vieme nájsť funkciu $u = u(t), u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tak, že $u(0) = u(1) = 0$ a $u(t)$ je riešením rovnice (3.3) (v zmysle, že u je spojitá funkcia so spojitými deriváciami prvého a druhého rádu a u spĺňa rovnicu (3.3) pre všetky $t \in [0, 1]$). Keďže $F(t)$ a sinus sú nepárne, vieme rozšíriť funkciu u v zmysle riešenia na nepárnu funkciu na interval $[-1, 1]$, kde položíme $u(t) = -u(-t)$ pre $t \in [-1, 0]$. Táto funkcia je spojitá vďaka $u(0) = 0$ a je riešením vďaka nepárnemu charakteru úlohy. Ďalej, rozdeľme reálnu osu na intervaly $\{[2k - 1, 2k + 1], k \in \mathbb{Z}\}$. Periodickosť úlohy nám umožní dodefinovať funkciu u pre všetky reálne čísla nasledovne. Pre $t \in [2k - 1, 2k + 1]$ položíme $u(t) = u(t - 2k)$. Takto obdržaná funkcia u je riešením periodickej úlohy, je spojitá (v krajných bodoch intervalu nadobúda u rovnaké hodnoty) a je nepárna. Poznamenajme, že môžeme vyjadriť každé t v tvare $t = 2k+t_0$, kde $t_0 \in [-1, 1]$. Potom $-t = -2k+(-t_0)$, kde $-t_0 \in [-1, 1]$, a teda $u(-t) = u(-t_0) = -u(t_0) = u(t)$, čím je ukázana nepárnosť funkcie u.

Riešime okrajový problém

$$\begin{aligned} u''(t) + \beta^2 \sin u &= F(t) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

na $[0, 1]$. Prehľadový obrázok načrtáva, ako budeme postupovať. Využitím periodického a nepárneho charakteru úlohy a preškálovania času sme dokázali prepísať diferenciálnu rovnicu (3.1) na okrajový problém (3.4), ktorý vieme previesť na ekvivalentnú integrálnu rovnicu (3.5), viď nasledujúca sekcia. Túto rovnicu zaradíme do širšej množiny Hammersteinových integrálnych rovníc (3.15), pre ktoré pomocou Schauderovej vety o pevnom bode dokážeme existenciu riešenia a pomocou Banachovej vety o pevnom bode odvodíme podmienku, za ktorej bude existovať jednoznačné riešenie. Tieto poznatky potom aplikujeme na našu konkrétnu rovnicu.



3.1 Prevedenie okrajovej úlohy na integrálnu rovnicu

Teraz ukážeme, že vieme okrajový problém (3.4) prepísať do ekvivalentnej integrálnej rovnice

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s, \tag{3.5}$$

kde

$$G(t,s) = \begin{cases} t(s-1) & \text{pre } 0 \le t \le s \le 1 \\ (t-1)s & \text{pre } 0 \le s \le t \le 1 \end{cases} \quad \text{a} \quad h(s) = F(s) - \beta^2 \sin(u(s)).$$

Veta 3.1. *Funkcia $u(t)$ je riešením okrajového problému* (3.4) *práve vtedy, ak je spojitým riešením integrálnej rovnice* (3.5)*.*

Dôkaz. Dokážme najprv smer „$\Leftarrow$“. Napíšme integrálnu rovnicu (3.5) v tvare

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t (t-1)sh(s)\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(s-1)h(s)\,\mathrm{d}s \\ &= (t-1)\int_0^t sh(s)\,\mathrm{d}s + t\int_t^1 (s-1)h(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dosadením do tohto vyjadrenia integrálnej rovnice ľahko overíme okrajové podmienky. Deriváciou (3.6) podľa premennej t (kde integrály derivujeme ako funkciu hornej resp. dolnej medze) dostávame

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int_0^t sh(s)\,\mathrm{d}s + (t-1)th(t) + \int_0^1 (s-1)h(s)\,\mathrm{d}s - t(t-1)h(t) \\ &= \int_0^1 sh(s)\,\mathrm{d}s - \int_t^1 h(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

odkiaľ opätovným derivovaním podľa premennej t

$$u''(t) = h(t),$$

čím sme dokázali smer „$\Leftarrow$“.

Ukážme, že platí aj implikácia „$\Rightarrow$“. Výjdeme z rovnice

$$u''(t) = h(t). \tag{3.7}$$

Rovnicu (3.7) integrujeme od 0 do t a získavame

$$u'(t) - u'(0) = \int_0^t u''(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.8}$$

Opätovnou integráciou rovnice (3.8) od 0 do t máme

$$u(t) - u(0) - tu'(0) = \int_0^t (u'(\varphi) - u'(0))\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^t \left(\int_0^\varphi h(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\varphi. \tag{3.9}$$

Hodnotu konštanty $u'(0)$ získame dosadením $t = 1$ v rovnici (3.9)

$$u(1) - u(0) - u'(0) = \int_0^1 \left(\int_0^\varphi h(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\varphi. \tag{3.10}$$

Využitím okrajových podmienok a dosadením vyjadrenia (3.10) konštanty $u'(0)$ do rovnice (3.9) dostávame

$$u(t) = \int_0^t \left(\int_0^\varphi h(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\varphi - t \int_0^1 \left(\int_0^\varphi h(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\varphi. \tag{3.11}$$

Aplikujme na prvý integrál rovnice (3.11) Fubiniovu vetu

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_0^\varphi h(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\varphi &= \int_0^t \left(\int_s^t h(s)\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}s = \int_0^t h(s) \left(\int_s^t \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t (t-s)h(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.12}$$

kde sme využili faktu, že funkcia $h(s)$ nezávisí na φ a mohli sme ju vyňať. Rovnakým princípom vyjadríme druhý integrál v tvare

$$\int_0^1 \left(\int_0^\varphi h(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^1 \left(\int_s^1 h(s)\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}s = \int_0^1 (1-s)h(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.13}$$

Dosadením vyjadrení integrálov (3.12) a (3.13) do rovnice (3.11) dostávame

$$u(t) = \int_0^t (t-s)h(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^1 t(s-1)h(s)\,\mathrm{d}s,$$

odkiaľ využitím aditivity vzhľadom k integračnému oboru a linearity integrálu

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t (t-s)h(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t t(s-1)h(s)\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(s-1)h(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t (t-1)sh(s)\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(s-1)h(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.14}$$

a teda

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s.$$

$\square$

Poznámka 3.2. (i) Ak chceme dokázať iba existenciu riešenia nášho okrajového problému (3.3), $u(0) = u(1) = 0$ pomocou integrálnej rovnice (3.5), stačí nám iba smer „$\Leftarrow$“, avšak pre jednoznačnosť riešenia tohto problému potrebujeme aj smer „$\Rightarrow$“. Ak by platila len implikácia „$\Leftarrow$“, tak všeobecne nevieme vylúčiť existenciu riešenia u^* okrajového problému takého, že u^* nesplĺňa integrálnu rovnicu.

(ii) Funkcia $G(t, s)$, ktorej tvar sme odvodili pri dokazovaní smeru „$\Rightarrow$“, je tzv. Greenova funkcia príslušného problému.

(iii) Poznamenajme, že k integrálnej rovnici (3.5) sme sa mohli dopracovať aj inými spôsobmi. Načrtnime ďalšiu možnosť, ako sa dá postupovať. Riešime okrajový problém $u''(t) = h(t), u(0) = u(1) = 0$. Riešenie pridruženej homogénnej rovnice $u'' = 0$ môžeme vyjadriť v tvare $u_h = c_1 t + c_2(1-t)$. Partikulárne riešenie hľadáme ako $u_p = c_1(t)t + c_2(t)(1-t)$ a metódou variácie konštánt získame

$$u_p = \int_0^t (t-s)h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Potom môžeme vyjadriť riešenie v tvare

$$u = u_h + u_p = c_1 t + c_2(1-t) + \int_0^t (t-s)h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Použitím okrajových podmienok získame vyjadrenie konštánt c_1 a c_2. Dosadením týchto konštánt a následovnou úpravou dostaneme integrálnu rovnicu (3.5). Ďalšou možnosťou, ako sme mohli hľadať tvar $G(t, s)$, je využitie teórie Greenovej funkcie.

3.2 Aplikácia Schauderovej vety

Uvažujme nelineárnu integrálnu rovnicu (tzv. Hammersteinovu rovnicu) v tvare

$$u(x) = \int_a^b K(x, y) f(y, u(y))\,\mathrm{d}y, \tag{3.15}$$

kde K, f sú dané funkcie a u je neznáma funkcia. Ak dosadíme $K(x, y) = G(x, y)$ a $f(x, u(x)) = h(x) = F(x) - \beta^2 \sin u$, tak vidíme, že Hammersteinova rovnica je zovšeobecnením integrálnej rovnice (3.5). Ukážeme, že rovnica (3.15) spĺňa za určitých predpokladov podmienky Schauderovej vety 2.26, čím dokážeme existenciu riešenia tejto rovnice.

Veta 3.3. *Predpokladajme, že*

- $K(x, y)$ *je spojitá funkcia pre* $a \le x, y \le b$,
- $f(y, z)$ *je spojitá a ohraničená funkcia pre* $a \le y \le b$ *a pre všetky* $z \in \mathbb{R}$.

Potom má rovnica (3.15) *spojité riešenie.*

Dôkaz. Pracujme v Banachovom priestore $(C\,[a, b]\,, \|\cdot\|_C)$. Definujme množinu

$$S = \{u \in C\,[a, b]\,; \|u\|_C \le D\}\,,$$

kde hodnotu konštanty D určíme neskôr. Ďalej definujme operátor $F : S \to C\,[a, b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y, u(y))\,\mathrm{d}y.$$

Z predpokladu vety je funkcia K spojitá na kompaktnom intervale $[a,b] \times [a,b]$, z čoho vyplýva, že je ohraničená, tj. $|K(x,y)| \leq A$ pre nejaké A a všetky $x, y \in [a,b] \times [a,b]$. Podobne, funkcia f je podľa predpokladu ohraničená, a teda existuje B také, že $|f(y,z)| \leq B$ pre všetky $y, z \in [a,b] \times \mathbb{R}$. Hodnotu konštanty D definujeme ako

$$D = AB(b-a).$$

Aby sme mohli aplikovať Schauderovu vetu 2.26, musíme ukázať, že sú splnené nasledujúce podmienky:

- S je neprázdna: Toto tvrdenie je zrejmé.

- S je ohraničená: Platí $\|u\|_C \leq D < \infty$ pre všetky funkcie $u \in S$.

- S je uzavrená: Musíme ukázať, že každá konvergujúca postupnosť funkcií $\{u_n\} \subseteq S$ dokonverguje v norme k funkcii u, ktorá leží v množine S. Funkcia u je spojitá, keďže ide o konvergenciu v norme, a teda rovnomernú konvergenciu. Platí

$$\begin{aligned} \|u\|_C &= \|u - u_n + u_n\|_C \leq \|u - u_n\|_C + \|u_n\|_C \\ &\Rightarrow \|u\|_C - \|u_n - u\|_C \leq \|u_n\|_C \leq D \end{aligned}$$

Aplikovaním limity (a keďže platí $\|u_n - u\|_C \to 0$) dostaneme

$$\|u\|_C = \lim_{n\to\infty} \left(\|u\|_C - \|u_n - u\|_C\right) \leq D,$$

z čoho vyplýva, že $u \in S$.

- S je konvexná: Chceme ukázať, že pre ľubovoľné $u_1, u_2 \in S$ a $\alpha \in [0,1]$ platí $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in S$. Súčet spojitých funkcií je spojitá funkcia a z trojuholníkovej nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned} \|\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2\|_C &\leq \|\alpha u_1\|_C + \|(1-\alpha)u_2\|_C = \alpha \|u_1\|_C + (1-\alpha)\|u_2\|_C \\ &\leq \alpha D + (1-\alpha)D = D, \end{aligned}$$

a teda $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in S$.

- F zobrazuje S do seba ($F(S) \subseteq S$): Nech $u \in S$. Potom Fu je zrejme spojitá funkcia na $[a,b]$ a pre $x \in [a,b]$ platí

$$\begin{aligned} |(Fu)(x)| &= \left| \int_a^b K(x,y) f(y,u(y))\,\mathrm{d}y \right| \leq \int_a^b |K(x,y)f(y,u(y))|\,\mathrm{d}y \leq \\ &\leq \int_a^b AB\,\mathrm{d}y = AB(b-a) = D, \end{aligned}$$

a odtiaľto dostávame, že $Fu \in S$.

- $F(S)$ je relatívne kompaktná množina: Ukážeme, že funkcie z množiny $F(S)$ sú rovnomerne ohraničené a rovnomocne spojité, a teda spĺňajú predpoklady Arzeláovej-Ascoliho vety 2.18.

– Rovnomerná ohraničenosť: Vieme, že $F(S) \subseteq S$, a teda $\|Fu\|_C \leq D$ pre všetky $u \in F(S)$.

– Rovnomocná spojitosť: Využijeme fakt, že funkcia $K(x, y)$ je spojitá na kompaktnom intervale $[a, b] \times [a, b]$, a teda je podľa Vety 2.14 rovnomerne spojitá, čiže platí, že pre všetky $\varepsilon^* > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| < \varepsilon^*, \text{ ak } |x_1 - x_2| < \delta$$

pre $a \leq x_1, x_2, y \leq b$. Zvoľme $\varepsilon^* = \varepsilon / [(b-a)B]$, kde $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Pre $x_1, x_2 \in [a, b]$ a $u \in S$ (a teda $Fu \in F(S)$) platí

$$\begin{aligned} |(Fu)(x_1) - (Fu)(x_2)| &= \left| \int_a^b [K(x_1, y) - K(x_2, y)] \, f(y, u(y)) \, \mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_a^b |[K(x_1, y) - K(x_2, y)] \, f(y, u(y))| \, \mathrm{d}y \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{(b-a)B} B \, \mathrm{d}y = \frac{\varepsilon(b-a)}{(b-a)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Čiže pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky $x_1, x_2 \in [a, b]$ také, že $|x_1 - x_2| < \delta$ a pre všetky $u \in S$ (a teda $Fu \in F(S)$) platí $|(Fu)(x_1) - (Fu)(x_2)| < \varepsilon$.

Predpoklady Arzeláovej-Ascoliho vety 2.18 sú splnené, z čoho plynie, že $F(S)$ je relatívne kompaktná množina.

- F je spojitý operátor: Chceme ukázať, že platí nasledujúci výrok:

$$\{u_n\} \subseteq S, u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_C} u \implies F(u_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_C} F(u).$$

Nech $\{u_n\} \subseteq S$ a $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_C} u$. Potom $u \in S$ a

$$\begin{aligned} \|Fu_n - Fu\|_C &= \max_{x \in [a,b]} |(Fu_n)(x) - (Fu)(x)| \\ &= \max_{x \in [a,b]} \left| \int_a^b K(x, y) \, [f(y, u_n(y)) - f(y, u(y))] \, \mathrm{d}y \right| \\ &\leq \max_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x, y) \, [f(y, u_n(y)) - f(y, u(y))]| \, \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Využitím faktu, že funkciu $f(y, z)$ uvažujeme v tomto kroku spojitú na kompaktnom intervale $[a, b] \times [-D, D]$, a teda podľa Vety 2.14 rovnomerne spojitú, platí, že pre všetky $\varepsilon^* > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že $|f(y, u_n(y)) - f(y, u(y))| < \varepsilon^*$, ak $|u_n(y) - u(y)| < \delta$. Zvoľme $\varepsilon^* = \varepsilon / A(b - a)$, kde $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné a pokračujme v odhadoch (3.16)

$$\begin{aligned} &\max_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x, y) \, [f(y, u_n(y)) - f(y, u(y))]| \, \mathrm{d}y \\ &\qquad \leq \max_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x, y)| \, \frac{\varepsilon}{A(b-a)} \, \mathrm{d}y \leq \int_a^b \frac{A\varepsilon}{A(b-a)} \, \mathrm{d}y = \frac{\varepsilon A(b-a)}{A(b-a)} = \varepsilon, \end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že F je spojitý operátor.

Všetky predpoklady Schauderovej vety 2.26 sú splnené, a teda F má pevný bod v S, ktorý je zrejme riešením integrálnej rovnice (3.15). □

Poznámka 3.4 (alternatívne dôkazy dielčich častí). (i) Pri dokazovaní uzavrenosti množiny S sme mohli využiť spojitosť normy. Pre ľubovoľnú postupnosť $\{u_n\}$, ktorá má v norme $\|\cdot\|_C$ limitu u vďaka spojitosti normy platí $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_C = \|u\|_C$. Keďže postupnosť $\{\|u_n\|_C\}$ sa skladá z čísiel $\|u_n\|_C \le D$, platí, že aj $\|u\|_C \le D$, a teda $u \in S$.

(ii) Spojitosť operátoru F sme mohli dokázať pomocou Lebesgueovej vety o dominantnej konvergencii 2.27. Predpokladajme, že $\|u_n - u\|_C \to 0$. Využitím odhadov výrazu $\|Fu_n - Fu\|_C$ dostávame

$$\begin{aligned}\|Fu_n - Fu\|_C &= \max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^b K(x,y)\,[f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))]\,\mathrm{d}y\right| \\ &\le \max_{x\in[a,b]}\int_a^b |K(x,y)\,[f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))]|\,\mathrm{d}y \\ &\le A\int_a^b |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))|\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

a z toho vyplýva

$$\lim_{n\to\infty}\|Fu_n - Fu\|_C \le \lim_{n\to\infty} A\int_a^b |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))|\,\mathrm{d}y.$$

Pre všetky $n\in\mathbb{N}$ platí $|f(y,u_n(u))| \le B$ a z konvergencie v norme $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_C} u$ plynie bodová konvergencia $u_n \to u$ na $[a,b]$. Zo spojitosti f plynie $f(y,u_n(y)) \to f(y,u(y))$ pre všetky $y\in[a,b]$, a teda predpoklady Lebesgueovej vety sú splnené, odkiaľ

$$\lim_{n\to\infty} A\int_a^b |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))|\,\mathrm{d}y = 0,$$

čím je spojitosť F dokázaná.

(iii) V našom prípade poznáme presný tvar funkcií $K(x,y)$ a $f(y,u(y))$. Vďaka tomu môžeme ukázať rovnomocnú spojitosť funkcií z $F(S)$ pomocou Lagrangeovej vety o strednej hodnote. Nech $Fu \in F(S)$ a $x_1, x_2 \in [a,b]$. Potom

$$|(Fu)(x_1) - (Fu)(x_2)| = \left|\frac{\mathrm{d}(Fu)}{\mathrm{d}x}(\xi)\right||x_1 - x_2|,$$

kde $\xi\in[a,b]$. To, ako vyzerá derivácia $\dfrac{\mathrm{d}(Fu)}{\mathrm{d}x}$, sme odvodili pri dokazovaní Vety 3.1. Platí

$$\frac{\mathrm{d}(Fu)}{\mathrm{d}x}(x) = \int_a^b yh(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^b h(y)\,\mathrm{d}y \le B\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) - B(b-x) \le B\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right). \quad (3.17)$$

Označme pravú stranu nerovnosti (3.17) ako E. Využitím týchto odhadov dostávame

$$|(Fu)(x_1) - (Fu)(x_2)| = \left|\frac{\mathrm{d}(Fu)}{\mathrm{d}x}(\xi)\right||x_1 - x_2| \le E\,|x_1 - x_2|,$$

z čoho vyplýva, že funkcie z množiny $F(S)$ sú rovnomocne spojité.

Vráťme sa k integrálnej rovnici (3.5).

Veta 3.5. *Integrálna rovnica* (3.5) *má spojité riešenie.*

Dôkaz. Funkcia $G(t, s)$ nadobúda rovnaké hodnoty pre $t = s$, a teda je spojitá na $[0, 1] \times [0, 1]$. Funkcia $h(s)$ je spojitá a ohraničená na $[0, 1]$, čím sú predpoklady Vety 3.3 (kde $K(x, y) = G(x, y)$ a $f(x, u(x)) = h(x) = F(x) - \beta^2 \sin u$) splnené, a teda integrálna rovnica (3.5) má spojité riešenie. □

Kombináciou úvahy zo začiatku tretej kapitoly, Vety 3.1 a Vety 3.5 dostávame nasledujúci výsledok.

Veta 3.6. *Nech je sila f pôsobiaca na kyvadlo spojitá, nepárna a periodická. Potom má rovnica výchylky matematického kyvadla* (3.1) *spojité, nepárne a periodické riešenie s rovnakou periódou ako f.*

3.3 Aplikácia Banachovej vety

Opäť uvažujme nelineárnu integrálnu rovnicu (3.15) (Hammersteinovu rovnicu). V predchádzajúcej časti sme ukázali existenciu riešenia tejto rovnice za pomerne všeobecných podmienok. Teraz nás bude zaujímať, za akých podmienok môžeme aplikovať Banachovu vetu 2.12, a teda zaručiť jednoznačnosť riešenia.

Veta 3.7. *Predpokladajme nasledujúce:*

- *$K(x, y)$ je spojitá funkcia pre $a \leq x, y \leq b$,*
- *$f(y, z)$ je spojitá a ohraničená funkcia pre $y \in [a, b]$ a pre $z \in \mathbb{R}$,*
- *existuje spojitá funkcia $N(x, y)$ taká, že*

$$|K(x, y)\,[f(y, z_1) - f(y, z_2)]| \leq N(x, y)\,|z_1 - z_2| \quad \textit{pre } x, y \in [a, b] \quad \textit{a } z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

a $\max_{x \in [a,b]} \int_a^b |N(x, y)| \,\mathrm{d}y = L$, kde $L < 1$.

Potom má rovnica (3.15) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pracujeme v Banachovom priestore $(C\,[a, b]\,, \|\cdot\|_C)$. Definujme operátor $F : C\,[a, b] \to C\,[a, b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y, u(y)) \,\mathrm{d}y.$$

Pre $u \in C\,[a, b]$ je integrand spojitá funkcia na $[a, b] \times [a, b]$, a teda platí, že Fu je spojité na $[a, b]$, z čoho vyplýva, že F zobrazuje priestor $C\,[a, b]$ do seba. Overíme kontraktívnosť operátoru. Platí

$$\begin{aligned}
\|Fu_1 - Fu_2\|_C &= \max_{x \in [a,b]} \left| \int_a^b K(x, y)\,[f(y, u_1(y)) - f(y, u_2(y))] \,\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \max_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x, y)\,[f(y, u_1(y)) - f(y, u_2(y))]| \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Využitím predpokladov vety a predchádzajucého odhadu dostávame

$$\begin{aligned}\|Fu_1 - Fu_2\|_C &\leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |K(x,y)\,[f(y,u_1(y)) - f(y,u_2(y))]|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^b N(x,y)\,|u_1(y) - u_2(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^b N(x,y)\,\|u_1 - u_2\|_C\,\mathrm{d}y \\ &= \|u_1 - u_2\|_C \max_{x\in[a,b]} \int_a^b N(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &\leq L\,\|u_1 - u_2\|_C\,,\end{aligned}$$

kde $L < 1$, a teda operátor F je kontraktívny. Predpoklady Banachovej vety 2.12 sú splnené, z čoho plynie, že operátor F má práve jeden pevný bod, ktorý je zrejme jednoznačným riešením rovnice (3.15). □

Vráťme sa k integrálnej rovnici (3.5). Pomocou Vety 3.7 ukážeme, za akých podmienok má táto rovnica jediné spojité riešenie.

Veta 3.8. *Predpokladajme, že $\alpha < (2\sqrt{2}/\pi)\omega$, kde ω je uhlová frekvencia sily pôsobiacej na kyvadlo a α je vlastná frekvencia kyvadla. Potom má rovnica* (3.5) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pre konštantu β definovanú v (3.2) využitím predpokladu vety dostávame

$$\beta = \frac{\alpha\pi}{\omega} < \frac{2\sqrt{2}\pi\omega}{\pi\omega} = 2\sqrt{2}.$$

Zvoľme $N(t,s) = \beta^2\,|G(t,s)|$. Potom

$$\begin{aligned}|G(t,s)\,[h(s,z_1) - h(s,z_2)]| &= \beta^2\,|G(t,s)\,[\sin(z_1) - \sin(z_2)]| \leq \beta^2\,|G(t,s)\,|z_1 - z_2|| \\ &= N(t,s)\,|z_1 - z_2|\,.\end{aligned}$$

Na intervale $[0,1]\times[0,1]$ je funkcia $G(t,s) \leq 0$, a teda $|G(t,s)| = -G(t,s)$. Platí

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |N(t,s)|\,\mathrm{d}s &= \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \beta^2\,|G(t,s)|\,\mathrm{d}s = \beta^2 \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 -G(t,s)\,\mathrm{d}s \\ &= \beta^2 \max_{t\in[0,1]} \int_0^t (1-t)s\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(1-s)\,\mathrm{d}s = \beta^2 \max_{t\in[0,1]} \left(\frac{-t^2}{2} + \frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{\beta^2}{8} < \frac{1}{8}(2\sqrt{2})^2 = 1,\end{aligned}$$

a teda podmienky Vety 3.7 sú splnené, čím je zaručené jednoznačné riešenie integrálnej rovnice (3.5). □

Znova uvažujme integrálnu rovnicu (3.15). Podmienku jednoznačnosti vieme vylepšiť prácou v $L^2\,[a,b]$.

Veta 3.9. *Predpokladajme nasledujúce:*

- *$K(x,y)$ je spojitá funkcia pre $a \leq x, y \leq b$,*
- *$f(y,z)$ je spojitá a ohraničená funkcia pre $y \in [a,b]$ a pre $z \in \mathbb{R}$,*

- *existuje merateľná funkcia $N(x,y)$ taká, že*

$$|K(x,y)\,[f(y,z_1)-f(y,z_2)]| \le N(x,y)\,|z_1-z_2| \;\; \textit{pre } x,y\in[a,b] \;\; \textit{a } z_1,z_2\in\mathbb{R},$$

$\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}x < \infty$ *a* $\sqrt{\int_a^b \left(\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y} = L$, *kde* $L<1$.

Potom má rovnica (3.5) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pracujeme v Banachovom priestore Lebesgueovsky integrovateľných funkcií s kvadrátom $L^2[a,b]$ s normou $\|u\|_2 = \sqrt{\int_a^b |u(x)|^2\,\mathrm{d}x}$. Definujme operátor $F : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y,u(y))\,\mathrm{d}y.$$

Overme, že $Fu \in L^2[a,b]$. Nech $u\in L^2[a,b]$. Z nerovnosti $|a|-|b|\le|a-b|$ plynie

$$|(Fu)(x)| \le |(Fu)(x)-(F0)(x)| + |(F0)(x)|, \tag{3.18}$$

kde 0 chápeme ako nulovú funkciu. Pre člen $|(Fu)(x)-(F0)(x)|$ vďaka predpokladu vety dostávame

$$\begin{aligned}|(Fu)(x)-(F0)(x)| &\le \int_a^b |K(x,y)\,[f(y,u(y))-f(y,0))]|\,\mathrm{d}y\\ &\le \int_a^b N(x,y)\,|u(y)|\,\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Využitím odhadov (3.18) a (3.19) získavame

$$|(Fu)(x)| \le \int_a^b N(x,y)\,|u(y)|\,\mathrm{d}y + \int_a^b K(x,y)f(y,0)\,\mathrm{d}y.$$

Oba členy na pravej strane nerovnice sú integrovateľné s kvadrátom. Skutočne, druhý člen je podľa predpokladu vety spojitá funkcia na kompaktnom intervale, a teda je určite integrovateľný s kvadrátom a pre prvý člen vďaka Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti platí

$$\int_a^b \left(\int_a^b N(x,y)\,|u(y)|\,\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x \le \int_a^b \left(\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}y \int_a^b |u(y)|^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

kde integrály na pravej strane sú vďaka $u\in L^2[a,b]$ a predpokladu vety konečné, a teda $|(Fu)(x)|$ je obmedzená súčtom výrazov, ktoré sú integrovateľné s kvadrátom. Preto vďaka uzavrenosti priestoru L^2 na sčítanie je aj tento súčet je integrovateľný s kvadrátom, odkiaľ plynie, že $Fu\in L^2[a,b]$. Ukážme kontraktivitu F. Platí

$$\begin{aligned}|(Fu_1)(x)-(Fu_2)(x)| &= \left|\int_a^b K(x,y)\,[f(y,u_1(y)-f(y,u_2(y))]\,\mathrm{d}y\right|\\ &\le \int_a^b |K(x,y)\,[f(y,u_1(y)-f(y,u_2(y))]|\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Využitím predpokladu vety a Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti postupne dostávame

$$\begin{aligned}&\int_a^b |K(x,y)\,[f(y,u_1(y)-f(y,u_2(y))]|\,\mathrm{d}y \le \int_a^b N(x,y)\,|u_1(y)-u_2(y)|\,\mathrm{d}y\\ &\le \sqrt{\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}y}\sqrt{\int_a^b |u_1(y)-u_2(y)|^2\,\mathrm{d}y} = \sqrt{\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}y}\;\|u_1-u_2\|_2\,.\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}
\|Fu_1 - Fu_2\|_2 &\leq \left\| \sqrt{\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}y}.\ \|u_1 - u_2\|_2 \right\|_2 \\
&= \sqrt{\int_a^b \left(\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \|u_1 - u_2\|_2^2 \,\mathrm{d}x} \\
&= \|u_1 - u_2\|_2 \sqrt{\int_a^b \left(\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x} \\
&= L \|u_1 - u_2\|_2 ,
\end{aligned}$$

kde $L < 1$, a teda operátor F je kontraktívny, čiže predpoklady Banachovej vety 2.12 sú splnené, z čoho plynie, že operátor F má práve jeden pevný bod, ktorý je zrejme jednoznačným riešením rovnice (3.15) v $L^2[a,b]$. Všeobecne nám tento výsledok nemusí implikovať existenciu a jednoznačnosť spojitého riešenia, avšak uvažujme nasledujúcu myšlienku. Nech $u^\times, u^*$ sú rôzne spojité riešenia (3.15). Poznamenajme, že existenciu aspoň jedného spojitého riešenia zaručuje Veta 3.3 (ktorá nepotrebuje žiadne dodatočné predpoklady). Ak sú $u^\times, u^*$ dve rôzne spojité funkcie, tak sa líšia na množine nenulovej miery, a teda sú rôzne aj v L^2 zmysle. Spojitá funkcia na kompaktnom intervale je určite integrovateľná s kvadrátom, z čoho plynie, že $u^\times, u^* \in L^2[a,b]$, odkiaľ vďaka jednoznačnosti v $L^2[a,b]$ dostávame, že $u^\times = u^*$, čo je spor. □

Aplikujme Vetu 3.9 na integrálnu rovnicu (3.5).

Veta 3.10. *Predpokladajme, že $\alpha < (\sqrt[4]{90}/\pi)\omega$, kde ω je uhlová frekvencia sily pôsobiacej na kyvadlo a α je vlastná frekvencia kyvadla. Potom má rovnica* (3.5) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pre konštantu β definovanú v (3.2) využitím predpokladu vety dostávame

$$\beta = \frac{\alpha\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\omega}\frac{\sqrt[4]{90}\omega}{\pi} = \sqrt[4]{90}.$$

Opäť zvoľme funkciu $N(t,s) = \beta^2 |G(t,s)|$. Potom

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\int_a^b N(t,s)^2 \,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \beta^4 G(t,s)^2 \,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\
&= \beta^4 \int_0^1 \left(\int_0^t (t-1)^2 s^2 \,\mathrm{d}s + \int_t^1 t^2 (s-1)^2 \,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\
&= \beta^4 \int_0^1 \left(\frac{t^4}{3} - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{3} \right) \mathrm{d}t = \frac{\beta^4}{90} = P^2,
\end{aligned}$$

kde

$$P = \frac{\beta^2}{\sqrt{90}} < \frac{\left(\sqrt[4]{90}\right)^2}{\sqrt{90}} = 1.$$

Rovnica (3.5) spĺňa podmienky Vety 3.9, a teda existuje jej jednoznačné spojité riešenie. □

Poznámka 3.11. (i) Približným vyčíslením podmienky pre jednoznačnosť v priestore $C[a,b]$ získame $\alpha < (2\sqrt{2}/\pi)\omega \doteq 0.9003\,\omega$. Ak urobíme to isté pre podmienku v priestore $L^2[a,b]$, dostaneme $\alpha < (\sqrt[4]{90}/\pi)\omega \doteq 0.9804\,\omega$. Prácou v $L^2[a,b]$ sme si skutočne polepšili, pretože nám umožňuje brať za budiacu silu funkcie aj s nižšou periódou, a teda celkovo viac funkcií.

(ii) Ukázali sme, že náš okrajový problém bude mať jednoznačné riešenie, ak bude, zhruba povedané, frekvencia budiacej sily väčšia ako vlastná frekvencia kyvadla.

(iii) Jednoznačnosť riešenia integrálnej rovnice (3.5) sme mohli dokázať jednoduchším spôsobom, ktorý je obdobný dôkazu Vety 3.3 a je založený na ohraničenosti funkcie G. Poskytuje však horšiu podmienku pre jednoznačnosť riešenia (3.5). Definujme operátor $F : C[0,1] \to C[0,1]$ predpisom

$$(Fu)(t) = \int_0^1 G(t,s)\left[F(s) - \beta^2 \sin(u(s))\right]\, \mathrm{d}s.$$

Platí

$$\begin{aligned}|(Fu_1)(t) - (Fu_2)(t)| &\le \int_0^1 \beta^2 \left|G(t,s)\left[\sin(u_2(s)) - \sin(u_1(s))\right]\right|\, \mathrm{d}s \\ &\le \frac{\beta^2}{4}\int_0^1 |\sin(u_2(s)) - \sin(u_1(s))|\, \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

kde sme využili fakt, že $\max\{|G(t,s)|, t, s \in [a,b]\} = 1/4$. Ďalej platí

$$\frac{\beta^2}{4}\int_0^1 |\sin(u_2(s)) - \sin(u_1(s))|\, \mathrm{d}s \le \frac{\beta^2}{4}\int_0^1 |u_2(s) - u_1(s)|\, \mathrm{d}s.$$

Potom

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_C \le \frac{\beta^2}{4}\int_0^1 |u_2(s) - u_1(s)|\, \mathrm{d}s \le \frac{\beta^2}{4}\int_0^1 \|u_2 - u_1\|_C\, \mathrm{d}s = \frac{\beta^2}{4}\|u_1 - u_2\|_C\,.$$

Ak chceme, aby bola splnená podmienka kontraktivity, potrebujeme, aby

$$\frac{\beta^2}{4} = \frac{\alpha^2\pi^2}{4\omega^2} < 1 \Longrightarrow \alpha < \frac{2}{\pi}\omega \doteq 0,6366\,\omega,$$

a vidíme, že podmienka získaná jednoduchším spôsobom je skutočne výrazne horšia v porovnaní s tými získanými vo vyššie uvedených prístupoch.

Ako sme už poznamenali, prácou v $L^2[a,b]$ sme si oproti práci v $C[a,b]$ polepšili. Prirodzená otázka je, či sa dá podmienka ďalej vylepšiť prácou v $L^p[a,b]$ s vhodne zvoleným p. Ukážeme, že sa to dá. Uvažujme rovnicu (3.15). Pracujme v priestore $L^p[a,b]$ s normou

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

a opäť predpokladajme, že $K(x,y)$ je spojitá funkcia pre $a \le x, y \le b$, $f(y,z)$ je spojitá a ohraničená funkcia pre $y \in [a,b]$ a pre $z \in \mathbb{R}$ a ďalej, že existuje merateľná funkcia $N(x,y)$ taká, že

$$|K(x,y)\left[f(y,z_1) - f(y,z_2)\right]| \le N(x,y)\,|z_1 - z_2| \;\text{ pre } x, y \in [a,b] \text{ a } az_1, z_2 \in \mathbb{R},$$

$\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y < \infty$ a $\int_a^b \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{p/q} \mathrm{d}x < \infty$. Definujme operátor $F : L^p[a,b] \to L^p[a,b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y,u(y))\,\mathrm{d}y.$$

Overme, že $Fu \in L^p[a,b]$. Nech $u \in L^p[a,b]$. Potom

$$\begin{aligned}
|(Fu)(x)| &\leq |(Fu)(x) - (F0)(x)| + |(F0)(x)| \\
&\leq \int_a^b N(x,y)\,|u(y)|\,\mathrm{d}y + \int_a^b K(x,y) f(y,0)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

kde 0 chápeme ako nulovú funkciu. Oba členy na pravej strane nerovnosti patria do $L^p[a,b]$. Druhý, pretože ide o spojitú funkciu na kompaktnom intervale a integrovateľnosť prvého plynie z nasledujúceho odhadu

$$\int_a^b \left(\int_a^b N(x,y)\,|u(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x \leq \int_a^b \left(\left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{p/q} \left(\int_a^b |u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)\right) \mathrm{d}x,$$

kde sme využili Hölderovu nerovnosť. Prvý integrál na pravej strane je konečný vďaka predpokladu a druhý je konečný vďaka $u \in L^p[a,b]$, a teda $Fu \in L^p[a,b]$. Nájdime podmienku pre kontraktivitu operátoru. Platí

$$\begin{aligned}
|(Fu_1)(x) - (Fu_2)(x)| &\leq \int_a^b |K(x,y)\,[f(y,u_1(y)) - f(y,u_2(y))]|\,\mathrm{d}y \\
&\leq \int_a^b N(x,y)\,|u_1(y) - u_2(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Využitím Hölderovej nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned}
\int_a^b N(x,y)\,|u_1(y) - u_2(y)|\,\mathrm{d}y &\leq \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{1/q} \left(\int_a^b |u_1(y) - u_2(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&= \|u_1 - u_2\|_p \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{1/q},
\end{aligned}$$

kde $1 < p, q < \infty$ sú čísla zviazané vzťahom $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Platí

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_p \leq \left\| \|u_1 - u_2\|_p \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{1/q} \right\|_p = \|u_1 - u_2\|_p\,\mathrm{I}_p,$$

kde $\mathrm{I}_p = \left(\int_a^b \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{p/q} \mathrm{d}x\right)^{1/p}$. Opäť zvoľme tvar funkcie $N(x,y) = \beta^2\,|G(x,y)|$. Potom

$$\begin{aligned}
\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \beta^{2q}\,|G(x,y)|^q\,\mathrm{d}y = \beta^{2q}\left(\int_0^x (1-x)^q\,y^q\,\mathrm{d}y + \int_x^1 (1-y)^q x^q\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \beta^{2q}\left[(1-x)^q \int_0^x y^q\,\mathrm{d}y + x^q \int_x^1 (1-y)^q\,\mathrm{d}y\right] \\
&= \beta^{2q}(1-x)^q \frac{x^{q+1}}{q+1} + \beta^{2q} x^q \frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \\
&= \beta^{2q}(1-x)^q x^q \frac{1}{q+1}\,[x + 1 - x] = \beta^{2q}(1-x)^q x^q \frac{1}{q+1},
\end{aligned}$$

kde sme využili, že $|G(x,y)| = -G(x,y)$ a

$$|G(x,y)|^q = \begin{cases} x^q(1-y)^q & \text{pre } 0 \le x \le y \le 1 \\ (1-x)^q y^q & \text{pre } 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}.$$

Z podmienky $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ plynie $q = \dfrac{p}{p-1}$. Potom

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_p &= \left(\int_a^b \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 \left(\beta^{2q} \frac{(1-x)^q x^q}{q+1} \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\ &= \beta^2 \left(\int_0^1 \frac{(1-x)^p x^p}{\left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{p-1}} \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} = \beta^2 \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(1-p)/p} \left(\int_0^1 (1-x)^p x^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Binomický integrál, ktorý sa objavil na pravej strane, sa dá vyjadriť v tvare

$$\int_0^1 (1-x)^p x^p \,\mathrm{d}x = \mathrm{B}(p+1, p+1),$$

kde B je beta funkcia. Potom

$$\mathrm{I}_p = \beta^2 \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(1-p)/p} \sqrt[p]{\mathrm{B}\,(p+1+p+1)}.$$

Ak chceme, aby bol operátor kontraktívny, potrebujeme $\mathrm{I}_p < 1$. Odtiaľ s využitím definície β v (3.2) dostávame predpis pre správanie sa podmienky pre jednoznačnosť riešenia integrálnej rovnice (3.5) pre všeobecné p

$$\alpha < \frac{1}{\pi} \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(p-1)/2p} \sqrt[2p]{\mathrm{B}\,(p+1+p+1)}\, \omega, \tag{3.20}$$

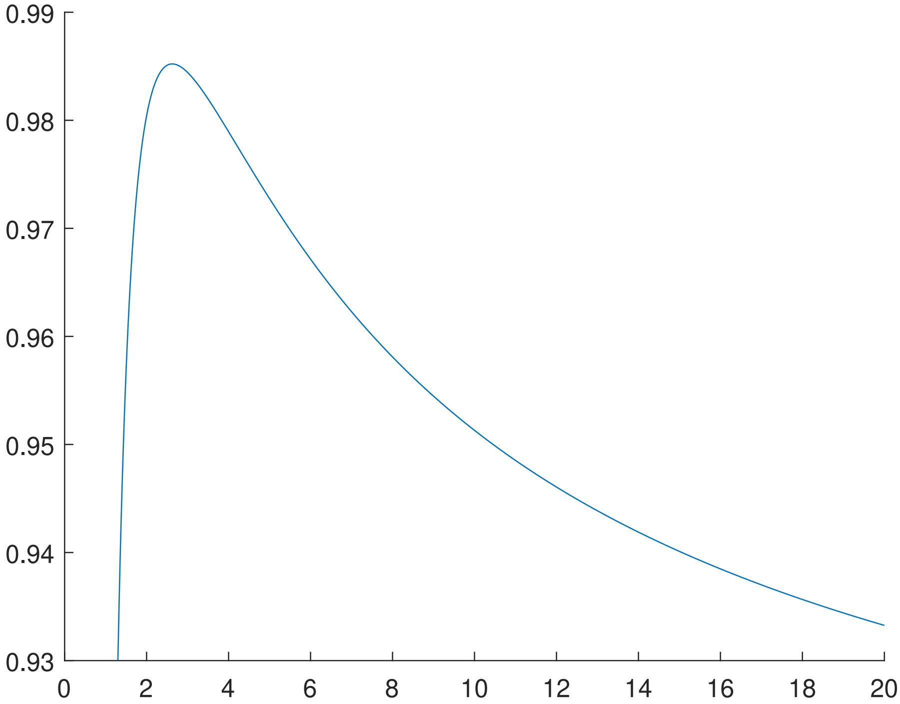
kde ω je uhlová frekvencia sily pôsobiacej na kyvadlo a α je vlastná frekvencia kyvadla. Označme

$$k(p) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(p-1)/2p} \sqrt[2p]{\mathrm{B}\,(p+1+p+1)}.$$

Potom

$$\alpha < k(p)\,\omega.$$

Je zrejmé, že hľadáme také p, aby bolo $k(p)$ čo najväčšie. Hľadať extrém analyticky je príliš náročné, nájdeme ho graficky. Graf funkcie $k(p)$ je na obrázku 3.1. Prácou v $L^p\,[0,1]$ sa podarilo zväčšiť hodnotu k_m takú, že $\alpha < k_m\,\omega \doteq 0,9852\,\omega$, ktorú nadobudne $k(p)$ zhruba pre $p \doteq 2,6$, čím sme ďalej vylepšili podmienku pre jednoznačnosť riešenia rovnice (3.5) v L^p. Rovnakým spôsobom akým sme ukázali, že zlepšenie podmienky pre jednoznačnosť v L^2 implikuje zlepšenie podmienky pre jednoznačnosť spojitého riešenia na konci dôkazu Vety 3.9, by sme dokázali rovnaký fakt pre L^p.



Obr. 3.1: Graf závislosti $k(p)$ na p

Ďalej nás zaujíma správanie sa podmienky pre jednoznačnost pre $p \to \infty$, najmä, či platí, že podmienka v $(L^p\,[a,b]\,, \|\cdot\|_p)$ bude pre $p \to \infty$ rovnaká, ako v $(C\,[a,b]\,, \|\cdot\|_C)$, čo intuitívne očakávame. Ak $p \to \infty$, pre Beta funkciu platí podľa Stirlingovho vzorca

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p+1,p+1) &\sim \frac{\sqrt{2\pi}(p+1)^{p+1/2}(p+1)^{p+1/2}}{(2p+2)^{2p+3/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}(p+1)^{2p+1}}{2^{2p+3/2}(p+1)^{2p+3/2}}\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2p+3/2}(p+1)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2p+1}(2p+2)},\end{aligned}$$

kde $f(x) \sim g(x)$ je symbol pre asymptotickú ekvivalenciu funkcií f, g, tj. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Užitím predchádzajúcich relácií a L'Hospitalovho pravidla dostávame

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} \mathrm{I}_p &= \lim_{p\to\infty} \beta^2 \left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{(1-p)/p} \sqrt[p]{\mathrm{B}\,(p+1+p+1)}\\ &= \beta^2 \lim_{p\to\infty} \left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{(1-p)/p} \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\mathrm{B}\,(p+1+p+1)}\\ &= \beta^2 \lim_{p\to\infty} \left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{(1-p)/p} \lim_{p\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2p+1}(2p+2)}\right)^{1/p}\\ &= \beta^2\, \frac{1}{2}\, \frac{1}{4} = \frac{\beta^2}{8}.\end{aligned}$$

Ak chceme, aby bola podmienka kontraktivity splnená, potrebujeme $\lim_{p\to\infty}\mathrm{I}_p < 1$, čiže

$$\frac{\alpha^2\pi^2}{\omega^2}\,\frac{1}{8} = \frac{\beta^2}{8} < 1,$$

odkiaľ dostávame

$$\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\omega,$$

čím sme získali rovnakú podmienku pre jednoznačnosť riešenia ako v priestore $(C\,[a,b], \|\cdot\|_C)$.

3.4 Ďalšie úvahy

(i) Pripomeňme, že vďaka nepárnosti a periodickosti externej sily $f(x)$ pôsobiacej na kyvadlo, sme boli schopní previesť riešenie diferenciálnej rovnice výchylky matematického kyvadla

$$u'' + \alpha^2 \sin u = f(x) \tag{3.21}$$

na okrajovú úlohu na $[0,1]$. Uvažujme teraz $f(x)$ spojitú a periodickú s periódou T (predpoklad nepárnosti je vynechaný). Vzhľadom na periodickosť úlohy nám stačí nájsť riešenie u na intervale $[0,T]$, ktoré vieme rozšíriť na celú reálnu osu. Potrebujeme teda, aby u spĺňalo periodické okrajové podmienky $u(0)-u(T) = u'(0)-u'(T) = 0$. Táto úloha nemá vždy riešenie. Ako teraz ukážeme, externá sila musí byť „dostatočne malá". Definujme strednú hodnotu funkcie $v \in C\,[0,T]$ ako

$$\overline{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Veta 3.12. *Ak je u riešením rovnice* (3.21) *na* $[0,T]$ *také, že spĺňa periodické okrajové podmienky* $u(0)-u(T) = u'(0)-u'(T) = 0$, *potom stredná hodnota funkcie* $f(x)$ *spĺňa* $\left|\overline{f(x)}\right| \leq \alpha^2$.

Dôkaz. Integráciou rovnice (3.21) od 0 do T dostávame

$$\begin{aligned}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^T \big(u''(x) + \alpha^2\sin(u(x))\big)\,\mathrm{d}x = u'(0)-u'(T) + \alpha^2\int_0^T \sin(u(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha^2\int_0^T \sin(u(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

kde sme využili predpoklad. Potom pre strednú hodnotu funkcie $f(x)$ platí

$$\begin{aligned}\left|\overline{f(x)}\right| &= \frac{1}{T}\left|\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{\alpha^2}{T}\left|\int_0^T \sin(u(x))\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leq \frac{\alpha^2}{T}\int_0^T |\sin(u(x))|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\alpha^2}{T}\int_0^T 1\,\mathrm{d}x = \alpha^2,\end{aligned}$$

čím je veta dokázaná. □

Dá sa ukázať, že pre každú spojitú T-periodickú externú silu takú, že $\overline{f(x)} = 0$, existujú dve T-periodické riešenia, ktoré sa nelíšia konštantou, viď napr. [1].

(ii) Ďalej môžeme uvažovať zovšeobecnenia diferenciálnej rovnice (3.1), napríklad α nemusí byť konštanta, ale funkcia $\alpha(x)$ závislá na čase, čo môžeme interpretovať ako predlžovanie, resp. skracovanie lana, na ktorom je pripevnený hmotný bod. Ak by bola $\alpha(x)$ taká, že $\alpha^2(x)$ je spojitá, periodická a párna, existenčné výsledky, ktoré boli dokázané v sekcii 3.2, zostávajú v platnosti. Ďalším zovšeobecnením môže byť napríklad zahrnutie tlmiaceho členu cu'.

(iii) Ďalším problémom, ktorým sa dá zaoberať, je hľadanie približného riešenia, či už s využitím znalosti riešenia rovnice bez pravej strany (ktoré je vyjadrené pomocou eliptického integrálu), alebo napríklad pomocou metódy postupných aproximácií, ktorá plynie z dôkazu Banachovej vety.

(iv) Tiež sa dá diskutovať otázka násobnosti riešení, stability, či skúmanie kvalitatívnych vlastností všetkých (resp. nejakých) riešení.

ZÁVER

Cieľom tejto práce bolo odvodiť rovnicu matematického kyvadla a s použitím nástrojov, ktoré nám poskytuje funkcionálna analýza (najmä Schauderova, resp. Banachova veta o pevnom bode), dokázať existenčné výsledky nelineárneho modelu s pravou stranou.

V práci sme najprv popísali matematické kyvadlo a odvodili jeho pohybovú rovnicu. Krátko sme zmienili históriu problematiky s dôrazom na tie úseky, ktoré súvisia s našou úlohou. Uvažovali sme linearizáciu modelu, kde sme ukázali problém, ktorý okrem menšej presnosti linearizácia prináša. Potom sme pripomenuli vybrané partie z funkcionálnej analýzy, ktoré sme neskôr potrebovali. Hlavná časť práce sa zaoberala aplikáciou nástrojov funkcionálnej analýzy na problém zaručenia existencie a jednoznačnosti riešenia pohybovej rovnice kyvadla. Diferenciálnu rovnicu tohto pohybu sme dokázali previesť na okrajový problém, ktorý sme následne prepísali do ekvivalentnej integrálnej rovnice, ktorú sme zaradili do širšej množiny integrálnych rovníc. Na tieto rovnice sme aplikovali vety o pevnom bode a výsledky sme použili na konkrétny problém pohybovej rovnice kyvadla.

Jeden z prínosov práce spočíva v doplnení tých častí, ktoré sa často v textoch, týkajúcich sa tejto problematiky, vynechávajú. Ako ďalší prínos práce možno považovať poskytnutie alternatívnych možností, ako postupovať, hlavne v dielčích častiach dôkazov a modifikáciami prístupov pri aplikácii Banachovej vety, čo má za dôsledok rôzne podmienky pre jednoznačnosť riešenia diferenciálnej rovnice kyvadla. Táto podmienka bola ďalej optimalizovaná prácou v priestoroch Lebesgueovsky integrovateľných funkcií. Ako sa ukázalo, dôležitú úlohu hrá vhodná voľba čísla p v priestore L^p. V tejto časti boli odvodené nové výsledky.

Na prácu sa dá nadviazať napríklad ďalším rozvíjaním úvah uvedených v sekcii 3.4.

LITERATÚRA

[1] BROWN, R. F. *A topological introduction to nonlinear analysis*. 3rd ed. Boston: Birkhäuser, 2014. ISBN 978-3-319-11794-2.

[2] GRIFFEL, D. H. *Applied functional analysis*. New York: Dover, 2002. ISBN 0-486-42258-5.

[3] KOLMOGOROV, A. N. a S. V. FOMIN. *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1975.

[4] MAWHIN, J. *Seventy-five years of global analysis around the forced pendulum equation*. In: Equadiff 9. Brno: Stony Brook, New York, 1998, s. 115–145. ISBN 80-210-1940-9.

[5] ZEIDLER, E. *Nonlinear functional analysis and its applications: I. Fixed-point theorems*. New York: Springer-Verlag, 1986. ISBN 978-0-387-90914-1.