

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Pavla Jakubcová

III. ročník – prezenční studium

Obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – Společenské vědy se
zaměřením na vzdělávání

Geometrické zobrazení v učivu základní školy

Bakalářská práce

Vedoucí práce: Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D

Olomouc 2010

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použila uvedených pramenů a zdrojů.

V Olomouci dne 13.dubna 2010

Pavla Jakubcová

.....

Podpis

Poděkování:

Touto cestou chci poděkovat Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D., která mi poskytla cenné rady, podněty a připomínky při zpracování mé bakalářské práce. Také za její velkou ochotu a vstřícnost.

OBSAH

ÚVOD	6
1 GEOMETRICKÉ ÚTVARY A VZTAHY MEZI NIMI	7
1.1 Základní geometrické útvary	7
1.2 Vztahy mezi základními útvary	9
1.3 Vzdálenost geometrických útvarů (Metrické vlastnosti)	13
1.4 Úlohy	14
1.5 Řešení úloh	15
2 SHODNOST NĚKTERÝCH ÚTVARŮ V ROVINĚ.....	17
2.1 Shodnost v rovině	17
2.2 Shodné útvary	18
2.3 Úlohy	18
2.4 Řešení úloh	20
3 OSOVÁ SOUMĚRNOST	21
3.1 Co rozumíme obrazem v osově souměrnosti?	21
3.2 Konstrukce obrazů	22
3.3 Osově souměrné tvary	26
3.4 Shrnutí	27
3.5 Úlohy	27
3.6 Řešení úloh	30
4 STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST	38
4.1 Co rozumíme obrazem ve středové souměrnosti?	38
4.2 Konstrukce obrazů	39
4.3 Středově souměrné tvary	42
4.4 Úlohy	42
4.5 Řešení úloh	44
5 POSUNUTÍ (TRANSLACE).....	51
5.1 Co rozumíme obrazem v translaci?	51
5.2 Konstrukce obrazu	51
5.3 Úlohy	54
5.4 Řešení úloh	55

6	ROTACE (TRANSLACE)	59
6.1	Co rozumíme obrazem v rotaci?	59
6.2	Konstrukce obrazu	59
6.3	Úlohy	63
6.4	Řešení úloh.....	64
ZÁVĚR		68
Seznam literatury		69
Poznámky		71
Seznam obrázků		72

ÚVOD

Pro svou práci jsem si vybrala téma shodná zobrazení. Jedná se o učivo, které rozvíjí geometrické znalosti dítěte, učí ho pracovat s různými geometrickými útvary v rovině a ukazuje spojení matematiky s reálným světem. Toto učivo jsem si zvolila také z toho důvodu, že je kreativní nejen pro studenta, ale i pro pedagoga.

Vzhledem k vývoji počítačové grafiky vznikají nové možnosti výuky, které v jiných generacích nebylo možno využít. Díky počítačové technice může student měnit ve své konstrukci jednotlivé parametry (posouvat, otáčet nebo měnit velikost objektu). Učitel může ukázat studentovi geometrii v pohybu, kterou by za pomoci běžných rýsovacích potřeb nemohl použít. Tato oblast je pro mladého pedagoga blízká a zajímavá, protože mladší generace je mnohdy operativnější v práci s počítačem a proto může hledat a ukazovat nové cesty při předávání tohoto učiva.

V první kapitole uvádím základní geometrické útvary v rovině, úlohy se zabývají vzájemnou polohou objektů a metrickými vlastnostmi těchto objektů. Jsou zde také uvedeny základní poznatky z oblasti stereometrie, se kterými se student seznamuje na základní škole.

Druhá kapitola je věnována problematice shodných zobrazení. Nalezneme zde základní pojmy, se kterými pracujeme v dalších kapitolách.

Třetí kapitola se věnuje prvnímu shodnému zobrazení - osově souměrnosti, čtvrtá kapitola - středově souměrnosti, v páté kapitole řešíme problematiku translace a poslední kapitola je věnována rotaci.

Všechny tyto kapitoly jsou koncipovány stejným způsobem. V úvodu je vždy uvedena základní charakteristika vybraného zobrazení, dále je řešen vztah mezi vzorem a obrazem objektu a v následující podkapitole předkládám základní úlohy s grafickým řešením. V každé kapitole jsou úlohy, kde je příslušné učivo procvičováno. Setkáváme se zde jak s úlohami elementárními, tak úlohami, které jsou předstupněm středoškolského vnímání shodných zobrazení.

1 GEOMETRICKÉ ÚTVARY A VZTAHY MEZI NIMI

1.1 Základní geometrické útvary

Základními geometrickými útvary jsou: bod, úsečka, přímka, polopřímka, rovina a polorovina.

a) Bod

- Značíme ho velkým tiskacím písmenem abecedy.



Obr. 1.1.1: Bod

b) Úsečka

- Značíme např. AB, kdy body A,B jsou krajními body úsečky.



Obr. 1.1.2: Úsečka

c) Přímka

- Značíme ji malým tiskacím písmenem abecedy nebo pomocí dvou bodů přímky.
- Můžeme ji popsat jako nekonečně dlouhou rovnou křivku.
- Značení: $\leftrightarrow$ AB ... přímka AB

p ... přímka p

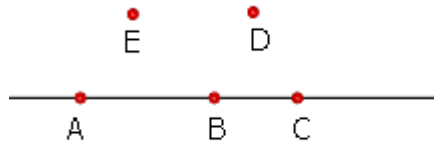


Obr. 1.1.3: Přímka

d) Polopřímka

- Každý bod X polopřímky AB je bodem úsečky AB nebo pro něj platí, že bod B leží mezi body A,X.
- Dvěma různými body A,B je určena polopřímka AB a polopřímka k ní opačná i polopřímka BA.

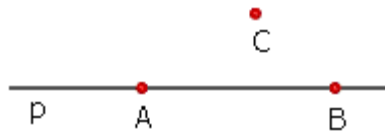
- Bod A se nazývá počátek polopřímky AB.
 - Zápis: $\mapsto AB$ čteme: Polopřímka AB.
- $C \in \mapsto AB$ čteme: Bod C náleží polopřímce AB. ¹⁾



Obr. 1.1.4: Polopřímka

e) *Rovina*

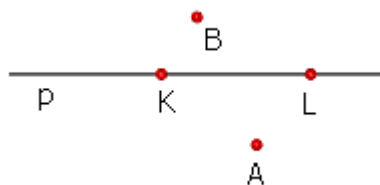
- Je určena třemi body, které neleží v jedné přímce nebo bodem a přímkou.
- Značení: $\alpha, \beta \dots$



Obr. 1.1.5: Rovina

f) *Polorovina*

- Přímka p rozdělí rovinu na dvě poloroviny (navzájem opačné).
- Značení: $\mapsto pA$
- p... hraniční přímka poloroviny
- A,B ...vnitřní body poloroviny ²⁾



Obr. 1.1.6: Polorovina

1.2 Vztahy mezi základními útvary

Bod a přímka

- a) $A \in p$... bod A leží na přímce p
- b) $B \notin p$... bod B neleží na přímce p

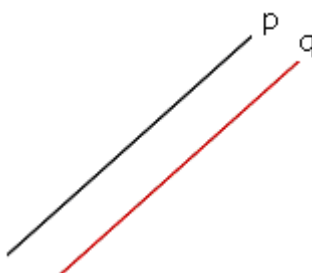


Obr. 1.2.1: Vzájemná poloha přímky a bodu

Dvě přímky

Dvě přímky můžeme třídit podle toho, kolik mají tyto dvě přímky společných bodů

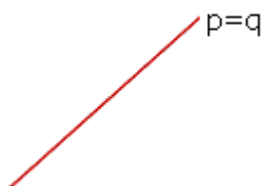
- a) Přímky p,q nemají žádný společný bod, říkáme jim rovnoběžné přímky, neboli jednoduše rovnoběžky. Průnikem těchto dvou přímek je tedy prázdná množina: $p \cap q = \{ \}$. Skutečnost, že jsou přímky rovnoběžné, vyznačíme v náčrtku dvojím krátkým „rovnoběžným“ přeškrtnutím obou přímek a zapíšeme pomocí znaku rovnoběžnosti $||$ takto: $p||q$.³⁾



Obr. 1.2.2: Rovnoběžné přímky

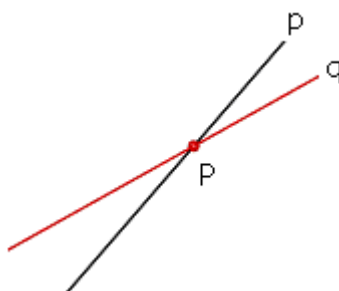
- b) Za zvláštní případ rovnoběžnosti se považuje situace, kdy přímky p,q splynou. Tato situace nastane tehdy, když každý bod přímky p leží na přímce q a každý bod přímky q leží na přímce p. Průnikem těchto dvou

přímek je tedy: $p \cap q = p = q$. Pokud nastane tento případ, říkáme, že přímky p, q jsou totožné rovnoběžky.



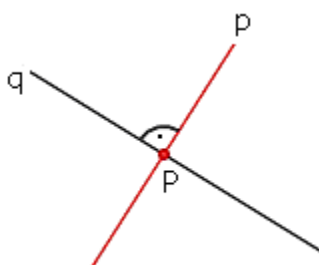
Obr. 1.2.3: Totožné přímky

- c) Pokud mají přímky p, q jeden společný bod, říkáme jim různoběžné přímky neboli různoběžky. Společný bod P různoběžných přímek nazýváme průsečík a platí že: $p \cap q = \{P\}$. Skutečnost, že přímky jsou různoběžné označíme v náčrtku přeškrtnutým znakem rovnosti $\neq$.⁴⁾



Obr. 1.2.4: Různoběžné přímky

- d) Zvláštním případem různoběžek je ten, když jsou přímky na sebe kolmé neboli kolmice. Tyto přímky mezi sebou svírají úhel 90° . Pravý úhel je možno narýsovat pomocí trojúhelníku s ryskou a značí se pomocí obloučku s tečkou uvnitř a nachází se u vrcholu svírajícího rameny úhlu.

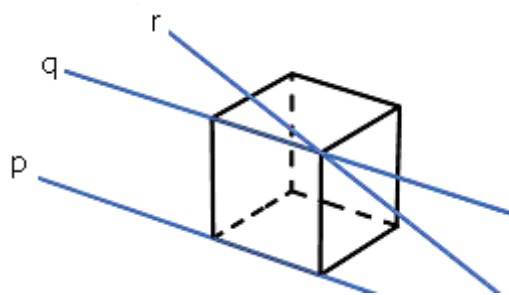


Obr. 1.2.5: Kolmé přímky

Přímka a rovina

Vzájemná poloha přímky a roviny v prostoru jsou vzhledem k osnovám základní školy rozšiřujícím učivem a záleží na pedagogovi, zda uzná za vhodné tuto problematiku s žáky probrat. Je ale doporučeno jej stručně probrat.

- a) Jestliže nalezneme dva různé body A, B přímky p , který leží v rovině α , pak celá přímka leží v rovině α .
- b) Jestliže v rovině α nalezneme aspoň jednu přímku p rovnoběžnou s danou přímkou q , je přímka q rovnoběžná s rovinou α . Přímky jsou rovnoběžné, proto nemají žádný společný bod. Značíme $(p \parallel q)$.
- c) Pokud má přímka r s rovinou α společný právě jeden bod C , říkáme, že přímka r je různoběžná s rovinou α . Bod C nazýváme průsečíkem přímky r s rovinou α .⁵⁾

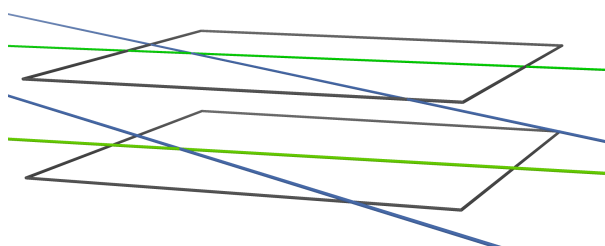


Obr. 1.2.6: Vzájemná poloha přímky a roviny

Dvě roviny

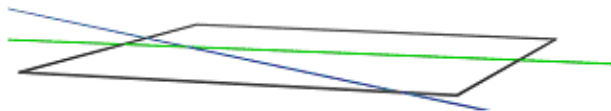
Toto učivo se opět chápe jako rozšiřující, ale je doporučeno jej alespoň stručně projít.

- a) Pokud máme dvě roviny, které nemají žádný společný bod, nazýváme je rovnoběžné. Dvě roviny jsou rovnoběžné, obsahuje-li jedna z nich dvě různoběžky rovnoběžné s druhou rovinou.⁶⁾



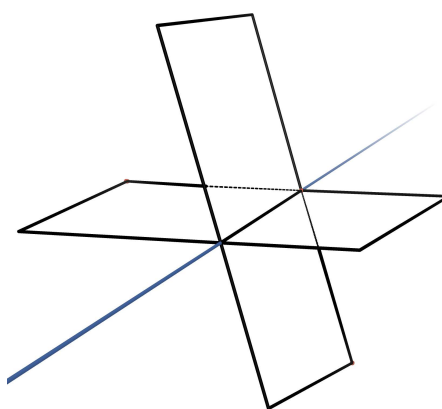
Obr. 1.2.7: Rovnoběžné roviny

- b) Za zvláštní případ rovnoběžnosti dvou rovin α , β je situace, kdy roviny splynou. Každý bod roviny α je totožný s body roviny β a naopak.



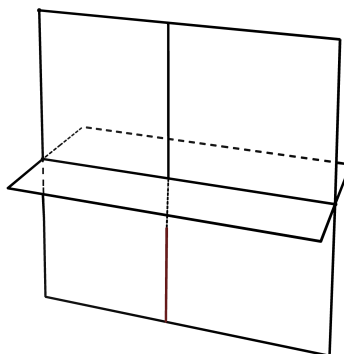
Obr. 1.2.8: Totožné roviny

- c) Rovina α má s rovinou β právě jednu společnou přímku r a ta se nazývá průsečnice rovin α a β . O rovinách říkáme, že jsou různoběžné.



Obr. 1.2.9: Různoběžné roviny

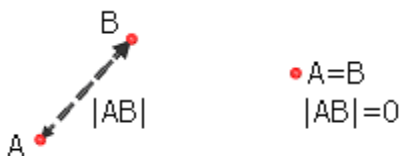
- d) O rovině α , která má přímku kolmou k rovině β , říkáme, že rovina α je kolmá na rovinu β .



Obr. 1.2.10: Kolmé roviny

1.3 Vzdálenost geometrických útvarů (Metrické vlastnosti)

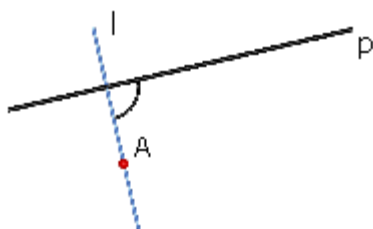
U vzdálenosti dvou bodů mohou nastat dva případy. V prvním se jedná o dva různé body A,B, kdy jejich vzdálenost je délka úsečky AB. V druhém případě jsou dva body A,B totožné a jejich vzdálenost je rovna nule.



Obr. 1.3.1: Vzdálenost dvou bodů

Úloha 1.3.1 Zjistěte vzdálenost bodu A od přímky p.

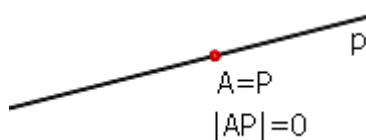
Řešení: Vzdálenost bodu A od přímky p zjistíte tak, že povedete bodem A kolmici l k přímce p. Průsečík kolmice l a přímky p označte jako P. P můžete brát i jako patu kolmice l.



Obr. 1.3.1.1: Úloha 1.3.1 - Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost bodu A od přímky p je tedy vzdálenost bodu A od paty P, kterou označíme $|Ap|$. Platí $|Ap| = |AP|$.

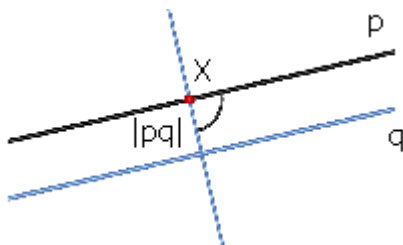
Pokud bod A patří přímce p, tedy $A=P$, tak v tomto případě je vzdálenost bodu A od přímky p rovna nule.



Obr. 1.3.1.2: Úloha 1.3.1 - Vzdálenost bodu od přímky

Úloha 1.3.2 Zjistěte vzdálenost rovnoběžných přímek p , q .

Řešení: Nalezněte libovolný bod X přímky p a určete vzdálenost mezi tímto bodem a přímkou q . Je jedno, který bod na přímce p si zvolíte. Je také možnost, najít bod X na přímce q a určit vzdálenost mezi tímto bodem a přímkou p .



Obr. 1.3.2.1: Vzdálenost dvou přímek

O vzdálenosti dvou přímek hovoříme tedy jen tehdy, jsou-li přímky rovnoběžné. Vzdálenost dvou přímek p , q značíme $|pq|$.

1.4 Úlohy

1.4.1 Narýsujte přímku p , zvolte bod $A \in p$ a bod $B \notin p$. Každým z bodů A, B ved'te kolmici k přímce p . Jakou vzájemnou polohu mají tyto kolmice?

1.4.2 Narýsujte přímku p , na ní bod A a mimo ni bod B . Bodem A ved'te kolmici q k přímce p a bodem B rovnoběžku r s přímkou p . Zapište symbolicky vzájemnou polohu přímek.

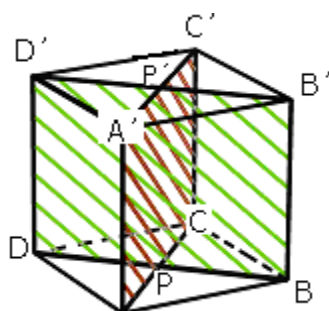
- a) p, q b) q, r c) q, r

1.4.3 Sestrojte bod A , který je od dané přímky q vzdálen 2 cm. Kolik takových bodů můžeme sestrojit? Jakou množinu všechny tyto body vyplní?

1.4.4 Jakou vzájemnou polohu mají uvedené roviny (Obr. 1.4.4.1)? Pokud jsou různoběžné, zapište jejich průsečnici.

- a) $\leftrightarrow ABC$ a $\leftrightarrow ACC'$
b) $\leftrightarrow ABC$ a $\leftrightarrow A'B'D'$
c) $\leftrightarrow ABB'$ a $\leftrightarrow DBD'$
d) $\leftrightarrow ACC'$ a $\leftrightarrow DBD'$

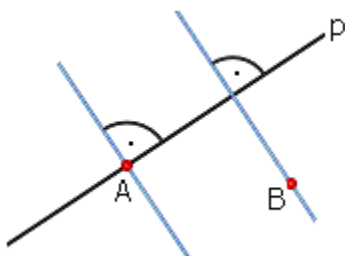
$$e) \Leftrightarrow ACC'a \Leftrightarrow A'B'D'$$



Obr. 1.4.4.1: Úloha 1.4.4

1.5 Řešení úloh

Řešení úlohy 1.4.1 (Obr. 1.4.1.1)

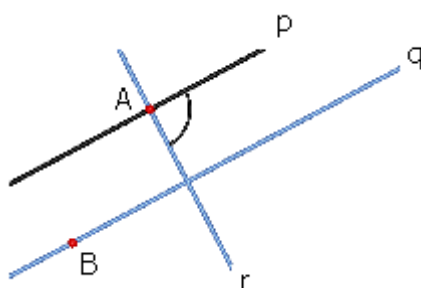


Obr. 1.4.1.1: Úloha 1.4.1

Závěr: Kolmice na přímkou p jsou rovnoběžné.

Řešení úlohy 1.4.2 (Obr. 1.4.2.1):

- a) $p \parallel q$
- b) $p \perp r$
- c) $q \perp r$

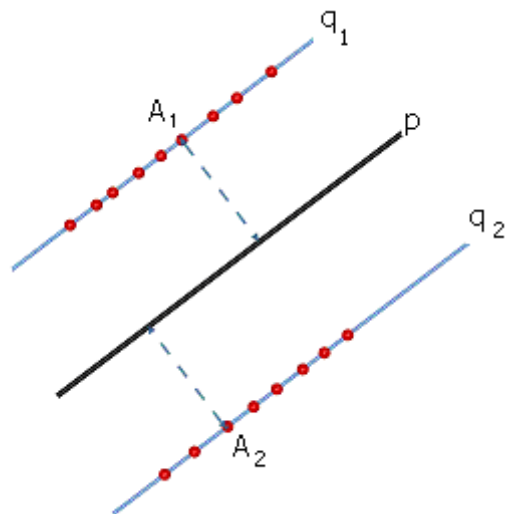


Obr. 1.4.2.1: Úloha 1.4.2

Řešení úlohy 1.4.3:

Sestrojte přímkou p a k ní libovolnou kolmici. Na této kolmici sestrojte body vzdálené 2 cm od přímky p (v obou polorovinách). Vzniklé body označ A_1 a A_2 .

Danými body sestrojte rovnoběžky s přímkou p . Vzniklé přímky obsahují nekonečně mnoho bodů vzdálených 2cm od přímky p (Obr. 1.4.3.1).



Obr. 1.4.3.1: Úloha 1.4.3

Závěr: Můžete sestrojit nekonečně mnoho takových bodů. Jejich množinu tvoří dvě rovnoběžné přímky q_1, q_2 s přímkou p , jejichž vzdálenost od přímky p je 2 cm.

Řešení úlohy 1.4.4:

- a) $ABC, ACC' =$ různoběžné roviny, kolmé, průsečík AC
- b) $ABC, A'B'C' =$ rovnoběžné roviny
- c) $ABB', DB'D =$ různoběžné roviny, průsečík BB'
- d) $ACC', DBD' =$ různoběžné roviny, kolmé, průsečík PP'
- e) $ACC', A'B'D' = PP'$

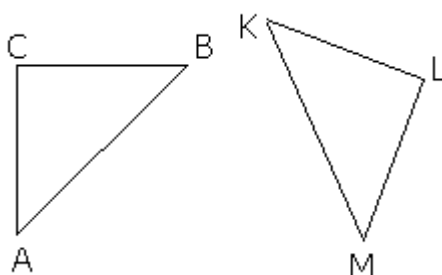
2 SHODNOST NĚKTERÝCH ÚTVARŮ V ROVINĚ

2.1 Shodnost v rovině

Dva rovinné útvary nazýváme shodnými, jestliže je můžeme přemístit tak, aby se kryly. Pokud máme několik útvarů, o kterých chceme říci, že jsou shodné, musí být shodné každé dva z nich.

Pro zapisování shodnosti používáme symbol $\cong$. Při zapisování musíme dbát na správné pořadí zapisovaných vrcholů.

Například zápis $\triangle ABC \cong \triangle MKL$ znamená, že pokud zakryjeme oba trojúhelníky, tak vrchol A odpovídá vrcholu M, vrchol B vrcholu K a vrchol C vrcholu L. Můžeme to popsat taky pomocí stran a to tak, že strana AB odpovídá straně MK, strana AC straně ML a strana BC straně KL.

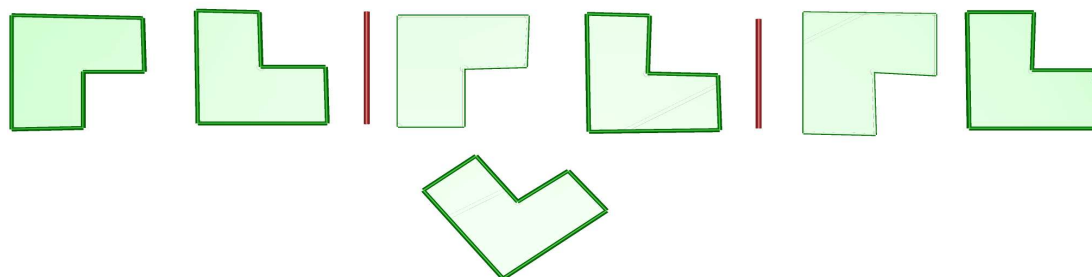


Obr. 2.1.1: Shodné trojúhelníky

Poznámka: musíme rozlišovat mezi shodností a rovností dvou útvarů.

Zda jsou útvary shodné nebo ne, si můžeme ověřit pomocí průsvitky nebo vystřihováním.

Úloha 2.1.1 Zjistěte, zda jsou útvary shodné.



Obr. 2.1.1.1: Úloha 2.1.1

Řešení: Rozhodnout o tom, zda jsou tyto dva útvary shodné můžete pomocí průsvitného papíru, kdy si útvary na něj překreslíte a zkoušíte, zda se překrývají. Dále si můžete pomoci tak, že si opět oba útvary překreslíte a vystřihnete. Stačí vystřihnou pouze jeden z nich a zkoušet přiložit k druhému útvaru tak, aby s ním splynul.

2.2 Shodné útvary

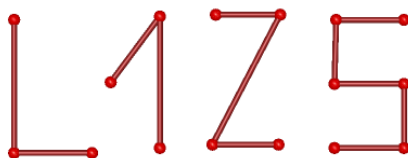
Pro zjednodušení a usnadnění práce existuje pár pravidel, při jejichž zapamatování si mnohdy můžeme usnadnit práci.

- Dvě úsečky jsou shodné, pokud mají stejnou délku.
- Každé dvě přímky jsou shodné.
- Každé dvě polopřímky jsou shodné.
- Dva úhly jsou shodné, pokud mají stejnou velikost.
- Pokud je čtverec o straně a shodný se čtvercem o straně b , pak platí $a=b$.
- Pokud jsou shodné dva kruhy, jejich poloměry se rovnají.

Závěr: Osová souměrnost, středová souměrnost, otočení a posunutí jsou shodnosti (shodná zobrazení).

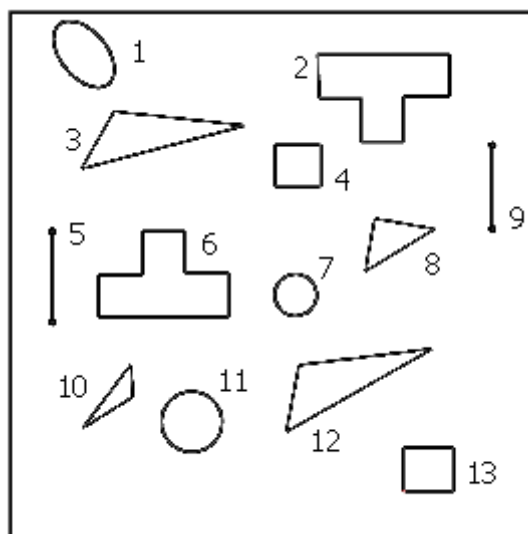
2.3 Úlohy

2.3.1 Narýsujte čtyři lomené čáry (Obr. 2.3.1.1a). Ke každé čáře narýsujte čáru s ní nepřímou shodnou.



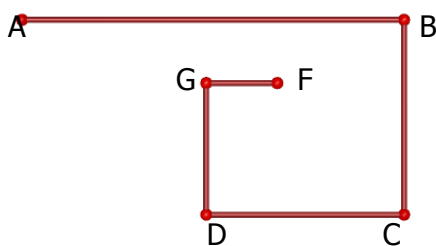
Obr. 2.3.1.1a: Úloha 2.3.1

2.3.2 Na obrázku (Obr. 2.3.2.1) najděte dvojice shodných útvary.



Obr. 2.3.2.1: Úloha 2.3.2

2.3.3 Narýsujte lomenou čáru ABCDEF (Obr.2.3.3.1). Sestrojte lomenou čáru $A'B'C'D'E'F'$ shodnou s čárou ABCDEF tak, aby úsečka $A'B'$ byla rovnoběžná s BC.

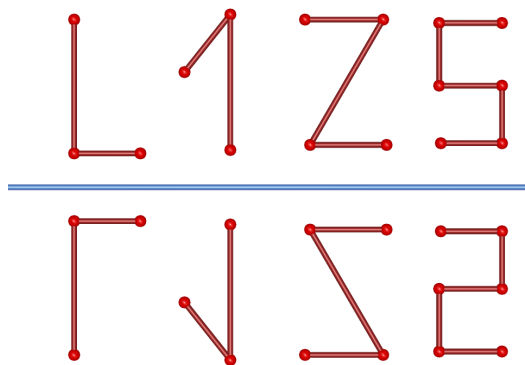


Obr. 2.3.3.1: Úloha 2.3.3

2.4 Řešení úloh

Řešení úlohy 2.3.1 (Obr. 2.3.1.1b):

Je zde ukázáno jedno řešení z více možných. Využijte osové souměrnosti.

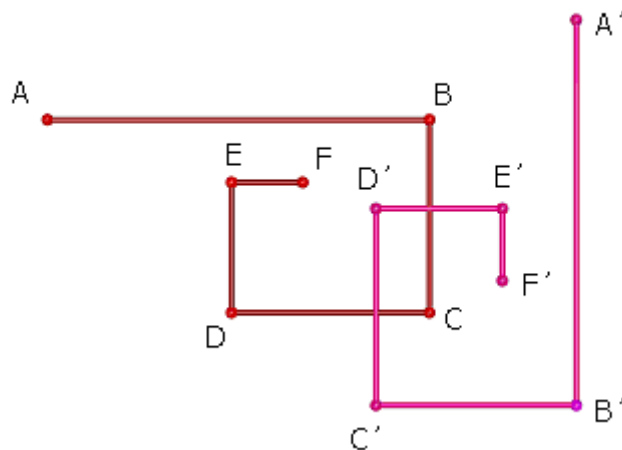


Obr. 2.3.1.1b: Úloha 2.3.1

Řešení úlohy 2.3.2:

Dvojice shodných útvarů: 2 a 6, 3 a 12, 4 a 13, 5 a 9

Řešení úlohy 2.3.3 (Obr. 2.3.3.1):



Obr. 2.3.3.1: Úloha 2.3.3

3 OSOVÁ SOUMĚRNOST

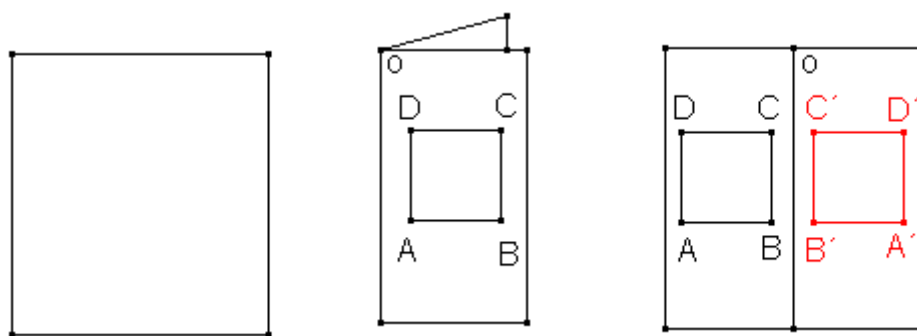
Osovou souměrnost řadíme mezi shodná zobrazení. Při této operaci se zachovává velikost úhlu a délky úseček, proto tedy mluvíme o shodném zobrazení. Už název „osová souměrnost“ napovídá, že se bude jednat o zobrazení bodu podle osy. Původní bod, také nazývaný jako vzor, má stejnou vzdálenost od osy jako jeho obraz. Pokud by jsme vzor a obraz spojili přímkou, tak tato přímka by byla kolmá na osu souměrnosti. Střed této přímky by byl na ose souměrnosti. Body ležící na ose souměrnosti nazýváme samodružnými body. Jsou to takové body, které se zobrazují sami na sebe.

3.1 Co rozumíme obrazem v osově souměrnosti?

„Obrazem útvaru U v osově souměrnosti s osou o rozumíme útvar U' obsahující právě ty body roviny, které jsou obrazy bodů útvaru U . Útvary U a U' se nazývají souměrně sdružené podle osy o “.⁷⁾

Nyní si výše uvedený poznatek pro dvojici souměrně sdružených bodů podle osy zkusíme názorně předvést.

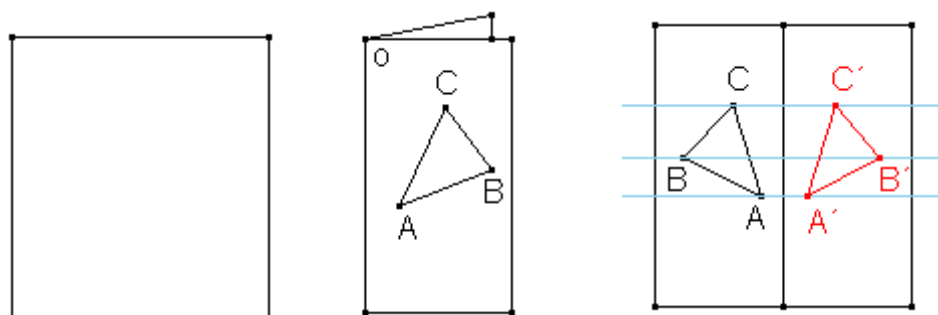
Úloha 3.1.1 Narýsujte na průsvitný papír obdélník a vyznačte jeho osu souměrnosti o . Pomocí hrotu kružítka nebo špendlíku vyznačte jeho body.



Obr. 3.1.1.1: Úloha 3.1.1

Co jste zjistili? Je vidět, že úsečky AA' , BB' , CC' a DD' jsou kolmé na osu o .

Úloha 3.1.2 Vezměte si list papíru, který přehněte tak, aby se obě jeho části překryly. Po rozevření máte v místě přehybu naznačenou přímku, kterou označte o . V jedné z polorovin s hraniční přímkou o narýsujte trojúhelník ABC . Papír znovu přehněte podle přímky o a hrotem kružítka jej propíchněte v bodech A , B , C . Po rozložení papíru vidíte v polorovině opačné k polorovině oA kružátkem vyznačené tři body. Bod, který jste dostali propíchnutím v bodě A , označte jako A' , podobně označte i body B' a C' . Narýsujte trojúhelník $A'B'C'$.



Obr. 3.1.2.1: Úloha 3.1.2

Závěr: Trojúhelník ABC je souměrně sdružený s trojúhelníkem $A'B'C'$ v osové souměrnosti s osou o .

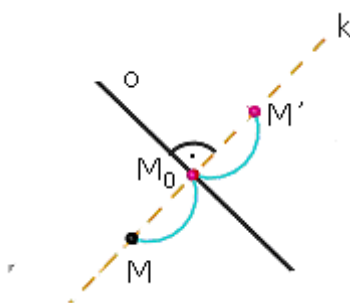
Zapisujeme vrcholy trojúhelníku v odpovídajícím pořadí: $O(o): \triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$.

3.2 Konstrukce obrazů

Konstrukce obrazu bodu M :

- 1) Sestrojte bod M a osu o .
- 2) Narýsujte přímku l kolmou k přímce o a procházející bodem M .
- 3) Průsečík osy o a přímky l označte jako M_0 .
- 4) Na přímce l vyznačte bod M' tak, aby bod M_0 byl středem úsečky MM' .

Zapišeme: $O(o): M \rightarrow M'$.

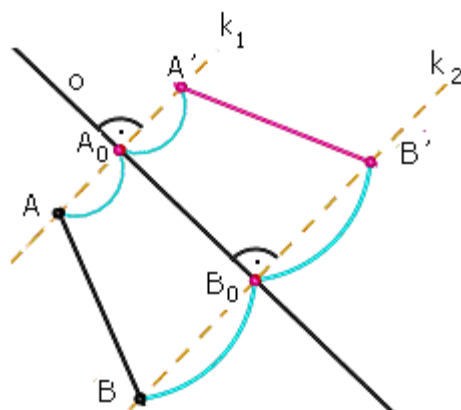


Obr. 3.2.1: Zobrazení bodu

Konstrukce obrazu úsečky:

- 1) Sestrojte úsečku AB a osu o .
- 2) Zobrazte body A, B v osově souměrnosti podle osy o .
- 3) Spojte vzniklé obrazy A' , B' a získáte hledanou zobrazenou úsečku $A'B'$.

Zapišeme: $O(o): AB \rightarrow A'B'$.



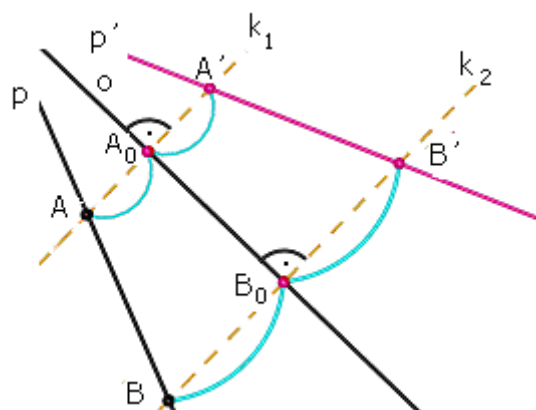
Obr. 3.2.2: Zobrazení úsečky

Osa úsečky AB je přímka, jejíž libovolný bod má od krajních bodů úsečky XY stejnou vzdálenost.

Konstrukce obrazu přímky p:

- 1) Sestrojte přímku p a osu o .
- 2) Na přímce p zvolte dva libovolné body A, B.
- 3) Sestrojte přímky l_1 a l_2 kolmé k přímce o , kdy přímka l_1 prochází bodem A a přímka l_2 prochází bodem B.
- 4) Průsečík mezi l_1 a o nazveme A_0 , průsečík mezi l_2 a o nazveme B_0 .
- 5) Na přímce l_1 vyznačte bod A' tak, aby bod A_0 byl středem úsečky AA' , na přímce l_2 vyznačte bod B' tak, aby bod B_0 byl středem úsečky BB' .
- 6) Sestrojte přímku p' procházející body A' , B' .
- 7) Přímka p' je hledaná zobrazená přímka přímky p.

Zapišeme: $O(o): p \rightarrow p'$.



Obr. 3.2.3: Zobrazení přímky

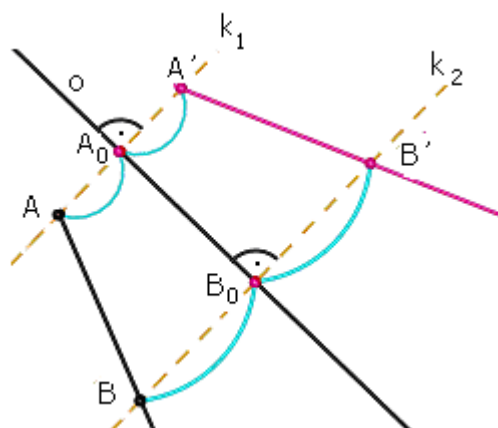
Může nastat případ, že přímka p a osa o jsou různoběžné. V tomto případě se přímky protínají v jednom bodě, proto nám stačí na přímce p vybrat už jen jeden bod různý od tohoto průsečíku a zobrazit jej v osové souměrnosti.

Další případ je ten, že přímka p je rovnoběžná s osou o . V tomto případě nemají žádný společný bod. Přímka p' je s osou rovnoběžná, a proto nám opět stačí nalézt obraz jediného bodu přímky p .

Konstrukce obrazu polopřímky:

- 1) Sestrojte polopřímku s počátečním bodem A a osu o .
- 2) Na přímce zvolte libovolný vnitřní bod B .
- 3) Další postup je stejný jako u úsečky a polopřímky (viz. výše).
- 4) Sestrojte polopřímku s počátečním bodem A' .
- 5) Tato polopřímka $\mapsto A'B'$ je hledaná zobrazená polopřímka polopřímky $\mapsto AB$.

Zapišeme: $O(o): \mapsto AB \rightarrow \mapsto A'B'$.

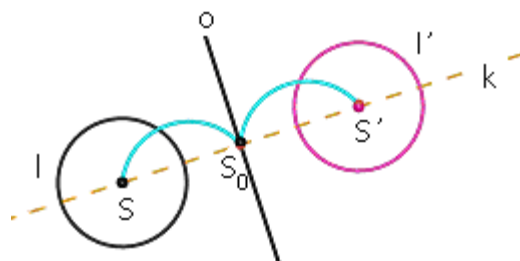


Obr. 3.2.4: Zobrazení polopřímky

Konstrukce obrazu kružnice:

- 1) Sestrojte kružnici $l(S, r)$ a osu o .
- 2) Střed S kružnice l zobrazte v osově souměrnosti pomocí osy o , získáte S' .
- 3) Sestrojte kružnici $l'(S', r)$

Zapišeme: $O(o): l \rightarrow l'$.



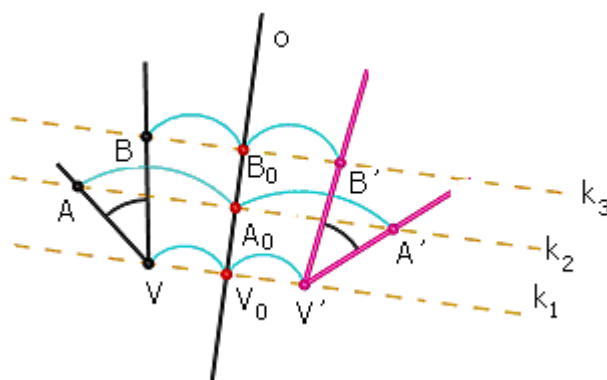
Obr. 3.2.5: Zobrazení kružnice

Pokud osa o prochází středem S kružnice k , pak kružnice $k(S, r)$ je totožná s $k(S', r)$.

konstrukce obrazu úhlu:

- 1) Sestrojíte úhel $\angle AVB$ a osu o .
- 2) Nalezněte obrazy vrcholu V a ramen úhlů (ramena jsou polopřímky, proto postupujte jako pro zobrazení polopřímek VA, VB se stejným počátkem V).
- 3) Spojte jednotlivé zobrazené body A', V', B' .
- 4) Získáte úhel $\angle A'V'B'$ je hledaný zobrazený úhel úhlu $\angle AVB$.

Zapišeme: $O(o): \angle AVB \rightarrow \angle A'V'B'$.

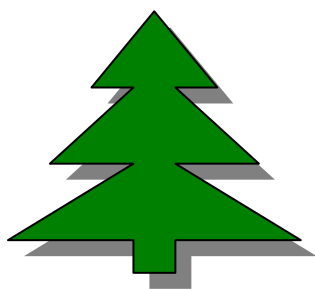


Obr. 3.2.6: Zobrazení úhlu

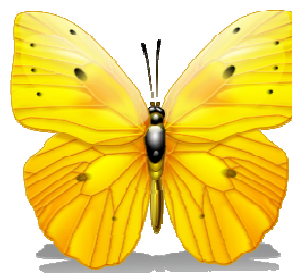
3.3 Osově souměrné tvary

Osově souměrný útvar se skládá ze dvou shodných částí oddělených přímkou – osou souměrnosti. „Přehneme-li rovinu podle této přímky, obě shodné části se kryjí⁸⁾“.

O tom, zda je útvar osově souměrný se můžeme jednoduše přesvědčit. Potřebujeme k tomu jen zrcátko.



Obr. 3.3.1: Osově souměrný strom



Obr. 3.3.2: Osově souměrný motýl

Přiložte zrcátko tak, abyste celý obrázek sestavili z jeho nezakryté části a obrazu této části v zrcátku. Všimněte si, že zrcátko se dotýká roviny, ve které obrázek leží, v části přímky, které říkáme osa souměrnosti tohoto obrázku.

Přesvědčit se o tom lze i za pomoci průsvitného papíru, kdy na něj nakreslíte daný útvar a papír budete překládat tak dlouho, dokud přeložením nerozdělíte na dvě části, které se přeložením překrývají. Přímka, kterou získáte přeložením je osa souměrnosti.

Jako příkladem osově souměrného útvaru v rovině může být:

- o Čtverec, který má čtyři osy souměrnosti.
- o Obdélník, který má dvě osy souměrnosti.
- o Kruh, který má nekonečně mnoho os souměrnosti.
- o Rovnostranný trojúhelník, který má tři strany souměrnosti.
- o Rovnoramenný trojúhelník, který má jednu stranu souměrnosti.
- o Všechny pravidelné mnohoúhelníky jsou osově souměrné a počet os závisí na počtu vrcholů.

3.4 Shrnutí

Osová souměrnost je v rovině určena: osou souměrnosti a dvojicí odpovídajících si bodů.

Platí:

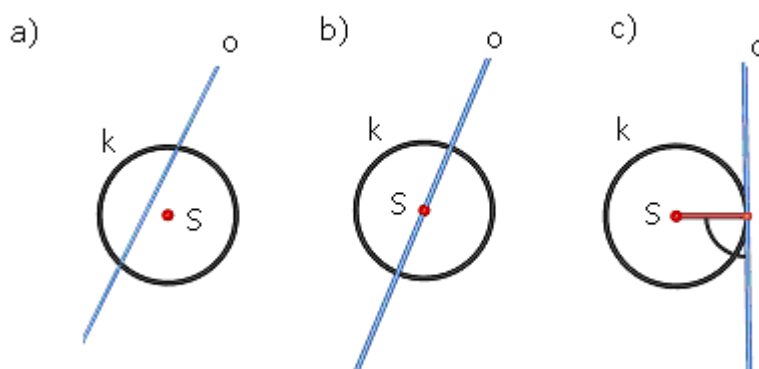
- o Obrazem bodu A je bod A'. Pokud bod A leží na ose souměrnosti, splývá se svým obrazem a je samodružný. Všechny body osy jsou samodružné.
- o Obrazem úsečky AB je úsečka A'B' shodná s úsečkou AB.
- o Obrazem přímky AB je přímka A'B'. Pokud není rovnoběžná s osou o , protíná se vzor a obraz přímky na ose o .
- o Osová souměrnost má nekonečně mnoho samodružných bodů.⁹⁾

3.5 Úlohy

3.5.1 V rovině je dána přímka o a bod A, který na ní neleží. Sestrojte bod A', který je s bodem A souměrně sdružený.

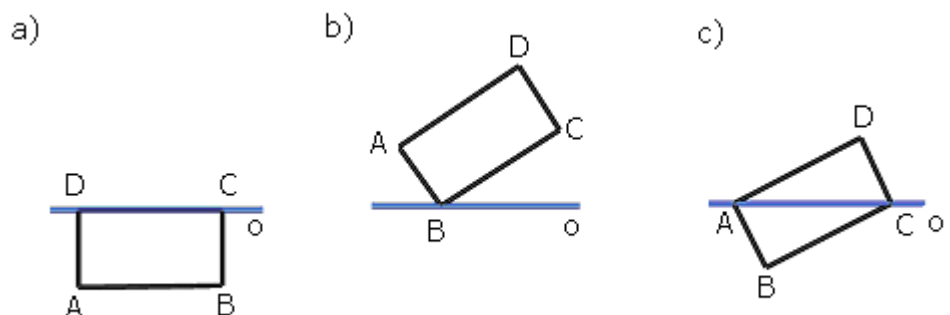
3.5.2 Je dána přímka p a mimo ni bod A. Sestrojte bod B souměrně sdružený s bodem A podle přímky p jen použitím kružítka (tedy bez pomoci jakéhokoliv pravítka či měřítka)

3.5.3 Sestrojte obraz kruhu k o středu S v osově souměrnosti (Obr. 3.5.3.1a).



Obr. 3.5.3.1a: Úloha 3.5.3

3.5.4 Sestrojte obraz obdélníku ABCD v osově souměrnosti (Obr. 3.5.4.1a).



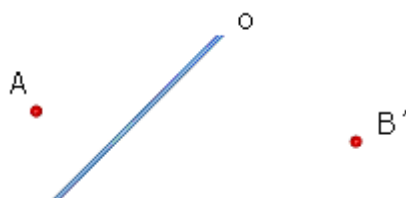
Obr. 3.5.4.1a: Úloha 3.5.4

3.5.5 Čtverec ABCD a $A'B'C'D'$ jsou souměrně sdružené podle neznámé osy. Sestrojte oba čtverce, jsou-li dány body A, B a B' (Obr. 3.5.5.1a).



Obr. 3.5.5.1a: Úloha 3.5.5

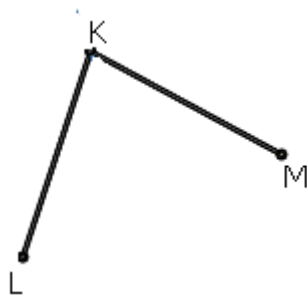
3.5.6 Čtverce ABCD a $A'B'C'D'$ jsou souměrné podle osy o . Sestrojte oba čtverce, je-li dána osa o body A a B' (Obr. 3.5.6.1a).



Obr. 3.5.6.1a: Úloha 3.5.6

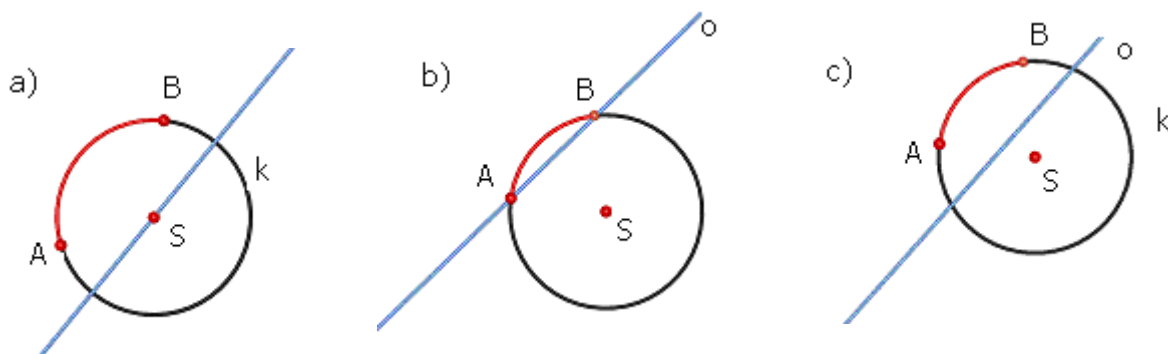
3.5.7 Které z arabských a římským číslic lze nakreslit tak, aby měly osově souměrný tvar?

3.5.8 Úsečka MK je obrazem úsečky LK v osové souměrnosti s neznámou osou. Jak tuto osu sestrojíte (Obr. 3.5.8.1a)?



Obr. 3.5.8.1a: Úloha 3.5.8

3.5.9 Narýsujte kružnici k a na ní vyznačte oblouk AB . Sestrojte obraz oblouku v osové souměrnosti s osou o . Vzájemnou polohu oblouku AB a osy o volte podle obrázku (Obr. 3.5.9.1a).



Obr. 3.5.9.1a: Úloha 3.5.9

3.5.10 Narýsujte osově souměrný trojúhelník ABC a osově souměrnou pěticíou hvězdou.

3.5.10 Vepište kružnici do čtverce $ABCD$: $a = 3\text{ cm}$. Tuto kružnici postupně zobrazte v osové souměrnosti podle každé ze čtyř jeho stran.

3.5.11 Je dána kružnice k se středem S a poloměrem $r = 1,6\text{ cm}$ a bod A , $A \in k$. Sestrojte tětivu AB kružnice k o délce $1,2\text{ cm}$ a obraz kružnice k v osové souměrnosti s osou o , $o \perp AB$.

3.5.12 Je dán trojúhelník ABC o straně $c = 6\text{ cm}$, $a = 4\text{ cm}$ a $b = 5\text{ cm}$. Na straně c sestrojte bod P tak, aby $|AP| = 2\text{ cm}$. Dále sestrojte přímku o tak, aby

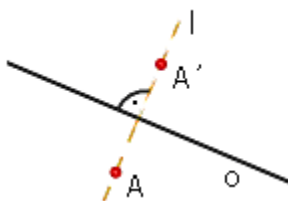
přímka o byla kolmá na stranu c a zároveň bod $P \in o$. Sestrojte obrazec souměrně sdružený k trojúhelníku ABC podle osy o .

3.5.13 Je dána přímka p a dva body $A \neq B$ jsou v téže polorovině vyřáté přímkou p . Najděte bod X tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl co nejmenší.

3.5.14 Na kulečnickovém stole leží dvě koule A a B . Sestrojte dráhu koule A tak, aby se dvakrát odrazila od mantinelu, měla co nejkratší dráhu a strefila se do koule B .

3.6 Řešení úloh

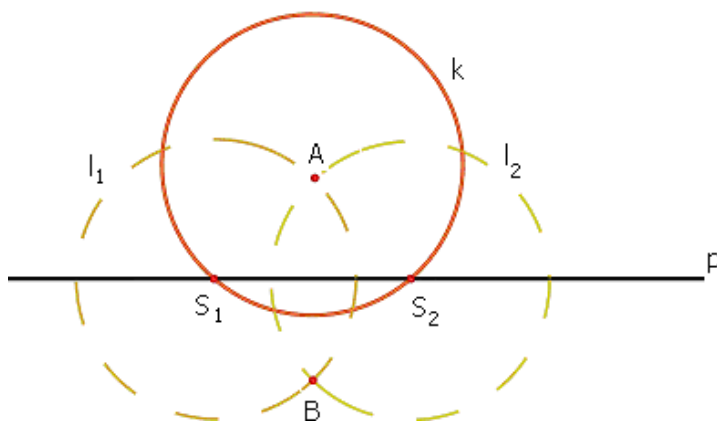
Řešení úlohy 3.5.1 (Obr. 3.5.1.1):



Obr. 3.5.1.1: Úloha 3.5.1

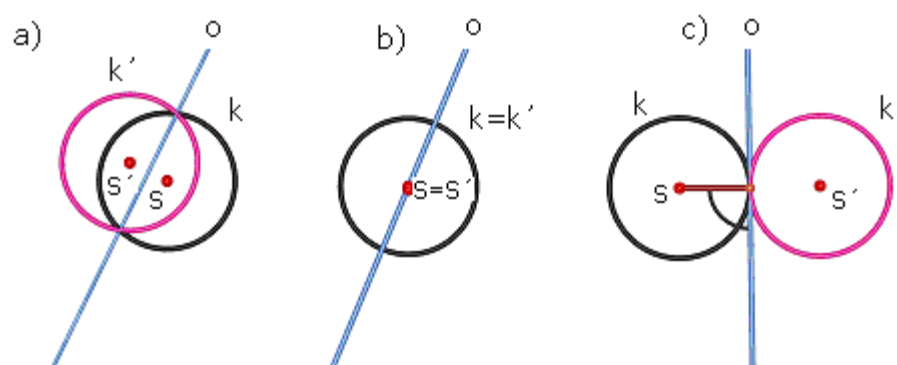
Řešení úlohy 3.5.2:

Narýsujte přímku p a bod A podle zadání. Sestrojte kružnici k , se středem v bodě A a poloměrem tak velkým, aby kružnice k a přímka p měly dva společné průsečíky a to body S_1 a S_2 . Dále sestrojte kružnice $l_1(S_1, r = |AS_1|)$ a $l_2(S_2, r = |AS_2|)$. Průnikem kružnic l_1 a l_2 získáme obraz B (Obr. 3.5.2.1).



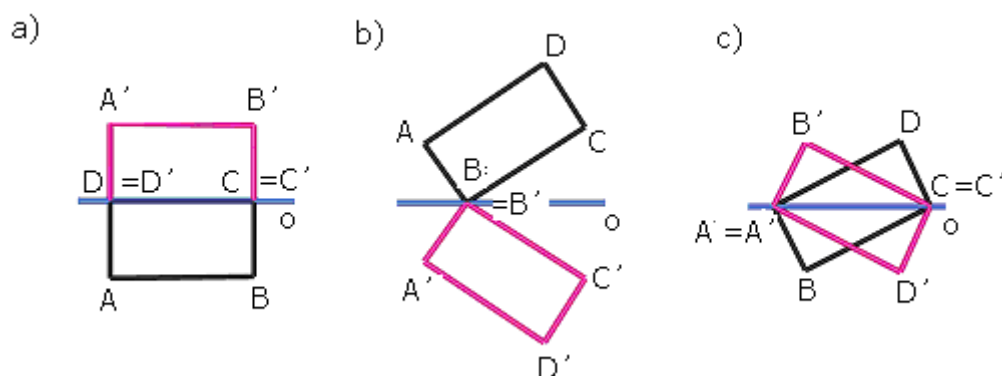
Obr. 3.5.2.1: Úloha 3.5.2

Řešení úlohy 3.5.3 (Obr. 3.5.3.1b):



Obr. 3.5.3.1b: Úloha 3.5.1

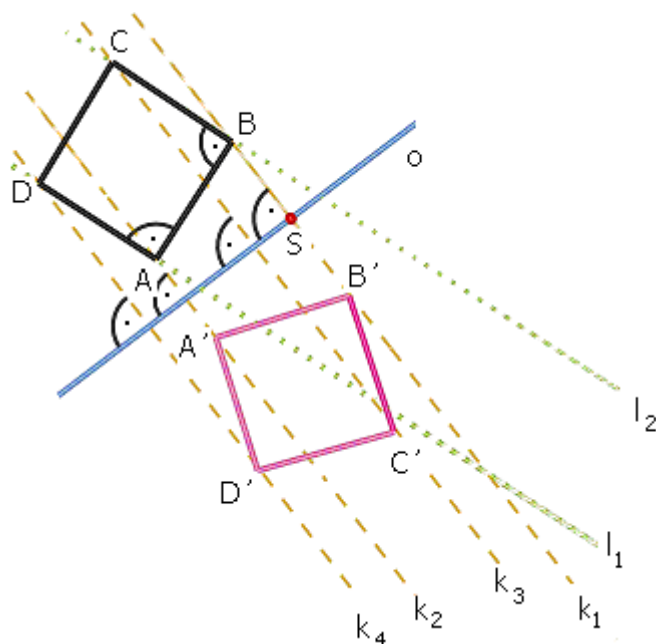
Řešení úlohy 3.5.4 (Obr. 3.5.3.1b):



Obr. 3.5.4.1b: Úloha 3.5.4

Řešení úlohy 3.5.5:

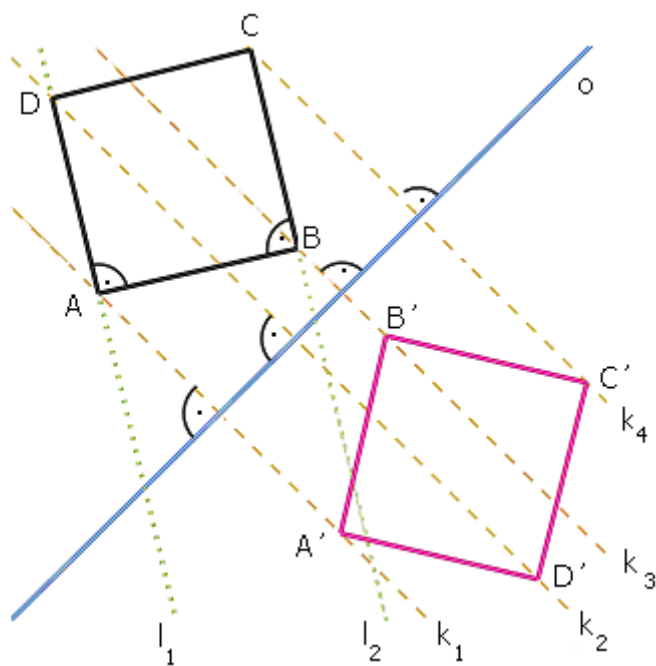
Zvolte body A , B , B' podle zadání. Bodem B a B' ved'te přímku k_1 . Na této přímce zvolte střed S . Středem S ved'te kolmici na přímku k_1 . Daná kolmice je vaše hledaná osa o . Díky této ose o můžete zobrazit bod A a to tak, že povedete daným bodem kolmici k_2 k ose o . Sestrojte úsečku AB . Ved'te body A, B kolmice l_1 a l_2 . Víte, že čtverec má všechny strany stejně dlouhé, proto na získané kolmice naneste vzdálenost strany AB a získáte zbývající body a to C, D . Zobraze je stejným způsobem jako bod A . Spojte body A, B, C, D a A', B', C', D' a získáte hledané čtverce (Obr. 3.5.5.1b).



Obr. 3.5.5.1b: Úloha 3.5.5

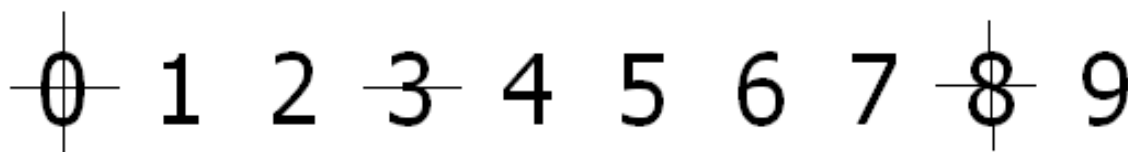
Řešení úlohy 3.5.6:

Zvolte si podle zadání body A, B' a osu o . Danými body ved'te kolmice k_3 a k_1 a body zobrazte. Sestrojte úsečku AB a jejími body ved'te kolmice l_1 a l_2 . Víte, že čtverec má všechny strany stejně dlouhé, proto na tyto kolmice naneste délku strany AB . Tím získáte zbývající dva body a to C, D . Zobraďte je stejným způsobem jako bod A . Po spojení bodů A, B, C, D a A', B', C', D' získáte hledané čtverce (Obr. 3.5.6.1b).

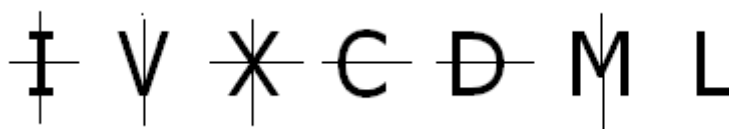


Obr. 3.5.6.1b: Úloha 3.5.6

Řešení úlohy 3.5.7 (Obr.3.5.7.1: Obr. 3.5.7.2):



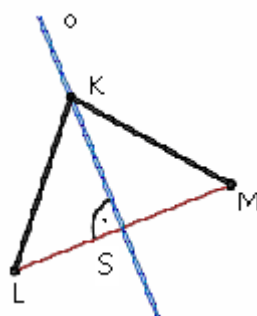
Obr. 3.5.7.1: Úloha 3.5.7 – arabské číslice



Obr. 3.5.7.2: Úloha 3.5.7 – římské číslice

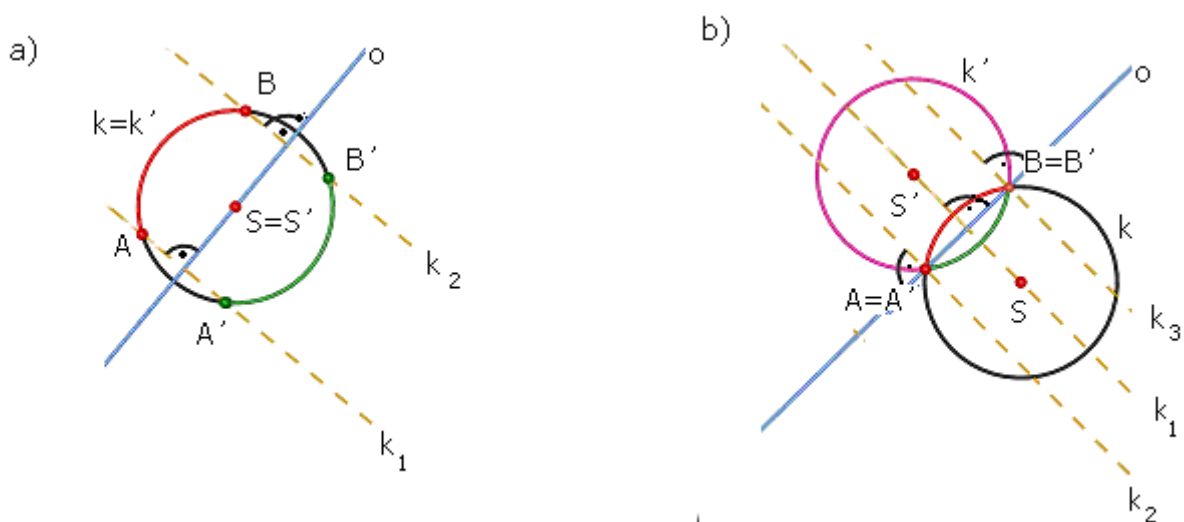
Řešení úlohy 3.5.8:

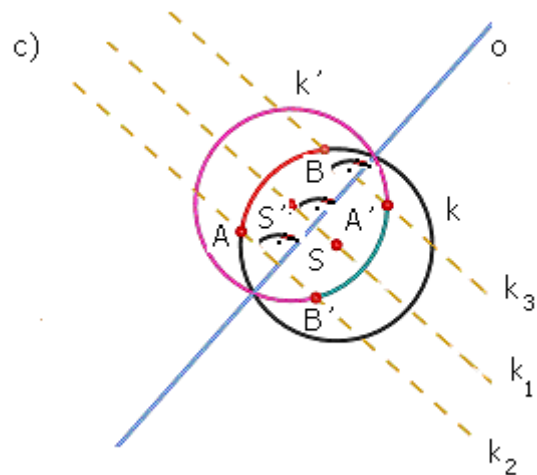
Sestrojte úsečku LM a najděte její střed S. Tímto bodem S ved'te kolmici na úsečku LM. Daná kolmice je zároveň hledanou osou o (Obr. 3.5.8.1b).



Obr. 3.5.8.1b: Úloha 3.5.8

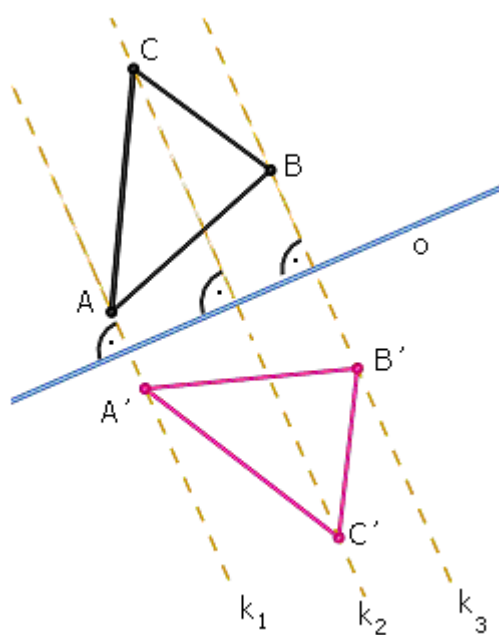
Řešení úlohy 3.5.9 (Obr. 3.5.9.1b):



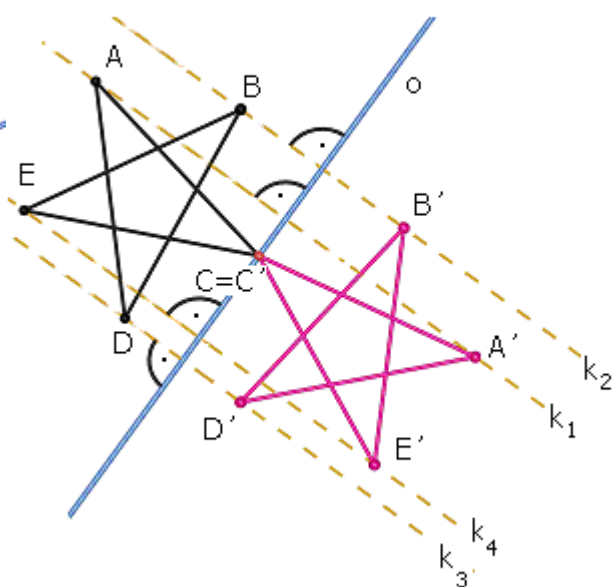


Obr. 3.5.9.1b: Úloha 3.5.9

Řešení úlohy 3.5.10 (Obr. 3.5.10.1; obr. 3.5.10.2):

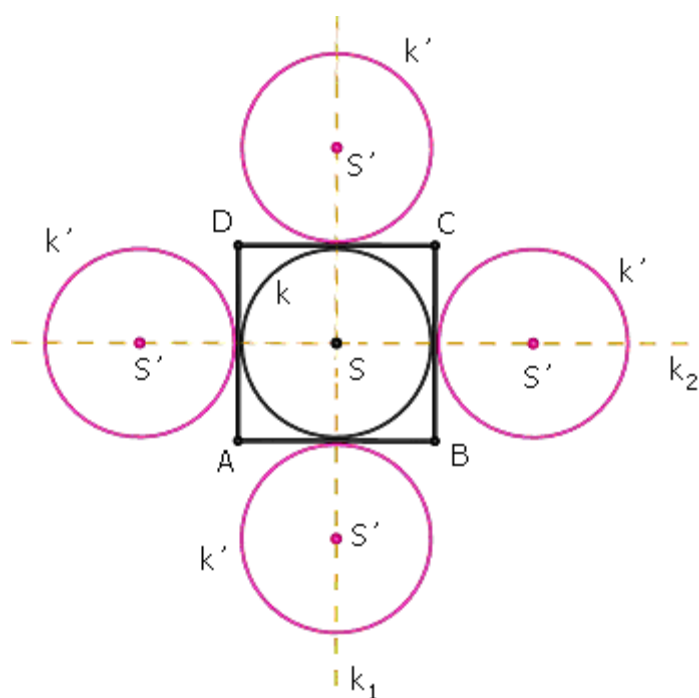


Obr. 3.5.10.1: Úloha 3.5.10 - Trojúhelník



Obr. 3.5.10.2: Úloha 3.5.10 – Pěticípá hvězda

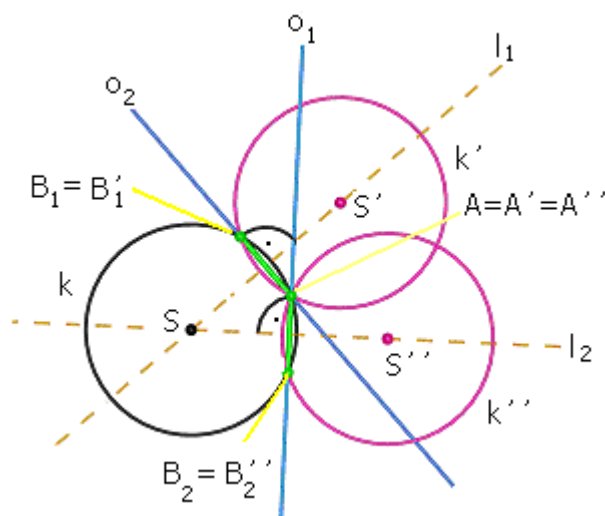
Řešení úlohy 3.5.11 (Obr. 3.5.11.1):



Obr. 3.5.11.1: Úloha 3.5.11

Řešení úlohy 3.5.12:

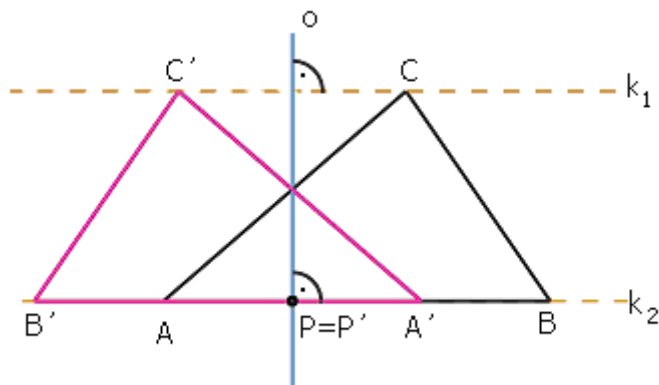
Sestrojte kružnici k a bod A podle zadání. Máte sestrojit tětivu AB a víte, že její délka má být 1,2 cm. Vzniknou dvě tětivy, které označte o_1 a o_2 , protože podle zadání plní tětivy funkci os. Nyní stačí kružnici k zobrazit v osově souměrnosti podle o_1 a o_2 . Vzniknou kružnice k' a k'' (Obr.3.5.12.1).



Obr. 3.5.12.1: Úloha 3.5.12

Závěr: Úloha má dvě řešení a to kružnici k' a k'' .

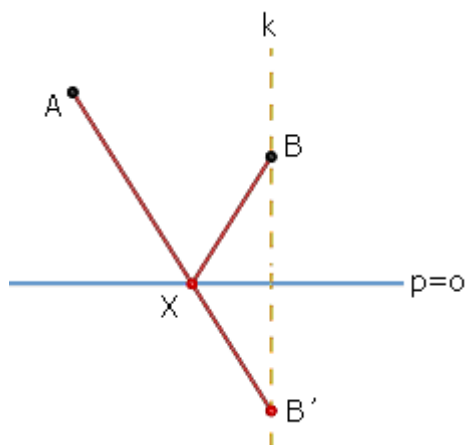
Řešení úlohy 3.5.13 (Obr. 3.5.13.1):



Obr. 3.5.13.1: Úloha 3.5.13

Řešení úlohy 3.5.14:

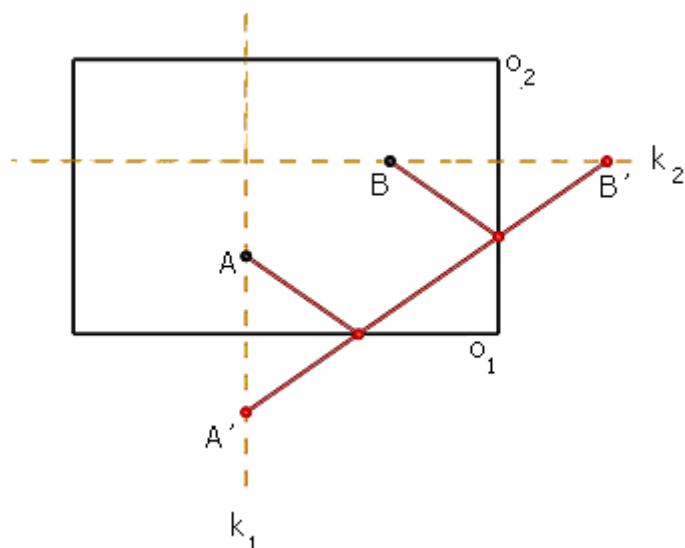
Sestrojte osu o a body A, B podle zadání. Zobraďte bod B v osové souměrnosti podle přímky p , která je zároveň osou o . Spojením bodů A a B' získáte průsečík na přímce p a označte jej jako X (Obr. 3.5.14.1).



Obr. 3.5.14.1: Úloha 3.5.14

Řešení úlohy 3.5.15:

Zobrazte bod A v osové souměrnosti s osou o_1 a bod B v osové souměrnosti s osou o_2 . Pokud spojíte obrazy A' a B' , získáte průsečíky s osou o_1 a o_2 . Tyto průsečíky jsou hledané body odrazu (Obr. 3.5.15.1).



Obr. 3.5.15.1: Úloha 3.5.15

4 STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

Středová souměrnost se středem S je takové zobrazení, kdy se střed S zobrazí sám na sebe a bod A se zobrazí na bod A' . Bod A leží na polopřímce SA , bod A' na opačné polopřímce k SA se stejnou vzdáleností od S jako A . Platí tedy $|SA| = |SA'|$.

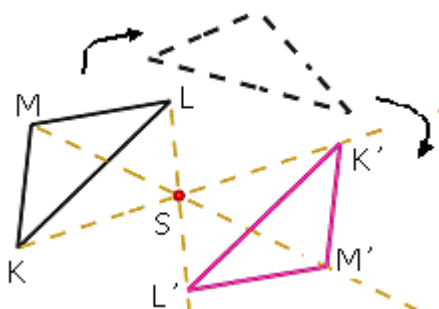
Pro obraz A' libovolného bodu A platí:

- o Pokud bod A splývá se středem S , splývá s ním i bod A' . Bod S je samodružný.
- o Pokud jsou body A a S různé, je bod S středem úsečky AA' . Body A a A' se nazývají souměrně sdružené podle středu S .

4.1 Co rozumíme obrazem ve středové souměrnosti?

„Obrazem útvaru U ve středové souměrnosti se středem S nazýváme útvar U' obsahující právě ty body roviny, které jsou obrazy bodů útvaru U . Útvary U a U' jsou shodné a nazývají se souměrně sdružené podle středu S . O útvaru U můžeme říci, že je středově souměrný podle S , pokud jeho obraz U' ve středové souměrnosti se středem S splývá s útvarem U . Platí tedy $(U=U')$ “.¹⁰⁾

Úloha 4.1.1 Narýsujte si do sešitu nebo na papír trojúhelník KLM a vyznačte bod S , který není bodem trojúhelníku KLM . Dále sestrojte polopřímky KS , LS a MS . Na průsvitný papír překreslíme trojúhelník i bod S . Nyní přichází na řadu kružítko. Hrotem si přidržíte průsvitku v bodě S a otáčejte s ní, dokud se bod K nepřemístí na polopřímku opačnou k polopřímce KS , bod L na polopřímku opačnou k přímce LS a bod M na polopřímku opačnou k polopřímce MS . Body, které jste získali přemístěním označte postupně jako K' , L' a M' . Po spojení těchto bodů získáte trojúhelník $K'L'M'$ (obr.4.1.1.1).¹¹⁾



Obr. 4.1.1.1: Úloha 4.1.1

4.2 Konstrukce obrazů

konstrukce obrazu bodu:

- 1) Zvolte si body M a S (střed).
- 2) Narýsujte přímku l a naneste na ní vzdálenost MS..
- 3) Sestrojte bod M' tak, aby bod S byl středem úsečky MM' (Obr.4.2.1).

Zapišeme: $S(s): M \rightarrow M'$

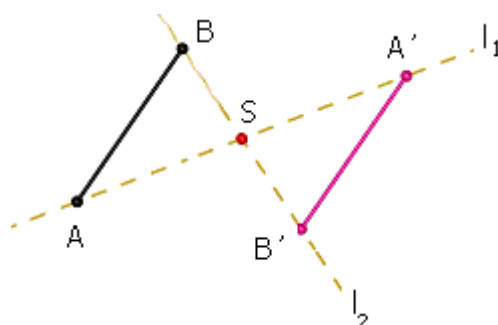


Obr.4.2.1: Zobrazení bodu

Konstrukce obrazu úsečky:

- 1) Narýsujte úsečku AB a bod S, $S \notin AB$.
- 2) Sestrojte přímky l_1 a l_2 , kdy $A \in l_1$ a $B \in l_2$.
- 3) Naneste na přímku l_1 vzdálenost úsečky AS a sestrojte bod A' tak, aby bod S byl středem úsečky AA'. To samé proveďte u B.
- 4) Sestrojte úsečku A'B' (Obr.4.2.2).

Zapišeme: $S(s): AB \rightarrow A'B'$



Obr.4.2.2: Zobrazení úsečky

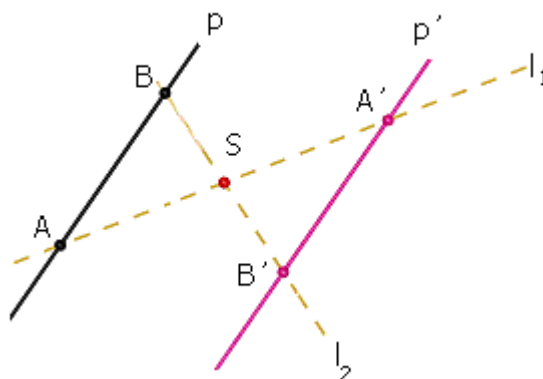
Dále se můžete setkat s případem, kdy bod $S \in AB$. Bod A se zobrazí na bod B, který je tím pádem totožný s bodem A' a bod B se zobrazí na bod A, který bude totožný s bodem B'.

Bod S může být totožný s bodem A nebo bodem B. V takovém případě postupujete obvyklým způsobem. Bod, který je totožný s bodem S je samodružný.

Konstrukce obrazu přímky:

- 1) Narýsujte přímku p a bod S , $S \in p$.
- 2) Zvolte na přímce p dva body A a B .
- 3) Sestrojte přímky l_1 a l_2 , kdy $A \in l_1$ a $B \in l_2$.
- 4) Dále pokračujte jako při postupu u úsečky (Obr.4.2.3).

Zapišeme: $S(s): p \rightarrow p'$



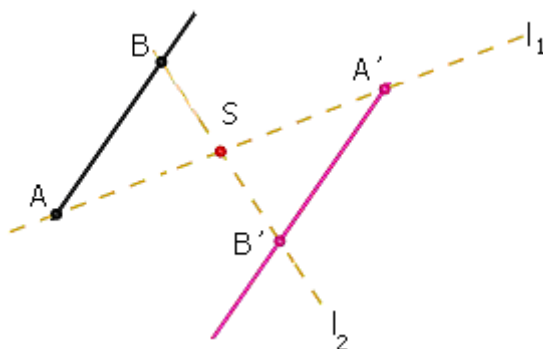
Obr.4.2.3: Zobrazení přímky

Opět zde platí možnosti polohy bodu S jako u úsečky. Postupujete obdobným způsobem.

Konstrukce obrazu polopřímky:

- 1) Narýsujte si polopřímky s počátečním vrcholem A a bod S , který polopřímce nepatří.
- 2) Zvolte na polopřímce jeden její vnitřní bod B .
- 3) Dále pokračujte jako při postupu u úsečky (Obr.4.2.4)

Zapišeme: $S(s): \mapsto AB \rightarrow \mapsto A'B'$.

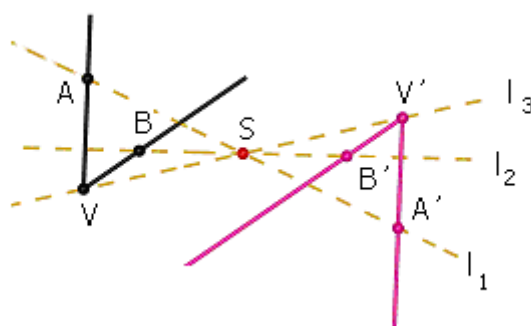


Obr.4.2.4: Zobrazení polopřímky

Platí stejné podmínky polohy bodu S jako u úsečky a přímky.

Konstrukce obrazu úhlu:

- 1) Sestrojte úhel $\angle AVB$ a bod S.
- 2) Nalezněte obrazy vrcholu V a ramen úhlů (ramena jsou polopřímky, proto postupujte jako pro zobrazení polopřímek VA, VB se stejným počátkem V).
- 3) Dále konstrukce jako u úsečky (viz. výše)(Obr.4.2.5).

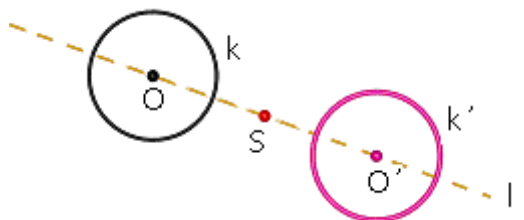


Obr.4.2.5: Zobrazení úhlu

Můžete se setkat s případem, kdy bod S je totožný s vrcholem V, patří jednomu z ramen úhlů, je vnitřním nebo vnějším bodem úhlu. U všech těchto případů postupujete stejně.

Konstrukce obraz kružnice:

- 1) Sestrojte kružnici $k(O, r)$ a bod S, $S \notin k$.
- 2) Sestrojte obraz bodu O.
- 3) Sestrojte $k'(O', r)$ (Obr.4.2.6).



Obr.4.2.6: Zobrazení kružnice

Bod S může mít polohu vzhledem ke kružnici takovou, že dané kružnici patří, je totožný s jejím středem, je jejím vnitřním nebo vnějším bodem. U všech případů postupujete stejným způsobem.

4.3 Středově souměrné tvary

„Útvar U nazveme středově souměrný, pokud existuje takový bod S, že při otočení o 180° kolem bodu S přejde útvar U sám v sebe. Bod S se nazývá střed souměrnosti útvaru U.“¹²⁾

Jako příkladem středově souměrného útvaru v rovině může být :

- o Čtverec, jehož střed souměrnosti je průsečík úhlopříček.
- o Obdélník, jehož střed souměrnosti je průsečík úhlopříček.
- o Kruh, jeho střed souměrnosti je střed kruhu.

Pokud byste si dané obrazce nakreslili a zkoušeli si je pomocí kružítko nebo špendlíku otáčet, zjistili byste, že jsou opravdu středově souměrné. Při pokusu otočit trojúhelník byste ovšem zjistili, že zde to není možné. Trojúhelník je příklad nesouměrného středového útvaru.

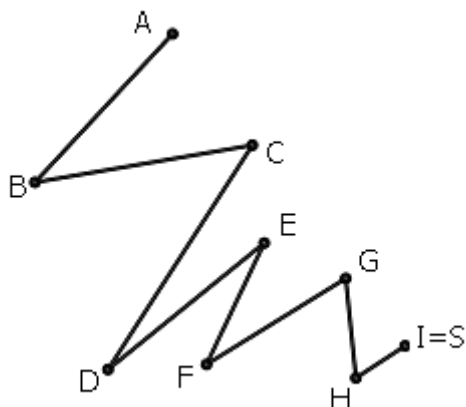
Další zjištění by pro Vás mohl být fakt, že většina středově souměrných útvarů má jediný střed souměrnosti.

Pokud má útvar dva různé středy souměrnosti, pak jich má nekonečně mnoho. Jednoduchým příkladem může být přímka. Pokud si představíte nebo nakreslíte libovolnou přímku, tak si můžete ověřit, že každý její bod je středem souměrnosti.

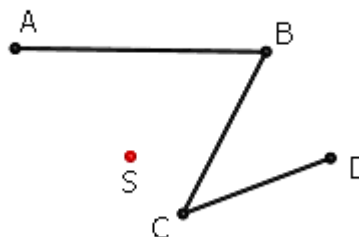
4.4 Úlohy

4.4.1 Narýsujte libovolný pětiúhelník MNOPQ. Sestrojte jeho obraz ve středové souměrnosti, v níž jsou body M a O souměrně sdružené.

4.4.2 Sestrojte obraz lomené čáry ve středové souměrnosti se středem S. Lomenou čáru a bod S zvolte podobně jako na obr. 4.4.2.1a a 4.4.2.2b.



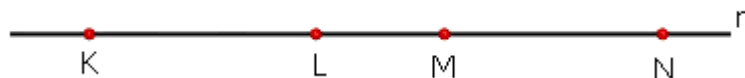
Obr.4.4.2.1a: Úloha 4.4.1



Obr.4.4.2.2a: Úloha 4.4.1

4.4.3 Je dána přímka n a její čtyři různé body K , L , M a N (Obr. 4.4.3.1). Najděte střed souměrnosti S , ve kterém je obrazem

- polopřímky LK polopřímka MN ,
- polopřímky KL polopřímka ML ,
- polopřímky KL polopřímka MN .



Obr.4.4.3.1a: Úloha 4.4.3

4.4.4 Je dána přímka p a bod X , $X \notin p$. Navrhněte postup, jak pomocí kružítka a jediného pravítka sestavit přímku q , která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem X . Využijte přitom středovou souměrnost.

4.4.5 Narýsujte trojúhelník se stranami 3 cm, 4 cm a 5 cm. Sestrojte jeho obraz ve středové souměrnosti, jejímž samodružným bodem je střed nejdelší strany trojúhelníku. Jak nazýváme útvar, který vznikne sjednocením trojúhelníku a jeho obrazu?

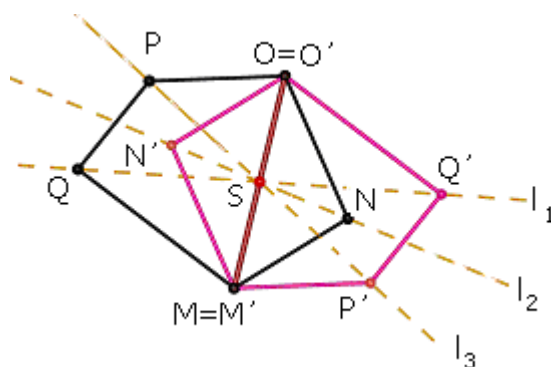
4.4.6 Narýsujte čtverec $ABCD$ o straně délky 4,5 cm. Na straně CD vyznačte bod X tak, aby $|XC| = 3$ cm. Sestrojte obraz čtverce $ABCD$ ve středové souměrnosti s bodem X .

- 4.4.7 Narýsujte čtverec DEFG o straně délky 4 cm a vyznačte jeho střed souměrnosti S. Sestrojte kružnici $k(S, 2 \text{ cm})$. Sestrojte obraz kružnice k a čtverce DEFG ve středové souměrnosti se středem E.
- 4.4.8 Je dán trojúhelník, jehož všechny strany mají délku 5 cm. Sestrojte všechny jeho osy souměrnosti a jejich průsečík označte O. Sestrojte obraz trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti se středem O. Jaký útvar vznikne sjednocením obou trojúhelníků ?
- 4.4.9 Narýsujte libovolný trojúhelník KLM a vyberte jakýkoliv jeho vnitřní bod S. Sestrojte trojúhelník $K'L'M'$ souměrně sdružený s trojúhelníkem KLM podle středu S. Vyznačte průnik obou trojúhelníků.
- 4.4.10 Jsou dány kružnice $k_1 (S_1, r = 4 \text{ cm})$ a $k_2 (S_2, r = 3 \text{ cm})$ se střednou S_1S_2 délky 10 cm. Pro bod $O, O \in S_1S_2$ platí $|S_1O| = 6 \text{ cm}$. Sestrojte dva rovnoramenné shodné trojúhelníky PQO, MNO takové, že body $P, Q \in k_1$ a $N, M \in k_2$.

4.5 Řešení úloh

Řešení úlohy 4.4.1:

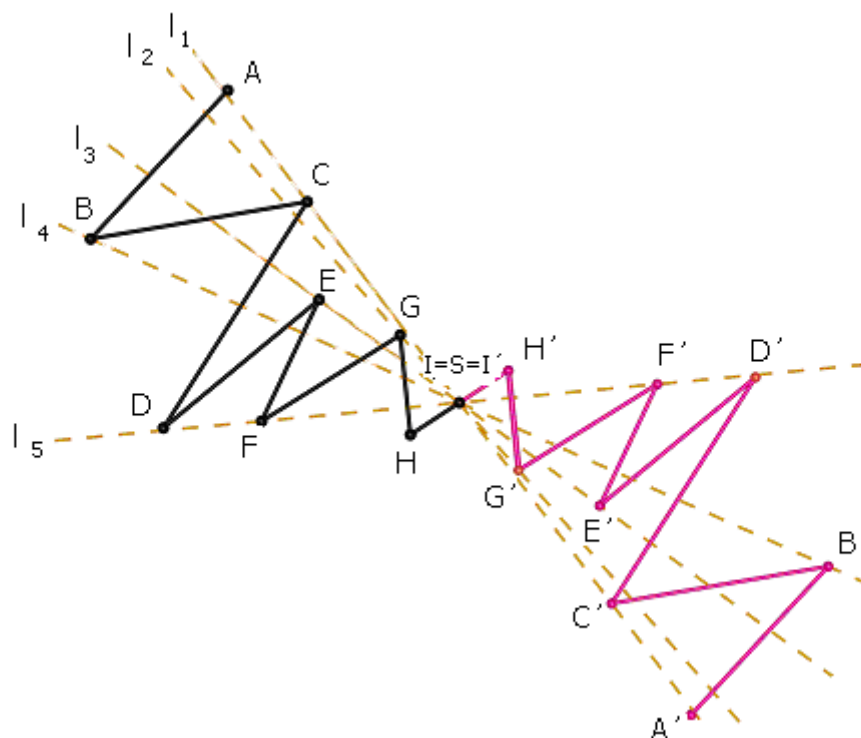
Víte, že body O, M jsou souměrně sdružené. Musíte nalézt střed souměrnosti S. Ten naleznete pomocí těchto souměrně sdruženým bodů a to tak, že sestrojíte střed úsečky $|OM|$. Díky středu, který jste získali, můžete zobrazit ostatní body. Po spojení obrazů $M'N'O'P'Q'$ získáte obraz pětiúhelníku (Obr. 4.4.1.1).



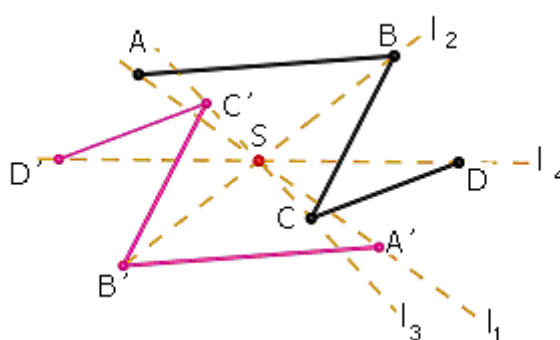
Obr. 4.4.1.1: Úloha 4.4.1

Řešení úlohy 4.4.2:

Zobrazujte postupně jednotlivé body a zobrazené body nakonec spojte. Získáte obraz útvaru.



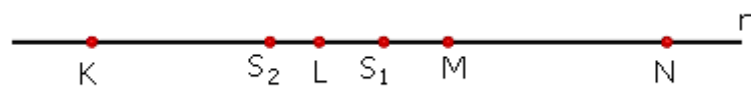
Obr. 4.4.2.1b: Úloha 4.4.2



Obr. 4.4.2.2b: Úloha 4.4.2

Řešení úlohy 4.4.3:

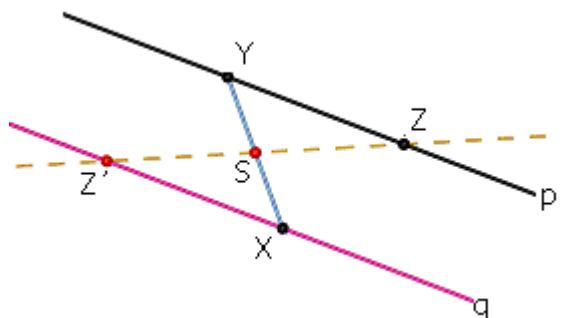
- Střed S_1 úsečky LM,
- střed S_2 úsečky KM,
- taková středová souměrnost neexistuje.



Obr. 4.4.3.1b: Úloha 4.4.3

Řešení úlohy 4.4.4:

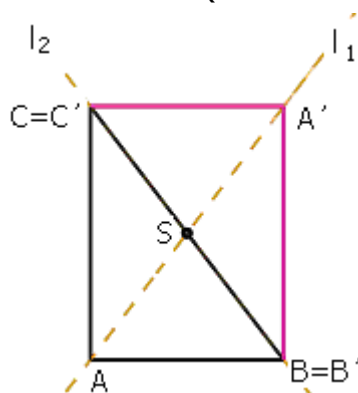
Podle zadání si zvolte přímku p a bod X . Jedna z možností, jak sestavit přímku q , která je rovnoběžná s přímku p je ta, že si zvolíte na přímce p dva libovolné body Y, Z . Dále sestojte úsečku XY a nalezněte její střed S . Pomocí tohoto středu S zobrazte bod Z na bod Z' . Pokud spojíte bod Z' a X , získáte přímku q rovnoběžnou s přímku p (Obr. 4.4.4.1).



Obr. 4.4.4.1: Úloha 4.4.4

Řešení úlohy 4.4.5:

Sestojte zadaný trojúhelník ABC . Nalezněte střed S nejdelší strany, v tomto případě strany BC . Pomocí středu S zobrazte body trojúhelníku. Po spojení těchto bodů získáte zobrazený trojúhelník $A'B'C'$ (Obr. 4.4.5.1).

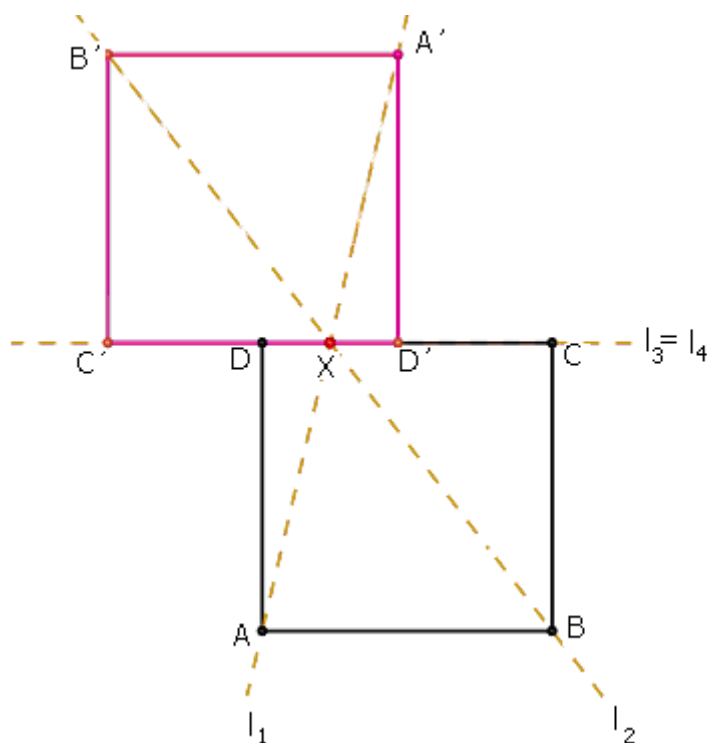


Obr. 4.4.5.1: Úloha 4.4.5

Závěr: Sjednocením trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ dostanete obdélník.

Řešení úlohy 4.4.6:

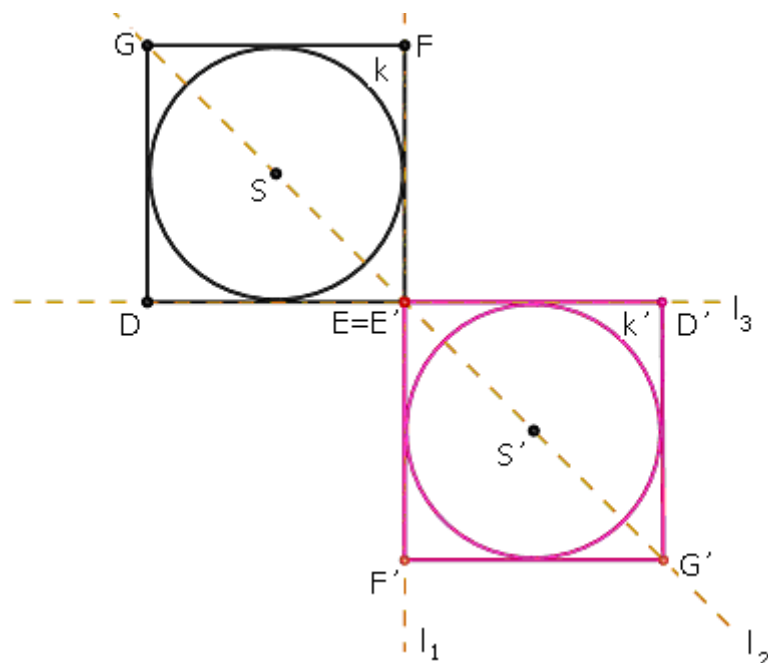
Sestrojte čtverec se stranou délky 4,5 cm. Od bodu C naneste vzdálenost 3 cm a sestrojte bod X. Sestrojte obrazy jednotlivých bodů čtverce podle bodu X. Bod A se zobrazí na bod A', bod B na B', C na C' a D na D'. Pokud spojíte obrazy bodů, získáte hledaný čtverec A'B'C'D' (Obr. 4.4.6.1).



Obr. 4.4.6.1: Úloha 4.4.6

Řešení úlohy 4.4.7:

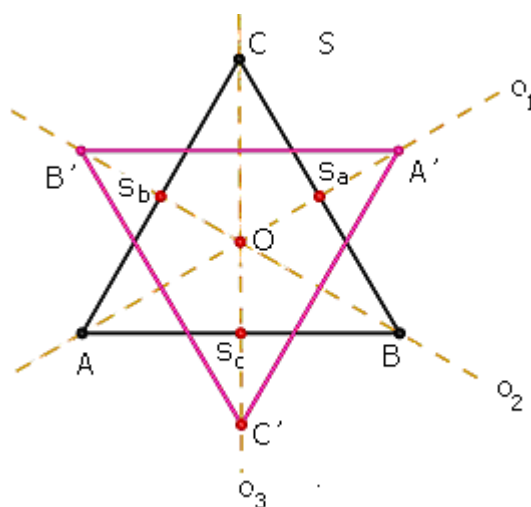
Narýsujte čtverec DEFG a kružnici k podle zadání. Jednotlivé body čtverce zobrazte podle bodu E. Bod D se zobrazí na D', bod F na F', bod G na G' a bod E je samodružný. Po zobrazení bodů a jejich spojení získáte obraz čtverce. Zobrazte nyní bod S a poté i kružnici k (Obr. 4.4.7.1).



Obr. 4.4.7.1: Úloha 4.4.7

Řešení úlohy 4.4.8:

Sestrojte zadaný trojúhelník. K sestrojení jeho os souměrnosti je nutné znát středy jednotlivých stran. Střed strany AB označíme jako S_c , BC jako S_a a AC jako S_b . Nyní jednotlivé středy spojte s jejich protějšími vrcholy a získáme osy o_1 , o_2 a o_3 . Jejich průsečík označte jako O. Nyní zobrazte jednotlivé body trojúhelníku podle O. Bod A se zobrazí na A' , B na B' a bod C na C' . Po spojení obrazů získáte trojúhelník $A'B'C'$ (Obr. 4.4.8.1).

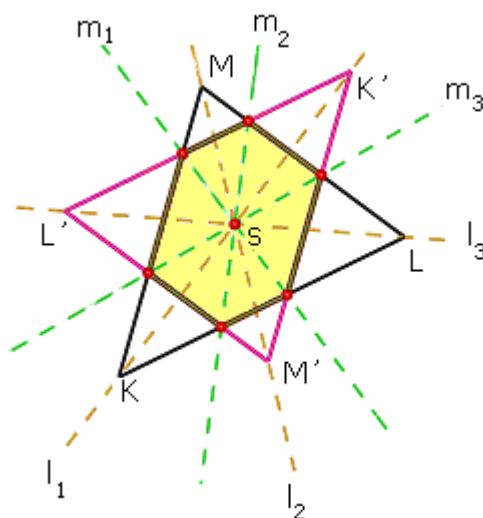


Obr. 4.4.8.1: Úloha 4.4.8

Závěr: Sjednocením obou trojúhelníků vznikne šesticípá hvězda.

Řešení úlohy 4.4.9:

Zobrazte postupně jednotlivé body trojúhelníku KLM. Bod K se zobrazí ve středové souměrnosti podle středu S na K' , L na L' a M na M' . Po spojení těchto bodů získáte zobrazený trojúhelník $K'L'M'$ (Obr. 4.4.9.1).

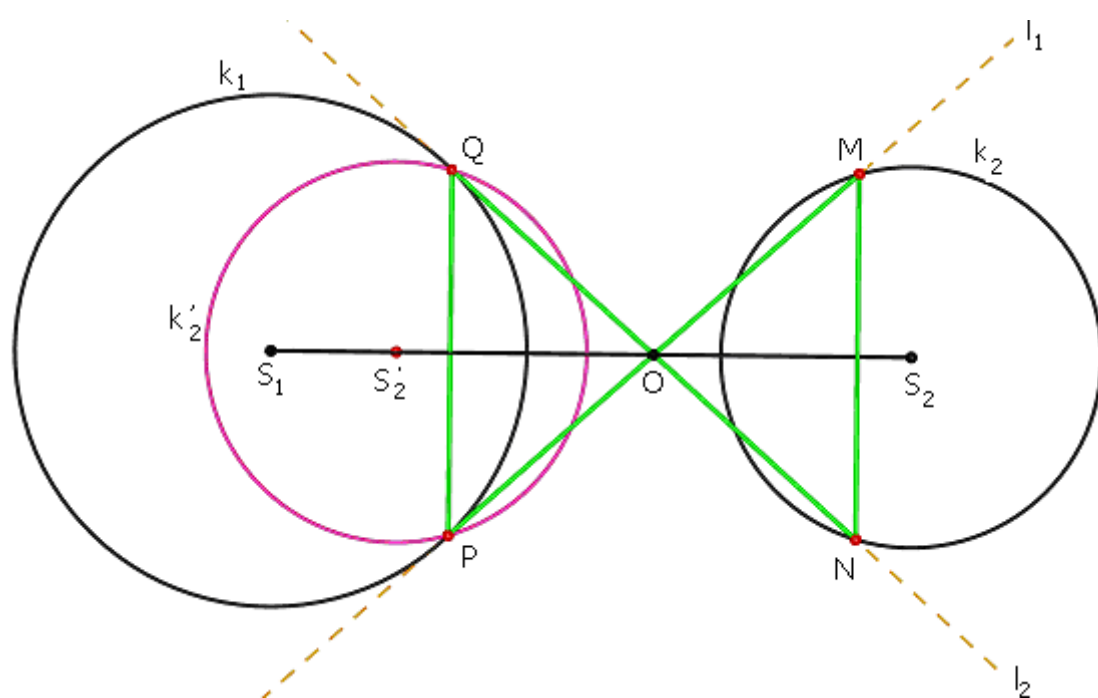


Obr. 4.4.9.1: Úloha 4.4.9

Závěr: Průnikem těchto dvou trojúhelníků je vždy mnohoúhelník, jehož vrcholy lze rozdělit na dvojice souměrně sdružených bodů podle středu S. Každý z vrcholů mnohoúhelníku je průnik dvou úseček.

Řešení úlohy 4.4.10:

Body P, Q vedou k jedinému řešení úlohy, které tvoří trojúhelník PQO a k němu podle středu O souměrný trojúhelník MNO. Protože hlavní vrchol O leží na středné S_1S_2 a vrcholy základny leží na k_1 nebo na k_2 , musí být oba trojúhelníky podle přímky S_1S_2 souměrné. Množiny možných bodů M, N je kružnice k_2 , kterou středovou souměrností se středem O převedete na množinu možných bodů P, Q, tj. v kružnici k_2' . Hledané body P, Q jsou pak průnikem kružnice k_1 a k_2' (Obr. 4.4.10.1).



Obr. 4.4.10.1: Úloha 4.4.10

5 POSUNUTÍ (TRANSLACE)

Posunutí neboli translace v rovině je opět přímá shodnost. Je jedno z nejjednodušších zobrazení. Jako první se uvádí identita.

Translace každému bodu A roviny přiřazuje obraz A' a to tak, že platí: $AA' = s$, kde s je vektor. Vektor s se nazývá vektor posunutí a udává délku a směr posunutí. Někdy se užívá pojmu orientovaná úsečka, u které rozlišujeme počáteční bod a koncový bod, kterým je dán směr.

Posunutí nemá žádné samodružné body. Samodružné přímky jsou všechny přímky rovnoběžné s vektorem posunutí.

5.1 Co rozumíme obrazem v translaci?

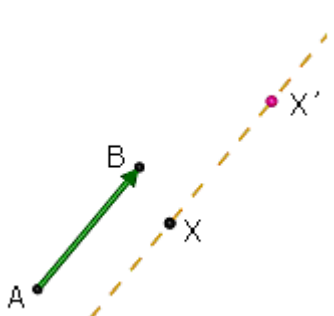
Úloha 5.1.1 Narýsujte si na papír libovolnou úsečku AB a bod X . Překreslete zadané věci na průsvitku a průsvitku posuňte tak, aby se bod A na průsvitce překryl s bodem B na papíře. Vezměte špendlík a propíchněte papír v místě, kam se na průsvitce posunul bod X . Tento bod označte jako X' . Tímto zobrazením jste bodu X přiřadili bod X' jako jeho obraz.¹³⁾

5.2 Konstrukce obrazu

Konstrukce obrazu bodu:

- 1) Zvolte si bod X a orientovanou úsečku AB .
- 2) Bod X posuňte ve stejném směru a o stejnou velikost jako je orientovaná úsečka AB , neboli bodem X ved'te rovnoběžku l s AB a od bodu X naneste na této přímce l vzdálenost AB .
- 3) Místo, kde se posunul bod B nazvěte X' , neboli průsečík přímky l a nanesené vzdálenosti je X' (Obr. 5.2.1).

Značíme: $T(AB): X \rightarrow X'$.

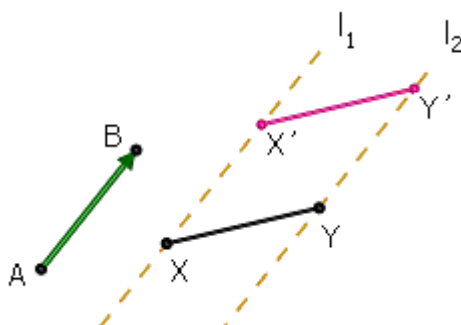


Obr. 5.2.1: Zobrazení bodu

Konstrukce obrazu úsečky:

- 1) Zvolte si úsečku XY a orientovanou úsečku AB .
- 2) Posuňte postupně jednotlivé body úsečky XY (viz. výše uvedené posunutí bodu).
- 3) Bod X se posune do bodu X' , bod Y se posune do bodu Y' .
- 4) Po spojení obrazů X' , Y' získáte hledanou zobrazenou úsečku $X'Y'$.

Zapišeme: $T(AB): XY \rightarrow X'Y'$.

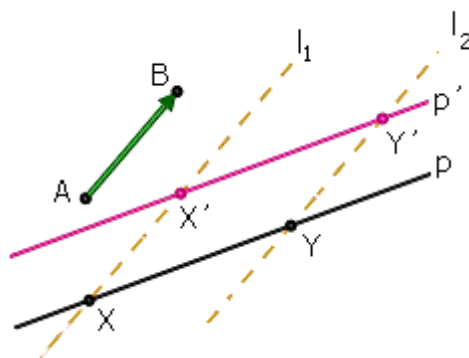


Obr. 5.2.2: Zobrazení úsečky

Konstrukce obrazu přímky:

- 1) Sestrojte přímku p a orientovanou úsečku AB .
- 2) Na přímce p zvolte libovolné body X, Y a ty zobrazte v posunutí o orientovanou úsečku AB (viz. výše zobrazení bodu).
- 3) Bod X se posune do bodu X' , Y se posune do bodu Y' .
- 4) Sestrojte přímku p' procházející body X', Y' a je rovnoběžná s přímkou p .
- 5) Přímka p' je hledaná zobrazená přímka přímky p .

Zapišeme: $T(AB): p \rightarrow p'$.

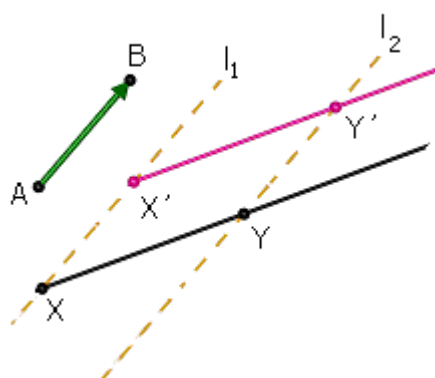


Obr. 5.2.3: Zobrazení přímky

Konstrukce obrazu polopřímky:

- 1) Sestrojte si polopřímku s počátečním bodem X a orientovanou úsečkou AB .
- 2) Na polopřímce se zvolte její libovolný vnitřní bod Y .
- 3) Body X, Y zobrazte v posunutí o orientovanou úsečku AB (viz. výše posunutí bodu).
- 4) Bod X se posune do bodu X' , bod Y do bodu Y' .
- 5) Sestrojte polopřímku procházející body X', Y' a je rovnoběžná s polopřímkou $\mapsto XY$.

Zapisujeme: $T(AB): \mapsto XY \rightarrow \mapsto X'Y'$.

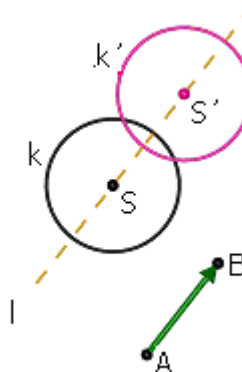


Obr. 5.2.4: Zobrazení polopřímky

Konstrukce obrazu kružnice:

- 1) Sestrojte kružnici $k(S, r)$ a orientovanou úsečku AB .
- 2) Střed S posuňte o orientovanou úsečku AB (viz. výše zobrazení bodů).
- 3) Sestrojte kružnici $k'(S', r)$.

Zapišeme: $T(AB): k \rightarrow k'$.

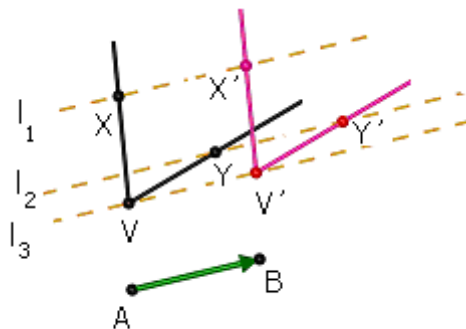


Obr. 5.2.5: Zobrazení kružnice

Konstrukce obrazu úhlu:

- 1) Sestrojte úhel $\angle XVY$ a orientovanou úsečku AB .
- 2) Body X, Y, V zobrazte v posunutí o orientovanou úsečku AB (viz. výše konstrukce bodu).
- 3) Spojte postupně obrazy X', V', Y' a získáte zobrazený úhel $\angle X'V'Y'$.

Zapišeme: $T(AB): \angle XVY \rightarrow \angle X'V'Y'$.



Obr. 5.2.6: Zobrazení úhlu

5.3 Úlohy

5.3.1 Narýsujte trojúhelník ABC : $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm a přímku p , která prochází bodem C a je rovnoběžná se stranou c . Přímku p zobrazte v posunutí daném orientovanou úsečkou:

- a) CB
- b) CA

Co pozorujete?

5.3.2 Zobrazte rovnostranný trojúhelník KLM : $k = 4$ cm v posunutí daném orientovanou úsečkou TL , kde T je těžiště trojúhelníku. Zjistěte, zda je trojúhelník KLM shodný se svým obrazem.

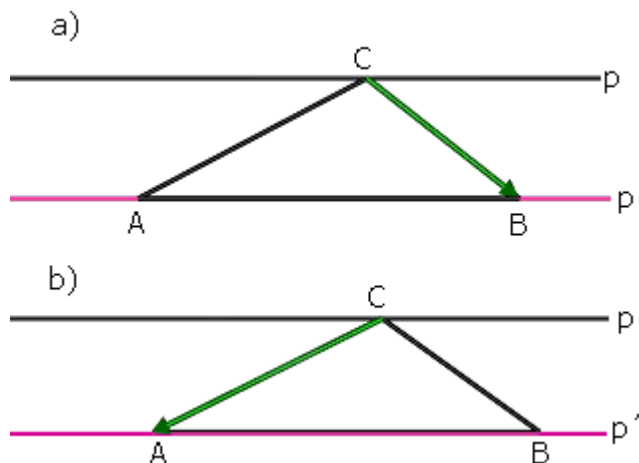
5.3.3 Zobrazte kružnici $k(S, r = 3$ cm) v posunutí daném libovolnou orientovanou úsečkou XY , která neprochází středem S . Body X, Y leží na kružnici.

5.3.4 Zobrazte obdélník $ABCD$: $a = 4$ cm, $b = 3$ cm v posunutí daném orientovanou úsečkou AS , kdy S je střed strany BC .

- 5.3.5 Vepište do obdélníku ABCD: $a = 6$ cm, $b = 2$ cm kružnici k (S , $r = 1$ cm) tak, aby se dotýkala strany DA. Jaká je maximální délka orientované úsečky XY, podle které se zobrazí kružnice k v posunutí tak, že zůstane uvnitř obdélníku?
- 5.3.6 Narýsujte soustavu souřadnic a v ní lichoběžník ABCD: $A = [0,0]$, $B = [3,0]$, $C = [2,1]$, $D = [1,1]$. Zobrazte jej v posunutí daném orientovanou úsečkou XY, $X = [0,1]$, $Y = [2,2]$.
- 5.3.7 Sestrojte trojúhelník ABC: $a = 4$ cm, $b = 3,7$ cm, $c = 5$ cm a kružnici $k(K, 1,7$ cm) tak, aby bod A byl středem úsečky CK. Dále sestrojte obraz k_1 kružnice k v posunutí určeném orientovanou úsečkou AB a obraz k_2 kružnice k_1 v posunutí určeném orientovanou úsečkou BC. Co je obrazem kružnice k v posunutí určeném orientovanou úsečkou AC?
- 5.3.8 Sestrojte trojúhelník KLM: $|KL| = 5,4$ cm, $|KM| = 6$ cm, úhel $MKL = 75^\circ$. Jeho střední příčku rovnoběžnou se stranou KL označte $K'L'$, kdy $K' \in LM$ a $L' \in KM$. Sestrojte obraz $K_1L_1M_1$ trojúhelníku KLM v posunutí určeném orientovanou úsečkou $K'L'$ a obraz $K_2L_2M_2$ trojúhelníku KLM v posunutí určeném orientovanou úsečkou $L'K'$. Co je průnikem vzoru a obou jeho obrazů?

5.4 Řešení úloh

Řešení úlohy 5.3.1:

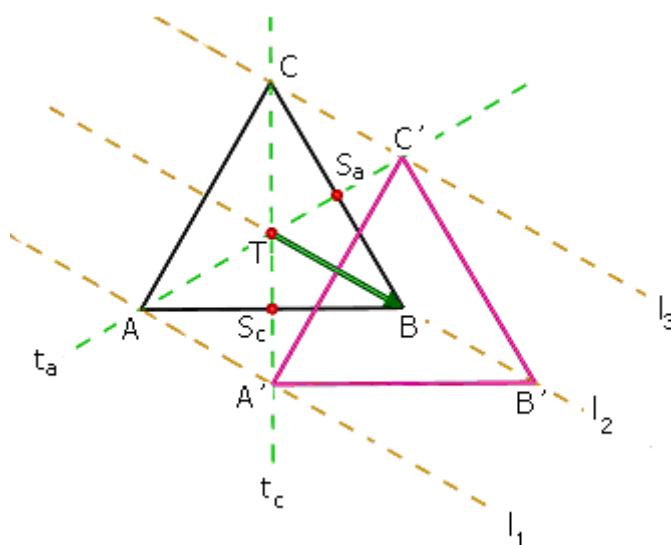


Obr. 5.3.1.1: Úloha 5.3.1

Závěr: V obou případech vznikne stejná přímka.

Řešení úlohy 5.3.2:

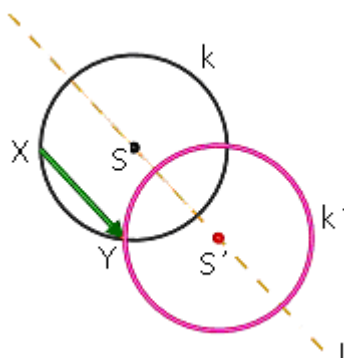
Sestrojte trojúhelník KLM podle zadání. Abyste mohli trojúhelník posunout, je zapotřebí získat těžiště. Těžiště získáte pomocí dvou těžnic (trojúhelník má těžnice tři, ale k sestrojení těžiště stačí dvě). Těžnici t_a sestrojíte pomocí středu S_a , který je středem strany BC. Stejným způsobem sestrojte těžnici t_c . Průsečík těchto těžnic označte jako T. Nyní můžete trojúhelník ABC posunout (Obr. 5.3.2.1).



Obr. 5.3.2.1: Úloha 5.3.2

Řešení úlohy 5.3.3:

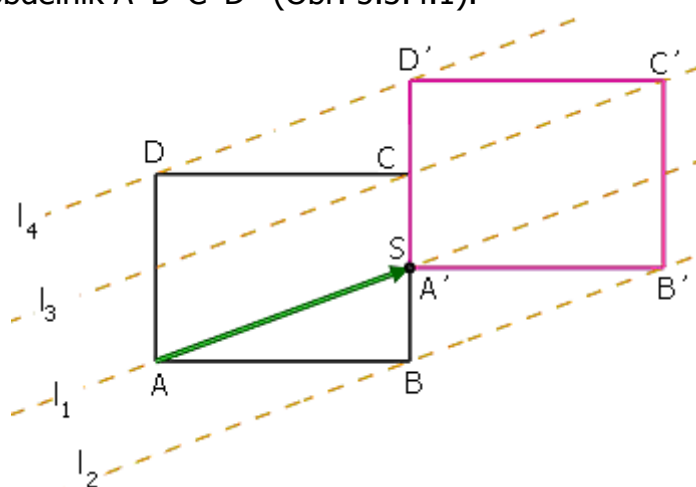
Sestrojte kružnici k podle zadání a zvolte na ní libovolné body X,Y. Tyto body tvoří orientovanou úsečku XY. Posuňte bod S pomocí této úsečky. Získáte bod S' (Obr. 5.3.3.1).



Obr. 5.3.3.1: Úloha 5.3.3

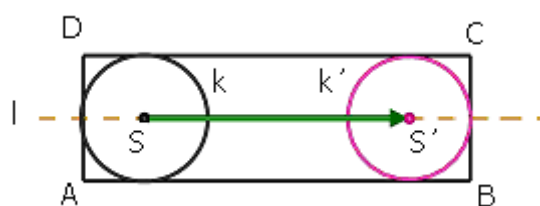
Řešení úlohy 5.3.4:

Zde stačí pouze nalézt střed S strany BC a pak obdélník $ABCD$ pomocí vektoru $\vec{AS}$ posunout v obdélník $A'B'C'D'$ (Obr. 5.3.4.1).



Obr. 5.3.4.1: Úloha 5.3.4

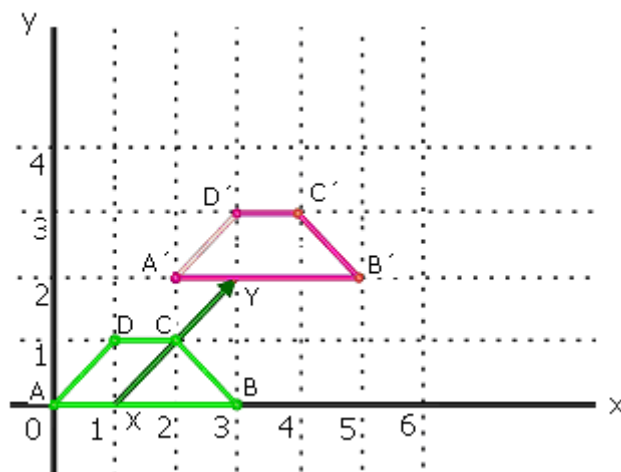
Řešení úlohy 5.3.5 (Obr. 5.3.5.1):



Obr. 5.3.5.1: Úloha 5.3.5

Závěr: Maximální délka orientované úsečky jsou 4 cm.

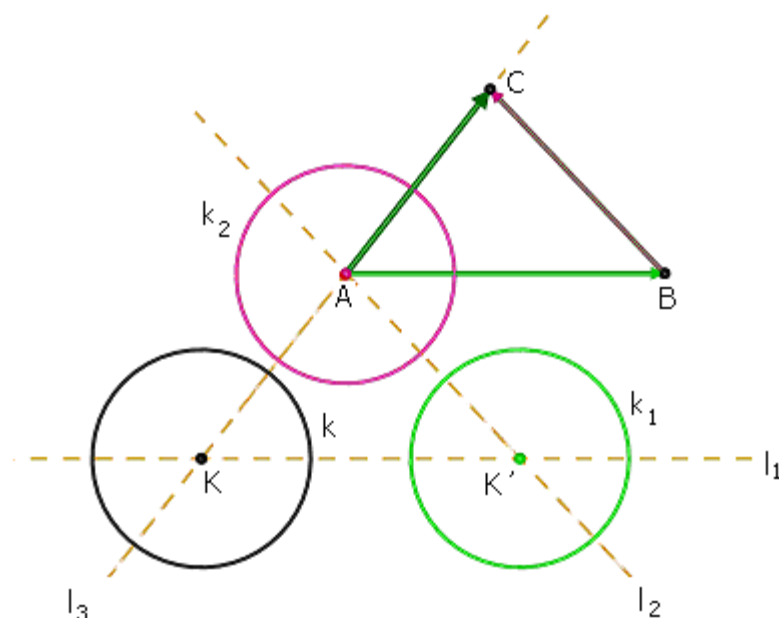
Řešení úlohy 5.3.6 (Obr. 5.3.6.1):



Obr. 5.3.6.1: Úloha 5.3.6

Závěr: x-ová souřadnice se zvětší o jednu jednotku a y-ová souřadnice o dvě jednotky.

Řešení úlohy 5.3.7 (Obr. 5.3.7.1):

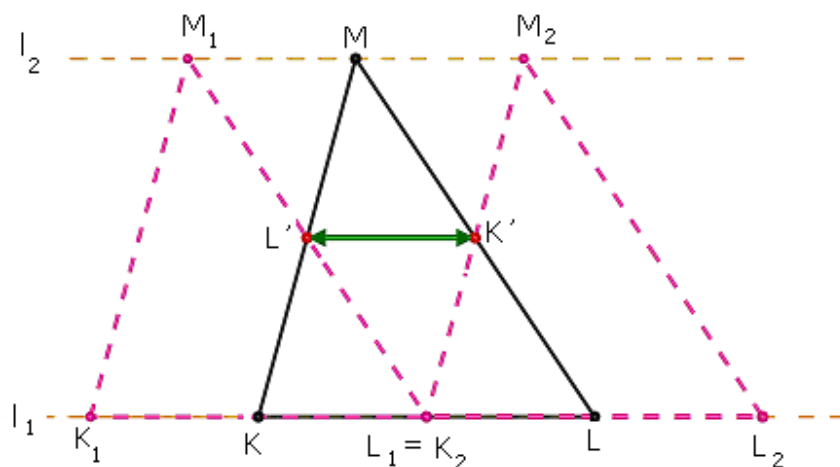


Obr.5.3.7.1: Úloha 5.3.7

Závěr: Obrazem kružnice k v posunutí určeném orientovanou úsečkou AC je kružnice k_2 .

Řešení úlohy 5.3.8:

Sestrojte trojúhelník KLM . Střední příčku $K'L'$ získáme ze středů stran, kdy K' patří LM a L' patří KM . Nyní trojúhelník KLM jen posuňte (Obr. 5.2.7.1).



Obr. 5.3.8.1: Úloha 5.3.8

6 ROTACE (TRANSLACE)

Rotace se na základní škole neprobírá. Po prostudování různých učebnic jsem objevila jen jednu, kde je o rotaci zmínka. Pokud jsem ale otevřela sbírky úloh, nějaké příklady na rotaci zde byly. Proto jsem se rozhodla jednu kapitolu věnovávat rotaci, ačkoliv jen velmi okrajově.

Je dán bod S (střed otočení) a orientovaný úhel α . Otočení je zobrazení (přímá shodnost), které každému bodu X , který se nerovná bodu S roviny přiřadí jeho obraz X' tak, že orientovaný úhel XSX' je shodný s úhlem α a vzdálenosti středu od bodu X i od jeho obrazu X' jsou stejné. Střed S je samodružný.¹³⁾

Orientovaný úhel je dvojice polopřímek se stejným počátkem. První polopřímka je počáteční rameno a druhá polopřímka je koncové rameno úhlu.

Otáčet můžeme v kladeném smyslu ($+\alpha$) a to proti směru hodinových ručiček nebo v záporném směru ($-\alpha$) ve směru hodinových ručiček.

Zápis: $R(S, \alpha): X \rightarrow X'$.

6.1 Co rozumíme obrazem v rotaci?

Úloha 6.1.1: Sestrojte na papír $\triangle ABC$ a bod O , který leží vně $\triangle ABC$ a překreslete to i na průsvitku. Potom průsvitku upevněte špendlíkem v bodě O a otočte ji kolem bodu O o úhel 30° . Bod A se zobrazí na A' , bod B na B' a bod C na C' . $\triangle ABC$ přemístěním (otočením) nezměnil svůj tvar ani velikost, změnil jen svou polohu.

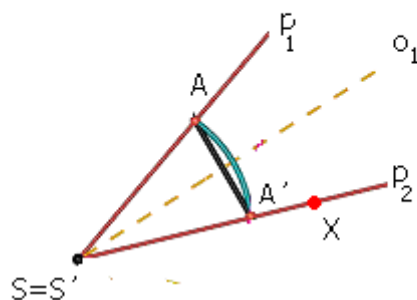
Tedy $\triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$. Obrazem $\triangle ABC$ je tedy $\triangle A'B'C'$.¹⁴⁾

6.2 Konstrukce obrazu

Konstrukce obrazu bodu A :

- 1) Zvolte bod A a bod S , kdy S je střed otáčení.
- 2) Sestrojte ramena úhlu $\angle ASX$, tedy polopřímky $\mapsto SA$, $\mapsto SX$, které svírají úhel otáčení.
- 3) Polopřímku $\mapsto SA$ otočte do polopřímky $\mapsto SX$.
- 4) Bod A se zobrazí do A' (Obr. 6.2.1).

Zapišeme: $R(S, \angle ASX): A \rightarrow A'$.

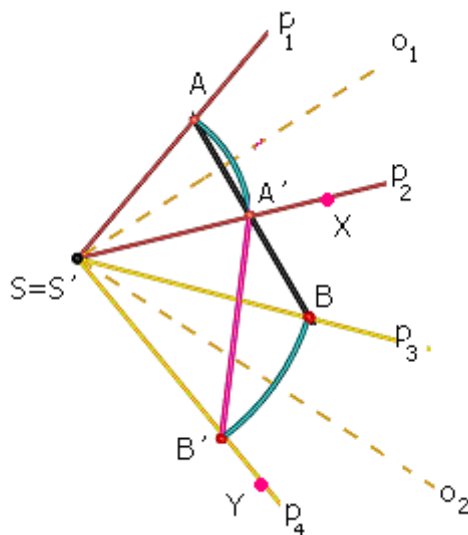


Obr. 6.2.1: Zobrazení bodu

Konstrukce obrazu úsečky:

- 1) Sestrojte bod S a úsečku AB.
- 2) Sestrojte ramena úhlu $\angle ASX$ ($\angle ASX = \angle BSY$), tedy polopřímky $\mapsto SA$ a $\mapsto SX$, které svírají úhel otáčení.
- 3) Polopřímku $\mapsto AS$ otočte do $\mapsto SX$, bod A se zobrazí na A' .
- 4) Sestrojte ramena úhlu $\angle BSY$ ($\angle BSY = \angle ASX$), tedy polopřímky SB a SY , které svírají úhel otáčení.
- 5) Polopřímku $\mapsto BS$ otočte do $\mapsto SY$, bod B se zobrazí na B' .
- 6) Spojte A' , B' a získáte hledanou zobrazenou úsečku (Obr.6.2.3).

Zapišeme: $R(S, \angle ASX): \mapsto AB \rightarrow \mapsto A'B'$.

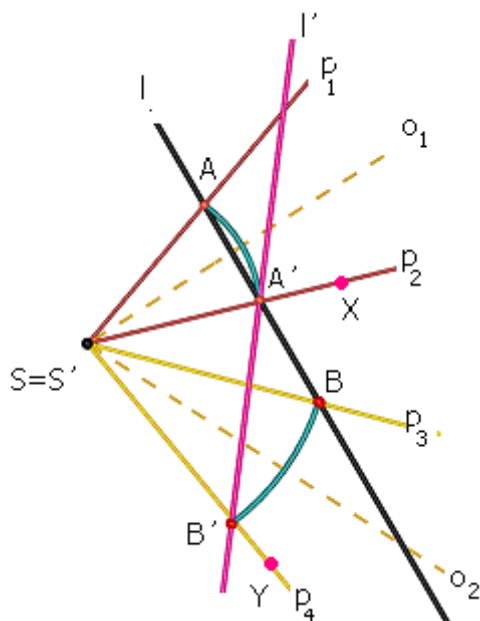


Obr. 6.2.2: Zobrazení úsečky

Konstrukce obrazu přímky:

- 1) Sestrojte S a přímku l.
- 2) Na přímce l zvolte dva libovolné vnitřní body A,B.
- 3) Tyto body zobrazte v otočení (viz. výše konstrukce bodu).

4) Body A' , B' spojte a získáte zobrazenou přímku l' přímky l (Obr. 6.2.3).
Zapišeme: $R(S, \angle ASX): l \rightarrow l'$.

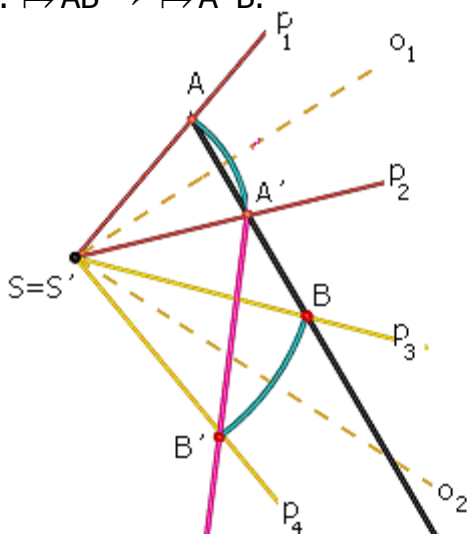


Obr. 6.2.3: Zobrazení přímky

Konstrukce obrazu polopřímky:

- 1) Sestrojte bod S a polopřímku s počátečním bodem A .
- 2) Zvolte si libovolný vnitřní bod polopřímky a označte jej B .
- 3) Zobrazte body A, B v otočení (viz. výše konstrukce bodu).
- 4) Body A' , B' spojte a získáte zobrazenou polopřímku s počátečním bodem A' (Obr. 6.2.4).

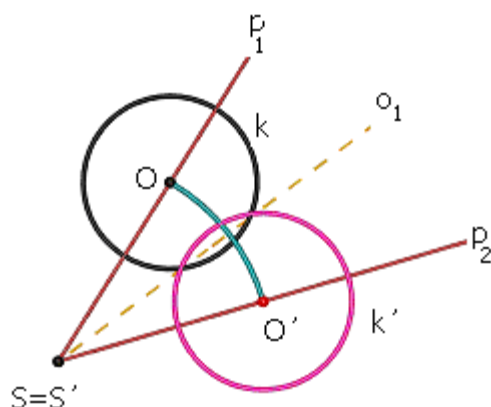
Zapišeme: $R(S, \angle ASX): \mapsto AB \rightarrow \mapsto A'B$.



Obr. 6.2.4: Zobrazení polopřímky

Konstrukce obraz kružnice:

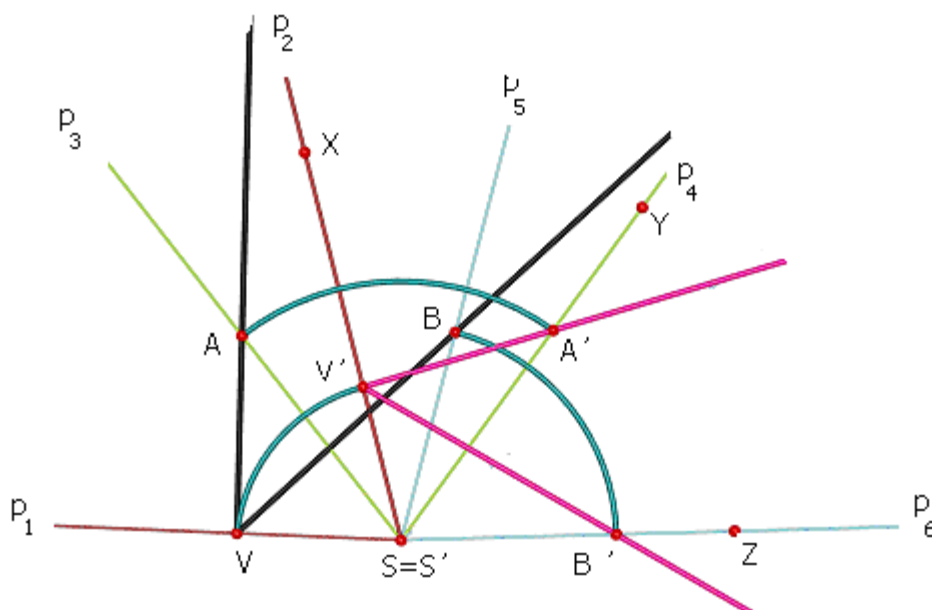
- 1) Sestrojte bod S a kružnici $k(O, r)$.
- 2) Zobrazte bod O (viz. konstrukce bodu).
- 3) Sestrojte kružnice $k'(O', r)$ (Obr. 6.2.5).



Obr. 6.2.5: Zobrazení kružnice

Konstrukce obrazu úhlu:

- 1) Sestrojte bod S a úhel $\angle AVB$.
- 2) Otočte bod A o úhel $\angle VSX$ a získáte bod A' , otočte bod B o úhel $\angle ASY$ a získáte bod B' , otočte bod C o úhel $\angle BSZ$ a získáte C' .
 $\angle VSX = \angle ASY = \angle BSZ$.
- 3) Spojte postupně zobrazené body a získáte hledaný úhel $\angle A'V'B$ (Obr. 6.2.6).



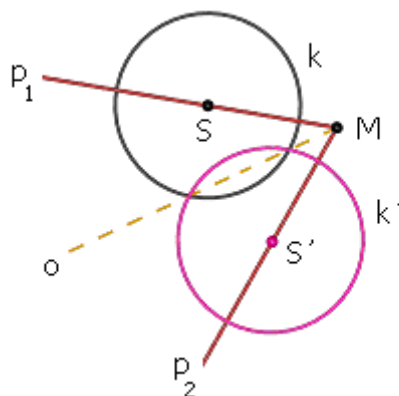
Obr. 6.2.6: Zobrazení úhlu

6.3 Úlohy

- 6.3.1 Sestrojte obraz kružnice $k(S, r=1,4 \text{ cm})$ v otočení: $R(M, +70^\circ)$.
- 6.3.2 Sestrojte obraz čtverce MNOP s libovolnou délkou strany v otočení $R(S; +45^\circ)$, kdy S je střed úhlopříček.
- 6.3.3 Jsou dány soustředné kružnice $k_1(S, r_1 = 1,5 \text{ cm})$ a $k_2(S, r_2 = 3 \text{ cm})$ a bod $A \in k_1$. Sestrojte všechny čtverce ABCD tak, že $B \in k_1$ a $D \in k_2$.
- 6.3.4 Jsou dány přímky s, m, r ; $s \parallel m, s \parallel r, |sm| = 8 \text{ mm}, |mr| = 12 \text{ mm}$, přičemž přímka m leží uvnitř pásu, který je ohraničen přímkami s a r . Na přímce s zvolte bod S a s využitím otočení sestrojte všechny čtverce PQRS, když $P \in m$ a $R \in r$.
- 6.3.5 Je dána kružnice $k(S, r = 1,8 \text{ cm})$, přímka $l, |Sl| = 2,8 \text{ cm}$, a bod $M, |SM| = 2,4 \text{ cm}$. Sestrojte s využitím otočení všechny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky KLM s pravým úhlem při vrcholu M , má-li platit, že $K \in k, L \in l$.
- 6.3.6 Jsou dány tři rovnoběžné přímky l, m a $n, |lm| = 1 \text{ cm}, |mn| = 1,5 \text{ cm}$, přičemž přímka m leží uvnitř pásu ohraničeného přímkami l a n , a bod M , který patří přímce m . S využitím otočení sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky LNM, kde $L \in l$ a $N \in n$.

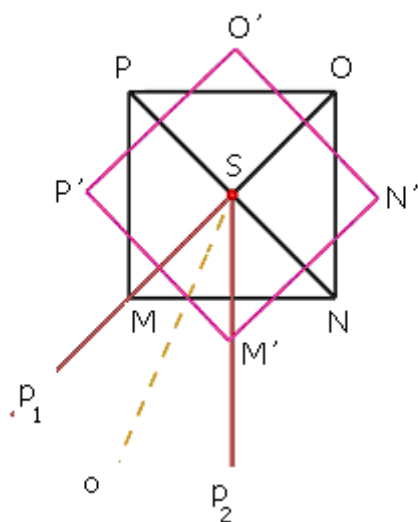
6.4 Řešení úloh

Řešení úlohy 6.3.1 (Obr. 6.3.1.1):



Obr. 6.3.1.1: Úloha 6.3.1

Řešení úlohy 6.3.2 (Obr. 6.3.2.1):



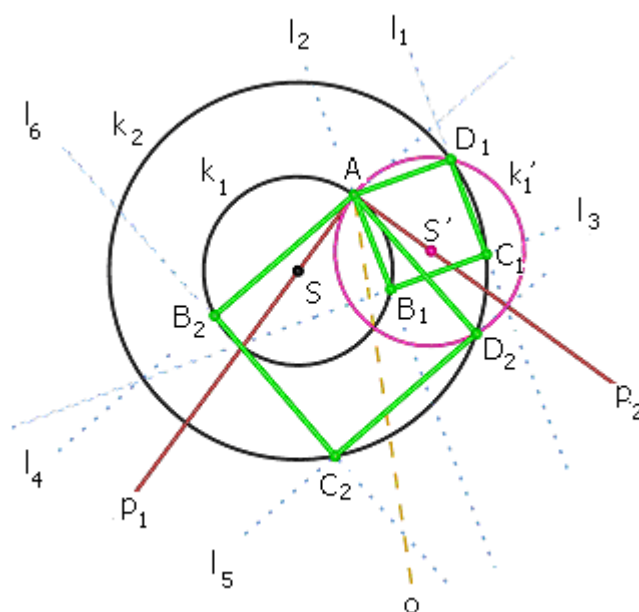
Obr. 6.3.2.1: Úloha 6.3.2

Řešení úlohy 6.3.3:

Sestrojte kružnice k_1 , k_2 a bod A , $A \in k_1$. Konstrukci proveďte s využitím otočení $R(A, +90^\circ)$. V tomto zobrazení je bod D obrazem bodu B . Bod D tedy leží na kružnici k_1 $[R(A, +90^\circ):k_1 \rightarrow k_1]$ a zároveň na kružnici k_2 . Průnikem kružnic k_1' a k_2 získáte dva body a to bod D_1 a D_2 . Nyní jsou dvě možnosti, jak pokračovat dál. První je opět využití rotace, kdy získáte bod B_1 : $[R(A, +90^\circ):D_1 \rightarrow B_1]$. Nyní sestrojte rovnoběžnou přímku l_3 k úsečce AD_1 a kolmici l_2 , která je kolmá na přímku l_3 . Průsečík těchto

přímek označte jako B_1 . Po spojení bodů A_1, B_1, C_1, D_1 získáte hledaný čtverec. Ovšem je zde i bod D_2 , který přichází s myšlenkou, že úloha má dvě řešení. Sestrojte zbývající body B_2 a C_2 stejným způsobem jako u prvního čtverce a získáte čtverec $A_2B_2C_2D_2$.

Druhý způsob je pomocí kolmic, rovnoběžek a průsečíků (Obr. 6.3.3.1).

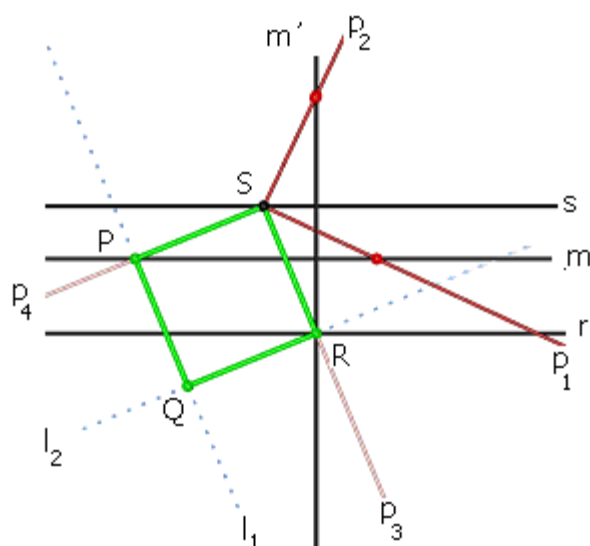


Obr. 6.3.3.1: Úloha 6.3.3

Řešení úlohy 6.3.4:

Sestrojte postupně zadané přímky s, m, r a bod S podle zadání. Využijte otoční přímky p a to $o +90^\circ$, tedy $R(S; +90^\circ): m \rightarrow m'$. Průsečík přímek r a m' označte jako R . V tomtoobrazení je bod R obrazem bodu P . Bod P získáte díky otočení $o -90^\circ$, tedy $R(S; -90^\circ): R \rightarrow P$. Pro získání bodů Q lze tak, že použijete translaci: $T(SP): R \rightarrow Q$.

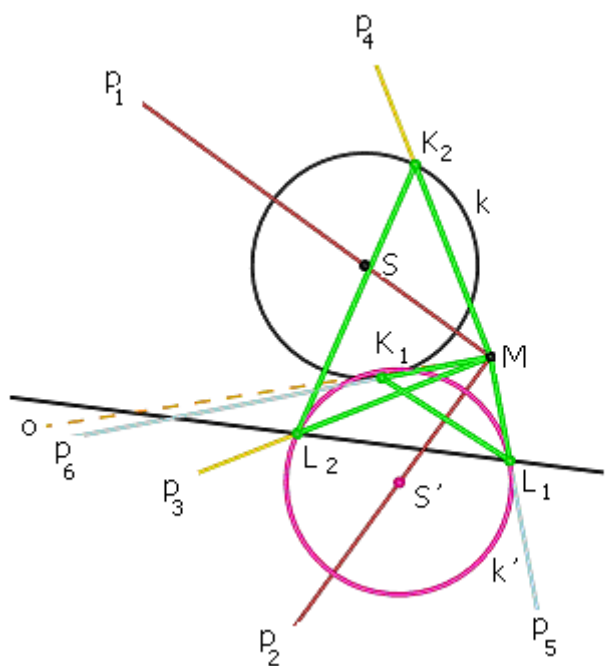
Neb je zde možnost využít i kolmic a rovnoběžek. Sestrojte kolmici l_2 procházející bodem R a kolmou k úsečky PS , kolmici l_4 procházející bodem P a kolmou na úsečce PS . Průsečík těchto kolmic označte jako Q (Obr. 6.3.4.1).



Obr. 6.3.4.1: Úloha 6.3.4

Řešení úlohy 6.3.5:

Sestrojte kružnici k , přímku l a bod M podle zadání. Využijte otočení kružnice a to o 90° , tedy $R(M; +90^\circ): k \rightarrow k'$. Průsečík k' a l označte jako L_1 a L_2 . V tomto zobrazení je bod L obrazem K . Bod K_1 tedy získáte díky $R(M; -90^\circ): L_1 \rightarrow K_1$ a $R(M; -90^\circ): L_2 \rightarrow K_2$. Po spojení bodů $K_1L_1M_1$ získáte první hledaný trojúhelník a po spojení $K_2L_2M_2$ získáte druhý (Obr. 6.3.5.1).

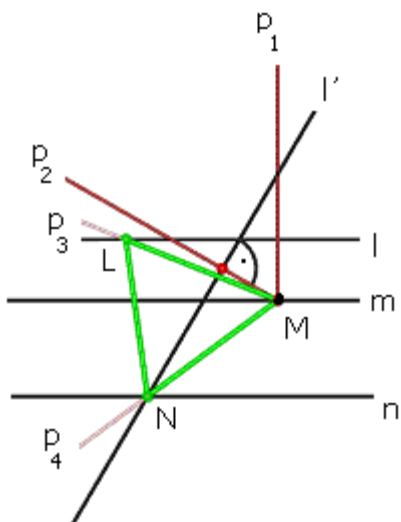


Obr. 6.3.5.1: Úloha 6.3.5

Závěr: Počet řešení závisí na volbě polohy bodu M – při volbě polohy (Obr. 6.3.5.1) získáte dvě řešení.

Řešení úlohy 6.3.6:

Sestrojte přímky l, m, n a bod M podle zadání. Otočte přímku l o $+60^\circ$, tedy $R(M; +60^\circ): l \rightarrow l'$. Průsečík přímek n a l' označte jako N. Bod N je obrazem bodů L, tedy $R(M; +60^\circ): N \rightarrow L$. Po spojení bodů získáte trojúhelník LNM (Obr. 6.3.4.1).



Obr. 6.3.6.1: Úloha 6.3.6

ZÁVĚR

Tato práce mi přinesla mnoho užitečného pro mou budoucí praxi pedagoga. Při zpracování zadaného tématu jsem se hlouběji seznámila s různými učebnicemi a měla možnost je porovnat. Tuto práci jsem nepojala pouze jako kompilační, ale snažila jsem se inspirovat různými autory a vymyslet si vlastní nebo obdobné úlohy.

Jako student základní a střední školy znám toto učivo pouze v klasickém podání bez počítačové techniky. Dneska již na všech základních školách fungují třídy s interaktivní tabulí, kde studenti pracují v programu jako je například Cabri. Bylo pro mě přínosné se hlouběji s tímto programem seznámit a naučit se v něm konstruktivně pracovat. Jsem si vědoma, že i v budoucích profesích, ve kterých se žáci uplatní budou již předkládané úkoly (stavebnictví, strojírenství apod.) řešit pouze v grafických programech. Moderní výuku geometrie vnímám tedy jako prolínání klasického rýsování s rýsováním na počítači. Pro svou následující praxi bych tedy ráda využila při výuce všechny dostupné metody, tedy klasické použití pravítka a kružítko, ale i počítačový software. Student se při práci s pravítkem a kružítkem učí přesnosti, je nucen zamyslet se nad elementárním vznikem jednotlivých útvarů.

Přínos své práce vidím ve zpracování řady úloh se zadanou problematikou.

Seznam literatury

BUŠEK, I.; KUBÍNOVÁ, M.; NOVOTNÁ, J. *Matematika 9, 2.díl*. Praha : Prométheus, 1995. ISBN 80-85849-74-7.

ČIŽMÁR, J.; HRDINA, L.; KOMAN, M.; ŘEBÍČKOVÁ, D.; ZAPLETAL, F. *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 1.díl*. Praha : Prométheus, 1990. ISBN 80-85849-81-2.

HERMAN, J.; CHRÁPAVÁ, V.; JANČOVIČOVÁ, E.; ŠIMSA, J. *Matematika-Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Praha : Prométheus, 1995. ISBN 80-85849-860.

HERMAN, J.; CHRÁPAVÁ, V.; JANČOVIČOVÁ, E.; ŠIMSA, J. *Matematika opakování z obecné školy*. Praha: Prométheus, 1994. ISBN 80-85849-51-8.

HERMAN, J.; CHRÁPAVÁ, V.; JANČOVIČOVÁ, E.; ŠIMSA, J. *Osová a středová souměrnost*. Praha : Prométheus, 1995. ISBN 80-85849-73-9.

KRUPKA, P. *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň ZŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií, 2.díl*. Praha: Prométheus, 1995. ISBN 80-7196-189-2.

MOLNÁR, J.; LEPIK, L.; LIŠKOVÁ, H.; SLOUKA, J. *Matematika 7, učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc : PRODOS, 1999. ISBN 80-7230-03-032-8.

MOLNÁR, J.; LEPIK, L.; LIŠKOVÁ, H.; SLOUKA, J. *Matematika 7, pracovní sešit s komentářem pro učitele, 2.část*. Olomouc : PRODOS, 1999. ISBN 80-7230-033-4.

SLOUKA, J. *Geometrie pro 5.-9. ročník ZŠ a nižší třídy víceletých gymnázií*. Olomouc : FIN, 1993. ISBN 80-85572-5-2.

SLOUKA A KOLEKTIV. *Sbírka příkladů z matematiky*. Olomouc : FIN, 1992. ISBN 80-85572-24-9.

TREJBAL, J.; FILIP. Š.; KUČINOVÁ, E.; MÄSIAR. P. *Sbírka úloh z matematiky z matematiky pro 7. ročník ZŠ*. Praha : Prométheus, 1994. ISBN 80-85849-08-9.

ŽUREK, M. *Sbírka příkladů z matematiky*. Olomouc : FIN, 1994. ISBN 80-85572-1.

URBANOVÁ, J.; KOMAN, M.; MELICHAR, J.; ŘEBÍČKOVÁ, D. *Matematika pro 5. ročník ZŠ, 1.díl*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1988. ISBN 80-04.255434-5.

Poznámky

- 1) URBANOVÁ, J.; KOMAN, M.; MELICHAR, J.; ŘEBÍČKOVÁ, D.; ZAPLETAL, F. *Matematika pro 5. ročník ZŠ, 1. díl*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1988. ISBN 80-08.255434-5.
- 2) SLOUKA, J. *Geometrie pro 5.-9. ročník ZŠ a nižší třídy víceletých gymnázií*. Olomouc : FIN, 1993. ISBN 80-85572-5-2.
- 3) HERMAN, J.; CHRÁPAVÁ, V.; JANČOVIČOVÁ, E.; ŠIMSA, J. *Osová a středová souměrnost*. Praha : Prométheus, 1995. ISBN 80-85849-73-9.
- 4) HERMAN, J.; CHRÁPAVÁ, V.; JANČOVIČOVÁ, E.; ŠIMSA, J. *Osová a středová souměrnost*. Praha : Prométheus, 1995. ISBN 80-85849-73-9.
- 5) HERMAN, J.; CHRÁPAVÁ, V.; JANČOVIČOVÁ, E.; ŠIMSA, J. *Osová a středová souměrnost*. Praha : Prométheus, 1995. ISBN 80-8549-73-9.
- 6) MOLNÁR, J.; LEPIK, L.; LIŠKOVÁ, H.; SLOUKA, J. *Matematika 7, učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc : PRODOS, 1999. ISBN 80-7230-032-8.
- 7) HERMAN, J.; CHRÁPAVÁ, V.; JANČOVIČOVÁ, E.; ŠIMSA, J. *Osová a středová souměrnost*. Praha : Prométheus, 1995. ISBN 80-85849-73-9. str. 31
- 8) ČIŽMÁR, J.; HRDINA, L.; KOMAN, M.; ŘEBÍČKOVÁ, D.; ZAPLETAL, F. *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 1.díl*. Praha : Prométheus, 1990. ISBN 80-85859-81-2.
- 9) SLOUKA, J. *Geometrie pro 5.-9. ročník ZŠ a nižší třídy víceletých gymnázií*. Olomouc : FIN, 1993. ISBN 80-85572-5-2.
- 10) HERMAN, J.; CHRÁPAVÁ, V.; JANČOVIČOVÁ, E.; ŠIMSA, J. *Osová a středová souměrnost*. Praha : Prométheus, 1995. ISBN 80-8584-73-9, str. 47
- 11) ČIŽMÁR, J.; HRDINA, L.; KOMAN, M.; ŘEBÍČKOVÁ, D.; ZAPLETAL, F. *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 1.díl*. Praha : Prométheus, 1990. ISBN 80-85849-81-2.
- 12) HERMAN, J.; CHRÁPAVÁ, V.; JANČOVIČOVÁ, E.; ŠIMSA, J. *Osová a středová souměrnost*. Praha : Prométheus, 1995. ISBN 80-8584-73-9. str. 41
- 13) POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia, Planimetrie*. Praha : Prométheus, 1993. ISBN 80-7196-174-4.
- 14) SLOUKA, J. *Geometrie pro 5.-9. ročník ZŠ a nižší třídy víceletých gymnázií*. Olomouc : FIN, 1993. ISBN 80-85572-5-2.

Seznam obrázků

Obrázek 1.1.1: Bod.....	7
Obrázek 1.1.2: Úsečka.....	7
Obrázek 1.1.3: Přímka.....	7
Obrázek 1.1.4: Polopřímka.....	8
Obrázek 1.1.5: Rovina.....	8
Obrázek 1.1.6: Polorovina.....	8
Obrázek 1.2.1: Vzájemná poloha bodu a přímky.....	9
Obrázek 1.2.2: Rovnoběžné přímky.....	9
Obrázek 1.2.3: Totožné přímky.....	10
Obrázek 1.2.4: Různoběžné přímky.....	10
Obrázek 1.2.5 Kolmé přímky.....	10
Obrázek 1.2.6: Vzájemná poloha přímky a roviny.....	11
Obrázek 1.2.7: Rovnoběžné roviny.....	11
Obrázek 1.2.8: Totožné roviny.....	12
Obrázek 1.2.9: Různoběžné roviny.....	12
Obrázek 1.2.10: Kolmé roviny.....	12
Obrázek 1.3.1: Vzdálenost dvou bodů.....	13
Obrázek 1.3.1.1: Úloha 1.3.1 - Vzdálenost bodu od přímky.....	13
Obrázek 1.3.1.2: Úloha 1.3.1 - Vzdálenost bodu od přímky.....	13
Obrázek 1.3.2.1: Úloha 1.3.2 – Vzdálenost dvou přímek.....	14
Obrázek 1.4.4.1: Úloha 1.4.4.....	15
Obrázek 1.4.1.1: Úloha 1.4.1.....	15
Obrázek 1.4.2.1: Úloha 1.4.2.....	15
Obrázek 1.4.3.1: Úloha 1.4.3.....	16
Obrázek 2.1.1: Shodnost trojúhelníku.....	17
Obrázek 2.1.1.1: Úloha 2.1.1.....	17
Obrázek 2.3.1.1a: Úloha 2.3.1.....	18
Obrázek 2.3.2.1: Úloha 2.3.2.....	19
Obrázek 2.3.3.1: Úloha 2.3.3.....	19
Obrázek 2. 3.1.1b: Úloha 2.3.1.....	20
Obrázek 2.3.3.1: Úloha 2.3.3.....	20

Obrázek 3.1.1.1: Úloha 3.1.1.....	21
Obrázek 3.1.2.1: Úloha 3.1.2.....	22
Obrázek 3.2.1: Zobrazení bodu.....	22
Obrázek 3.2.2: Zobrazení úsečky.....	23
Obrázek 3.2.3: Zobrazení přímky.....	24
Obrázek 3.2.4: Zobrazení polopřímky.....	34
Obrázek 3.2.5: Zobrazení kružnice.....	25
Obrázek 3.2.6: Zobrazení úhlu.....	25
Obrázek 3.3.1: Osově souměrný strom.....	26
Obrázek 3.3.2: Osově souměrný motýl.....	26
Obrázek 3.5.3.1a: Úloha 3.5.3.....	28
Obrázek 3.5.4.1a: Úloha 3.5.4.....	28
Obrázek 3.5.5.1a: Úloha 3.5.5.....	28
Obrázek 3.5.6.1a: Úloha 3.5.6.....	28
Obrázek 3.5.8.1a: Úloha 3.5.8.....	29
Obrázek 3.5.9.1a: Úloha 3.5.9.....	29
Obrázek 3.5.1.1: Úloha 3.5.1.....	30
Obrázek 3.5.2.1: Úloha 3.5.2.....	30
Obrázek 3.5.3.1b: Úloha 3.5.3.....	31
Obrázek 3.5.4.1b: Úloha 3.5.4.....	31
Obrázek 3.5.5.1b: Úloha 3.5.5.....	32
Obrázek 3.5.6.1b: Úloha 3.5.6.....	32
Obrázek 3.5.7.1: Úloha 3.5.7 – arabské číslice	33
Obrázek 3.5.7.2: Úloha 3.5.7 – římské číslice.....	33
Obrázek 3.5.8.1b: Úloha 3.5.8.....	33
Obrázek 3.5.9.1b: Úloha 3.5.9.....	34
Obrázek 3.5.10.1: Úloha 3.5.10 - Trojúhelník.....	34
Obrázek 3.5.10.2: Úloha 3.5.10 – Pěticípá hvězda.....	34
Obrázek 3.5.11.1: Úloha 3.5.11.....	35
Obrázek 3.5.12.1: Úloha 3.5.12.....	35
Obrázek 3.5.13.1: Úloha 3.5.13.....	36

Obrázek 3.5.14.1: Úloha 3.5.14.....	36
Obrázek 3.5.15.1: Úloha 3.5.15.....	37
Obrázek 4.1.1.1: Úloha 4.1.1.....	38
Obrázek 4.2.1: Zobrazení bodu.....	39
Obrázek 4.2.2: Zobrazení úsečky.....	39
Obrázek 4.2.3: Zobrazení přímky.....	40
Obrázek 4.2.4: Zobrazení polopřímky.....	40
Obrázek 4.2.5: Zobrazení úhlu	41
Obrázek 4.2.6: Zobrazení kružnice	41
Obrázek 4.4.2.1a: Úloha 4.4.2.....	43
Obrázek 4.4.2.2a: Úloha 4.4.2.....	43
Obrázek 4.4.3.1a: Úloha 4.4.3.....	43
Obrázek 4.4.1.1: Úloha 4.4.1.....	44
Obrázek 4.4.2.1b: Úloha 4.4.2.....	45
Obrázek 4.4.2.2b: Úloha 4.4.2.....	45
Obrázek 4.4.3.1b: Úloha 4.4.3.....	46
Obrázek 4.4.4.1: Úloha 4.4.4.....	46
Obrázek 4.4.5.1: Úloha 4.4.5.....	46
Obrázek 4.4.6.1: Úloha 4.4.6.....	47
Obrázek 4.4.7.1: Úloha 4.4.7.....	48
Obrázek 4.4.8.1: Úloha 4.4.8.....	48
Obrázek 4.4.9.1: Úloha 4.4.9.....	49
Obrázek 4.4.10.1: Úloha 4.4.10.....	50
Obrázek 5.2.1: Zobrazení bodu.....	51
Obrázek 5.2.2: Zobrazení úsečky.....	52
Obrázek 5.2.3: Zobrazení přímky	52
Obrázek 5.2.4: Zobrazení polopřímky.....	53
Obrázek 5.2.5: Zobrazení kružnice	53
Obrázek 5.2.6: Zobrazení úhlu.....	54
Obrázek 5.3.1.1: Úloha 5.3.1.....	55
Obrázek 5.3.2.1: Úloha 5.3.2.....	56
Obrázek 5.3.3.1: Úloha 5.3.3.....	56

Obrázek 5.3.4.1: Úloha 5.3.4.....	57
Obrázek 5.3.5.1: Úloha 5.3.5.....	57
Obrázek 5.3.6.1: Úloha 5.3.6.....	57
Obrázek 5.3.7.1: Úloha 5.3.7.....	58
Obrázek 5.3.8.1: Úloha 5.3.8.....	58
Obrázek 6.2.1: Zobrazení bodu.....	60
Obrázek 6.2.2: Zobrazení úsečky.....	60
Obrázek 6.2.3: Zobrazení přímky.....	61
Obrázek 6.2.4: Zobrazení polopřímky.....	61
Obrázek 6.2.5: Zobrazení kružnice.....	62
Obrázek 6.2.6: Zobrazení úhlu.....	62
Obrázek 6.3.1.1: Úloha 6.3.1.....	64
Obrázek 6.3.2.1: Úloha 6.3.2.....	64
Obrázek 6.3.3.1: Úloha 6.3.3.....	65
Obrázek 6.3.4.1: Úloha 6.3.4.....	66
Obrázek 6.3.5.1: Úloha 6.3.5.....	66
Obrázek 6.3.6.1: Úloha 6.3.6.....	67

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Pavla Jakubcová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2010

Název práce:	Geometrické zobrazení v učivu ZŠ
Název v angličtině:	Geometrical Depiction in Basic School
Anotace práce:	V práci se zabývám shodným zobrazením. Tato práce má část teoretickou a praktickou. Teoretická část nezabývá shodným zobrazením: osová a středová souměrnost, posunutí a rotace. Praktická část obsahuje seznam úloh a jejich řešení.
Klíčová slova:	Shodnost, osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí, rotace.
Anotace v angličtině:	This dissertation deals with coincident projection. The dissertation is divided into two parts: theoretical and practical. In theoretical part the work concerns about coincident projection of geometric shape, axial symmetry, displacement and rotation. The practical part focuses on the list of tasks and their solutions.
Klíčová slova v angličtině:	Coincident projection, geometric shape, axial symmetry, displacement and rotation.
Přílohy vázané v práci:	

Rozsah práce:	77 stran
Jazyk práce:	Český