UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vytvořující funkce

Katedra algebry a geometrie
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Dominik Lachman, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Anna Lörinczová**
Studijní program: B0114A030003 Biologie se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor Biologie pro vzdělávání maior, Matematika pro vzdělávání minor
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2023

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Anna Lörinczová

Název práce: Vytvořující funkce

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: Mgr. Dominik Lachman, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2023

Abstrakt: Cílem této práce je sestavit rozšiřující studijní materiál o vytvořujících funkcích. Vytvořující funkci dané posloupnosti nejprve zavádíme jako konvergentní mocninnou řadu, jejíž koeficienty jsou rovny jednotlivým členům této posloupnosti. Dále se vytvořujícím funkcím věnujeme z pohledu formálních mocninných řad, kde ukážeme, že lze vypustit otázku analytické konvergence. Hlavní část celé práce představuje aplikaci vytvořujících funkcí, kombinatoriku rozkladů. V této části je naším hlavním zájmem spočítat, kolika způsoby lze dané přirozené číslo vyjádřit jako součet přirozených čísel. Jedná se o problém snadno popsatelný, ale náročný. Skrývá se za ním překvapivě bohatá matematika, na které se podílela řada významných matematiků, mezi nimi Euler, Hardy či Ramanudžán. V závěrečné kapitole je přiloženo několik řešených cvičení.

Klíčová slova: Vytvořující funkce, formální mocninné řady, kombinatorika rozkladů, pentagonální čísla

Počet stran: 56

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Anna Lörinczová

Title: Generating functions

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of algebra and geometry

Supervisor: Mgr. Dominik Lachman, Ph.D.

The year of presentation: 2023

Abstract: The goal of this thesis is to create an supplementary study material concerning generating functions. Generating function of a sequence is first introduced as a convergent power series, with coefficients taken from the sequence. Next, we present generating functions as formal power series, where we show that analytic convergence is not necessarily needed. The main part of this thesis is dedicated to an application in integer partitions. We aim to count the number of ways in which it is possible to write a nonnegative integer as a sum of natural numbers. Even though the issue itself is rather easily described, finding the solution is very difficult. Beneath, there is surprisingly rich mathematics to which many eminent mathematicians contributed - namely Euler, Hardy and Ramanujan. In the final chapter, we have included several exercises with solutions.

Key words: Generating functions, formal power series, combinatorics of partitions, pentagonal numbers

Number of pages: 56

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana Mgr. Dominika Lachmana, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....
podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych poděkovala své rodině za materiální a psychickou podporu během celého studia. Dále mému příteli, který mi byl nejen emoční, ale i intelektuální oporou. Velké díky patří vedoucímu této práce - Mgr. Dominiku Lachmanovi PhD., který mě trpělivě vedl celým procesem tvorby této práce, za jeho ochotu a cenné rady a nápady.

Úvod

Vytvořující funkce představují užitečný nástroj pro řešení úloh v kombinatorice (ale i v jiných matematických disciplínách). Tato bakalářská práce si klade za cíl seznámit čtenáře s tematikou, která, ač pozoruhodná, není obvykle náplní úvodních kurzů z kombinatoriky.

Podíváme-li se do historie vytvořujících funkcí, setkáme se s nejedním zvučným jménem. Za prvního, kdo vytvořující funkce použil, bývá označován Abraham de Moivre (1667–1754). Okolo roku 1730 je využil k řešení pravděpodobnostních úloh. Spočítal, s jakou pravděpodobností při hodu n kostkami padne v součtu právě k ok [6].

Jméno vytvořujícím funkcím dal až o několik desítek let později Pierre Simon de Laplace (1749–1827) [10]. Ovšem největším průkopníkem vytvořujících funkcí byl Leonhard Euler (1707–1783), jehož některé přínosy vzápětí představíme.

V této práci se zaměříme na jednu konkrétní aplikaci vytvořujících funkcí. Zajímá nás, kolika způsoby lze jakékoliv přirozené číslo zapsat jako neuspořádaný součet. Otázka rozkladů přirozeného čísla na součin byla zodpovězena již v antickém Řecku a je popsána ve 13. svazku Euklidových Základů [5]. Se součty se matematici trápili podstatně delší dobu.

Prvním známým matematikem, který nadnesl tematiku rozkladů, byl Gottfried W. Leibniz (1646–1716). Ve své korespondenci s J. Bernoullim (1667–1748) navrhuje, že počet rozkladů přirozeného čísla je vždy prvočíselný. Tato hypotéza však přestává platit už u čísla 7 (jelikož rozkladů čísla 7 je 15) [2]. Leibniz v tomto směru díru do světa neudělal a my se v našem vyprávění vrátíme zpět k Eulerovi.

Původ Eulerova zájmu o rozklady se datuje do roku 1740 a je přisuzován dopisu od francouzského matematika Philipa Naudého (1654–1729). V něm Eulerovi klade několik otázek a mezi nimi se nacházejí dvě týkající se rozkladů. Zajímalo ho, kolika způsoby lze zapsat číslo 50 jako součet různých přirozených čísel a kolika způsoby jej lze zapsat jako součet 7 přirozených čísel (aniž by tato čísla musela být různá) [7]. Euler usoudil, že hledaný počet rozkladů z první otázky musí odpovídat koeficientu při y^7x^{50} ve výrazu vzniklém roznásobením nekonečného součinu:

$$Q(x,y) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + yx^k). \tag{1}$$

[2]. Výraz $Q(x,y)$ bychom dnes nazvali vytvořující funkcí dvou proměnných posloupnosti počtu rozkladů na různé složky. Při řešení druhého zmíněného problému Euler sestavil jiný výraz, a to:

$$P(x,y) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - yx^k}. \tag{2}$$

Zde hledanému počtu rozkladů též odpovídá koeficient při y^7x^{50}. Tato myšlenka, tedy interpretovat koeficienty formálních mocninných řad jako řešení kombinatorických problémů, je základním kamenem vytvořujících funkcí.

Naudého otázky navíc Eulera navedly k dalšímu zkoumání rozkladů a některé jeho výsledky se objeví i v této práci. Eulerovo zavedení vytvořujících funkcí do problematiky rozkladů lze považovat za jednu z nejdůležitějších inovací v této oblasti. [2].

V moderní matematice jsou s rozklady spojena zejména jména Godfrey Harold Hardy (1877—1947), Šrínivása Rámanudžan (1887–1920) a Hans Rademacher (1892–1969). Zatím jsme nezmínili existenci nějakého vzorečku, do kterého by bylo možné dosadit číslo n a z nějž bychom získali počet rozkladů tohoto čísla. Důvodem je zejména to, že se jej dlouhou dobu nedařilo nalézt. Až v roce 1913 právě Hardy a Ramanudžán publikovali velmi přesný odhad čísla $p(n)$ a o dalších 20 let později Rademacher jejich odhad zpřesnil a odvodil tak exaktní formuli.

V Kapitole 1 se seznámíme s vytvořujícími funkcemi z pohledu matematické analýzy. Definujeme je jako mocninné řady konvergující na nějakém okolí nuly. Zavedeme základní operace s vytvořujícími funkcemi a zobecníme binomickou větu.

Navážeme Kapitolou 2. Zde se na vytvořující funkce podíváme z pohledu formálních mocninných řad. Ukážeme, jak vypadá součet a součin v okruhu formálních mocninných řad. V kombinatorice rozkladů běžně narazíme na nekonečné součty a součiny formálních mocninných řad (kupříkladu výrazy (1) a (2)). Zaručíme, že tyto výrazy jsou korektně definovány a při manipulacích s nimi tak máme pevnou půdu pod nohama. Seznámíme se též s formální verzí skládání mocninných řad.

Kapitola 3 se věnuje kombinatorice rozkladů. Nejprve čtenáře obeznámíme s problematikou rozkladů a představíme hlavní úskalí. Zavedeme vytvořující funkci pro počet rozkladů přirozených čísel. Ta (a její drobné variace) nám, téměř jako kouzlem, umožní nalézt souvislosti mezi zdánlivě nesouvisejícími oblastmi kombinatoriky. Zde ukážeme významný Eulerův objev vztahu mezi pentagonálními čísly a počty rozkladů přirozených čísel. Na závěr této kapitoly provedeme horní odhad počtu rozkladů čísla n.

Závěrečná Kapitola 4 přináší několik řešených cvičení. Tato řešení se opírají o poznatky z předchozích kapitol a jsou sestavena tak, aby jak prověřovala pochopení informací z textu, tak přinášela jejich prohloubení.

Kapitola 1

Základní poznatky o vytvořujících funkcích

V této kapitole zavedeme vytvořující funkce a základní operace s nimi. Mimo jiné ukážeme, že vytvořující funkce lze v jistém smyslu chápat jako skutečné funkce na nějakém intervalu. Narazíme na několik pojmů a poznatků z matematické analýzy. Jelikož těžiště našeho zájmu leží v kombinatorice, budeme tvrzení uvádět bez důkazů. Všechny potřebné pojmy však lze dohledat v libovolné učebnici matematické analýzy.

Definice 1.1. Mějme posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nazveme mocninnou řadu ve tvaru

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

[4]

Vidíme, že obyčejná vytvořující funkce je mocninná řada, jejíž koeficient u x^n je právě n-tý člen posloupnosti a_n. V práci budeme uvažovat pouze řady nad reálnými čísly se středem v bodě 0. Mnohé vlastnosti vytvořujících funkcí budeme tedy vyvozovat právě z vlastností mocninných řad. Stejně jako každá slušná mocninná řada i vytvořující funkce konverguje ve svém středu, tedy bodě $x = 0$.

1.1. Konvergence vytvořujících funkcí

Věta 1.2. *Jestliže mocninná řada* $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konverguje absolutně v nějakém bodě* x_0*, pak konverguje ve všech bodech, pro které platí* $|x| < |x_0|$.

Příklad 1. Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$$

bude jistě konvergovat pro $x = 1$, jelikož dosazením jedničky za x získáme číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

jejíž součet je 1. Díky Větě 1.2 víme, že řada nebude konvergovat pouze pro $x = 1$ ale pro jakékoliv další x z intervalu $(-1, 1\rangle$.

Příklad 2. Mějme mocninnou řadu

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{1.1}$$

Víme, že tato řada konverguje absolutně pro všechna $|x| < 1$ a diverguje pro všechna $|x| > 1$. Jinými slovy, vzorec (1.1) zadává skutečnou funkci na intervalu $(-1, 1)$. Číslo 1 nazveme poloměr konvergence řady $A(x)$. Následující věta zaručuje, že takové číslo najdeme pro každou mocninnou řadu.

Věta 1.3. *Pro každou mocninnou řadu $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ existuje právě jedno nezáporné číslo $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ takové, že:*

1. *pro každé $|x| < R$ mocninná řada konverguje absolutně,*

2. *pro každé $|x| > R$ mocninná řada diverguje.*

Toto číslo splňuje vztah:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ rozumíme $R = \infty$ a výrazem $\frac{1}{\infty}$ rozumíme $R = 0$.

Číslo R nazveme poloměr konvergence [13].

Vzhledem k hodnotě poloměru konvergence mohou nastat celkem 3 možnosti:

1. $R = 0$, tedy řada konverguje pouze pro $x = 0$,

2. $R \in \mathbb{R}^+$ a řada konverguje absolutně v intervalu $(-R; R)$,

3. $R = \infty$ a řada konverguje na celé množině $\mathbb{R}$.

Absolutní konvergence řady na intervalu $I = (-R, R)$ zaručuje, že daná mocninná řada má všechny derivace v každém bodě na intervalu I, přičemž výpočet derivace můžeme provádět derivováním jejích jednotlivých členů.

Na tomto intervalu existuje i součet této řady. Toto pro nás bude velmi výhodná vlastnost, jelikož nám umožní vzít tuto nekonečnou řadu, se kterou je manipulace poněkud nepraktická a sbalit ji do kompaktnějšího balení - vytvořující funkce. Navíc, tato řada odpovídá Taylorově rozvoji v bodě 0.

Ačkoliv jsme ukázali, že vytvořující funkce je funkce proměnné x, nezajímají nás její hodnoty v konkrétních bodech. Důležitá je pro nás pouze posloupnost koeficientů jejího rozvoje, a že konverguje absolutně na nějakém intervalu (což nám umožní korektní manipulaci s řadou).

Definice 1.4. Nechť f je funkce, která má derivace všech řádů na nějakém okolí bodu a. Taylorovým rozvojem funkce f v bodě a rozumíme výraz ve tvaru:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Naším úkolem nyní bude najít k dané posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ takovou funkci $a(x)$, že řada $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je Taylorovým rozvojem funkce $a(x)$ v bodě $x = 0$.

Příklad 3. Vezměme posloupnost samých jedniček $(1, 1, 1, \ldots)$, tedy takovou posloupnost, že pro každé $n \geq 0$ je $a_n = 1$. Vytvořující funkcí této posloupnosti je dle Definice 1.1 řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots \tag{1.2}$$

V této řadě rozpoznáváme geometrickou řadu, kde $a_0 = 1$ a kvocient $q = x$. Součtem řady (1.2) je funkce

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

která je dobře definovaná na intervalu $(-1, 1)$

Brzy uvidíme, že tato funkce pro nás velmi často bude základním stavebním kamenem, ze kterého budeme vycházet při hledání součtů dalších mocninných řad.

V následujícím příkladu uvedeme další posloupnost, pro kterou bychom mohli chtít znát její vytvořující funkci.

Příklad 4. Mějme zadánu posloupnost:

$$(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots),$$

kde n-tý člen je dán vzorcem $a_n = \frac{1}{n!}$. Rozepíšeme si příslušnou mocninnou řadu k této posloupnosti:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots.$$

Zkušeným matematickým okem si povšimneme, že se jedná o Taylorův rozvoj funkce e^x a tato funkce je tedy vytvořující funkcí zadané posloupnosti konvergující na celém $\mathbb{R}$.

Příklad 5. Je zadána posloupnost:

$$(1, 1, 2, 6, 24, 120, \dots),$$

kde n-tý člen je dán vzorcem $a_n = n!$.

Zjistíme, zda existuje součet příslušné řady. Spočítáme-li poloměr konvergence řady podle Věty 1.3, zjistíme, že je roven 0. Řada proto konverguje pouze pro $x = 0$ a nezadává tedy žádnou funkci na žádném intervalu.

1.2. Operace s vytvořujícími funkcemi

Pokud se chystáme používat vytvořující funkce k řešení kombinatorických problémů, je dobré umět si poradit s co nejširší škálou různých posloupností, řad a funkcí. Tato sekce nás vyzbrojí několika základními operacemi s vytvořujícími funkcemi a jejich přidruženými posloupnosti.

Pro snadnější orientaci budeme označovat posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Její vytvořující funkci označme $A(x)$. Analogicky zapíšeme posloupnost $b = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ a její vytvořující funkci $B(x)$.

1. Sčítání posloupností po jednotlivých členech odpovídá sčítání vytvořujících funkcí a tedy posloupnost $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ má vytvořující funkci $A(x) + B(x)$.

2. Vynásobíme-li každý člen posloupnosti číslem $c \in \mathbb{R}$, pak posloupnosti $(ca_0, ca_1, ca_2, \dots)$ odpovídá vytvořující funkce $cA(x)$.

3. Pro $n \in \mathbb{N}$ je funkce $x^n A(x)$ vytvořující funkcí posloupnosti

$$(\overbrace{0, 0, \ldots 0}^{n\text{-}krát}, a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

   Volně by se dalo říct, že jsme posloupnost „posunuli doprava“ o n míst.

4. Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$ je funkce

$$\frac{A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{n-1} x^{n-1}}{x^n}$$

   Analogicky s bodem 3. bychom mohli prohlásit, že jsme posloupnost tentokrát „posunuli doleva“ o n míst.

5. Dosadíme-li za proměnnou x její c-násobek cx, kde $c \in \mathbb{R}$, pak získáme posloupnost $(a_0, ca_1, c^2 a_2, c^3 a_3, \ldots)$ a k ní příslušnou vytvořující funkci $A(cx)$

6. Jinou variantou je dosazení x^n za x. V ní se každý člen s indexem $n \cdot k$ rovná členu a_k původní posloupnosti a ostatní členy jsou rovny 0, tedy:

$$(a_0, \overbrace{0, \ldots, 0}^{(n-1)\text{-}krát}, a_1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{(n-1)\text{-}krát}, a_2, \ldots).$$

   Vytvořující funkcí této posloupnosti je funkce $A(x^n)$

7. Funkce můžeme derivovat a integrovat, jejich mocninné řady pak podle vět pro součet limit derivujeme a integrujeme po jednotlivých členech. Funkci $A'(x)$ tak odpovídá posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots)$ a funkci $\int_0^x A(x)\,dx$ zase posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_3, \ldots)$.

8. Vynásobíme-li vytvořující funkce $A(x)$ a $B(x)$, pak mocninná řada $C(x)$ odpovídající jejich součinu má následující podobu:

$$A(x)B(x) = C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

   kde

$$c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k.$$

   [9]

Tato pravidla aplikujeme při hledání několika vytvořujících funkcí. Pro větší názornost budeme u každého kroku vlevo prezentovat získanou funkci a vpravo její posloupnost.

Příklad 6. Mějme posloupnost $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, \ldots)$. Jaká je její vytvořující funkce?

Budeme vycházet z posloupnosti samých jedniček $(1, 1, \ldots)$ o které již víme, že její vytvořující funkce je

$$\frac{1}{1-x} \qquad\qquad (1, 1, 1, \ldots).$$

Podle bodu 5 za x dosadíme $2x$ a získáme tak funkci a její posloupnost:

$$\frac{1}{1-2x} \qquad\qquad (1, 2, 4, \ldots).$$

Posledním krokem je vložit nuly na všechny sudé pozice - to provedeme podle bodu 6 a za x dosadíme x^2:

$$\frac{1}{1-2x^2} \qquad\qquad (1, 0, 2, 0, 4, 0, \ldots).$$

Vytvořující funkcí zadané posloupnosti je tedy funkce $\frac{1}{1-2x^2}$.

Příklad 7. Je zadána posloupnost $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots)$. Jak bude vypadat její vytvořující funkce?

Opět vyjdeme z posloupnosti $(1, 1, \ldots)$ a její vytvořující funkce

$$\frac{1}{1-x} \qquad\qquad (1, 1, \ldots).$$

Zderivováním získáme funkci a posloupnost

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad\qquad (1, 2, 3, \ldots).$$

Dosadíme x^2:

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} \qquad\qquad (1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots),$$

a vytvoříme tak mezery na každé druhé pozici.

Zbývá pouze zaplnit mezery. Ty zaplníme stejnou posloupností, jakou jsme právě vytvořili, pouze ji musíme o jedno místo posunout doprava, čehož docílíme vynásobením funkce proměnnou x:

$$\frac{x}{(1-x^2)^2} \qquad\qquad (0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots).$$

Nyní stačí pouze funkce sečíst:

$$A(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x}{(1-x^2)^2}.$$

Funkce $A(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots)$.

Příklad 8. Je zadána konečná posloupnost $(1, 1, 1)$. Jaká je její vytvořující funkce?

Znovu využijeme funkci

$$f(x) = \frac{1}{1-x}. \qquad (1, 1, 1, \ldots)$$

Od 4. členu bychom chtěli v posloupnosti docílit samých 0. Toho dosáhneme tak, že k funkci $f(x)$ přičteme takovou funkci, jejíž posloupnost má první tři členy rovny 0, ale všechny ostatní rovny -1. Podle bodů 2 a 3 tato funkce bude

$$\frac{-x^3}{1-x} \qquad (0, 0, 0, -1, -1, \ldots)$$

Hledanou funkcí je funkce

$$\frac{1-x^3}{1-x} \qquad (1, 1, 1, 0, \ldots)$$

O správnosti řešení se můžeme přesvědčit vydělením těchto dvou polynomů. Výsledkem by měl být polynom s koeficienty ze zadané posloupnosti.

1.3. Zobecněná binomická věta

V této sekci ukážeme, jak vypadá mocninný rozvoj výrazu $(1+x)^n$. Pro přirozená n na tuto otázku odpovídá binomická věta, kterou nyní připomeneme:

Věta 1.5. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Důkaz. Binomickou větu lze dokázat matematickou indukcí, my se však zaměříme na kombinatorický důkaz.

Nejprve pro větší názornost rozepíšeme výraz $(x+y)^n$ jako součin n závorek:

$$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y). \tag{1.3}$$

Jedná se o součin n dvojčlenů a při jejich násobení získáme 2^n sčítanců. Spočítáme, kolik z nich bude ve tvaru $x^k \cdot y^{n-k}$. Řekněme, že si z první závorky vybereme x, z druhé y, z další taky y a tak dále, dokud nevybereme člen z poslední závorky. Při tomto výběru jsme v k závorkách vybrali x a ve zbývajících $(n-k)$ závorkách jsme proto museli vybrat y.

Počet výskytů $x^k \cdot y^{n-k}$ v (1.3) je proto roven počtu možností, jak z n závorek vybrat k závorek. Tomu odpovídá právě kombinační číslo $\binom{n}{k}$. K dokončení důkazu zbývá sečíst členy ve tvaru $\binom{n}{k}x^k \cdot y^{n-k}$ přes všechna $k \leq n$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. □

Vraťme se zpět k rozvoji funkce $(1+x)^n$. Již jsme pomocí binomické věty ukázali její podobu pro $n \in \mathbb{N}$. Bylo by výhodné, kdybychom uměli jednoduše najít koeficienty i pro jiné mocniny - například $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ nebo $(1+x)^{-3}$.

Dříve, než zobecníme celou binomickou větu, zobecníme definici kombinačního čísla.

Definice 1.6 (Zobecněné kombinační číslo)**.** Pro libovolná čísla $r \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$ je zobecněné kombinační číslo $\binom{r}{k}$ dáno předpisem:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!},$$

kde speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$ [9].

Očekávali bychom, že vzorec binomické věty platí beze změny, uvážíme-li zobecněná kombinační čísla. Opravdu, tato analogie je platná, což ve 2. polovině 17. století objevil Isaac Newton.

Věta 1.7 (Zobecněná binomická věta)**.** *Mějme čísla $x, y, r \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} y^{r-k} \cdot x^k,$$

kde $\binom{r}{k}$ je kombinační číslo ve smyslu Definice 1.6 [12].

Pozorování. Co se stane, pokud je za r dosazeno přirozené číslo? Ve Větě 1.5 je ve vzorci pouze konečná suma, zatímco ve Větě 1.7 je suma nekonečná, což by zdánlivě mohlo působit problémy. Ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou obě věty platné a ekvivalentní.

Je zřejmé, že obě sumy jsou identické až po člen, kde $k = r$. Zaměřme se na kombinační číslo pro libovolné $k > r$. Předpokládejme, že $k = r + i$, kde $i \in \mathbb{N}$. Pak můžeme toto kombinační číslo vyjádřit jako:

$$\binom{r}{r+i} = \frac{r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-(r-1)) \cdot (r-r) \cdot \ldots \cdot (r-r-i+1)}{(r+i)!}. \tag{1.4}$$

Jeden z činitelů v čitateli je roven 0, a tedy je nulové i kombinační číslo (1.4). Proto i všechny členy, které se v sumě nacházejí za n-tým členem, vymizí. Z toho plyne, že pro přirozené mocniny jsou obě věty ekvivalentní a můžeme pro ně tyto vzorce zaměňovat.

Nyní představíme 2 příklady rozvojů, při jejichž výpočtu užijeme zobecněnou binomickou větu.

Příklad 9. Mějme funkci $(1+x)^r$, kde $r \in \mathbb{R}$. Jaký je její mocninný rozvoj?

Dle Věty 1.7 máme:

$$f(x) = (1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} 1^{r-n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n. \tag{1.5}$$

Zkusme odvodit vzorec (1.5) i jako Taylorův rozvoj funkce $f(x)$ v bodě $x = 0$. Dle Definice 1.4 je n-tý člen rozvoje ve tvaru:

$$a_n = \frac{f^{(n)}}{n!} x^n.$$

Spočítejme všechny derivace v bodě 0:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= r \cdot (1+x)^{r-1} & f'(0) &= r \\
f''(x) &= r \cdot (r-1) \cdot (1+x)^{r-2} & f'(0) &= r \cdot (r-1) \\
f'''(x) &= r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot (1+x)^{r-3} & f'(0) &= r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= r \cdot \ldots \cdot (r-n+1) \cdot (1+x)^{r-n} & f^{(n)}(0) &= r \cdot \ldots \cdot (r-n+1).
\end{aligned}$$

Nyní n-tou derivaci dosadíme do vzorce pro n-tý člen Taylorova rozvoje:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-n+1)}{n!} = \binom{r}{n} x^n.$$

Sečteme přes všechna $n \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = (1+x)^r.$$

Ukázali jsme, že v tomto případě je výpočet pomocí vzorce pro Taylorovu řadu ekvivalentní s tím ze Zobecněné binomické věty (1.7). Ukázali jsme také, že funkce $(1+x)^r$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots)$.

Příklad 10. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že funkce

$$G(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$$

je vytvořující funkcí posloupnosti

$$(g_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\binom{n-1}{n-1}, \binom{n}{n-1}, \binom{n+1}{n-1}, \binom{n+2}{n-1}, \dots \right).$$

Dle Věty 1.7, platí:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k.$$

Zaměříme se na koeficient u x^k:

$$\binom{-n}{k} (-1)^k = \frac{(-n) \cdot (-n-1) \cdot \ldots \cdot (-n-k+1)}{k!} (-1)^k.$$

Ze všech závorek v čitateli zlomku lze vytknout (-1). Závorek je právě k, vytkneme tedy $(-1)^k$:

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{k!} (-1)^{2k}.$$

Celý výraz vynásobíme vhodně napsanou jedničkou:

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{k!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \cdot .$$

Výraz v čitateli lze přepsat jako $(n+k-1)!$:

$$\frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Sečteme-li přes všechna $k \in \mathbb{N}$, získáme:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k.$$

Ukázali jsme, že funkce $G(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(g_n)_{n=0}^{\infty}$

Kapitola 2

Vytvořující funkce jako formální mocninné řady

V předchozí kapitole jsme zavedli pojem vytvořujících funkcí. Existenci vytvořující funkce jsme podmínili konvergencí příslušné mocninné řady na nějakém okolí 0. Ne pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ však bude řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergovat mimo 0. Příklad řady, jejíž koeficienty rostou příliš rychle a řada má součet pouze v bodě $x = 0$ je:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n.$$

S vytvořujícími funkcemi často pracujeme bez jakéhokoliv úmyslu dosazovat za proměnnou x a používáme ji jen jako jakousi „šňůru", na kterou jako kolíčky věšíme členy posloupnosti [13]. Bylo by výhodné, kdybychom měli jistotu, že námi prováděné manipulace jsou korektní, aniž bychom museli stále přemýšlet nad tím, zda řada konverguje a kde.

Proto ve stručnosti představíme základy teorie formálních mocninných řad. Zde analytická konvergence (jako jsme s ní pracovali v předchozí kapitole) pozbývá významu, jelikož x chápeme pouze jako symbol, za který nedosazujeme.

Tato kapitola je založena na teorii popsané v knize Bijective combinatorics od Nicholase Loehra [8].

Definice 2.1. Formální mocninnou řadou nad reálnými čísly nazveme každé zobrazení $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Výrazem $F(n)$ označíme obraz přirozeného čísla n. Budeme užívat zápis:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n.$$

Množinu všech formálních mocninných řad nad reálnými čísly označíme $\mathbb{R}[[x]]$.

Formální mocninné řady lze definovat obecně nad jakýmkoliv tělesem, ty však pro tuto práci nemají zásadní význam.

Poznámka. Dvě formální mocninné řady F, G se rovnají právě tehdy, platí-li $F(n) = G(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

2.1. Součin a součet formálních mocninných řad

Zde definujme součet a součin formálních mocninných řad.

Definice 2.2. Nechť $F, G \in \mathbb{R}[[x]]$. Jejich součtem nazveme řadu $F + G$ danou vztahem $(F + G)(n) = F(n) + G(n)$.

Jejich součinem rozumíme řadu FG takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je splněno:

$$(FG)(n) = \sum_{k=0}^{n} F(k)G(n-k).$$

Množina $\mathbb{R}[[x]]$ tvoří spolu s operací sčítání a násobení komutativní okruh s jednotkovým prvkem. Nulovým prvkem je řada O, kde $O(n) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jednotkovým prvkem řada E, kde $E(0) = 1$ a $E(n) = 0$ pro všechna $n \geq 1$ - tuto řadu proto budeme značit pouze číslem 1. Okruh $\mathbb{R}[[x]]$ dokonce tvoří obor integrity, to ale v textu nebudeme potřebovat.

Sčítání a násobení lze rozšířit na libovolný konečný počet řad $F_1, F_2, \ldots, F_k$.

Věta 2.3. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathbb{R}[[x]]$. Pak:*

$$(F_1 + F_2 + \ldots + F_k)(n) = F_1(n) + F_2(n) + \ldots + F_k(n),$$

a

$$(F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_k)(n) = \sum_{j_1+j_2+\cdot+j_k=n} F_1(j_1) \cdot F_2(j_2) \cdot \ldots \cdot F_k(j_k).$$

Poznámka. Speciálním případem konečného součinu řad je n-tá mocnina řady F:

$$F^n = \overbrace{F \cdot F \cdot \ldots F}^{n-\text{krát}}.$$

2.2. Limity, nekonečné součty a součiny formálních mocninných řad

Zatím jsme definovali pouze konečné součty a součiny formálních mocninných řad. V následující kapitole však budeme potřebovat, aby existovaly a byly korektně definovány i nekonečné součty a součiny. Tyto operace zavádíme pomocí limit.

Definice 2.4. Nechť $(F_k)_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost formálních mocninných řad $F_k \in \mathbb{R}[[x]]$, $k \in \mathbb{N}$ a mějme řadu $G \in \mathbb{R}[[x]]$. Píšeme:

$$\lim_{k\to\infty} F_k = G, \text{ nebo } F_k \to G,$$

právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje index $K(n)$ takový, že pro každé $k \geq K(n)$ platí $F_k(n) = G(n)$.

Díky zavedení limity posloupností formálních mocninných řad, lze definovat některé nekonečné součty a součiny v $\mathbb{R}[[x]]$.

Definice 2.5. Nechť $(F_k)_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}[[x]]$. Pro každé $N \geq 0$ buď $G_N = F_0 + F_1 + \ldots + F_N \in \mathbb{R}[[x]]$ částečný součet posloupnosti $(F_k)_{k=0}^{\infty}$. Jestliže v $\mathbb{R}[[x]]$ existuje H takové, že $H = \lim\limits_{n\to\infty} G_N$, pak píšeme

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k = H.$$

Věta 2.6 (Kriterium existence nekonečného součtu)**.** *Nekonečný součet* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k$ *existuje, pokud pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je splněno* $F_k(n) \neq 0$ *pouze pro konečně mnoho* $k \in \mathbb{N}$.

Definice 2.7. Nechť $(F_k)_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost formálních mocninných řad $F_k \in \mathbb{R}[[x]]$, $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $N \geq 0$ buď $G_N = F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_N \in \mathbb{R}[[x]]$ částečný součin posloupnosti $(F_k)_{n=0}^{\infty}$. Jestliže v $\mathbb{R}[[x]]$ existuje H takové, že $H = \lim\limits_{n\to\infty} G_N$, pak píšeme

$$\prod_{k=0}^{\infty} F_k = H.$$

Věta 2.8 (Kriterium existence nekonečného součinu)**.** *Nekonečný součin* $\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1 + F_k)$ *existuje, pokud pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je splněno* $F_k(n) \neq 0$ *pouze pro konečně mnoho* $k \in \mathbb{N}$.

Ukážeme využití kriteria z Věty 2.8 na funkci, která pro nás v následující kapitole bude mít zvláštní význam.

Příklad 11. Existuje nekonečný součin

$$Q = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)\ ?$$

Zde platí, že $F_k = -x^k$. Vidíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je splněno $F_k(n) \neq 0$ právě když $n = k$. Proto je dle kriteria součin Q dobře definovaný.

2.3. Jednotky v okruhu $\mathbb{R}[[x]]$

V této sekci ukážeme zda a ke kterým formálním mocninným řadám existují inverzní prvky vzhledem k násobení.

Definice 2.9. Nechť S je okruh. Prvek $x \in S$ nazveme jednotkou S, právě když existuje $y \in S$ tak, že $xy = yx = 1$.

Poznámka. Povšimněme si, že jednotka okruhu není to samé, jako jednotkový prvek vzhledem k násobení (obvykle značíme e nebo 1). Zřejmě ale jednotkový prvek je jednotkou ve smyslu Definice 2.9, naopak ne každá jednotka je jednotkovým prvkem.

Jednotky v $\mathbb{R}[[x]]$ jsou charakterizovány následující větou.

Věta 2.10. *Formální mocninná řada $F \in \mathbb{R}[[x]]$ je jednotkou v $\mathbb{R}[[x]]$ právě když $F(0) \neq 0$.*

Poznámka. Ke každé formální mocninné řadě, jejíž absolutní člen je nenulový, existuje inverzní řada vzhledem k násobení (tato řada je dokonce určena jednoznačně). Pro každou mocninnou řadu F označíme její inverzní řadu F^{-1}.

Příklad 12. Existuje inverzní formální mocninná řada k řadě

$$F = 1 - x?$$

Pokud ano, najdeme ji.

Jelikož $F(0) = 1 \neq 0$, dle Věty 2.10 jistě řada F^{-1} existuje.

Intuitivně bychom očekávali, že touto řadou (ačkoliv výraz $\frac{1}{1-x}$ v rámci mocninných řad zatím neznáme) je

$$F^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots .$$

Výraz $(1 + x + x^2 + x^4 + \ldots)$ je mocninnou řadou a můžeme se přesvědčit, že $F \cdot F^{-1} = 1$.

Díky existenci inverzních funkcí lze zavést záporné celočíselné mocniny. Navíc výrazu $\frac{1}{F}$, kde $F \in \mathbb{R}[[x]]$ přiřadíme formální význam.

Definice 2.11. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $F \in \mathbb{R}[[x]]$ je formální mocninná řada taková, že $F(0) \neq 0$. Výrazem

$$F^{-1} = \frac{1}{F}, \text{ (respektive } F^{-k} = \frac{1}{F^K}\text{)}$$

rozumíme inverzní řadu k F (respektive k F^k) vzhledem k násobení.

2.4. Skládání formálních mocninných řad

Na závěr kapitoly o formálních mocninných řadách ukážeme formální význam skládání těchto řad. Inspirujeme se opět v matematické analýze a naším cílem bude definovat formální skládání tak, že řadu G „dosadíme“ za x v řadě F tak, aby toto složení bylo opět formální mocninnou řadou.

Definice 2.12. Nechť $F, G \in \mathbb{R}[[x]]$ a $G(0) = 0$, nebo F je polynom. Formálním složením F a G rozumíme výraz:

$$F \bullet G = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) G^n = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \left(\sum_{k=0}^{\infty} G(k) x^k \right)^n \in \mathbb{R}[[x]].$$

Pozorování. Ukážeme, že v případech, kde F je polynom nebo $G(0) = 0$, je složení dobře definovaná formální mocninná řada.

Jestliže F je polynom n-tého stupně, pak výraz $S_k = F(k) \cdot G^k$ je formální mocninná řada. Součet výrazů S_k přes všechna $k \leq n$ je konečný součet formálních mocninných řad a je tedy dobře definován.

Jestliže F není polynom, pak musí být splněna podmínka $G(0) = 0$. Postupujme dle Věty 2.6. Označíme

$$H = F \bullet G = \sum_{k=0}^{\infty} F(k) G^k, \qquad \text{a} \qquad H_n = F(n) \cdot G^n.$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že

$$H_n(0) = H_n(1) = \ldots = H_n(n-1) = 0.$$

Pro každé přirozené číslo n proto existuje nanejvýš $n-1$ výrazů H_k takových, že $H_k(n) \neq 0$. Podle kriteria je proto součet

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)G^k$$

formální mocninná řada a složení $F \bullet G$ je v tomto případě také korektně definováno.

Příklad 13. Nechť $F = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ a $G = 2x$.

Jelikož $G(0) = 0$, formální složení je definováno a je rovno:

$$F \bullet G = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

Zavedli jsme značení $F = (1-x)^{-1}$. Pro formální složení $F \bullet G$ budeme psát:

$$F \bullet G = (1-2x)^{-1} = \frac{1}{1-2x}.$$

Kapitola 3

Vytvořující funkce v rozkladech přirozených čísel

V předchozích kapitolách jsme se zabývali tím, co vůbec jsou vytvořující funkce a jaké mají vlastnosti. Nyní představíme aplikaci vytvořujících funkcí v jedné konkrétní oblasti kombinatoriky: jak již název napovídá, bude se jednat o kombinatoriku rozkladů.

3.1. Rozklady uspořádané, neuspořádané

Hlavním úkolem celé kapitoly je najít počet rozkladů přirozeného čísla n, neboli zjistit, kolika způsoby je možné číslo $n \in \mathbb{N}$ zapsat jako součet přirozených čísel. Problematiku uvedeme na motivačním příkladu.

Příklad 14. Kolika způsoby můžeme zapsat číslo 5 jako součet přirozených čísel?

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 & \qquad 5 &= 2+2+1 \\
5 &= 4+1 & \qquad 5 &= 2+1+1+1 \\
5 &= 3+2 & \qquad 5 &= 1+1+1+1+1 \\
5 &= 3+1+1 & &
\end{aligned}
$$

Jsou to opravdu všechny rozklady? Například součet $1+4$ se ve výčtu výše nenachází. Budeme součty $1+4$ a $4+1$ považovat za různé rozklady?

Pokud bychom se ohlíželi pouze na to, z jakých prvků se daný rozklad skládá a ne na jejich pořadí (tedy rozklady $1+4$ a $4+1$ budeme považovat za tytéž), pak číslo 5 bude mít celkem 7 různých rozkladů. Tyto rozklady se označují přívlastkem neuspořádané.

Nyní vyřešíme případ, kde budeme rozklady, ve kterých jsou stejné složky v různých pořadích, považovat za různé. Tento typ rozkladů nazveme uspořádané a počet uspořádaných rozkladů čísla n označíme $p^*(n)$.

Číslo 5 si můžeme představit jako součet:

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \tag{3.1}$$

Libovolný rozklad lze získat seskupením jedniček v součtu 3.1, například:

$$5 = (1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 2 + 3.$$

Kolika způsoby lze vytvořit takové skupiny? Rozdělení je možné provést v každé mezeře mezi 1. Tyto mezery jsou právě 4, u každé z nich máme 2 možnosti - buď ji vybrat nebo nevybrat. Celkový počet uspořádaných rozkladů čísla 5 tedy je:

$$p^*(5) = 2^4 = 16.$$

Pozorování. Neuspořádaných rozkladů je zřejmě menší počet než těch uspořádaných. Každý z neuspořádaných rozkladů $4 + 1$ a $3 + 2$ odpovídá dvěma různým možným uspořádaným rozkladům, $3 + 1 + 1$ a $2 + 2 + 1$ odpovídají třem různým uspořádaným rozkladům, atd. Bohužel, nenajdeme jednoduchý způsob, jak z počtu uspořádaných rozkladů spočítat počet neuspořádaných.

Druhou část Příkladu 14 jednoduše zobecníme pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice 3.1. Uspořádaným rozkladem čísla $n \in \mathbb{N}$ rozumíme každou uspořádanou k-tici přirozených čísel $\alpha^* = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$, kde:

$$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k.$$

Věta 3.2. *Počet uspořádaných rozkladů přirozeného čísla n je*

$$p^*(n) = 2^{n-1}.$$

Důkaz. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ uvažujeme součet:

$$n = \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{n\text{-krát}}$$

Podobným způsobem jako v příkladu 14 zjistíme, že:

$$p^*(n) = 2^{n-1}.$$

□

S neuspořádanými rozklady se nevypořádáme tak jednoduše a proto jim budeme věnovat celou tuto kapitolu.

Ačkoliv již bylo v Příkladu 14 naznačeno, co myslíme neuspořádanými rozklady, uvedeme jejich definici, se kterou budeme pracovat ve zbytku kapitoly.

Definice 3.3. Neuspořádaným rozkladem čísla $n \in \mathbb{N}$ budeme rozumět každou uspořádanou k-tici přirozených čísel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$, že:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n,$$

a zároveň

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_k.$$

Čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ budeme nazývat složky rozkladu [11].

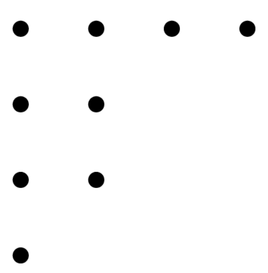
Poznámka. Pro naše účely má smysl do definice zahrnout i případ, kdy $n = 0$ a za její rozklad budeme považovat prázdnou k-tici.

Jelikož se již dále v textu uspořádanými rozklady zabývat nebudeme, budeme neuspořádané rozklady označovat pouze termínem „rozklad“.

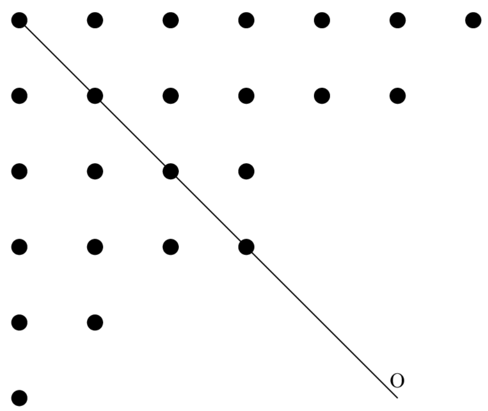
Každý rozklad lze graficky reprezentovat pomocí Ferrersova diagramu. Ten je pro daný rozklad $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_k)$ čísla $n \in \mathbb{N}$ tvořen n tečkami, které jsou v k řádcích, kdy vždy v i-tém řádku ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) je α_i teček.

Příklad 15. Pomocí Ferrersova diagramu znázorníme rozklad α čísla 9, kde:

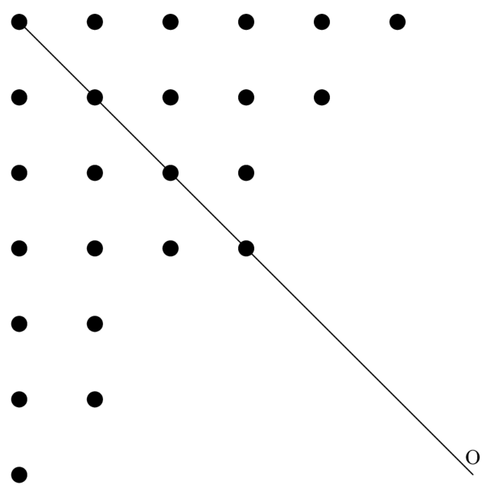
$$\alpha = (4, 2, 2, 1).$$



Obrázek 3.1: Ferrersův diagram rozkladu $\alpha = (4, 2, 2, 1)$



Obrázek 3.2: Ferrersův diagram rozkladu $\alpha = (7, 6, 4, 4, 2, 1)$



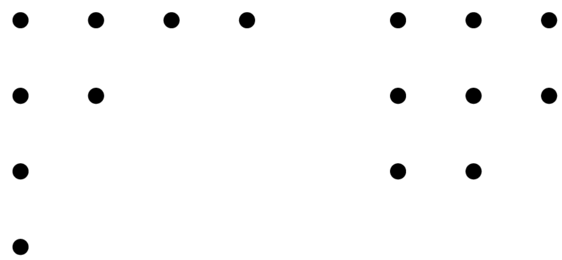
Obrázek 3.3: Ferrersův diagram rozkladu $\alpha^T = (6, 5, 4, 4, 2, 2, 1)$

Definice 3.4. Mějme rozklad α. Duální rozklad k rozkladu α nazveme takový, jehož Ferrersův diagram vznikne z Ferrersova diagramu rozkladu α záměnou řádků a sloupců. Je-li diagram duální sám k sobě, mluvíme o tzv. samoduálním rozkladu. Rozklad duální k rozkladu α budeme označovat α^T.

Příklad 16. Najděte duální rozklad k rozkladu $\alpha = (7, 6, 4, 4, 2, 1)$.

Vyjdeme z Obrázku 3.2, na kterém je znázorněn rozklad α. Tento diagram osově zobrazíme přes přímku o. Tímto získáme diagram rozkladu α^T duálního k rozkladu α (viz Obrázek 3.3).

Příklad 17. Najděte libovolný rozklad čísla 8, jehož diagram je samoduální.



Obrázek 3.4: Samoduální rozklady čísla 8

Ve Cvičení 9 v závěrečné kapitole práce ukážeme, že takové rozklady existuje pouze dva a to:

$$\alpha_1 = (4, 2, 1, 1) \text{ a } \alpha_2 = (3, 3, 2).$$

Tyto rozklady jsou zobrazeny na Obrázku 3.4.

Díky zavedení Ferrersových diagramů můžeme vystihnout myšlenky některých vět.

Věta 3.5. *Počet rozkladů čísla $n \in \mathbb{N}$ na složky, které jsou všechny menší nebo rovny nějakému číslu k je stejný, jako počet všech rozkladů čísla n na k a méně složek.*

Důkaz. Najdeme bijekci mezi množinou P rozkladů čísla n, kde $\alpha_1 \leq m$ a množinou Q rozkladů, které mají nanejvýš m složek. Pro znázornění této bijekce použijeme právě Ferrersovy diagramy.

Definujme zobrazení f, které každému rozkladu přiřadí jeho duální rozklad. Pakliže pro rozklad α platí $\alpha \in P$, pak pro jeho obraz je jistě splněno $f(\alpha) \in Q$. Stejně tak, pokud pro nějaký rozklad α' platí $\alpha' \in Q$, tak pro jeho obraz musí platit, že $f(\alpha') \in P$.

Zobrazení f je samo k sobě inverzní a je bijekcí mezi množinami P a Q. Z toho plyne, že počet rozkladů na složky menší nebo rovny m a na počet složek menší než m je stejný. □

Poznámka. Podobnou úvahou dojdeme i k závěru, že počet rozkladů přirozeného čísla n na právě k složek je stejný, jako počet rozkladů přirozeného čísla n, kde největší složka je právě k.

3.2. Problémy s mincemi

Složkami rozkladu mohou být dle Definice 3.3 jakákoliv přirozená čísla. Pro začátek si situaci zjednodušíme a za složky budeme uvažovat pouze prvky nějaké konečné množiny $R \subset \mathbb{N}$.

Věta 3.6. *Nechť $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ jsou různá čísla. $T_n(n_1, \dots, n_k)$ označme počet všech rozkladů čísla n takových, že jejich složky náleží množině $\{n_1, \dots, n_k\}$. Pak platí vztah:*

$$T_n(n_1, \dots, n_k) = T_{n-n_k}(n_1, \dots, n_k) + T_n(n_1, \dots, n_{k-1}),$$

kde

$$T_m(n_1, \dots, n_j) = 0, \quad \textit{jestliže} \;\; m < 0[11].$$

Poznámka. Připomeneme, že v souladu s Definicí 3.3 je počet rozkladů nuly:

$$T_0(n_1, \dots, n_j) = 1.$$

Tato věta nám dává návod, jak najít počet rozkladů, pokud máme konečnou množinu, ze které lze vybírat složky rozklady. Ukážeme si její aplikaci na příkladu.

Příklad 18. Jeden galeon (g) má hodnotu sedmnáct srpců a jeden srpec (s) odpovídá dvaceti devíti svrčkům (v). Kolika způsoby lze zaplatit 1 galeon a 6 srpců?

Řešení. Při řešení se opřeme o Větu 3.6. Nejprve však hodnoty všech mincí převedeme na svrčky. Jeden galeon má hodnotu 493 svrčků, jeden srpec 29 svrčků a hledáme počet způsobů jak zaplatit 1 galeon a 6 srpců - po převedení celkem 667 svrčků. Můžeme počítat:

$$\begin{aligned}
T_{667}(493, 29, 1) &= T_{174}(493, 29, 1) + T_{667}(29, 1) = \\
&= T_{-319}(493, 29, 1) + T_{174}(29, 1) + T_{638}(29, 1) + T_{638}(1) = \\
&= 0 + T_{145}(29, 1) + T_{174}(1) + T_{609}(29, 1) + T_{638}(1) + 1 = \\
&= T_{116}(29, 1) + T_{145}(1) + 1 + T_{580}(29, 1) + T_{609}(1) + 1 + 1 = \\
&= T_{87}(29, 1) + T_{116}(1) + 1 + T_{551}(29, 1) + T_{580}(1) + 1 + 3 = \\
&= T_{58}(29, 1) + T_{87}(1) + 1 + T_{522}(29, 1) + T_{551}(1) + 1 + 5 = \\
&= T_{29}(29, 1) + T_{58}(1) + 1 + T_{493}(29, 1) + T_{522}(1) + 1 + 7 = \\
&= T_{0}(29, 1) + T_{29}(1) + 1 + T_{464}(29, 1) + T_{493}(1) + 1 + 9 = \\
&= 1 + 1 + T_{435}(29, 1) + T_{464}(1) + 1 + 11 = \\
&= T_{406}(29, 1) + T_{435}(1) + 15 = \dots = 31
\end{aligned}$$

Výpočet jsme neuvedli celý. Ačkoliv vede ke správnému výsledku, byl zdlouhavý a nepříliš efektivní. Pokud by se částka, kterou chceme zaplatit, změnila, musíme celý výpočet provádět znovu od začátku.

Existuje i jiná cesta jak získat výsledek - vytvořující funkce. Při hledání počtu rozkladů vlastně hledáme počet řešení rovnice:

$$493g + 29s + v = 667, \text{ kde } g, s, v \in \mathbb{N}_0.$$

Člen $493g$ reprezentuje částku zaplacenou v galeonech, člen $29s$ částku zaplacenou v srpcích a člen v částku zaplacenou ve svrčcích.

Celý problém lze převést na násobení mocninných řad. Jedna řada (G) bude reprezentovat částku zaplacenou galeony, druhá (S) část zaplacenou srpci a poslední (V) částku, kterou zaplatíme ve svrčcích.

$$G = 1 + x^{493} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{493n} = \frac{1}{1 - x^{493}},$$
$$S = 1 + x^{29} + x^{58} + x^{97} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{29n} = \frac{1}{1 - x^{29}},$$
$$V = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n} = \frac{1}{1 - x}.$$

Na příkladu řady S ukážeme, jak tyto mocninné řady chápat. Srpce nemusíme použít vůbec žádné, nebo pouze jeden a zaplatit tak částku odpovídající 29 svrčkům, nebo 2 a zaplatit jimi tak 58 svrčků, a podobně. V mocninách u x v řadě příslušné dané minci jsou tedy zakódovány všechny možné částky zaplatitelné pouze tímto typem mince.

Nyní tyto řady spolu vynásobíme:

$$G \cdot S \cdot V = (1 + x^{493} + \ldots) \cdot (1 + x^{29} + x^{58} + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots) = \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{1 - x^{493}} \cdot \frac{1}{1 - x^{29}} \cdot \frac{1}{1 - x}. \tag{3.3}$$

Při roznásobení (podobně jako již bylo zmíněno u binomické věty), sčítáme přes všechny možné volby trojic tak, abychom vybrali právě jeden člen z každé závorky.

Ukážeme, jakým způsobem bude vypadat jeden takový výběr:

$$x^{493i} \cdot x^{29j} \cdot x^{k} = x^{493i+29j+k},$$

kde $i, j, k \in \mathbb{N}_0$.

Koeficient u x^n po roznásobení (3.2) bude roven počtu způsobů, kolika lze provést už zmíněný výběr tak, aby se exponent nasčítal právě na hodnotu n (opět myšlenka ne nepodobná té v důkazu binomické věty). Výběrem můžeme v jistém smyslu rozumět dosazení za i, j, k - tímto dosazením totiž volíme konkrétní mocninu x z dané řady. Například, při dosazení $(i, j, k) = (1, 3, 4)$ vybírám první člen z řady G, tedy x^{493}, třetí člen z řady S, tedy $x^{3 \cdot 29}$ a čtvrtý člen z řady V, neboli x^4.

Z tohoto pohledu koeficient u x^n odpovídá počtu řešení rovnice:

$$493g + 29s + v = n. \tag{3.4}$$

Již tedy víme, že koeficient u x^n v součinu (3.2) má stejnou hodnotu jako počet řešení rovnice (3.4). Nicméně, hledat koeficient v součinu mocninných řad je mnohem uchopitelnější úkol.

Úlohu jsme převedli na hledání koeficientu u x^{667} v součinu $G \cdot S \cdot V$. Dle Definice 1.1 je tento součin vytvořující funkcí posloupnosti, jejíž n-tý člen se rovná počtu rozkladů přirozeného čísla n na složky z množiny $\{493, 29, 1\}$.

Abychom získali koeficient, který hledáme, musíme spolu násobit tři nekonečné mocninné řady. Pro zadanou částku nám ale stačí vynásobit jenom konečný počet členů - uvažovat mocniny vyšší než 667 nebude pro výsledek relevantní. Díky této úvaze se ze součinu nekonečných mocninných řad stává součin konečných polynomů a my jsme díky tomu tak schopni nalézt odpověď v konečném čase.

Ovšem i přes to, že víme, že výsledek se dá zjistit v konečném čase, toto násobení může být poněkud zdlouhavé. Ovšem tento výpočet nemusíme provádět ručně, jelikož násobení polynomů je úkol, se kterým si snadno poradí matematický software.

Tento přístup má ještě jednu výhodu - pokud známe vytvořující funkci, nalezneme jednoduše odpověď na počet rozkladů nejen pro jednu částku, ale pro jakoukoliv jinou libovolnou.

Následující věta zobecní výsledky Příkladu 18 pro libovolnou konečnou podmnožinu přirozených čísel.

Věta 3.7. *Nechť $R = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ je konečná podmnožina přirozených čísel. Pak vytvořující funkce pro počet rozkladů přirozeného čísla n na složky patřící do množiny R je dána vztahem:*

$$P_R(x) = \frac{1}{1 - x^{n_1}} \cdot \frac{1}{1 - x^{n_2}} \cdots \frac{1}{1 - x^{n_k}}.$$

3.3. Vytvořující funkce pro rozklady přirozených čísel

Již jsme ve Větě 3.7 ukázali vzorec pro vytvořující funkci pro rozklady, ve kterých jsou povoleny jen určité hodnoty složek. Na podobném principu jako v Příkladu 18 založíme konstrukci vytvořující funkce pro počet rozkladů, kde množinou, ze které pochází složky rozkladu, je celá množina přirozených čísel.

Věta 3.8. *Označme $p(n)$ počet rozkladů přirozeného čísla n. Pak:*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} \tag{3.5}$$

je vytvořující funkce pro počet rozkladů přirozených čísel.

Důkaz. Zobecníme myšlenku, kterou jsme použili v Příkladu 18. Tentokrát však nebudeme za složky uvažovat pouze prvky nějaké konkrétní konečné množiny, ale jakákoliv přirozená čísla.

Zbývá ukázat, že $P(x)$ je dobře definovaný výraz. Z formálního hlediska dle Věty 2.8 řada $P(x)$ existuje a je dobře definovaná. □

Pozorování. Vytvořující funkce $P(x)$ je zadána ve formě nekonečného součinu. Je očividné, že najít vzoreček pro každé $p(n)$ je obtížné. Sice existuje, ale jeho odvození vyžaduje hluboké znalosti i z jiných oblastí matematiky, zejména teorie čísel. Na konci této kapitoly ukážeme alespoň horní odhad, který lze odvodit pomocí vytvořujících funkcí.

Budeme-li však potřebovat znát pouze hodnotu pro konkrétní $n \in \mathbb{N}$, pak problém nekonečného součinu odpadá, jelikož není potřeba uvažovat činitele ve tvaru $\frac{1}{1-x^k}$, kde $k > n$ a z nekonečného součinu se nám stává konečný (podobně jako v Příkladu 18). Tato taktika je korektní i z hlediska formálních mocninných řad. V Definici 2.7 jsme existenci nekonečného součinu totiž podmínili tím, že existuje index $K(n)$ takový, že se od $K(n)$-tého činitele hodnota koeficientu u x^n nemění.

3.4. Rozklady s restrikcemi

Zde rozvedeme myšlenku, kterou jsme naznačili již v Sekci 3.2 - na složky rozkladů lze klást omezující podmínky. V případě Sekce 3.2 tato podmínka byla, že za složky můžeme brát pouze prvky nějaké konečné podmnožiny přirozených čísel. Podíváme se však na další příklady restrikcí a ukážeme, jak se dají využít vytvořující funkce i pro jiné účely než je jen pouhé hledání počtu, ale také jako metoda vedení důkazů.

3.4.1. Rozklady na liché složky a rozklady na různé složky

Příklad 19. Jaká je vytvořující funkce pro rozklady, ve kterých jsou všechny složky liché?

Vyjdeme z vytvořující funkce $P(x)$ (vzorec (3.5)). Víme, že každý činitel nekonečného součinu ve tvaru
$$\frac{1}{1-x^n}$$
reprezentuje všechny složky rozkladu rovny n. To znamená, že jestliže se v součinu omezíme pouze na lichá n, získáme vytvořující funkci právě pro rozklady přirozených čísel na liché složky. Tyto rozklady budeme značit $p_{odd}(n)$ a příslušnou vytvořující funkci označíme jako $P_{odd}(x)$ (z anglického odd = lichý). Vytvořující funkce pro rozklady, kde jsou všechny složky liché je tedy ve tvaru:
$$P_{odd}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{odd}(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}.$$

Podívejme se na další speciální případ rozkladů.

Příklad 20. Jaká je vytvořující funkce pro rozklady, kde jsou všechny složky různé, tedy žádné dvě se sobě nerovnají?

Vytvořující funkci pro tento typ rozkladů budeme značit $P_{dist}(x)$ (z anglického distinct = různý).

Tuto funkci zkonstruujeme podobným způsobem, jako v případě $P(x)$. Pouze s tím rozdílem, že mocninné řady v součinu nebudou nekonečné, ale bude se jednat pouze o dvojčleny ve tvaru $(1 + x^k)$, jelikož každé $k \in \mathbb{N}$ se v rozkladu může objevit buď jednou, nebo vůbec. Z toho plyne, že hledanou vytvořující funkcí je:

$$P_{dist}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{dist}(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^k).$$

Tyto dva příklady nebyly vybrány náhodně. Upravíme funkci $P_{dist}(x)$:

$$\begin{aligned} P_{dist}(x) &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \\ &= \frac{(1-x^2)\cdot(1-x^4)\cdot(1-x^6)\cdot\ldots}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdots(1-x^4)\cdot\ldots} \\ &= \frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^3)\cdots(1-x^5)\cdot\ldots} = P_{odd}(x)[13]. \end{aligned}$$

Rovnají-li se dvě vytvořující funkce, musí se rovnat i jejich mocninné rozvoje. Tímto jsme pomocí vytvořujících funkcí dokázali následující větu.

Věta 3.9. *Pro každé přirozené číslo n platí, že počet jeho rozkladů na liché složky je roven počtu rozkladů, kde jsou všechny složky navzájem různé. Tedy,*

$$p_{odd}(n) = p_{dist}(n). \tag{3.6}$$

Důkaz této věty pomocí vytvořujících funkcí je krátký a zahrnuje pouze několik jednoduchých úprav výrazů. Není však příliš intuitivní a nenabízí vhled do toho, proč by vztah (3.6) měl platit. Proto uvedeme i myšlenky dvou důkazů využívajících bijekci mezi množinami rozkladů na liché a různé složky.

Alternativní důkazy Věty 3.9. Budeme užívat následující značení: rozklad na liché složky označíme α, množinu všech takových rozkladů P, rozklad na různé složky označíme β a množinu všech těchto rozkladů Q.

1. Sylvestrova bijekce

   Tato bijekce využívá upravenou verzi Ferrersových diagramů. Jedinou změnou oproti klasickému diagramu je to, že jej „zarovnáme na střed“ - tedy vždy prostřední tečky každého řádku zarovnáme do sloupce pod sebe. Nenarazíme na problém, jelikož pomocí těchto diagramů budeme zobrazovat pouze rozklady na liché složky.

   Nyní definujeme bijekci $f : P \to Q$. Toto zobrazení rozkladu α přiřadí rozklad $\beta = f(\alpha)$ tak, že diagram rozdělíme na části ve tvaru písmene L. Rozdělení provedeme následovně: první složku získáme tak, že k prostřednímu sloupci připojíme pravou polovinu prvního řádku. Způsob, jakým získáme další složky rozkladu β je naznačen na Obrázku 3.5.

   Jistě platí, že $\beta_1 > \beta_2 > \dots$. Z toho plyne, že obrazem rozkladu $\alpha \in P$ má různé složky a tedy náleží množině Q. Navíc je toto zobrazení prosté.

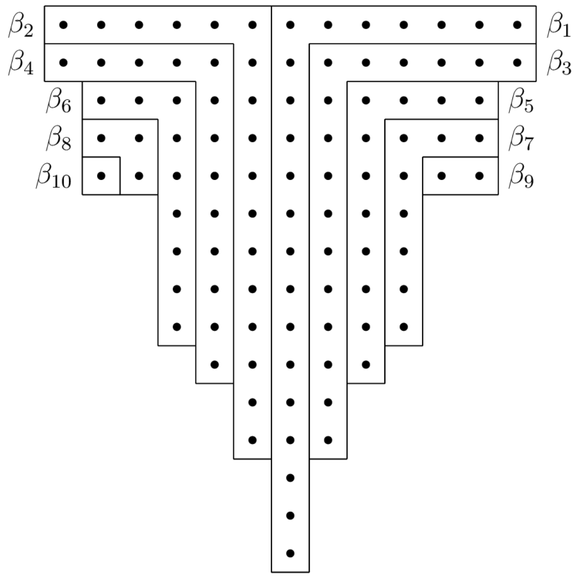
   Lze ukázat, že existuje i inverzní zobrazení $f^{-1} : Q \to P$ a zobrazení f je skutečně bijekce.

2. Glaisherova bijekce

   Mějme zobrazení $g : Q \to P$, které každému rozkladu $\beta \in Q$ přiřadí rozklad $\alpha \in P$.

   Využijeme faktu, že každé přirozené číslo k lze jednoznačně zapsat ve tvaru $2^e \cdot c$, kde $e \in \mathbb{N}_0$ a c je liché přirozené číslo. Obraz každého rozkladu β získáme tak, že každou jeho složku $\alpha_i = 2^{e_i} \cdot c_i$ nahradíme 2^{e_i} kopiemi čísla c a složky následně seřadíme podle velikosti. Například:

$$g((12, 9, 4, 5)) = (3, 3, 3, 3, 9, 1, 1, 1, 1, 5) = (9, 5, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1).$$



Obrázek 3.5: Sylvestrova bijekce rozkladu

Sestrojme nyní inverzní zobrazení $g^{-1} : P \to Q$.

Označme $n(c) \geq 1$ počet, kolikrát se dané číslo c objeví jako složka v rozkladu α. Číslo $n(c)$ lze jednoznačně zapsat jako součet mocnin čísla 2 (což odpovídá jeho zápisu ve dvojkové soustavě). Tedy, napíšeme:

$$n(c) = 2^{d_1} + 2^{d_2} + \ldots + 2^{d_s}.$$

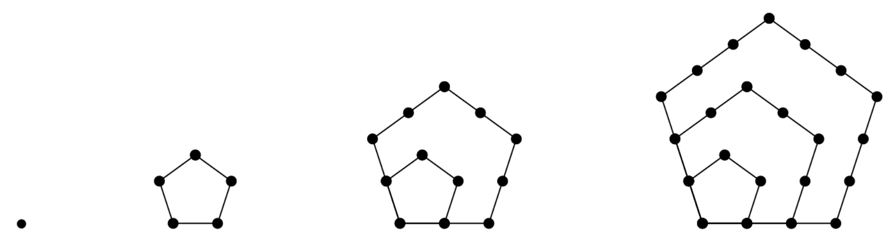
Jelikož se číslo c v rozkladu objevuje právě $n(c)$-krát, můžeme těchto $n(c)$ kopií nahradit d_s složkami ve tvaru $2^{d_1} \cdot c, 2^{d_2} \cdot c, \ldots, 2^{d_s} \cdot c$. Rozklad $g^{-1}(\alpha) = \beta$ jistě bude patřit do množiny P, jelikož pro každé c_i se dvě složky vždy liší exponentem u 2, a ty se vždy liší od složek, které jsme získali pro ostatní c_j.

Zobrazení g je tedy bijekce mezi množinami P a Q.

□

Glaisherovu bijekci lze zobecnit pro jakékoliv další přirozené číslo $d \geq 2$. Z toho plyne i platnost následující věty.

Věta 3.10 (Glaisherova)**.** *Pro všechna přirozená $d \geq 1$ a $n \geq 0$ je počet rozkladů čísla n na složky, které nejsou dělitelné d roven počtu rozkladů čísla n, kde se každá složka opakuje nejvýše $(d-1)$-krát.*



Obrázek 3.6: Pentagonální čísla

3.4.2. Rozklady a Eulerova pentagonální čísla

Dříve, než představíme (poměrně překvapivou) souvislost mezi pentagonálními čísly a rozklady, seznámíme se s pojmem pentagonálních čísel.

Polygonální čísla jako taková fascinovala už Pythagorejce v antickém Řecku. Obecně v této době existovala tendence připisovat různým matematickým objektům a číslům až magické vlastnosti - vzpomeňme si na Platónská tělesa - je známý fakt, že existuje právě pět platónských těles a řečtí filosofové každému z nich přisuzovali jeden z živlů - voda, země, vzduch, oheň, světlo.

Polygonální čísla pro Řeky byla zajímavá zejména proto, že představovala jeden z mostů, který propojoval čísla s geometrií. Co jsou polygonální čísla ukážeme na příkladu pentagonálních čísel. Jimi se totiž budeme zabývat ve zbytku sekce. Podobný postup lze aplikovat na hledání trojúhelníkových, čtvercových či jiných polygonálních čísel [5].

První pentagonální číslo je 1 - toto číslo můžeme reprezentovat jako jeden bod v rovině. Dále sestrojíme druhé pentagonální číslo. Již umístěný bod budeme považovat za levý dolní vrchol pětiúhelníku o délce strany 1. Po obvodu tohoto pětiúhelníku rozmístíme body tak, že mezi nimi je vždy vzdálenost 1 (tedy bod bude právě v každém vrcholu tohoto pětiúhelníku). Třetí pentagonální číslo získáme tak, že zkonstruujeme pětiúhelník o délce strany 2 a tento pětiúhelník umístíme tak, že jeho levý dolní vrchol souhlasí s levým dolním vrcholem předchozího pětiúhelníku a úplně prvním umístěným bodem. Po obvodu tohoto pětiúhelníku opět rozmístíme body tak, aby mezi nimi byla vzdálenost 1 (zároveň ponecháváme body, které již v obrazci jsou). Každý další pětiúhelník konstruujeme stejným způsobem. Hledané n-té pětiúhelníkové číslo pak odpovídá počtu bodů v n-tém obrazci (tedy součtu bodů ve všech pětiúhelnících).

Principem matematické indukce lze ověřit následující vztah pro výpočet pentagonálních čísel.

Věta 3.11. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je n-té pentagonální číslo $\omega(n)$ dáno vztahem:*

$$\omega(n) = \frac{n(3n-1)}{2}, \text{ kde } n \in \mathbb{N}.$$

Pentagonální čísla zobecníme a za zobecněné pentagonální číslo budeme považovat každé přirozené číslo ve tvaru:

$$\omega(n) = \frac{n(3n-1)}{2}, \text{ kde } n \in \mathbb{Z}.$$

Pro naše účely je vhodné používat v zápisu pouze přirozená čísla. Budeme tedy užívat označení:

$$\omega(n) = \frac{n(3n-1)}{2} \qquad \text{a} \qquad \omega(-n) = \frac{n(3n+1)}{2},$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$.

Z takto definovaných pentagonálních čísel můžeme utvořit rostoucí posloupnost:

$$1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, \ldots,$$

kde na lichých pozicích budeme mít posloupnost členů $\omega(n)$ a na sudých zase $\omega(-n)$.

Vraťme se k vytvořující funkci pro rozklady:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Inverzní funkce k $P(x)$ (její existence je zaručena Větou 2.10) je

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k) = (1-x) \cdot (1-x^2) \cdot (1-x^3) \cdot \ldots.$$

Tuto funkci Euler postupně roznásoboval:

$$Q(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots,$$

a u toho si všiml pozoruhodné věci. V roznásobené mocninné řadě zůstávají pouze mocniny x, které se rovnají pentagonálním číslům. Z tohoto pozorování plyne Věta 3.13. Nejprve však obrátíme svou pozornost k Euler-Legendreově větě. Ta si drží důležitou pozici v historii (zejména americké) matematiky. Autorem asi nejznámějšího důkazu této věty je Fabian Franklin. Jeho důkaz bývá považován za první velký úspěch americké matematiky [3].

Věta 3.12 (Euler-Legendreova)**.** *Nechť $p_0(n)$ je počet všech rozkladů přirozeného čísla n na sudý počet navzájem různých složek a $p_1(n)$ je počet všech rozkladů přirozeného čísla n na lichý počet navzájem různých složek. Pak platí:*

$$p_0(n) - p_1(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{právě když } n = \omega(\pm k) \\ 0, & \text{právě když } n \neq \omega(\pm k) \end{cases},$$

kde $k \in \mathbb{N}$. [11]

Nyní můžeme dokázat Eulerovu větu.

Věta 3.13 (Eulerova)**.** *Platí:*

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \left(x^{\omega(j)} + x^{\omega(-j)}\right).$$

Důkaz této věty stojí na teorii vytvořujících funkcí dvou proměnných. Zavádíme zde novou proměnnou y, která v případě rozkladů slouží jako „počítadlo" složek. Vytvořující funkce $P(x, y)$ je pak ve tvaru:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(n, k) y^k x^n.$$

Koeficient $p(n, k)$ vyjadřuje počet rozkladů čísla n na k složek. V případě rozkladů bez omezení je jejich vytvořující funkce dvou proměnných:

$$P(x, y) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + yx^k + y^2x^{2k} + \dots) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - yx^k}[13].$$

Uvedli jsme pouze základní myšlenku, další podrobnosti nebudeme rozvádět ani dokazovat. Nyní můžeme alespoň částečně dokázat Eulerovu větu.

Důkaz. Funkce $Q(x)$ je vytvořující funkcí pro rozdíl $p_0(n) - p_1(n)$, který je popsán ve Větě 3.12. Vytvořující funkce dvou proměnných pro počet rozkladů na různé složky je ve tvaru:

$$Q(x, y) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + yx^k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q(k, n) y^k x^n,$$

Dosadíme-li $y = -1$, členy v mocninném rozvoji u sudých mocnin y (odpovídající počtům rozkladů na sudý počet složek) budou mít znaménko + a členy u lichých mocnin y (odpovídající rozkladům na lichý počet složek) zase znaménko −. Koeficient $q(n)$ u x^n se tedy skutečně rovná $p_0(n) - p_1(n)$ [1].

Z Věty 3.12 víme, že $q(n) = 0$ pro všechna $n \neq \omega(\pm k)$ a $q(n) = (-1)^k$ pro všechna $n = \omega(\pm k)$. □

Ukázali jsme, že existuje vztah mezi vytvořující funkcí $P(x)$ a pentagonálními čísly. Dokonce nám tato čísla v jistém smyslu usnadní výpočet čísla $p(n)$.

Jak již bylo řečeno $Q(x)$ je funkce inverzní k $P(x)$. Z toho plyne, že jejich součin musí být roven 1. Tedy:

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}p(n)x^k\right)\cdot\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\omega(j)}+x^{\omega(-j)}\right)\right) = 1. \end{aligned}$$

Aby byla splněna poslední rovnost, tak se koeficienty u x^n musí sobě rovnat pro všechna n na obou stranách rovnice.

Na pravé straně jsou všechny koeficienty pro $n \geq 1$ rovny 0, toto musí platit i na straně levé. Jak bude po roznásobení vypadat koeficient u x^n pro konkrétní, pevně zvolené n?

Zřejmě má smysl roznásobit pouze členy, kde je exponent menší než n. Tento koeficient je ve tvaru:

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-p(n-12)-p(n-15)+\dots.$$

Jak již bylo řečeno, tento koeficient musí být roven 0 pro každé n, tedy:

$$\begin{aligned} p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-p(n-12)-\ldots &= 0 \\ p(n) = p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+\ldots&. \end{aligned}$$

Tímto jsme dokázali rekurentní vzorec pro počet rozkladů čísla $n \in \mathbb{N}$:

Věta 3.14. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označíme $p(n)$ počet rozkladů tohoto čísla. Toto číslo splňuje rekurentní vztah:*

$$p(n) = \sum_{\omega(k)\leq n}(-1)^{k-1}\left[p(n-\omega(k))+p(n-\omega(-k)\right] \text{ [8]}. \tag{3.7}$$

Příklad 21. Pomocí Věty 3.14 najdeme počet rozkladů čísla 10.

K výpočtu potřebujeme najít všechna pentagonální čísla menší než 10. Tato čísla jsou právě 4 a to:

$$\omega(1)=1,\ \omega(-1)=2,\ \omega(2)=5,\ \omega(-2)=7.$$

Dosazením do vzorce (3.7) získáme:

$$\begin{aligned} p(10) &= (-1)^0(p(10-1)+p(10-2))+(-1)^1(p(10-5)+p(10-7)) = \\ &= p(9)+p(8)-p(5)-p(3). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Potřebujeme najít počet rozkladů přirozených čísel 3, 5, 8, 9. Ty získáme roznásobením vytvořující funkce pro počet rozkladů - budeme ale uvažovat pouze mocniny menší nebo rovny 9. Násobme tedy:

$$\begin{aligned} P = &(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8) \\ &(1 + x^3 + x^6 + x^9)(1 + x^4 + x^8)(1 + x^5)(1 + x^6)(1 + x^7)(1 + x^8)(1 + x^9) = \\ &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \dots \end{aligned}$$

Z koeficientů roznásobeného výrazu lze vyčíst potřebné počty rozkladů, které dosadíme do výrazu (3.8):

$$p(10) = p(9) + p(8) - p(5) - p(3) = 30 + 22 - 7 - 3 = 42$$

Počet rozkladů čísla 10 je 42.

3.5. Odhad koeficientů $p(n)$

Známe již vytvořující funkci $P(x)$ pro počet rozkladů přirozeného čísla n. Bohužel z ní nemůžeme jednoduše vyčíst koeficienty $p(n)$ u x^n. Nicméně, ukážeme alespoň jak se z této vytvořující funkce dá získat horní odhad hodnoty $p(n)$ podle Matouška a Nešetřila [9].

V této sekci budeme využívat poznatky zejména matematické analýzy, které nebudeme dokazovat a předpokládáme jejich znalost.

Věta 3.15. *Nechť $P(x)$ je vytvořující funkce pro počet rozkladů přirozeného čísla n a $p(n)$ označuje koeficient u x^n v jejím mocninném rozvoji. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:*

$$p(n) < e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}.$$

Důkaz. Pro účely tohoto odhadu nebudeme uvažovat celou funkci $P(x)$, ale pouze konečnou formu součinu:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x^k}.$$

Upozorníme, že tento krok můžeme provést, jelikož odhadujeme $p(n)$ pro pevně zvolené n a tedy vyšší složky než n lze ignorovat.

Mocninný rozvoj součinu $P_n(x)$ je:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p(k)x^k + R(n),$$

kde $R(n)$ označíme členy mocninného rozvoje s vyšší mocninou než n. Z tohoto výrazu vytkneme x^n:

$$P_n(x) = x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{p(k)}{x^{n-k}} = \frac{p(0)}{x^n} + \frac{p(1)}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{p(n-1)}{x} + p(n) + \frac{R(n)}{x^n} \tag{3.9}$$

Jelikož jsou všechny sčítance v (3.9) větší než 0, tak pro všechna $x \in (0,1)$ platí:

$$p(n) \leq \frac{1}{x^n} P_n(x) = \frac{1}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^k}.$$

Se součtem se v tomto případě pohodlněji zachází. Abychom ze součinu vyrobili součet, celou nerovnost logaritmujeme:

$$\ln p(n) \leq \ln \left(\frac{1}{x^n} P_n(x) \right) = -n \ln x - \sum_{k=1}^{n} \ln{(1-x^k)}. \tag{3.10}$$

Logaritmus rozepíšeme pomocí jeho mocninné řady, která má pro všechna $x \in (-1,1)$ tvar:

$$-\ln{(1-x)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}.$$

Po dosazení řady za logaritmus získáme:

$$-\sum_{k=1}^{n} \ln{(1-x^k)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{kj}}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{n} x^{jk} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{\infty} x^{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{x^j}{1-x^j}.$$

Ze vzorce pro součet geometrické řady vyjádříme a odhadneme výraz $(1-x^j)$ (upozorňujeme, že $x \in (0,1)$):

$$1 - x^j = (1-x)\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{j-1}\right) \geq (1-x) j x^{j-1}.$$

Tedy můžeme dále odhadovat:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{x^j}{1-x^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{x^j}{(1-x) j x^{j-1}} = \frac{x}{1-x} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}. \tag{3.11}$$

Platí vztah:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{3.12}$$

Identitu (3.12) můžeme dosadit do (3.11):

$$\sum_{k=1}^{n} \ln{(1-x^k)} = \frac{\pi^2}{6} \frac{x}{1-x}. \tag{3.13}$$

Dosadíme-li (3.13) do (3.10), zjistíme, že pro každé $x \in (0,1)$ je splněna nerovnost:

$$\ln p(n) \leq -n \ln x + \frac{\pi^2}{6} \frac{x}{1-x}.$$

Pro lepší čitelnost výpočtu zavedeme substituci:

$$u = \frac{x}{1-x}, \text{ a tedy } x = \frac{u}{1+u}.$$

Povšimněme si, že u může nabývat jakékoliv hodnoty z intervalu $(0, +\infty)$ Dále využijeme faktu, že $\ln{(1 + \frac{1}{u})} \leq \frac{1}{u}$:

$$\ln p(n) < n \ln{(1 + \frac{1}{u})} + \frac{\pi^2}{6} u \leq \frac{n}{u} + \frac{\pi^2}{6} u = V(u). \tag{3.14}$$

Teď už stačí najít vhodné dosazení za proměnnou u tak, aby odhad byl co nejmenší. K nalezení této vhodné hodnoty využijeme poznatky z matematické analýzy. Lokální minimum má funkce $V(u)$ v bodě

$$u = \frac{\sqrt{6n}}{\pi}.$$

Tuto hodnotu dosadíme do odhadu (3.14):

$$\ln p(n) < \frac{\pi n}{\sqrt{6n}} + \frac{\pi^2 \sqrt{6n}}{\pi} = \pi \sqrt{\frac{2}{3} n}.$$

Odtud již plyne, že:

$$p(n) < e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3} n}}.$$

□

Poměrně pracně jsme získali horní odhad hodnoty $p(n)$. Porovnáme, jak nepřesný tento odhad je. Kolem roku 1913 matematici Hardy a Ramanujan objevili, že pro $n \to \infty$ platí:

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3} n}}.$$

K numerickému výpočtu se náš odhad bohužel příliš nehodí, od skutečných hodnot je příliš daleko, ale dává nám alespoň dobrou představu o rychlosti růstu koeficientů $p(n)$.

Kapitola 4

Cvičení

Cvičení 1. V krabici je 30 modrých, 40 zelených a 50 žlutých míčků. Míčky téže barvy jsou totožné. Kolika způsoby lze vybrat z krabice 70 míčků [9]?

Řešení. Počet způsobů, který hledáme, je roven koeficientu u x^{70} ve výrazu:

$$\begin{aligned}
V(x) =&(1 + x + \ldots + x^{30})(1 + x + \ldots + x^{40})(1 + x + \ldots + x^{50}) = \\
=&\frac{1 - x^{31}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{41}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{51}}{1 - x} = \\
=&\frac{1}{(1 - x)^3} \cdot (1 - x^{31}) \cdot (1 - x^{41}) \cdot (1 - x^{51}).
\end{aligned}$$

Díky znalosti zobecněné binomické věty můžeme psát:

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k \cdot (1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + \ldots). \tag{4.1}$$

V součinu (4.1) jsme si mohli dovolit vynechat zbytek polynomu, jelikož mocniny x vyšší než 70 nebudou mít vliv na výsledek.

Koeficient u x^{70} ve výrazu $V(x)$ je roven:

$$\binom{70+2}{2} - \binom{70+2-31}{2} - \binom{70+2-41}{2} - \binom{70+2-51}{2} = 1061.$$

Počet způsobů, jak lze vytáhnout 70 míčků z krabice je 1061.

Cvičení 2. Jaká je pravděpodobnost, že na 10 šestistěnných kostkách hodíme v součtu právě 25 ok?

Řešení. Spočítáme počet všech možných hodů:

$$V = 6^{10} = 60\,466\,176.$$

Dále spočítáme počet příznivých hodů. K tomu využijeme vytvořující funkce. Hledáme koeficient u x^{25} ve výrazu:

$$\begin{aligned} U(x) = &\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^{10} = \\ = &\frac{(1-x^7)^{10}}{(1-x)^{10}}. \end{aligned}$$

Výraz $U(x)$ lze pomocí binomické věty zapsat jako:

$$U(x) = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-1)^k x^{7k} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{9} x^j = \tag{4.2}$$

$$= (1 - 10x^7 + 45x^{14} - 120x^{21} + \ldots) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{9} x^j. \tag{4.3}$$

Koeficient u x^{25} tedy je roven:

$$\binom{34}{9} - 10\binom{9+18}{9} + 45\binom{20}{9} - 120\binom{13}{9} = 13\,055\,406.$$

Pravděpodobnost spočítáme jako podíl příznivých a všech možných hodů:

$$p = \frac{13\,055\,406}{60\,466\,176} \doteq 0,21.$$

Cvičení 3. Najděte vytvořující funkci pro počet rozkladů, kde jsou všechny složky dělitelné 5.

Řešení.

$$\begin{aligned} P_5(x) &= (1 + x^5 + x^{10} + \ldots)(1 + x^{10} + x^{20} + \ldots)(1 + x^{15} + x^{30} + \ldots) \ldots = \\ &= \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \cdot \frac{1}{1-x^{15}} \cdot \ldots = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{5k}}. \end{aligned}$$

Cvičení 4. Pro $k \in \mathbb{N}$ najděte vytvořující funkci pro počet rozkladů přirozeného čísla n, kde (a) jsou všechny složky menší nebo rovny k, (b) je největší složka rovna právě k, (c) na právě k složek.

Řešení.

(a) Hledanou vytvořující funkci zapíšeme jako součin řad, kde jednotlivé řady reprezentují možné velikosti složek rozkladu:

$$\begin{aligned} P_{\leq k}(x) = &\prod_{i=1}^{k} (1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \ldots) = \\ = &\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^i} \end{aligned}$$

(b) Tato úloha je velmi podobná té předchozí, pouze s tím rozdílem, že v rozkladu se číslo k musí bezpodmínečně objevit. Vytvořující funkce pro počet rozkladů s největší složkou rovnou k je:

$$P_{=k}(x) = \left(\prod_{i=1}^{k-1}(1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \dots)\right)(x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots) =$$
$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\dots\cdot\frac{x^k}{1-x^k} = \prod_{i=1}^{k}\frac{x^k}{1-x^i}$$

(c) Víme, že existuje bijekce mezi rozklady s největší složkou rovnou k a rozklady na k složek. Hledanou vytvořující funkcí je tedy $P_{=k}(x)$.

Cvičení 5. Najděte vytvořující funkci pro počet rozkladů, ve kterých se každá lichá složka objevuje nanejvýš třikrát.

Řešení.

$$\begin{aligned} R(x) =&(1 + x + x^2 + x^3)\cdot(1 + x^2 + x^4 + \dots)\cdot(1 + x^3 + x^6 + x^9)\cdot \\ &(1 + x^4 + x^8 + \dots)\cdot\dots = \\ =&\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i}}\cdot\prod_{j=1}^{\infty}(1 + x^{2j-1} + x^{2(2j-1)} + x^{3(2j-1)}) = \\ =&\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1 + x^{2i-1} + x^{2(2i-1)} + x^{3(2i-1)}}{1-x^{2i}}. \end{aligned}$$

Cvičení 6. Najděte vytvořující funkci pro počet rozkladů, ve kterých jsou všechny složky kongruentní s $\pm 1 \pmod 4$.

Řešení.

$$S(x) = \prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{4k+1} + x^{8k+1} + x^{12k+1} + \dots)(1 + x^{4k+3} + x^{8k+3} + \dots) =$$
$$=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{4k+1}}\cdot\frac{1}{1-x^{4k+3}} = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{4k+1})(1-x^{4k+3})}.$$

Cvičení 7. Kombinatoricky interpretujte následující vytvořující funkce:

(a)

$$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{3k}},$$

(b)

$$\prod_{k=1}^{5}\frac{x^5}{1-x^k},$$

(c)
$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5k+4})(1-x^{5k+1})},$$

(d)
$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{7k}+x^{14k}+x^{21k}),$$

(e)
$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+x^{3k}}{(1-x^{3k-2})(1-x^{3k-1})}.$$

Řešení.

(a) počet rozkladů na složky dělitelné 3,

(b) počet rozkladů, ve kterých je největší složka rovna 5,

(c) počet rozkladů na složky kongruentní s 1 nebo 4 (mod 5),

(d) počet rozkladů na složky dělitelné 7, každá se opakuje nanejvýš třikrát,

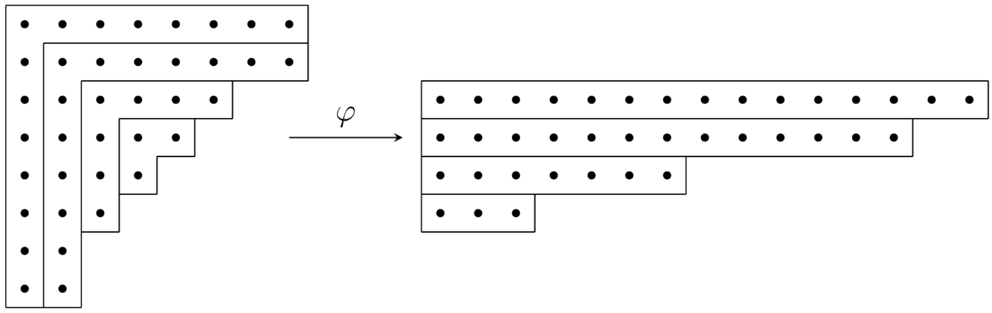
(e) počet rozkladů takových, že každá složka dělitelná 3 se vyskytuje nanejvýš jednou.

Cvičení 8. Dokažte, že počet rozkladů, ve kterých se každá sudá složka vyskytuje nanejvýš jedenkrát, se rovná počtu rozkladů, ve kterých se každá složka vyskytuje nanejvýš třikrát [8].

Řešení. Nejprve sestrojíme vytvořující funkce pro oba typy rozkladů. $P_1(x)$ označíme vytvořující funkci pro rozklady, kde je každá sudá složka nanejvýš jednou a $P_2(x)$ vytvořující funkci pro rozklady, kde se každá složka vyskytuje nanejvýš třikrát. Tyto vytvořující funkce jsou:

$$P_1(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+x^{2k}}{1-x^{2k-1}}, \tag{4.4}$$

$$P_2(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}). \tag{4.5}$$



Obrázek 4.1: Zobrazení $\varphi(\alpha) = \alpha'$, kde $\alpha = (8, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 2)$

Ukážeme, že tyto funkce se sobě rovnají:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+x^{2k}}{1-x^{2k-1}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+x^{2k}}{1-x^{2k-1}} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-x^{2k}}{1-x^{2k}} = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+x^{2k})(1-x^{2k})}{(1-x^{2k-1})(1-x^{2k})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{4k}}{1-x^{k}} = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}) = P_2(x). \end{aligned}$$

Jelikož se vytvořující funkce rovnají, rovnají se i jejich koeficienty v mocninném rozvoji, a tedy i počty daných rozkladů jsou stejné.

Cvičení 9. (a) Najděte bijekci mezi samoduálními rozklady a rozklady na různé liché složky. (b) Najděte vytvořující fukci pro počet samoduálních rozkladů. (c) Ukažte, že číslo 8 má pouze 2 samoduální rozklady.

Řešení.

(a) Označme P množinu samoduálních rozkladů a Q množinu rozkladů na různé liché složky. Nejprve nalezneme zobrazení $\varphi : P \to Q$. Každý obraz samoduálního rozkladu sestrojíme pomocí Ferrersova diagramu následovně (viz Obrázek 4.1): První složku nového rozkladu získáme tak, že k prvnímu bodu prvního řádku přidáme všechny tečky pod ním a vpravo od něj - oblast ve tvaru písmene L. Druhou složku získáme obdobně - druhý bod druhého řádku a s ním všechny body pod ním a vpravo od něj. Tímto způsobem pokračujeme, dokud nepřerozdělíme všechny body diagramu.

Pro každé $f(\alpha)$ jistě platí, že jeho složky jsou liché a různé. Toto zobrazení je bijekce, což lze ověřit.

(b) Označme $P_{sd}(x)$ vytvořující funkci pro počet samoduálních rozkladů a P_{do} vytvořující funki pro počet rozkladů na různé liché složky.

Jelikož jsme nalezli bijekci mezi těmito typy rozkladů, rovnají se i jejich vytvořující funkce:

$$P_{sd}(x) = P_{do}(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^{2k-1}).$$

(c) Vyřešíme roznásobením $P_{sd}(x)$ přes všechna $k \leq 4$:

$$\begin{aligned} P'_{sd}(x) = &\prod_{k=1}^{4}(1 + x^{2k-1}) = \\ &= 1 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + 2x^8 + x^9 + \dots \end{aligned}$$

Koeficient u x^8 je roven 2, což je i počet samoduálních rozkladů čísla 8.

Cvičení 10. Ukažte, že funkce

$$P_{sd}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2k})}$$

je také vytvořující funkcí pro počet samoduálních rozkladů [8].

Řešení. Funkci ze zadání upravíme:

$$P_{sd}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2} \frac{1}{1-x^{2k}} \frac{1}{1-x^{2k-2}} \cdots \frac{1}{1-x^2}.$$

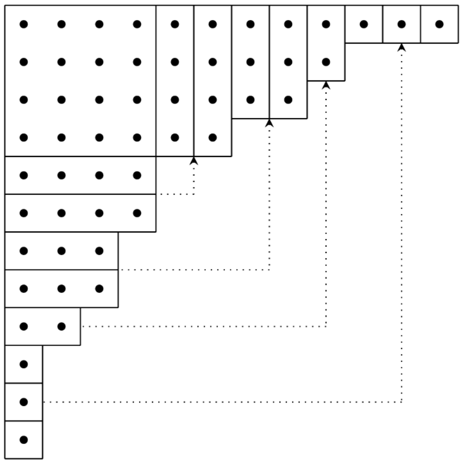
Rozebereme příspěvky jednotlivých činitelů a budeme je reprezentovat na Ferrersově diagramu (Obrázek 4.2).

Nejprve vytvoříme rozklad množiny samoduálních rozkladů M na třídy m_k takové, že v třídě $m_k, k \geq 1$ jsou všechny diagramy, na jejichž ose souměrnosti leží právě k bodů diagramu (množiny m_k jsou zjevně disjunktní a pokud přidáme i rozklad nuly, jejich sjednocení je celá množina M).

Patří-li rozklad α do třídy m_k, lze z něj vybrat čtverec, jenž obsahuje právě k^2 teček. Příspěvek tohoto čtverce reprezentuje právě člen x^{k^2}.

Diagram je kromě čtverce tvořen pravou a spodní částí. Jelikož je diagram samoduálního rozkladu osově souměrný, to, co se nachází „pod“ čtvercem musí být identicky i „vedle“ něj.

Podívejme se na to, jakých hodnot nabývají složky α_l, kde $l > k$. Pro každou složku α_l jistě musí platit, že $\alpha_l \leq k$, protože v opačném případě by z diagramu bylo možné vybrat větší čtverec než o straně k.



Obrázek 4.2: Ferrersův diagram samoduálního rozkladu $\alpha = (12, 9, 8, 6, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 1, 1) \in m_4$

Proto jistě platí, že buď žádná, nebo složky $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_{k+a} = k$. Tyto složky můžeme symetricky zobrazit - v pravé části diagramu budou tvořit sloupečky přiložené k pravé straně čtverce. Tento příspěvek je právě $2 \cdot a \cdot k$ a ve výrazu P_{sd} je reprezentován činitelem $\frac{1}{1-x^{2k}}$.

Stejný postup zopakujeme a budeme postupně počítat, kolik složek pod čtvercem má velikost $(k-1), (k-2), \ldots, 1$. Tyto příspěvky jsou reprezentovány činiteli:

$$\frac{1}{1-x^{2(k-1)}}, \frac{1}{1-x^{2(k-2)}}, \ldots, \frac{1}{1-x^2}.$$

Vytvořující funkce pro počet samoduálních diagramů ve třídě m_k je tedy:

$$M_k(x) = \frac{x^{k^2}}{(1-x^2)\cdots(1-x^{2k})}.$$

Vytvořující funkci pro všechny samoduální rozklady získáme jako součet přes všechna $k \geq 1$. Nesmíme zapomenout na jeden samoduální rozklad nuly, který není obsažen v žádném z výrazů M_k.

Tedy platí:

$$P_{sd} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}.$$

Cvičení 11. Najděte vytvořující funkci pro počet řešení rovnice

$$3x + 5y + 9z = n,$$

kde n je nějaké pevně zvolené přirozené číslo a $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ [13].

Řešení. Počet řešení dané rovnice odpovídá koeficientu u x^n v součinu:

$$F(x) = \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^9}.$$

Závěr

Cílem práce bylo sestavit studijní materiál, který představí tematiku vytvořujících funkcí a jejich aplikaci v kombinatorice rozkladů. Hlavním úmyslem bylo napsat text srozumitelný a čtivý, ale zároveň vybudovat dostatečně kvalitní teoretický základ, aby nezbývalo mnoho prostoru pro pochybnosti, zdali lze v práci popsané úvahy skutečně korektně provádět.

Největší výzvou bylo informace vyvážit tak, aby množství podrobností neodradilo čtenáře, který se s problematikou setkává poprvé, ale zároveň byla dostatečně obhájena správnost použitých postupů. Proto byly u každého tvrzení prvních dvou kapitol uvedeny příklady jejich aplikace. Tyto příklady byly navíc (pokud to bylo možné) pečlivě voleny tak, aby souvisely s myšlenkami objevujícími se v pozdějších částech práce. V rámci práce bylo zařazeno také několik cvičení, která měla za úkol upevnit nové poznatky a prohloubit pochopení dané problematiky. Nacházely se zde jak standardní typové úlohy, tak i úlohy, které vyžadovaly originální myšlenku řešitele.

Vytvořující funkce jsou velmi silný nástroj a jejich potenciál nebyl v této práci ani zdaleka vyčerpán. Mezi další problémy řešitelné za užití vytvořujících funkcí patří mimo jiné řešení rekurentních vztahů, počítání grafů různých typů na n vrcholech (známým příkladem jsou tzv. binární stromy, jejichž vyčíslením získáme posloupnost nazývanou jako Catalanova čísla) či hledání počtu rozkladů n-prvkové množiny (jejich posloupnost je známá jako Bellova čísla).

V práci byly též zmíněny vytvořující funkce o dvou proměnných. Také tyto funkce mají nejednu kombinatorickou aplikaci. Zde jako příklad uvedeme počítání permutací n-prvkové množiny o k cyklech (Stirlingova čísla 1. druhu) nebo počet rozkladů n-prvkové množiny na k tříd (Stirlingova čísla 2. druhu).

V této práci byla pozornost věnována pouze tzv. obyčejným vytvořujícím funkcím, ve kterých n-tý člen příslušné posloupnosti odpovídá koeficientu při x^n. Existují ale i další typy vytvořujících funkcí, které kódují danou posloupnost do výrazu vytvořující funkce rozličnými způsoby. Nejpoužívanější typ vytvořujících funkcí (pomineme-li obyčejné) představují exponenciální vytvořující funkce, kde n-tý člen posloupnosti je koeficient při výrazu $\frac{x^n}{n!}$.

Spektrum typů vytvořujících funkcí je však mnohem širší.

Čtenáři, který by měl zájem dozvědět se o problematice více, lze doporučit několik titulů. Přívětivým jazykem psaná kniha A Walk through combinatorics Miklóse Bóny [4] nabízí průřez nejdůležitějšími kombinatorickými principy mezi nimiž je i kapitola o vytvořujících funkcích. Navíc obsahuje množství řešených cvičení. Dále zmíníme knihu Bijective combinatorics od Nicholase Loehra [8], kde je poměrně podrobně popsána problematika vytvořujících funkcí z pohledu formálních mocninných řad. Generatingfunctionology od Herberta Wilfa [13] se vytvořujícím funkcím věnuje celá. Autor zde používá mnoho příměrů, které pomáhají lépe uchopit problematiku, a díky způsobu, jakým je psána, se jedná o velmi zábavné čtení o matematice.

Literatura

[1] Aigner, M., Ziegler, G. M.: *Proofs from THE BOOK*. Springer, Berlin, 2014.

[2] Andrews, G.: Partitions. In *Combinatorics: Ancient and Modern*, Oxford University Press, 2013, s. 205–230.

[3] Andrews, G. E.: Euler's Pentagonal Number Theorem. *Mathematics Magazine*, roč. 56, č. 5, 1983: s. 279–284.

[4] Bóna, M.: *A Walk Through Combinatorics*. World scientific, New Jersey, 2006.

[5] Debnath, L.: A brief history of partitions of numbers, partition functions and their modern applications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, roč. 47, č. 3, 2015: s. 329–355.

[6] Doumas, A. V.: An alternative approach to a problem by A. de Moivre. *The Mathematical Gazette*, roč. 97, č. 540, 2013: s. 446–454.

[7] Hopkins, B., Wilson, R.: Euler's Science of Combinations. In *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, Elsevier, Amsterdam, 2007, s. 395–408.

[8] Loehr, N.: *Bijective Combinatorics*. Chapman and Hall/CRC, Londýn, 2011.

[9] Matoušek, J., Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky, 4. upravené a doplněné vydání*. Karolinum, Praha, 2019.

[10] Polya, G.: *Mathematics and Plausible Reasoning: Patterns of plausible inference*. Princeton University Press, New Jersey, 1990.

[11] Švrček, J.: *Úvod do kombinatoriky*. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2019.

[12] Weisstein, E. W.: Binomial theorem. [online]. [cit. 2023-03-02]. dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/BinomialTheorem.html.

[13] Wilf, H. S.: *Generating Functionology*. Elsevier, Amsterdam, 2013.