UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Modely oceňování cenných papírů

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.**
Vypracovala: **Bc. Eva Složilová**
Studijní program: N1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor: Aplikace matematiky v ekonomii
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Bc. Eva Složilová

Název práce: Modely oceňování cenných papírů

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Cílem této diplomové práce je popis vybraných modelů pro oceňování cenných papírů, konkrétně akcií a opcí. Práce se zabývá určitými dividendovými diskontními modely a ziskovými modely využívající P/E ratio pro stanovení vnitřní hodnoty akcie a stochastickým modelováním její tržní hodnoty. U opcí je prezentován binomický model a Black-Scholesův model.

Klíčová slova: cenný papír, akcie, opce, vnitřní hodnota, tržní hodnota, dividendové diskontní modely, Brownův pohyb

Počet stran: 90

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Eva Složilová

Title: Security Pricing Models

Type of thesis: Master's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: The aim of this thesis is the description of selected pricing models for securities, namely shares and options. The thesis focuses on specific dividend discount models and profitable models using P/E ratio to determine the intrinsic value of the shares and stochastic modeling of its market value. In options binomial model and Black-Scholes model are presented.

Key words: security, stock, option, intrinsic value, market value, dividend discount models, Brownian motion

Number of pages: 90

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Evy Bohanesové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne 19. dubna 2015

Obsah

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí diplomové práce Mgr. Evě Bohanesové, Ph.D. za spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Úvod

Tématem mojí diplomové práce jsou modely, které se používají při oceňování cenných papírů. Z cenných papírů se konkrétně zaměřím na oceňování akcií a evropských call opcí, jejichž podkladovým aktivem jsou právě akcie. Téma Modely oceňování cenných papírů jsem si vybrala z důvodu zájmu o finanční matematiku a finance obecně, a také jsem chtěla prohloubit své znalosti v oblasti cenných papírů, jelikož by mi to mohlo pomoci při hledání budoucího uplatnění, pokud bych se rozhodla pro tuto oblast.

Cílem diplomové práce je teoreticky popsat vybrané modely oceňování akcií a následně opcí. U každého cenného papíru se nejdříve zaměřím na jednodušší diskrétní modely a následně budou představeny složitější stochastické modely. Nebudou chybět ani příklady, na kterých bude předvedeno použití těchto modelů. Data a vlastní řešení příkladů jsou umístěna v souborech na přiloženém CD.

Práce je rozdělena do tří kapitol. První pojednává o cenných papírech obecně - co jsou cenné papíry, s jakými cennými papíry se můžeme setkat, v jaké formě a proč vůbec dochází k jejich oceňování. Dále již přichází jako první na řadu akcie. Teoretická část této kapitoly je věnována především modelům, pomocí nichž stanovíme vnitřní hodnotu a tržní cenu akcie. Ze zástupců modelů pro stanovení vnitřní hodnoty si představíme vybrané dividendové diskontní modely a ziskové modely. Na příkladech si ukážeme jejich použití. Na akcie navazují opce. Z diskrétních modelů si uvedeme binomický model a ze stochastických známý Black-Scholesův model.

Kapitola 1

Cenné papíry

Cenné papíry patří mezi finanční instrumenty, které ve svém portfoliu může vlastnit prakticky každý. I takoví investoři, kteří mají averzi k riziku a nedisponují velkým objemem peněžních prostředků, se mohou uchýlit k nákupu cenných papírů. Zvláště v dnešní době, kdy se úrokové sazby na spořících a termínovaných účtech blíží téměř k nule, se může jevit investice např. do akcií společnosti, jíž důvěřujeme a která má stabilní historii, jako velice výhodná.

Při tvorbě této kapitoly byly použity zdroje [8], [17] a [18].

1.1 Definice cenného papíru a právní úprava

Dříve se cenné papíry řídily zákonem č. 591/1992 Sb., o cenných papírech, který byl ale k 1. 1. 2014 zrušen a nyní je právní úprava cenných papírů ukotvena v novém občanském zákoníku (dále jen NOZ). Výraznou změnou je, že NOZ přináší definici cenného papíru, která v předchozím zákoně chyběla. Dle NOZ je „*cenný papír listina, se kterou je právo spojeno takovým způsobem, že je po vydání cenného papíru nelze bez této listiny uplatnit ani převést*“ [9].

Kromě takto definovaného cenného papíru v listinné podobě existují i zaknihované cenné papíry, které se tak staly samostatnou právní kategorií. Zaknihované cenné papíry vznikají nahrazením listinného cenného papíru zápisem do evidence zaknihovaných cenných papírů, kterou má na starosti Centrální depozitář cenných papírů, a jejich převod může být uskutečněn pouze změnou zápisu v této evidenci. Zaknihovaný cenný papír je tak dle NOZ věcí nehmotnou a listinný cenný papír věcí hmotnou.

Vydavatel cenného papíru se nazývá emitent. Emitenty mohou být např. státy, města, banky, soukromé podniky aj. Hlavním důvodem, proč podniky k emisi přistupují, je získání nového kapitálu, který ke svému podnikání potřebují. Představují vhodnou alternativu k bankovním úvěrům. V případě státu mohou prostředky získané z vydání cenných papírů sloužit ke krytí a financování státního dluhu.

1.2 Forma a třídění cenných papírů

Forma cenného papíru nám udává, kdo je majitelem a jakým způsobem může cenný papír převádět. V ČR existují tři formy:

- **na doručitele** - o cenný papír na doručitele se jedná v případě, že neobsahuje jméno oprávněné osoby. Oprávněným je v takovém případě držitel listiny. K převodu cenného papíru dochází pouhým předáním.
- **na řad** - je to takový cenný papír, na kterém je uvedeno jméno první oprávněné osoby, která se nazývá remitent. Převod se uskutečňuje pomocí rubopisu a předáním cenného papíru. Rubopis je písemné prohlášení převodce, že převádí práva na nového majitele a bývá uvedeno na rubu cenného papíru.
- **na jméno** - je podobný jako cenný papír na řad. Rozdíl spočívá ve způsobu převodu, který je možný pouze na základě písemné smlouvy o postoupení práv a předáním cenného papíru.

Cenné papíry jsou obecně rozdělovány do těchto kategorií:

- **dluhové** - vydavateli dluhového cenného papíru vzniká závazek zaplatit jeho majiteli určitou dlužnou částku. Typickým představitelem je dluhopis.
- **majetkové** - majiteli takovéhoto cenného papíru vzniká právo na podíl na majetku emitenta. Mezi majetkové cenné papíry patří akcie, podílové listy aj.
- **derivátové** - deriváty jsou odvozené od cenných papírů. Řadíme sem např. futures, opce, swapy a forwardy.

Hledisek, podle kterých bychom mohli cenné papíry dále třídit, existuje spousta. Jelikož to ale není předmětem této práce, nebudeme se jimi dále zabývat.

1.3 Obchodování s cennými papíry a jejich oceňování

K obchodování s cennými papíry může docházet buď na primárních nebo sekundárních trzích. Na **primárním trhu** dochází k prvotnímu prodeji nových cenných papírů. Emitent získává volné finanční prostředky. Emisi si může zajistit buď sám (vlastní emise) nebo může využít služeb finančního zprostředkovatele, kterým bývají nejčastěji investiční banky či obchodníci s cennými papíry (cizí emise).

Na **sekundárním trhu** již nedochází k emisi nových cenných papírů, ale cenný papír, který již byl dříve emitován, je znovu a znovu obchodován.

Sekudární trh můžeme dále členit na:

- **organizovaný** - trh, kde nabídka a poptávka po cenných papírech je organizována licencovaným subjektem a řídí se danými pravidly, předpisy a legislativou. Organizovaný trh se dále dělí na:
  - *burzovní* - na burze se obchoduje s přesně vymezenými finančními instrumenty podle přesně vymezených pravidel a předpisů. Příkladem burzy u nás je Burza cenných papírů Praha.
  - *mimoburzovní* - na tomto trhu nejsou stanovena tak přísná pravidla a předpisy jako na trhu burzovním. Často se zde obchoduje s těmi instrumenty, které nesplňují požadavky na burze.
- **neorganizovaný** - zde nabídka a poptávka není organizována žádným subjektem.

Cena, za kterou jsou cenné papíry na trhu obchodovány, se nazývá **tržní**. Tato cena je proměnlivá a odvíjí se od nabídky a poptávky po cenných papírech.

Při oceňování cenných papírů se jedná především o stanovení jejich **vnitřní hodnoty** neboli spravedlivé ceny na efektivních trzích. Za efektivní trh považujeme takový trh, kdy se nabídka rovná poptávce a jsou dostupné veškeré informace pro všechny investory. Principem stanovení teoretické ceny určitého cenného papíru je, že tato cena je rovna součtu budoucích finančních toků plynoucích z držení cenných papírů diskontovaných k dnešnímu, příp. jinému datu.

K ocenění můžeme použít modely, které jsou uvedeny dále v této práci. V praxi se tyto modely využívají především v případech stanovených zákonem. Podle zákona je potřeba znalecky ocenit cenné papíry, které jsou předmětem nedobrovolné veřejné dražby, dále pokud dochází k převodu jmění ve společnosti nebo v případě squeeze-outu. Squeeze-out znamená, že hlavní akcionář, jehož podíl ve společnosti je větší než 90 %, může převést vlastnická práva všech ostatních menšinových akcionářů na svou osobu. Za to je jim povinen poskytnout přiměřené protiplnění, které bývá nejčastěji zpracováno znalcem za použití vhodné metody. Další využití modely naleznou při stanovení tržní ceny pro investory na finančních trzích nebo k ocenění cenných papírů vlastněných společnostmi, u kterých dochází k fúzi s jinou společností nebo k přeměně společnosti.

Kapitola 2

Akcie

Cenný papír, který si v této práci představíme jako první, je akcie. Nejdříve si uvedeme, co je akcie, a vysvětlíme základní pojmy, které jsou s ní spojené a které budeme dále využívat. Poté bude následovat část věnující se analýze akcií. Dále přistoupíme již k samotným modelům pro oceňování akcií a uvedeme i některé modely pro výpočet vstupních parametrů, bez kterých by modely nebyly použitelné.

Veškeré poznatky uvedeny v této kapitole byly čerpány z [2], [3], [5], [6], [7], [10], [11], [12], [13], [14], [15] a [16].

2.1 Základní pojmy

Akcie je obchodovatelný cenný papír, jehož majitel se stává společníkem akciové společnosti. S držením akcie je spojeno právo podílet se na řízení společnosti formou účasti a hlasování na valné hromadě, právo na výplatu dividend, v případě zániku má majitel akcie nárok na likvidační zůstatek a je upřednostněn při nákupu nově emitovaných akcií. Akcie se všemi těmito právy se nazývá obyčejná neboli kmenová.

Dividendou rozumíme podíl na zisku akciové společnosti. Její výše se odvíjí od hospodaření společnosti a bývá každoročně odhlasována na zasedání valné hromady akcionářů. Valná hromada může samozřejmě rozhodnout i o tom, že dividendy nebudou pro daný rok či po určitou dobu vypláceny.

Jelikož není výplata dividend zaručena, patří akcie mezi rizikovější cenné papíry, ale výnos z nich je v průměru vyšší, než je tomu například u dluhopisů.

Na trhu jsou akcie obchodovány za tržní cenu, která je, jak již bylo zmíněno, určena nabídkou a poptávkou na kapitálovém trhu. Nabídka a poptávka se odvíjí od tržní hodnoty podniku, fáze hospodářského cyklu, perspektivy daného odvětví do budoucna atd. Často používaným pojmem pro tržní cenu akcie je **kurz akcie**.

Abychom mohli říci, že se jedná o akcii, musí obsahovat:

- označení, že se jedná o akcii, a to v jazyce, ve kterém je akcie sepsána,
- identifikaci společnosti,
- jmenovitou hodnotu,
- označení formy akcie, v případě, že byla vydána jako zaknihovaný cenný papír,
- identifikaci majitele u akcie na jméno,
- údaje o druhu akcie (výjimkou je kmenová akcie),
- číselné označení a podpis člena nebo členů představenstva[1].

[1] Nově od 1. 1. 2014 může být podpis nahrazen otiskem podpisu, ale pouze pokud jsou na listině současně použity ochranné prvky zabraňující jejímu padělání.

2.2 Analýza akcií

Každý zkušenější investor se při obchodování nespoléhá pouze na svůj vlastní úsudek, ale používá různé analýzy, které mu mohou pomoci se rozhodnout, kdy a do jaké akcie investovat. Účelem těchto analýz je získat konkurenční výhodu před ostatními investory, ale nezaručují stoprocentní úspěšnost, jelikož rozhodování je subjektivně ovlivněno. Každá z analýz vychází z různých předpokladů, používají jiné vstupní údaje a mají i jiné použití.

2.2.1 Fundamentální analýza

Podstatou fundamentální analýzy je stanovení vnitřní hodnoty akcie, kterou porovnáváme s její skutečnou tržní hodnotou. Fundamentální analýza se snaží odhalit akcie, které jsou nadhodnocené, podhodnocené či správně ohodnocené. V případě nadhodnocených akcií je tržní cena vyšší než vypočtená vnitřní hodnota a doporučuje se akcii prodat. U podhodnocených akcií je tomu naopak. V situaci, kdy je vnitřní hodnota přibližně rovna tržní hodnotě akcie, mluvíme o správně ohodnocené akcii a nedoporučuje se ji ani koupit ani prodat. Pro výpočet vnitřní hodnoty je důležité mít dobrou datovou základnu. Využívají se jak historická, tak aktuální data získaná především z účetních výkazů firem a z nich vypočtené ukazatele jako ROA[2], ROE[3], ROI[4], P/E[5] atd. Hlavní problém spočívá v tom, že údaje o hospodaření společnosti nemusí být pravdivé a hodnoty ve výkazech mohou být zkreslené, což vede i ke špatnému stanovení vnitřní hodnoty. Pokud chceme provést opravdu kvalitní fundamentální analýzu, nemůžeme se zaměřit pouze na analýzu konkrétní společnosti, ale musíme brát v úvahu i okolí, které ji obklopuje.

[2]ROA - rentabilita aktiv. Je dána jako poměr zisku a celkových aktiv společnosti.

[3]ROE - rentabilita vlastního kapitálu. Je dána jako poměr čistého zisku a vlastního kapitálu společnosti.

[4]ROI - rentabilita investic. Je dána jako poměr zisku a dlouhodobě investovaného kapitálu.

[5]P/E - poměr tržní ceny akcie k zisku na akcii.

Podle zkoumaných oblastí ji můžeme rozdělit na:

- **globální analýzu** - předpovídá vývoj akciového trhu jako celku. Snaží se odhadnout budoucí makroekonomické ukazatele a jejich vliv na akciové kurzy. Mezi významné ukazatele, na které se zaměřuje, patří úrokové sazby, HDP, inflace, nezaměstnanost a jiné.

- **odvětvovou analýzu** - prognózuje vývoj v jednotlivých odvětví, zaměřuje se na jejich rozdílné charakteristiky a jaký vliv mají na akciové kurzy. Z hlediska citlivosti odvětví na hospodářský cyklus rozlišujeme:

  – *cyklická odvětví* - jsou velice citlivá na výkyvy hospodářského cyklu a hospodářské výsledky společností v podstatě kopírují jeho vývoj. To znamená, že v období expanze firmy dosahují velice dobrých výsledků, zato v recesi objem produkce klesá. Patří sem např. automobilový průmysl, stavebnictví, bankovnictví atd.

  – *neutrální odvětví* - odvětví, která nejsou příliš ovlivněna hospodářským cyklem. Jedná se o odvětví produkující zejména nezbytné statky jako je potravinářský průmysl, farmaceutický průmysl, ale třeba i tabákový průmysl.

  – *anticyklická odvětví* - jsou opakem cyklického odvětví. To znamená, že dosahují nejvyšších zisků v období recese. Řadíme sem společnosti vyrábějící levnější substituty jiných dražších a luxusních výrobků. Můžeme sem zařadit např. provozovatele second handů či kabelové televize, kdy lidé nahrazují dražší formu zábavy ve formě kina či divadla levnější alternativou.

- **finanční analýzu** - slouží ke stanovení odhadu vnitřní hodnoty příslušné akcie na základě analýzy jednotlivých společností a často bývá zaměňována se samotnou fundamentální analýzou.

2.2.2 Technická analýza

Základním předpokladem technické analýzy je, že tržní ceny akcií jsou determinovány pouze nabídkou a poptávkou. Dále předpokládá, že se akciové kurzy pohybují v trendech, což můžeme použít při predikci budoucího vývoje tržních cen. A právě odhad budoucího směru vývoje cen, případně ceny samotné, je hlavní cíl technické analýzy. K jeho dosažení používá především různé grafické metody a metody založené na technických indikátorech. Technická analýza reaguje rychleji než fundamentální analýza a používá se především pro krátkodobé až střednědobé spekulace.

2.2.3 Psychologická analýza

Na rozdíl od technické a fundamentální analýzy se nezaměřuje na kurz akcie, ale předmětem zkoumání je chování investorů.

Modely uvedené v následující kapitole pochází z oblasti fundamentální analýzy.

2.3 Modely pro stanovení vnitřní hodnoty akcie

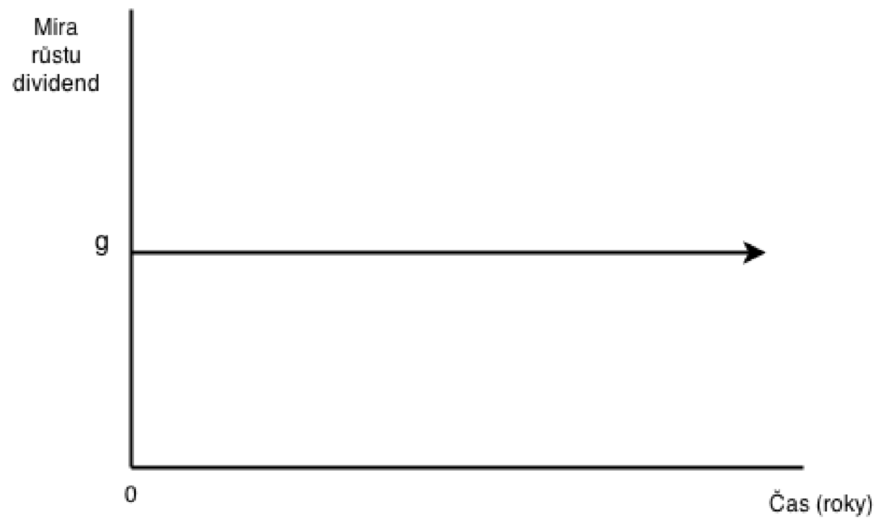
Tato kapitola se věnuje modelům, které slouží pro stanovení vnitřní hodnoty akcie. Jsou zde uvedeny dvě skupiny modelů, které se používají nejčastěji, a to dividendové diskontní modely a ziskové modely. Jelikož se práce nezabývá pouze oceňováním akcií, jsou z každé skupiny vybráni jen někteří zástupci a ti jsou blíže charakterizováni.

2.3.1 Dividendové diskontní modely

Dividendové diskontní modely jsou dle Veselé [6] jedny z nejpoužívanějších metod pro ohodnocování akcií. Stanovení vnitřní hodnoty je založeno na principu součtu současných hodnot všech budoucích příjmů, tj. dividend a výnosu z prodeje akcie.

Jednostupňové dividendové diskontní modely

Jednostupňové dividendové diskontní modely jsou charakteristické tím, že po celou dobu držení akcie je míra růstu dividend konstantní. Proto také bývají často označovány jako modely s konstantním růstem. Grafické znázornění pohybu míry růstu dividend je na obrázku na následující straně.



Obr. 2.1: Pohyb míry růstu dividend v jednostupňových dividendových diskontních modelech

Budeme-li předpokládat, že dividendy jsou vypláceny po dobu n let a na konci $n-$tého roku je akcie prodána, můžeme tento model vyjádřit matematicky následovně:

$$VH = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_0 (1+g)^j}{(1+k)^j} + \frac{P_n}{(1+k)^n},$$

kde	VH	...	vnitřní hodnota akcie,
	P_n	...	cena, za niž je akcie na konci n-tého roku prodána,
	D_0	...	běžná neboli aktuální dividenda, která bude vyplacena v 0. roce[6] držby akcie,
	g	...	míra růstu dividend,
	k	...	požadovaná výnosová míra z akcie,
	n	...	počet let držby akcie.

V literatuře [6] se uvádí, že praktická použitelnost tohoto modelu je omezená na maximálně tři roky držení akcie, protože s rostoucí dobou držby akcie klesá přesnost odhadů, zejména co se týče očekávaného výnosu z prodeje akcie.

[6]Jedná se o rok, kdy je rozhodnuto o výši dividendy s tím, že dividenda je vyplacena až v následujícím roce. 0. rok je tedy rok, který předchází prvnímu roku držení akcie.

Velice známým představitelem jednostupňových dividendových diskontních modelů je tzv. **Gordonův model**, který nese jméno po svém autorovi Myronu J. Gordonovi. Oproti předchozímu modelu se liší pouze ve skutečnosti, že akcie nebude na konci n-tého roku prodána, ale předpokládáme nekonečnou dobu držení akcie.
Matematicky jej po úpravě můžeme vyjádřit takto:

$$VH = \frac{D_0\,(1+g)}{(1+k)} + \frac{D_0\,(1+g)^2}{(1+k)^2} + \frac{D_0\,(1+g)^3}{(1+k)^3} + \cdots = \frac{D_0\,(1+g)}{k-g}.$$

Všechny symboly ve vztahu pro vnitřní hodnotu jsou shodné se symboly uvedenými výše.

Kromě příznivců existuje také spousta odpůrců Gordonova modelu, a to především díky předpokladům, které jsou na něj kladeny, z nichž některé jsou poměrně těžko splnitelné.

Předpoklady Gordonova modelu jsou:

- musí být splněno: $k > g$,
- míra růstu dividend g je konstantní,
- požadovaná výnosová míra k je konstantní,
- doba držby akcie je nekonečná,
- máme k dispozici informace o současné dividendě.

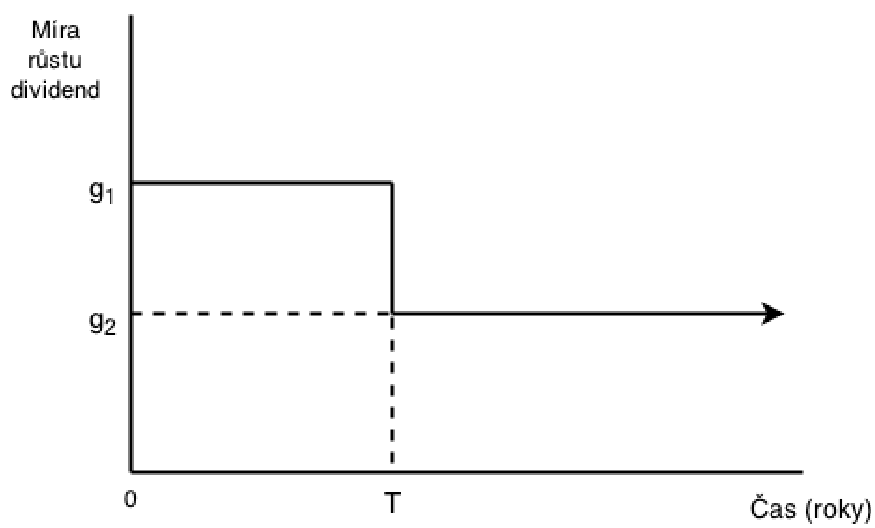
Z výše uvedeného plyne, že Gordonův model nemůžeme použít pro ocenění akcií společností, které vykazují vysoké tempo růstu. Jsou totiž charakteristické vysokou mírou růstu dividend, která může převyšovat požadovanou výnosovou míru. Další důležitý problém je citlivost Gordonova modelu na vstupní data. I sebemenší změna např. míry růstu dividend vede k velkým změnám ve výsledné vnitřní hodnotě, což může způsobit i změnu investičního doporučení.
Otázkou samozřejmě také zůstává, jakým způsobem odhadnout míru růstu dividend a požadovanou výnosovou míru.

Vícestupňové dividendové diskontní modely

Vícestupňové dividendové diskontní modely používají pro stanovení vnitřní hodnoty akcie více než jednu míru růstu dividend. V závislosti na tom, s kolika mírami růstu pracujeme, rozlišujeme modely dvoustupňové a třístupňové. Jejich použití se odvíjí od toho, na kolik fází rozdělujeme dobu držby ohodnocované akcie. Tyto fáze pak odpovídají konkrétním fázím životního cyklu společnosti. Dále podle toho, jestli se míra růstu mění jednorázově nebo postupně, uvažujeme skokové nebo lineární vícestupňové modely. Ze skokových vícestupňových dividendových diskontních modelů si představíme dvoustupňový skokový model.

Dvoustupňový skokový dividendový diskontní model

Dvoustupňový skokový dividendový model rozděluje dobu držby ohodnocované akcie na dvě fáze. V první fázi, která se zpravidla označuje jako růstová, pracujeme s nadprůměrnou mírou růstu dividend. V druhé fázi operujeme s průměrnou neboli normální mírou růstu. Předpokládáme tedy dvě míry růstu, k jejichž změně dochází po uplynutí celočíselného počtu roků.



Obr. 2.2: Pohyb míry růstu dividend ve dvoustupňovém skokovém dividendovém diskontním modelu

Pro stanovení vnitřní hodnoty akcie pomocí tohoto modelu je důležité určit dobu trvání jednotlivých fází a také potřebujeme vědět, zda druhá fáze je konečná nebo nekonečná. Na základě toho se bude lišit i matematické vyjádření modelu. Uvažujeme-li, že druhá fáze je nekonečná, vypadá model takto:

$$VH = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_0 \left(1+g_1\right)^j}{\left(1+k\right)^j} + \frac{D_0 \left(1+g_1\right)^n \left(1+g_2\right)}{\left(1+k\right)^n \left(k-g_2\right)},$$

kde	VH	...	vnitřní hodnota akcie,
	D_0	...	běžná neboli aktuální dividenda, která bude vyplacena v 0. roce držby akcie,
	g_1	...	nadprůměrná míra růstu dividend v první, růstové fázi,
	g_2	...	normální, průměrná míra růstu dividend ve druhé fázi,
	k	...	požadovaná výnosová míra z akcie,
	n	...	počet let první, růstové fáze.

Nesmíme samozřejmě zapomenout na podmínku existence tohoto modelu, kdy musí být splněno, že $k > g_2$.

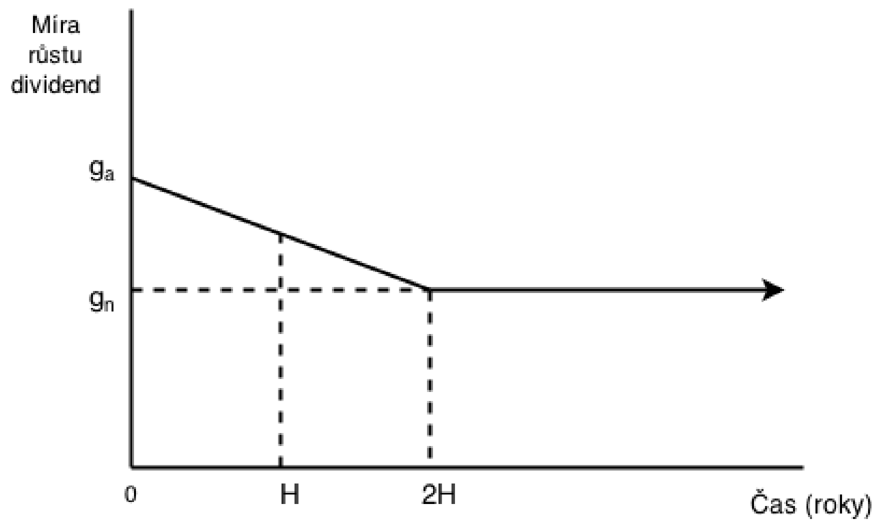
Mezi lineární vícestupňové modely patří třístupňový lineární dividendový diskontní model a H - model. K bližšímu seznámení jsem si vybrala H - model, jehož počet odhadů vstupních dat je menší než u třístupňového lineárního modelu, je snazší na výpočet a ze všech dividendových diskontních modelů je nejblíže realitě.

H - model

H - model byl vytvořen v roce 1984 a jeho autoři jsou ekonomové Russell J. Fuller a Chi-Cheng Hsia. Základem pro odvození H - modelu byly dvoustupňové a třístupňové dividendové diskontní modely, které tito pánové považovali za méně realistické, a to z důvodu jednorázové skokové změny míry růstu dividend v prvním případě a stále poměrně strmé změny míry růstu dividend v přechodné fázi u třístupňového modelu.

H - model pracuje se dvěma mírami růstu - nadprůměrnou g_a a normální g_n. Zpravidla uvažujeme situaci, kdy nadprůměrná míra převyšuje normální. Oproti dvoustupňovému dividendovému diskontnímu modelu není tempo růstu v počáteční fázi modelu konstantní, ale lineárně klesá z hodnoty nadprůměrné úrokové míry g_a příslušející roku 0 až na úroveň normální míry růstu g_n v čase 2H, jak můžeme vidět na obrázku na následující straně. V bodě H je míra růstu dividend přesně v polovině svého poklesu mezi měrami růstu g_a a g_n.

Poznámka 1 Překlad slova polovina do angličtiny zní half. Odtud plyne pojmenování bodu H a i samotného modelu.



Obr. 2.3: Pohyb míry růstu dividend ve vícestupňovém H-modelu

Nebudeme-li předpokládat, že akcie bude na konci n-tého roku prodána, můžeme H - model matematicky vyjádřit takto:

$$VH = \frac{D_0\,(1+g_n)}{k-g_n} + \frac{D_0 \cdot H\,(g_a-g_n)}{k-g_n},$$

kde	VH	...	vnitřní hodnota akcie,
	D_0	...	běžná neboli aktuální dividenda, která bude vyplacena v 0. roce držby akcie,
	g_a	...	nadprůměrná míra růstu dividend na počátku držby akcie,
	g_n	...	normální, průměrná míra růstu dividend uvažovaná od doby 2H,
	k	...	požadovaná výnosová míra z akcie,
	H	...	časový okamžik odpovídající polovině poklesu míry růstu dividend mezi měrami g_a a g_n.

Opět musí být splněna podmínka $k > g_n$.

2.3.2 Ziskové modely

Ziskové modely jsou druhým typem modelů, který si pro stanovení vnitřní hodnoty akcie představíme. Jsou založené na poměrovém ukazateli P/E ratio, který je zajímavý především pro investory. P/E ratio vyjadřuje poměr ceny (kurzu) akcie a čistého zisku na akcii. Říká nám, kolik peněžních jednotek je investor ochoten zaplatit za jednu jednotku zisku. Obecně platí, že čím nižší hodnota tohoto ukazatele je, tím lépe. Naopak bychom se měli vyvarovat nákupu akcií s vysokou hodnotou poměru P/E, protože s rostoucím ukazatelem P/E klesá očekávaná návratnost investice a akcie jsou považovány za rizikovější.

Ukazatel P/E ratio je pro spoustu analytiků i investorů velmi oblíbený. Tato oblíbenost tkví především v jednoduchosti jeho výpočtu a v širokém spektru jeho použití. P/E ratio může velmi dobře posloužit ke srovnání několika akcií z hlediska jejich atraktivity, ke stanovení vnitřní hodnoty akcie či k definování investiční strategie. Na druhou stranu, jestliže firma vykáže v běžném období ztrátu, není možné ziskové modely zkonstruovat. V tomto případě je východisko použít dividendové diskontní modely, protože i když firma hospodaří v daném roce se ztrátou, může vyplácet dividendy z nerozděleného zisku z minulých let.

V závislosti na tom, jaký kurz akcie a druh zisku při výpočtu použijeme, existují různé druhy poměru P/E, které mají i jinou vypovídací hodnotu. Uvedeme si tři nejpoužívanější ukazatele:

- běžné P/E ratio,
- normální P/E ratio,
- Sharpovo P/E ratio.

Běžné P/E ratio

Běžné P/E ratio patří mezi nejčastěji používané ukazatele, především z důvodu snadné dostupnosti dat a výpočtu. Bývá také často uváděn například v kurzovních lístcích.

Běžné P/E ratio vypočteme jako podíl aktuálního kurzu akcie a běžného zisku[6] na akcii. Aktuální kurz akcie získáme z posledního zveřejněného kurzovního lístku a běžný zisk představuje poslední zveřejněný zisk společnosti.

Spíše než pro určení vnitřní hodnoty akcie slouží tento ukazatel pro porovnání s ostatními ukazateli poměru P/E, kterým může být například Sharpovo P/E ratio. Běžné P/E ratio vyjadřuje aktuální kurz akcie a druhý zvolený ukazatel vnitřní hodnotu akcie. Obojí je poměřeno k běžnému zisku. Jejich porovnáním se zjistí, zda je daná akcie nadhodnocená, podhodnocená či oceněná správně.

Normální P/E ratio

Normální P/E ratio oproti běžnému poměru P/E již slouží pro určení vnitřní hodnoty akcie. Základem pro odvození tohoto ukazatele je Gordonův model

$$VH = \frac{D_0\,(1+g)}{k-g},$$

což můžeme také napsat jako

$$VH = \frac{D_1}{k-g},$$

kde	VH	...	vnitřní hodnota akcie,
	D_0	...	běžná, tj. naposledy vyplacená dividenda,
	D_1	...	očekávaná dividenda vyplácená v příštím roce z akcie,
	g	...	míra růstu dividend,
	k	...	požadovaná výnosová míra z akcie.

[6] Běžný zisk = čistý zisk za běžné účetní období, který je zjištěn během aktuálního účetního období. Bývá uveden např. v pololetní zprávě sestavené k pololetí aktuálního roku a vždy je uveden ve výroční zprávě zpracované ke konci roku.

Dále předpokládáme, že čistý zisk společnosti bude rozdělen pouze do dvou částí. První část zisku připadne na výplatu dividend akcionářům. Toto můžeme vyjádřit pomocí poměru D/E, kde D je celková částka vyplacená akcionářům ve formě dividend a E je celkový čistý zisk společnosti. Tento poměr bývá nazýván jako **dividendový výplatní poměr** a pro jeho označení budeme používat symbol p. Druhou část si společnost ponechá. Tento zisk je dán výrazem 1 - D/E, který se nazývá podíl zadrženého zisku na úrovni společnosti neboli **retention ratio** se zastupujícím symbolem b.

S ohledem na uvedený předpoklad, můžeme vypočítat hodnotu dividendy vyplácené v příštím roce jako

$$D_1 = p \cdot E_1,$$

kde D_1 ... očekávaná dividenda vyplácená v příštím roce z akcie,
p ... dividendový výplatní poměr,
E_1 ... čistý zisk na akcii v příštím roce.

Po dosazení do Gordonova modelu obdržíme model pro stanovení vnitřní hodnoty akcie

$$VH = \frac{p \cdot E_1}{k - g}, \tag{2.1}$$

kde VH ... vnitřní hodnota akcie,
p ... dividendový výplatní poměr,
E_1 ... čistý zisk na akcii v příštím roce,
g ... míra růstu dividend,
k ... požadovaná výnosová míra z akcie.

Vydělíme-li vzorec (2.1) hodnotou očekávaného čistého zisku na akcii společnosti v příštím roce E_1, získáme normální P/E ratio

$$(P/E)_N = \frac{p}{k-g},$$

kde	$(P/E)_N$	...	normální P/E ratio,
	p	...	dividendový výplatní poměr,
	g	...	míra růstu dividend,
	k	...	požadovaná výnosová míra z akcie.

Sharpovo P/E ratio

Stejně jako normální P/E ratio vychází i Sharpovo P/E ratio z Gordonova modelu. Postup odvození je stejný pouze s tím rozdílem, že vzorec (2.1) nebudeme dělit očekávaným ziskem na akcii společnosti v příštím roce, ale běžným ziskem připadající na akcii. Dostaneme

$$\frac{VH}{E_0} = \frac{p(1+g)}{k-g},$$

kde	$\frac{VH}{E_0}$	...	Sharpovo P/E ratio,
	p	...	dividendový výplatní poměr,
	g	...	míra růstu dividend,
	k	...	požadovaná výnosová míra z akcie.

Sharpovo P/E ratio vyjadřuje vnitřní hodnotu akcie pouze v relativní hodnotě, ve které je také používán. Jak již bylo zmíněno, pro zjištění, zda je daná akcie nadhodnocená, podhodnocená či správně oceněná, srovnáváme Sharpovo P/E ratio s běžným P/E poměrem, které reprezentuje aktuální tržní kurz akcie také v relativním vyjádření. Jak víme, je běžné P/E ratio definováno jako podíl běžného kurzu akcie a běžného zisku na akcii. Pokud je Sharpovo P/E ratio větší než běžné P/E ratio, jedná se s největší pravděpodobností o podhodnocenou akcii. Naopak, když je menší, doporučuje se drženou akcii prodat. V případě přibližné rovnosti mluvíme o správně ohodnocené akcii.

2.3.3 Výpočet míry růstu dividend a požadované výnosové míry

Vrátíme-li se zpět k předchozí kapitole a zaměříme-li se pozorněji na uvedené modely, můžeme si povšimnout, že ve většině případů je vnitřní hodnota akcie ovlivněna výší požadované výnosové míry a míry růstu dividend. Tyto dvě veličiny nejsou nikde uveřejněny, dokonce je nedohledáme ani na internetu. Jejich hodnoty je tudíž potřeba vypočítat. Jakým způsobem to můžeme provést, se dozvíme v této kapitole.

Míra růstu dividend

Na změnu míry růstu dividend reaguje vnitřní hodnota akcie velice citlivě. Proto je velice důležité stanovit její výši co možná nejpřesněji. Bohužel neexistuje pouze jediná cesta jejího výpočtu, ale existují tři způsoby jejího stanovení:

- historická míra růstu dividend,
- míra růstu dividend odhadovaná analytiky,
- míra růstu dividend odvozená od firemních finančních ukazatelů.

Je důležité si promyslet, kterou metodu pro stanovení míry růstu dividend použijeme, jelikož každá má rozdílnou vypovídací schopnost a pracuje s odlišnými vstupními daty.

Historická míra růstu dividend

Již z názvu je patrné, že tato metoda bude pro výpočet míry růstu dividend používat historická data o vyplacených dividendách.

Existuje několik přístupů, jak s využitím historických dat určit míru růstu dividend:

1. pomocí dvou krajních hodnot dividend,
2. využitím průměrné míry růstu dividend,
3. určením historické normalizované míry růstu dividend,
4. pomocí metody nejmenších čtverců.

Začneme od nejjednoduššího přístupu, a to stanovení míry růstu dividend **pomocí dvou krajních hodnot**. Jeho jednoduchost spočívá ve snadnosti výpočtu a v malé náročnosti na vstupní data, která jsou lehce zjistitelná. Stačí mít k dispozici údaje o dvou dividendách vyplacených v minulosti nebo o jedné dividendě vyplacené v minulosti a jedné dividendě vyplacené v současnosti. Míru růstu dividend lze potom určit na základě tohoto matematického zápisu:

$$g = \sqrt[t]{\frac{D_M}{D_S}} - 1, \tag{2.2}$$

kde	g	...	míra růstu dividend,
	D_M	...	představuje mladší dividendu, tj. dividendu současnou nebo dividendu vyplacenou blíže současnosti,
	D_S	...	představuje starší dividendu, tj. dividendu vyplacenou dále od současnosti,
	t	...	počet let mezi mladší a starší dividendou.

Jelikož užíváme historická data, jsme schopni dle vzorce (2.2) určit pouze jakousi minulou míru růstu dividend, u které předpokládáme, že bude zachována i v budoucnosti. Neuvažuje ale situaci, že společnost může v budoucnosti případně růst nebo naopak zaznamenat pokles. Další nedostatek spočívá právě v tom, že bereme v úvahu pouze dvě krajní hodnoty a neuvažujeme dividendy vyplacené mezi nimi. Problém nastává hlavně v případě, kdybychom brali dvě extrémně vysoké či naopak nízké hodnoty, vedlo by to k nepřesnému výsledku.

Z tohoto můžeme usuzovat, že tento přístup je vhodný nejspíše pro společnosti, které vykazují pravidelné tempo růstu dividend bez výrazných extrémních hodnot.

Abychom zmírnili citlivost výpočtu na extrémní hodnoty, používá se častěji přístup, kterým je **výpočet průměrné míry růstu dividend**. Průměr se počítá z ročních měr růstu dividend, které můžeme získat například výše uvedenou metodou dvou krajních hodnot. Pro stanovení průměru se nabízí dvě možnosti, a to použití aritmetického nebo geometrického průměru. Obecně se jeví geometrický průměr jako výhodnější, protože hodnota aritmetického průměru je hodně ovlivněna výskytem extrémních hodnot a roste s variabilitou dat. Místo klasického aritmetického průměru bychom ale mohli použít vážený aritmetický průměr, kde vyšší váhu přiřadíme mladším (tj. bližším současnosti) hodnotám dividend a nižší váhu těm vzdálenějším současnosti, protože čím je hodnota dividendy vzdálenější, tím má pro nás menší význam.

Další způsob, jak stanovit míru růstu dividend, je pomocí **historické normalizované míry růstu**. Tu určíme tak, že krajní dividendové platby (nejčastěji uvažujeme tři nejmladší, tj. nejbližší současnosti a tři nejstarší, tj. nejvzdálenější dividendové platby) vyhladíme pomocí geometrického průměru. Z těchto průměrů poté pomocí vzorce (2.2) vypočítáme historickou normalizovanou míru růstu.

Tato metoda přináší použitelnější výsledky než metoda dvou krajních hodnot, ale na druhou stranu je náročnější na vstupní data, jelikož potřebujeme znát nejméně šest hodnot dividendových plateb.

Poslední možností je **metoda nejmenších čtverců**. Metoda nejmenších čtverců je založena na minimalizaci součtu čtverců reziduí, čímž pomáhá odhadnout regresní koeficienty regresní přímky. Reziduum je odchylka od skutečné hodnoty. Nejjednodušším případem regresní přímky je **lineární** regresní přímka a jí odpovídající lineární model můžeme zapsat jako:

$$D_t = a + bt, \tag{2.3}$$

kde	D_t	...	dividenda vyplacená v roce t,
	t	...	časová perioda,
	a, b	...	regresní koeficienty.

V modelu (2.3) D_t představuje závisle proměnnou a t nezávisle proměnnou. Zkoumáme tedy závislost výše dividend na čase. Regresní koeficient a udává místo, kde regresní přímka protíná osu y a koeficient b vyjadřuje směrnici přímky. Jinými slovy můžeme říci, že koeficient b udává, o kolik se změní výše dividend, jestliže dojde ke změně nezávislé proměnné o jednotku, a naším úkolem je tento koeficient vypočítat. Problém je, že tento model určuje růst v korunách, ale my potřebujeme míru růstu vyjádřenou v procentech. Tu získáme transformací lineárního modelu na log-lineární model, který vzniká zlogaritmováním závisle proměnné. Matematicky jej můžeme vyjádřit takto:

$$\ln(D_t) = a + bt,$$

kde	$ln(D_t)$	...	přirozený logaritmus dividendy vyplacené v roce t,
	t	...	časová perioda,
	a, b	...	regresní koeficienty.

Zde již koeficient b vyjadřuje procentní změnu míry růstu dividend za jednotku času, kterou bývá nejčastěji jeden rok.

Míra růstu dividend odhadovaná analytiky

Druhou možností jak získat míru růstu dividend je spolehnout se na odhad analytiků. Z krátkodobého hlediska mohou být tyto předpovědi i lepší a přesnější než předpovědi získané z historických dat. Analytici totiž mohou do předpovědi míry růstu zahrnout i takové vlivy jako jsou informace o konkurenci a jejich záměrech, atraktivnost firmy, vnější prostředí, makroekonomické informace o inflaci, hrubém domácím produktu a jiné.

Na druhou stranu i analytici jsou jen lidé a ve svých předpovědích se mohou mýlit. Stejně tak i data, ze kterých při svých předpovědích vychází, nemusí být úplná, nebo jak již víme, data získaná z účetních výkazů společností mohou být zkreslená. Měli bychom se tedy spoléhat i na svůj vlastní úsudek.

Míra růstu dividend odvozená od firemních finančních ukazatelů

Poslední uvažovanou možností k určení míry růstu dividend je využití firemních finančních ukazatelů, které nám pomáhají vytvořit si představu o finančním zdraví společnosti. Ze všech možných finančních ukazatelů se budeme opírat především o rentabilitu vlastního jmění, podíl zadrženého zisku a dividendový výplatní poměr. Všechny tyto veličiny byly vysvětleny v předchozím textu.

Hlavním představitelem těchto modelů je udržovací růstový model. Při jeho odvození vycházíme z předpokladu, že dividendový výplatní poměr, který jsme si dříve označili jako p a stejně tak veličina b označující podíl zisku, který si společnost ponechá, jsou konstantní. Míru růstu dividend a míru růstu zisku můžeme za tohoto předpokladu zapsat jako:

$$g_D = \frac{D_{t+1} - D_t}{D_t} \quad \text{neboli} \quad g_E = \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t}, \tag{2.4}$$

kde	g_D	...	míra růstu dividend mezi obdobími $t+1$ a t,
	D_{t+1}	...	dividenda vyplacená v období $t+1$,
	D_t	...	dividenda vyplacená v období t,
	g_E	...	míra růstu zisku mezi obdobími $t+1$ a t,
	E_{t+1}	...	čistý zisk vykázaný v období $t+1$,
	E_t	...	čistý zisk vykázaný v období t.

Nyní si vyjádříme čistý zisk v čase $t + 1$ a t pomocí rentability vlastního jmění a účetní hodnoty společnosti, která je dána jako rozdíl mezi hodnotou aktiv a cizích zdrojů společnosti.

$$E_{t+1} = ROE_t \cdot BV_t, \tag{2.5}$$

kde	E_{t+1}	...	čistý zisk společnosti vykázaný v období $t + 1$,
	ROE_t	...	rentabilita vlastního kapitálu v období t,
	BV_t	...	účetní hodnota společnosti v období t.

$$E_t = ROE_{t-1} \cdot BV_{t-1}, \tag{2.6}$$

kde	E_t	...	čistý zisk společnosti vykázaný v období t,
	ROE_{t-1}	...	rentabilita vlastního kapitálu v období $t - 1$,
	BV_{t-1}	...	účetní hodnota společnosti v období $t - 1$.

Po dosazení vzorců (2.5) a (2.6) do vzorce (2.4) dostaneme:

$$g = \frac{ROE_t \cdot BV_t - ROE_{t-1} \cdot BV_{t-1}}{ROE_{t-1} \cdot BV_{t-1}},$$

kde	g	...	míra růstu dividend,
			ostatní veličiny jsou shodné s předchozím označením.

Tento vztah můžeme značně zjednodušit tím, že budeme předpokládat neměnnost rentability vlastního jmění neboli $ROE = ROE_t = ROE_{t-1}$. Dostaneme:

$$g = \frac{ROE(BV_t - BV_{t-1})}{ROE \cdot BV_{t-1}} = \frac{BV_t - BV_{t-1}}{BV_{t-1}}. \tag{2.7}$$

Všechny použité symboly ve vzorci (2.7) odpovídají symbolům uvedeným na předchozí straně.

Rozdíl mezi účetními hodnotami uvedený v čitateli můžeme zjednodušeně vyjádřit jako součin čistého zisku a podílu zadrženého zisku na úrovni společnosti. Dostaneme:

$$g = \frac{b \cdot E_t}{BV_{t-1}},$$

kde	g	...	míra růstu dividend,
	b	...	míra zadrženého zisku na úrovni společnosti,
	E_t	...	čistý zisk společnosti v čase t,
	BV_{t-1}	...	účetní hodnota společnosti v čase $t-1$.

Ze znalosti toho, že podíl čistého zisku a vlastního jmění společnosti odpovídá rentabilitě vlastního jmění, můžeme míru růstu dividend vyjádřit jako:

$$g = b \cdot ROE = (1-p) \cdot ROE,$$

kde	g	...	míra růstu dividend,
	b	...	míra zadrženého zisku na úrovni společnosti,
	p	...	dividendový výplatní poměr,
	ROE	...	rentabilita vlastního jmění společnosti.

V praxi se setkáme pouze zřídka s tím, že by společnost vykazovala konstantní rentabilitu vlastního jmění. V takovémto případě musíme použít jiný vzorec pro výpočet míry růstu dividend, který vypadá následovně:

$$g = \left(BV_t \cdot \frac{ROE_t - ROE_{t-1}}{E_t} \right) + b \cdot ROE_t,$$

kde	g	...	míra růstu dividend,
	BV_t	...	účetní hodnota společnosti v období t,
	ROE_t	...	rentabilita vlastního kapitálu v období t,
	ROE_{t-1}	...	rentabilita vlastního kapitálu v období $t-1$,
	E_t	...	čistý zisk společnosti v čase t,
	b	...	míra zadrženého zisku na úrovni společnosti.

Požadovaná výnosová míra

Druhým vstupním údajem, který potřebujeme při výpočtu vnitřní hodnoty akcie, je požadovaná výnosová míra. Stejně jako u míry růstu dividend i zde platí, že vnitřní hodnota akcie je velice citlivá na změnu hodnoty požadované výnosové míry. Proto je vyžadována přesnost jejího výpočtu. V této kapitole si uvedeme dva nejčastěji využívané modely, a to model CAPM a model APT.

CAPM model

Za autora modelu CAPM je považován Američan William Forsyth Sharpe, který se o něm jako první zmínil ve svém článku publikovaném v časopise Journal of Finance a později svůj výzkum rozvedl ve své knize Teorie portfolia a kapitálové trhy. Nicméně nezávisle na něm, se jím zabývali i jiní ekonomové. Jedním z nejvýznamnějších je John Lintner, který bývá označován jako spoluautor modelu CAPM. Název modelu je tvořen počátečními písmeny anglického originálu Capital Asset Pricing Model, což bychom mohli přeložit jako model oceňování kapitálových aktiv. Základ tohoto modelu vychází z Markowitzovy moderní teorie portfolia.

Podstatou modelu CAPM je rozdělení rizika na:

- **systematické riziko** - bývá také označováno jako tržní riziko a je typické tím, že jej nemůžeme snížit diverzifikací. Příkladem systematického rizika je výše úrokových sazeb, inflace či války.
- **nesystematické riziko** - je známé také jako specifické riziko, které můžeme snížit diverzifikací.

CAPM modeluje vztah mezi očekávaným výnosem cenného papíru či portfolia a systematickým rizikem celého trhu. Dříve než si uvedeme samotné matematické vyjádření, měli bychom se zmínit i o předpokladech, které tento model provází a kvůli kterým bývá často kritizován.

Původní předpoklady modelu jsou:

1. investoři chtějí maximalizovat svůj výnos a investice do svého portfolia vybírají na základě očekávaného výnosu a směrodatné odchylky,
2. investoři si mohou vypůjčovat (pro sebe) nebo půjčovat ostatním neomezené množství peněz za bezrizikovou míru,
3. všechna finanční aktiva jsou nekonečně dělitelná, což znamená, že investor může prodat či koupit i zlomek akcie, a dále mohou být prodána v kteroukoliv dobu za tržní cenu,
4. všichni investoři mají stejná očekávání týkající se trhu,
5. investoři jsou příjemci cen, a tudíž je nemohou svým chováním jakkoli ovlivnit,
6. neexistují žádné transakční náklady,
7. neuvažujeme žádné daně,
8. investoři jsou příjemci cen, a tudíž jejich výši nemohou svým chováním jakkoli ovlivnit,
9. všichni investoři mají k dispozici všechny potřebné informace ve stejnou dobu.

Především splnění předpokladů číslo 6 a 7 je v praxi nereálné, jelikož daně a i transakční náklady nás provází skoro na každém kroku.

Celý model je založen na tom, že investor je ochoten si koupit a vlastnit rizikový instrument výměnou za bezrizikový pouze tehdy, jestliže mu z držby rizikového instrumentu bude plynout vyšší výnos. Vyšší výnos představuje pro investora odměnu za to, že je ochoten riziko podstoupit. Rozdíl mezi tímto vyšším výnosem a výnosem, který by plynul z držby bezrizikového instrumentu, označujeme jako

prémie za riziko. Prémie za riziko není pro všechny instrumenty a portfolia stejná.

Matematicky můžeme vztah mezi očekávaným výnosem a systematickým rizikem aktiva (akcie nebo portfolia) vyjádřit následovně:

$$E(r_i) = R_F + \beta_i(r_m - R_F),$$

kde	$E(r_i)$	...	očekávaná výnosová míra produkovaná akcií i nebo portfoliem i,
	R_F	...	bezriziková úroková míra,
	β_i	...	beta faktor akcie i nebo portfolia i,
	r_m	...	tržní výnosová míra.

Naším úkolem je najít hodnotu $E(r_i)$ odpovídající požadované výnosové míře, kterou jsme si již dříve označili symbolem k.

R_F vyjadřuje bezrizikovou úrokovou míru příslušející instrumentu s nulovou úrovní systematického rizika. Nejčastěji se za tyto instrumenty považují státní pokladniční poukázky či státní dluhopisy, přičemž není pevně stanoveno, který z nich při výpočtech použít.

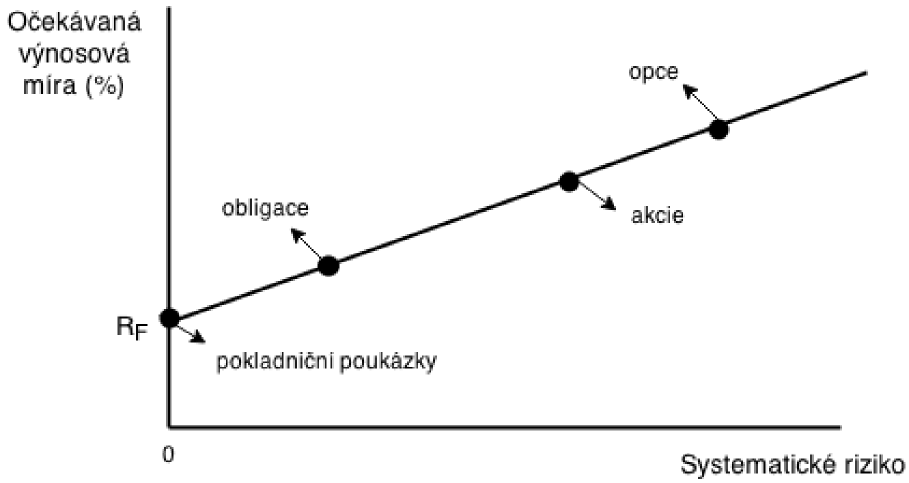
β_i je beta faktor, který je určen pro měření systematického rizika. Vyjadřuje citlivost i-té investice na změnu výnosové míry z tržního portfolia. Matematicky můžeme tento vztah vyjádřit jako:

$$\beta_i = \frac{cov_{im}}{\sigma_m^2}$$

kde	β_i	...	beta faktor akcie i nebo portfolia i,
	cov_{im}	...	kovariance mezi výnosovou mírou i-té akcie a výnosovou mírou z tržního portfolia,
	σ_m^2	...	rozptyl výnosové míry z tržního portfolia.

Tržní výnosovou míru r_m získáme na základě hodnot tržního indexu. Příkladem tržního indexu, který můžeme u nás použít, je PX index neboli index Burzy cenných papírů Praha.

Grafickým znázorněním modelu CAPM je **přímka trhu cenných papírů** (anglicky: Security Market Line, zkratka SML).



Obr. 2.4: Přímka trhu cenných papírů

Z obrázku vidíme, že přímka SML nevychází z počátku, ale začíná v bodě R_F, který odpovídá bezrizikové výnosové míře s nulovou úrovní systematického rizika. Jako příklad bezrizikového finančního instrumentu jsou uvedeny pokladniční poukázky. Přímka je rostoucí, jelikož s rostoucím systematickým rizikem roste i očekávaná výnosová míra. Kromě přímky samotné obrázek obsahuje i cenné papíry, kterými se tato práce zabývá, umístěné na přímce SML podle výše systematického rizika a očekávané výnosové míry. Akcie řadíme mezi poměrně rizikové instrumenty, které přinášejí vyšší výnos než dluhopisy. Na druhou stranu rizikovější než akcie jsou opce.

Na přímce SML nalezneme pouze správně oceněné cenné papíry. Z toho vyplývá, že mimo ni se nachází cenné papíry nadhodnocené či podhodnocené. Budeme-li se bavit o akciích, pak v oblasti nad přímkou SML se vyskytují podhodnocené akcie a pod přímkou SML nadhodnocené akcie.

APT model

Arbitrage Pricing Theory neboli arbitrážní cenová teorie (dále jen APT) byla vyvinuta v roce 1976. Jejím autorem je Stephen Ross a na něj později v roce 1981 navázal G. Huberman. Tato teorie je založena na zákoně jedné ceny. Z hlediska arbitráže to znamená, že jestliže existují dvě akcie se stejnou úrovní rizika, pak by měl být stejný i očekávaný výnos. Pokud tomu tak není, pak je možné prodat akcii s nižším výnosem a koupit akcii mající vyšší výnos a tím realizovat zisk.

Model APT byl vyvinut především z důvodu kritiky nerealizovatelnosti předpokladů modelu CAPM v praxi. Mezi základní předpoklady modelu APT patří:

- kapitálové trhy jsou dokonale konkurenční,
- investoři preferují větší množství peněz před menším a jsou averzní k riziku,
- výnosová míra je vyjádřena jako lineární funkce několika různých makroekonomických faktorů.

Poslední předpoklad můžeme matematicky vyjádřit pomocí rovnice:

$$r_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + \ldots + b_{ik}F_k,$$

kde r_i ... realizovaná výnosová míra produkovaná akcií i nebo portfoliem i,
a_i ... konstanta pro i-té aktivum,
F_n ... n-tý faktor, $n = 1, \ldots, k$,
b_{in} ... citlivost i-tého aktiva na n-tý faktor.

Pro očekávanou výnosovou míru potom platí:

$$E(r_i) = R_f + b_{i1}E(F_1) + b_{i2}E(F_2) + \ldots + b_{ik}E(F_k),$$

kde $E(r_i)$ ... očekávaná výnosová míra produkovaná akcií i nebo portfoliem i,
R_f ... bezriziková úroková míra,
b_{in} ... citlivost i-tého aktiva na n-tý faktor, $n = 1, \ldots, k$,
$E(F_n)$ ... očekávaná hodnota n-tého faktoru, $n = 1, \ldots, k$.

Mezi faktory, které ovlivňují očekávanou výnosovou míru, můžeme zařadit:

- očekávanou míru inflace,
- změnu HDP,
- změnu měnového kurzu,
- změnu úrokových sazeb a jiné.

2.4 Modelování tržní ceny akcie

Celá předchozí kapitola se zabývala stanovením vnitřní hodnoty akcie, především za účelem určení, zda je akcie nadhodnocena, podhodnocena či správně oceněna. Kromě vnitřní hodnoty můžeme ale také modelovat tržní hodnotu akcie, která představuje aktuální cenu akcie na trhu. Akciové kurzy bývají zohledněny v různých modelech například v modelu pro stanovení opční prémie, kde akcie je podkladovým aktivem opce. Z tohoto důvodu je obvykle nutné tržní cenu akcie vhodně modelovat.

Modelování je opřeno o stochastické procesy. Stochastickým procesem rozumíme každou veličinu, jejíž hodnoty se v čase náhodně mění. Speciálním případem stochastického procesu je Brownův pohyb. Z fyzikálního hlediska je Brownův pohyb definován jako náhodný, neuspořádaný pohyb mikroskopických částic v kapalině nebo plynu, který je způsoben nárazem molekul z okolního prostředí. V našem případě je za částici považována cena akcie, jejíž pohyb je ovlivňován velkým počtem objednávek nákupů a prodejů účastníků akciového trhu.

Význam Brownova pohybu zde tedy spočívá v modelování kolísavosti tržní ceny akcie.

Definice Brownova pohybu zní:

Definice 2.4.1 Proces $W = \{W_t; t \geq 0\}$ nazveme Brownovým pohybem, jestliže platí:

1. $W_0 = 0$,
2. $W_{t+\Delta t} - W_t$ je náhodná veličina s normálním rozdělením $N(0, \Delta t)$,
3. pro každou posloupnost $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ jsou přírůstky Brownova pohybu $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, vzájemně nezávislé náhodné veličiny.

Nyní si již můžeme ukázat, jak modelujeme tržní cenu akcie.

Označíme-li S_t jako tržní cenu akcie v čase t, můžeme její chování popsat pomocí stochastické diferenciální rovnice

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{2.8}$$

kde μ a σ jsou konstanty a μ vyjadřuje trend neboli směr vývoje tržní ceny akcie (ve smyslu růst/pokles), σ se nazývá volatilita popisující kolísání hodnot kolem trendu a W_t je Brownův pohyb.

Abychom mohli určit trend a volatilitu, musíme rovnici (2.8) upravit do tvaru:

$$\frac{dS_t}{S_t} = d(\ln S_t) = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Užitím Taylorova vzorce[7] obdržíme

$$\frac{dS_t}{S_t} \doteq \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2}\frac{(-1)}{S_t^2}(dS_t)^2.$$

Po dosazení rovnice (2.8) do předchozího vztahu dostaneme

$$\frac{dS_t}{S_t} = \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{(-1)}{S_t^2}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 =$$

$$= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}[\mu^2 S_t^2 (dt)^2 + 2\mu S_t^2 dt \sigma dW_t + \sigma^2 S_t^2 (dW_t)^2] =$$

$$= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}[\mu^2 (dt)^2 + 2\mu dt \sigma dW_t + \sigma^2 (dW_t)^2] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t,$$

kde členy $\mu^2(dt)^2$ a $2\mu dt\sigma dW_t$ nabývají velice nízkých hodnot, a proto je zanedbáme. Dále $(dW_t)^2 \doteq dt$ (důkaz je proveden také v [14]). Výraz $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ představuje trend vývoje logaritmu ceny akcie a σ volatilitu.

Jestliže W_t je Brownův pohyb, je jeho spojitý přírůstek dW_t náhodnou veličinou s normálním rozdělením $N(0, dt)$. Potom $d(\ln S_t)$ má rovněž normální rozdělení $N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt, \sigma^2 dt\right]$.

[7] Trend a volatilita se obvykle zjišťují z rovnice upravené podle Itoova vzorce (viz. [2]), který však vychází z Taylorova rozvoje. Vzhledem k tomu, že u akcie Itoův vzorec nelze použít, není zde uveden.

Při praktických výpočtech je však výhodnější používat vztahy s diskrétními přírůstky. Nechť $\Delta t = T - t$. Pak

$$\Delta \ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma \Delta W_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma \Delta W_t$$

je náhodná veličina s normálním rozdělením

$$\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right].$$

Dále platí, že

$$\Delta \ln S_t = \ln(S_T) - \ln(S_t),$$

a proto můžeme psát

$$\ln(S_T) - \ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma \Delta W_t.$$

Pro logaritmus tržní ceny akcie v čase T tedy platí

$$\ln(S_T) = \ln(S_t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma \Delta W_t.$$

Je zřejmé, že se jedná také o náhodnou veličinu s normálním rozdělením. Abychom určili parametry tohoto rozdělení, musíme určit její střední hodnotu a rozptyl:

$$\mathbb{E}\left[\ln(S_T)\right] = \mathbb{E}\left[\ln(S_t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma \Delta W_t\right] =$$

$$= \ln(S_t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t),$$

$$var\left[\ln(S_T)\right] = var\left[\ln(S_t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma \Delta W_t\right] =$$

$$= var(\sigma \Delta W_t) = \sigma^2 \cdot (T-t).$$

Poznámka 2 Využili jsme poznatku, že $\Delta W_t \sim N\left(0, \Delta t\right)$.

Potom

$$\ln(S_T) \sim N\left[\ln(S_t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2 \cdot (T-t)\right].$$

Označíme-li

$$A = \ln(S_t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \quad \text{a} \quad B = \sigma^2 \cdot (T-t),$$

potom bude tato náhodná veličina s 95% spolehlivostí ležet v intervalu, který získáme odečtením a přičtením dvojnásobku směrodatné odchylky od střední hodnoty

$$\ln(S_T) \in \left(A - 2 \cdot \sqrt{B}, A + 2 \cdot \sqrt{B}\right). \tag{2.9}$$

Odlogaritmováním dostaneme 95% interval spolehlivosti pro tržní cenu akcie

$$S_T \in \left[e^{A-2\cdot\sqrt{B}}, e^{A+2\cdot\sqrt{B}}\right].$$

2.5 Příklady

V této části práce si na příkladech ukážeme, jak výše uvedené teoretické poznatky použít při výpočtu vnitřní hodnoty akcie a také její tržní ceny. Ve všech příkladech, které zde budou uvedeny, budeme uvažovat akcie Komerční banky.

Představení společnosti

Komerční banka byla založena v roce 1990 vyčleněním obchodní činnosti ze Státní banky československé. Po dobu dvou let byla peněžním ústavem a od roku 1992 byla přeměněna na akciovou společnost. Od roku 2001 je součástí mezinárodní skupiny Société Generale. Komerční banka patří mezi banky s dlouholetou tradicí a je třetí největší bankou v České republice. Neřadíme ji mezi banky zaměřené pouze na určitý segment, ale své služby poskytuje jak v oblasti retailového, tak i podnikového a investičního bankovnictví. Kromě základních bankovních činností nabízí i specializované produkty, kterými jsou např. stavební spoření, penzijní připojištění, faktoring a jiné. Pro své výpočty jsem si Komerční banku vybrala především proto, že vyplácí jedny z nejvyšších dividend. Pro zajímavost banka za rok 2013 vyplatila dividendy ve výši 230 Kč, což bylo o 170 Kč více než výše dividend České spořitelny, a dokonce na rok 2015 plánuje navrhnout vyplatit dividendu ve výši 310 Kč na akcii.

Příklad 1 Stanovte tržní cenu akcie Komerční banky k 31. 1. 2015 na základě historických měsíčních dat z období od 1. 1. 2012 do 31. 12. 2014, jestliže cena této akcie k 30. 12. 2014 byla 4 740 Kč.

Řešení:

Výpočet ceny akcie k 30. 1. 2015 provedeme pomocí náhodné veličiny $\ln S_T$, která má normální rozdělení $N\left[\ln(S_t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t); \sigma^2(T-t)\right]$. Abychom mohli určit střední hodnotu a rozptyl tohoto rozdělení, musíme vypočítat parametry μ a σ.

Celkem máme k dispozici 37 měsíčních kurzů akcií z období od 1. 1. 2012 do

30. 12. 2014, které jsou uvedeny v příloze A. Jelikož uvažujeme měsíční data, pak $\Delta t = T - t = \frac{1}{12}$.

Nejdříve určíme hodnotu trendu μ neboli průměrnou roční míru růstu ceny akcie. K tomu potřebujeme znát relativní měsíční výnosy, které označíme $r_1, \ldots, r_{36}$ a jejichž hodnoty jsou uvedeny také v příloze A. Ze znalosti těchto relativních výnosů vypočítáme pomocí geometrického průměru průměrné měsíční tempo růstu akcie $\overline{R}$:

$$\left(1 + \overline{R}\right) = \sqrt[36]{(1 + r_1)\,(1 + r_2) \cdot \ldots \cdot (1 + r_{36})}.$$

Odtud

$$\overline{R} = 0{,}009396.$$

Ze vztahu

$$\left(1 + \overline{R}\right)^{12} = 1 + i_e$$

vypočítáme průměrné roční tempo růstu ceny i_e neboli trend μ. Dostaneme

$$i_e = \mu = 0{,}118768.$$

Nyní dle následujícího vztahu vypočítáme roční rozptyl σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\left(r_1 - \overline{R}\right)^2 + \left(r_2 - \overline{R}\right)^2 + \cdots + \left(r_{36} - \overline{R}\right)^2}{36 - 1} \cdot 12.$$

Po dosazení vypočtených hodnot obdržíme

$$\sigma^2 = 0{,}042433.$$

Odmocněním získáme směrodatnou odchylku neboli volatilitu σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 0{,}205993.$$

Nyní již máme k dispozici všechny potřebné údaje pro stanovení střední hodnoty a rozptylu normálního rozdělení náhodné veličiny $\ln S_T$.

Pro její charakteristiky platí:

$$\mathbb{E}[\ln(S_T)] = \ln(S_t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) =$$

$$= \ln(4\,740) + \left(0{,}118768 - \frac{1}{2}0{,}042433\right)\frac{1}{12} = 8{,}471922$$

$$var[\ln(S_T)] = \sigma^2 \cdot (T - t) = 0{,}042433 \cdot \frac{1}{12} = 0{,}003536$$

$$\sigma[\ln(S_T)] = \sqrt{var[\ln(S_T)]} = 0{,}059465.$$

Dostáváme

$$\ln(S_T) \sim N\,(8{,}471922; 0{,}003536)\,.$$

Dle vztahu (2.9) se logaritmus ceny akcie bude s 95% pravděpodobností pohybovat v intervalu

$$\ln(S_T) \in (8{,}471922 - 2 \cdot 0{,}059465; 8{,}471922 + 2 \cdot 0{,}059465)\,,$$

$$\ln(S_T) \in (8{,}352992; 8{,}590852)\,.$$

Odlogaritmováním dostaneme 95% interval spolehlivost pro tržní cenu akcie S_T

$$S_T \in \left(e^{8{,}352992}; e^{8{,}590852}\right),$$

$$S_T \in (4\,242{,}86; 5\,382{,}20)\,.$$

Zjistili jsme, že tržní cena akcie se bude k 31. 1. 2015 pohybovat v intervalu (4 242,86; 5 382,20). Nakonec porovnáme tento výsledek se skutečnou tržní cenou akcie Komerční banky, která k 30. 1. 2015 činila 5 010 Kč. Vidíme, že skutečný kurz akcie leží v námi vypočítaném intervalu.

Příklad 2 Stanovte vnitřní hodnotu akcie Komerční banky k 1. 1. 2013 pomocí jednostupňového dividendového modelu, jestliže víte, že poslední známá výše dividend z roku 2012 činí 160 Kč a prodejní cena akcie k 30. 12. 2014 je 4 740 Kč.

Řešení:

Vnitřní hodnotu akcie KB budeme počítat pomocí vzorce

$$VH = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_0 (1+g)^j}{(1+k)^j} + \frac{P_n}{(1+k)^n}.$$

Ze zadání příkladu víme, že $D_0 = 160$ Kč, $n = 2$, $P_n = 4\,740$ Kč. Hodnotu míry růstu dividend g a požadované výnosové míry k musíme dopočítat.

Začneme mírou růstu dividend, jejíž odvození provedeme pomocí metody nejmenších čtverců. Abychom zjistili míru růstu dividend v procentech, použijeme log-lineární model (2.3)

$$\ln(D_t) = a + bt.$$

Zajímá nás regresní koeficient b, který představuje míru růstu dividend. Abychom jej mohli vypočítat, potřebujeme znát výši dividend vyplacené Komerční bankou, přesněji jejich logaritmy. Komerční banka začala první dividendy vyplácet v roce 2001. Jelikož ale v prvních dvou letech byla výše dividend extrémně nízká (a to 11,50 Kč a 40 Kč za akcii) a v roce 2003 prudce stoupla na 200 Kč za akcii, nebudeme dividendy z let 2001 a 2002 brát v úvahu, jelikož by mohly zkreslit výsledek.

Přehled dividend je uveden v následující tabulce.

2003	2004	2005	2006	2007	2008
200	100	250	150	180	180
2009	2010	2011	2012	2013	2014
170	270	160	230	230	310

Tab. 2.1: Dividenda na akcii vyplacená Komerční bankou v letech 2003 – 2014

Hodnotu regresního koeficientu b vypočítáme v Excelu s využitím funkce LINREGRESE. Jeho výpočet společně s hodnotami logaritmů dividend naleznete v příloze B. Obdrželi jsme míru růstu dividend g ve výši 4,62 %, kterou považuji za přiměřenou.

Nyní přejdeme ke stanovení požadované výnosové míry k pomocí modelu CAPM, kde

$$k = R_F + \beta_i \left(r_m - R_F \right).$$

Za bezrizikovou úrokovou míru R_F vezmeme hodnotu 0,07 %, což je průměrná výnosnost státních pokladničních poukázek s dobou splatnosti 0,75 roku[8].

Pro výpočet tržní výnosové míry r_m budeme postupovat stejně jako při výpočtu průměrné roční míry růstu ceny akcie, jen s tím rozdílem, že použijeme měsíční data z let 2012 – 2014 pro index PX. Tato data naleznete v příloze C společně relativními měsíčními výnosy. Ze znalostí těchto měsíčních výnosů zjistíme pomocí geometrického průměru průměrné měsíční tempo růstu indexu PX, které si označíme jako $\overline{R}_m$. Ze vztahu

$$\left(1 + \overline{R}_m\right) = \sqrt[36]{(1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \ldots \cdot (1 + r_{36})}$$

dosazením dat dostaneme

$$\overline{R}_m = 0{,}0007.$$

Již můžeme určit tržní výnosovou míru r_m, pro kterou platí

$$\left(1 + \overline{R}_m\right)^{12} = 1 + r_m,$$

odkud

$$r_m = \left(1 + \overline{R}_m\right)^{12} - 1 = (1 + 0{,}0007)^{12} - 1 = 0{,}0082.$$

Zbývá jen určit koeficient β_i. Učiníme tak dle vzorce

$$\beta_i = \frac{cov_{im}}{\sigma_m^2},$$

který si upravíme do tvaru

$$\beta_i = \frac{R^2 \sigma_i}{\sigma_m},$$

[8] Správně bychom měli brát státní pokladniční poukázky maximálně tříměsíční, ale s těmi se v roce 2014 neobchodovalo.

kde R^2 je korelační koeficient mezi relativním měsíčním výnosem indexu PX a akcie Komerční banky, σ_i je směrodatná odchylka ceny akcie a σ_m směrodatná odchylka indexu PX.

Směrodatnou odchylku σ_m zjistíme ze vztahu

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\left(r_1 - \overline{R}_m\right)^2 + \left(r_2 - \overline{R}_m\right)^2 + \cdots + \left(r_{36} - \overline{R}_m\right)^2}{36 - 1} \cdot 12} = 0{,}1381.$$

Směrodatnou odchylku σ_i máme již vypočítanou z příkladu 1 ve výši 0,2060. Pro stanovení hodnoty korelačního koeficientu a následně i koeficientu β_i opět využijeme Excel a získáme

$$\beta_i = \frac{0{,}7355 \cdot 0{,}2060}{0{,}1381} = 1{,}0974.$$

Všechny získané hodnoty nyní dosadíme do vzorce

$$k = R_F + \beta_i \left(r_m - R_F\right).$$

a dostaneme

$$k = 0{,}0007 + 1{,}0974\,(0{,}0082 - 0{,}0007) = 0{,}009.$$

Obdrželi jsme požadovanou výnosovou míru ve výši 0,9 %.

Máme k dispozici všechny hodnoty, které potřebujeme pro určení vnitřní hodnoty akcie. Po jejich dosazení do vzorce

$$VH = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_0\,(1+g)^j}{(1+k)^j} + \frac{P_n}{(1+k)^n}$$

dostaneme

$$VH = \frac{160\,(1 + 0{,}0462)}{(1 + 0{,}009)} + \frac{160\,(1 + 0{,}0462)^2}{(1 + 0{,}009)^2} + \frac{4\,740}{(1 + 0{,}009)^2} = 4\,994{,}07 \text{ Kč}.$$

Porovnáme-li tuto vnitřní hodnotu se skutečnou tržní cenou akcie, která k 2. 1. 2013 činila 4 130 Kč, zjistíme že vnitřní hodnota je větší, a to svědčí o podhodnocené akcii.

Poznámka 3 Jednostupňový dividendový diskontní model, kdy je cena akcie na konci n-tého roku prodána, je jediným z uvedených modelů pro stanovení vnitřní akcie, který můžeme při výpočtech použít. Hlavním důvodem je, že vypočtená požadovaná výnosová míra k není větší než míra růstu dividend g. Nicméně použití ostatních modelů je jednoduché, v podstatě se jedná pouze o dosazování do příslušného vzorce.

Kapitola 3

Opce

Druhým cenných papírem, kterým se tato práce zabývá je opce. Opce patří mezi finanční deriváty, které si krátce představíme hned na začátku kapitoly. Poté bude následovat základní charakteristika opce a nakonec samotné metody oceňování opcí.

Informace uvedené v této kapitole byly čerpány z [1], [2], [3], [4], [13] a [14].

3.1 Úvod do finančních derivátů

Finanční deriváty řadíme mezi tzv. termínové obchody, pro něž je typické, že doba sjednání obchodu je jiná než doba uskutečnění obchodu. Zpravidla dochází k uskutečnění obchodu do 1 roku.

Mezi základní náležitosti termínového obchodu, které musí být mezi účastníky (prodávajícím a kupujícím) stanoveny v den uzavření obchodu, jsou:

- datum splatnosti termínového obchodu,
- předmět obchodu (neboli podkladové aktivum),
- množství podkladového aktiva,
- cena obchodu (nazývána také jako termínová cena).

Finanční deriváty patří mezi jedny z nejmladších finančních instrumentů. Setkáváme se s nimi od 70. let 20. století, kdy v důsledku výrazných výkyvů na finančních trzích narůstá nejistota ohledně budoucího vývoje úrokových sazeb, měnových kurzů, kurzů cenných papírů atd. a účastníci chtějí snížit riziko z toho plynoucí tím, že dojde k zafixování ceny zvoleného finančního instrumentu k datu v budoucnosti.

Kromě zajištění se proti riziku, které se také označuje jako hedging, se deriváty využívají i při spekulacích.

Existují dvě základní klasifikace finančních derivátů.

1. Podle typu podkladového aktiva rozlišujeme:

    - **komoditní deriváty** - předmětem obchodu jsou komodity, jako je cukr, kakao, káva, zlato, atd.,
    - **úrokové deriváty** - předmětem obchodu jsou úrokové instrumenty, jako je úvěr, krátkodobý a dlouhodobý dluhopis a jiné,
    - **měnové deriváty** - předmětem obchodu je určitá měna,
    - **akciové deriváty** - předmětem obchodu je akcie.

2. Podle povinnosti uskutečnit derivátový obchod rozlišujeme:

    - **pevné (nepodmíněné) deriváty** - oba účastníci mají povinnost ke dni splatnosti derivátu obchod uskutečnit, a to bez ohledu na to, jaká je cena bazického instrumentu ke dni uskutečnění obchodu. Za uzavření takovéhoto obchodu účastníci nic neplatí. Dále říkáme, že ten účastník, který ke dni splatnosti kupuje podkladové aktivum, zaujímá dlouhou pozici, naopak ten, který prodává podkladové aktivum, zaujímá krátkou pozici. Mezi pevné deriváty řadíme futures, forwardy a swapy.

- **opční (podmíněné) deriváty** - u těchto derivátů má účastník v dlouhé pozici právo a nikoli povinnost uskutečnit obchod ke dni splatnosti derivátu a tímto získává jakousi výhodu oproti druhému účastníkovi. Za tuto výhodu však musí při sjednání obchodu zaplatit cenu nazývanou opční prémie. Mezi opční deriváty řadíme opce, opční listy, stropy a jiné.

3.2 Základní charakteristika opcí

Opce patří mezi podmíněné finanční deriváty, se kterými, jak již bylo zmíněno, je spojeno právo prodat či koupit určité podkladové aktivum za pevně stanovenou cenu a v předem určené době.

Opce, se kterými je spojeno právo koupit, nazýváme **call opce**. Držitel tohoto práva se může rozhodnout, zda v době splatnosti opce své právo uplatní či nikoli. Jeho rozhodnutí se bude odvíjet podle skutečné ceny podkladového aktiva. V případě, že svého práva využije, je druhý účastník povinen mu podkladové aktivum prodat.

Pro lepší pochopení si můžeme nákup call opce vysvětlit na příkladu nákupu lístku do kina. Koupí vstupenky si kupujeme právo zúčastnit se promítání filmu. Cena za vstupenku je v našem případě opční prémie. V den promítání filmu se můžeme rozhodnout, zda do kina půjdeme či ne. Pokud své právo uplatníme, tak provozovatel kina je povinen nás na promítání pustit. V opačném případě můžeme nechat lístek propadnout, a nebo jej prodáme někomu jinému.

Druhým typem jsou tzv. **put opce**, se kterými je naopak spojeno právo prodat. Jestliže jeho držitel se rozhodne právo uplatnit, má opět druhá strana povinnost podkladové aktivum tentokrát koupit.

Dále podle okamžiku uplatnění práva rozlišujeme:

- americkou opci - opci můžeme uplatnit kdykoli od upsání opce až do doby jejího vypršení,
- evropskou opci - opci můžeme uplatnit pouze v době splatnosti opce.

V dalším textu budeme uvažovat evropskou call opci, jejímž podkladovým aktivem bude akcie.

3.3 Modely oceňování opcí

V této kapitole si představíme modely, které nám pomohou určit cenu evropské call opce, jejímž podkladovým aktivem je akcie. Jako první si uvedeme jednodušší **binomický model**, který byl publikován v roce 1979. Druhým nástrojem pro oceňování opcí, kterým se budeme zabývat, je **Black-Scholesův model**, který byl vytvořen v roce 1973.

3.3.1 Binomický model

Jednoduchost binomického modelu je dána především jeho předpoklady:

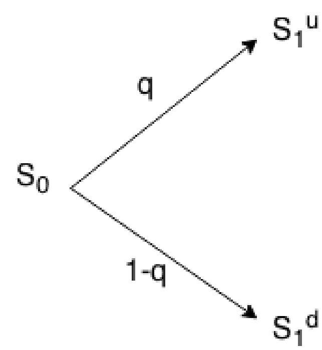
- neuvažujeme žádné daně, transakční náklady ani poplatky z obchodování,
- trh je efektivní, tudíž neexistuje možnost arbitráže,
- existuje jedna bezriziková úroková míra,
- neuvažujeme žádná časová zpoždění,
- na podkladovou akcii se nevyplácí žádná dividenda,
- můžeme obchodovat s jakoukoliv částí jedné akcie, např. s jednou čtvrtinou.

Dříve než začneme budovat matematický aparát binomického modelu oceňování opcí, představme si jednoduchou situaci hodu mincí. Při házení mincí mohou nastat pouze dvě možnosti: padne panna nebo orel, a to se stejnou pravděpodobností $p = \frac{1}{2}$. To ale neznamená, že třeba při 10 hodech padne panna a orel přesně pětkrát. Ze znalosti zákona velkých čísel však víme, že při mnoha nezávislých opakováních hodu mincí se bude pravděpodobnost, že padne např. panna, blížit $\frac{1}{2}$.

Nyní budeme uvažovat cenu akcie, která je podkladovým aktivem opce. Stejně jako u hodu mincí i zde mohou nastat pouze dva způsoby vývoje ceny, a to takové, že cena akcie může jít buď nahoru (označíme ji jako S_1^u) nebo dolů (označíme jako

S_1^d). Přitom budeme uvažovat, že ke změně ceny může dojít pouze v diskrétních časových okamžicích, např. za rok, za měsíc, za den či za minutu. Nemohu ale tvrdit, že pravděpodobnost toho, že cena akcie půjde nahoru, je stejná, jako když půjde dolů. Proto pravděpodobnost vývoje ceny akcie směrem nahoru bude označena obecně symbolem q a pro směr dolů pak $1-q$. Cena akcií se vyvíjí zcela náhodně, a proto ji budeme vnímat jako stochastický proces $\{S_t\}_{t=0}^{1}$.

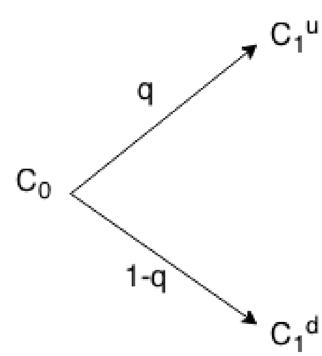
Graficky můžeme vývoj ceny akcie za jedno období znázornit takto:



Obr. 3.1: Vývoj ceny akcie

Z obrázku vidíme, že s pravděpodobností q bude cena akcie na konci 1. období S_1^u nebo S_1^d s pravděpodobností $1-q$.

Jelikož je akcie podkladovým aktivem opce, pak bude cena opce určitým způsobem kopírovat vývoj ceny akcie a i ona se bude vyvíjet náhodně. To znamená, jestliže vzroste cena akcie, pak vzroste i cena opce a naopak.



Obr. 3.2: Vývoj ceny opce

C_1^u je cena opce na konci 1. období při růstu ceny akcie a C_1^d je cena opce na konci 1. období při poklesu ceny akcie. Naším úkolem je určit hodnotu opce na počátku období, kterou značíme C_0. Jelikož nyní předpokládáme, že splatnost opce vyprší po jednom roce, pak umíme určit C_1^u a C_1^d pomocí následujících vztahů pro tzv. výplatní funkci opce:

$$C_1^u = \max\left(0; S_1^u - K\right),$$

$$C_1^d = \max\left(0; S_1^d - K\right),$$

kde	C_1^u	...	cena opce na konci 1. období při růstu ceny akcie,
	C_1^d	...	cena opce na konci 1. období při poklesu ceny akcie,
	S_1^u, S_1^d	...	cena akcie na konci 1. období, $S_1^u > S_1^d$,
	K	...	prováděcí cena neboli cena, za kterou je obchod vypořádán v době splatnosti.

Výplatní funkce prakticky vyjadřuje zisk kupce opce, v našem případě neočištěný od opční prémie.

Abychom mohli vypočítat cenu opce C_0 potřebujeme znát pravděpodobnostní míru q, kterou určíme pomocí cen akcie. Cenu akcie S_0 spočítáme jako střední hodnotu

$$S_0 = S_1^u q + S_1^d (1 - q).$$

Poznámka 4 Vraťme se nyní k případu s hodem mincí. Uvažujme nyní hru, při které, když padne orel, dostaneme 1 Kč, a když padne panna, nedostaneme nic, ale také nic neztratíme. Položme si nyní otázku: kolik jsme ochotni za takovouto hru zaplatit, když máme možnost výhry 1 Kč nebo nedostaneme nic a navíc víme, že každá ze stran může padnout se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{2}$? Nabízí se zde možnost vypočítat střední hodnotu, která bude rovna $\frac{1}{2}$. Tato hodnota představuje jakousi spravedlivou cenu za hru s mincí. Ze stejné úvahy vycházíme i při hledání spravedlivé ceny u oceňování akcie či opce. Proto cenu akcie S_0 (a později i opce) počítáme jako střední hodnotu, jen je potřeba počítat s pravděpodobnostmi q a $1 - q$.

Jelikož jsou ceny akcie S_0 a S_1 splatné v různých časech, pak je potřeba očekávanou hodnotu ceny akcie diskontovat zpět do času $t = 0$

$$S_0 = \frac{1}{(1+i)^n} \left[S_1^u q + S_1^d (1-q) \right].$$

Diskontní faktor $\frac{1}{(1+i)^n}$ můžeme vyjádřit také jako podíl dvou diskontních dluhopisů v časech $t = 1$ a $t = 0$. Diskontním dluhopisem se rozumí typ krátkodobého dluhopisu, kdy jsme zavázáni vyplatit pouze nominální hodnotu na konci doby jeho splatnosti. Označíme-li tržní cenu PV takovéhoto n-letého dluhopisu jako B_0 a jeho nominální hodnotu F jako B_1, pak současnou hodnotu můžeme vyjádřit jako

$$PV = \frac{F}{(1+i)^n}.$$

Odtud pro diskontní faktor platí

$$\frac{PV}{F} = \frac{B_0}{B_1} = \frac{1}{(1+i)^n}.$$

Vztah pro výpočet ceny akcie S_0 můžeme tedy zapsat jako

$$S_0 = \frac{B_0}{B_1} \left[S_1^u q + S_1^d (1-q) \right]. \tag{3.1}$$

Ze vztahu (3.1) si nyní můžeme vyjádřit pravděpodobnostní míru q

$$q = \frac{S_0 \frac{B_1}{B_0} - S_1^d}{S_1^u - S_1^d}. \tag{3.2}$$

Jelikož víme, že vývoj ceny akcie se odráží v ceně opce, pak budeme cenu opce C_0 v čase $t = 0$ počítat také jako diskontovanou střední hodnotu

$$C_0 = \frac{B_0}{B_1} \left[C_1^u q + C_1^d (1-q) \right].$$

Dosazením vztahu (3.2) do této rovnice dostaneme

$$C_0 = \frac{S_0 \left(C_1^u - C_1^d \right)}{S_1^u - S_1^d} + \frac{B_0}{B_1} \left(\frac{S_1^u C_1^d - S_1^d C_1^u}{S_1^u - S_1^d} \right).$$

Nyní si musíme ověřit, zda je tato cena opce bezarbitrážní, jelikož předpokládáme, že na trhu možnost arbitráže neexistuje. To znamená, že je vyloučena možnost investovat do jiného portfolia za lepší cenu než je cena opce. Uvažujme tedy portfolio I složené z akcií a dluhopisů a portfolio II, které je tvořeno call opcí s podkladovým aktivem akcií. Aby tedy cena opce byla bezarbitrážní musí být hodnota portfolia I stejná jako hodnota portfolia II, a to v každém čase. Pokud by tomu tak nebylo a cena call opce by byla nižší než hodnota portfolia složeného z akcií a dluhopisů, pak bychom mohli koupit opci a prodat portfolio, čímž bychom realizovali bezarbitrážní zisk.

Předpokládejme, že portfolio II je v čase $t = 0$ složeno z ϕ_0 kusů akcií v ceně S_0 a z φ_0 kusů dluhopisů v ceně B_0, což můžeme vyjádřit jako:

$$\phi_0 S_0 + \varphi_0 B_0.$$

Na konci období v čase $t = 1$ se bude hodnota tohoto portfolia odvíjet podle ceny akcie, která může růst nebo klesat. Tudíž hodnota portfolia bude

$$\phi_0 S_1^u + \varphi_0 B_1$$

nebo

$$\phi_0 S_1^d + \varphi_0 B_1.$$

Jelikož má být cena tohoto portfolia stejná jako cena opce, potom platí

$$\phi_0 S_1^u + \varphi_0 B_1 = C_1^u,$$

$$\phi_0 S_1^d + \varphi_0 B_1 = C_1^d.$$

Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme vzorce pro počet kusů akcií ϕ_0 a dluhopisů φ_0

$$\phi_0 = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_1^u - S_1^d}, \tag{3.3}$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{B_1}\left(C_1^u - \frac{C_1^u - C_1^d}{S_1^u - S_1^d} S_1^u\right) = \frac{1}{B_1}\left(\frac{S_1^u C_1^d - S_1^d C_1^u}{S_1^u - S_1^d}\right). \tag{3.4}$$

Pro cenu opce v čase $t = 0$ platí

$$C_0 = \phi_0 S_0 + \varphi_0 B_0.$$

Dosazením vztahů (3.3) a (3.4)do této rovnice dostaneme

$$C_0 = \frac{S_0 \left(C_1^u - C_1^d\right)}{S_1^u - S_1^d} + \frac{B_0}{B_1}\left(\frac{S_1^u C_1^d - S_1^d C_1^u}{S_1^u - S_1^d}\right).$$

Obdrželi jsme stejný vzorec pro výpočet ceny opce.

Portfolio, které má v každém čase stejnou hodnotu jako opce, se nazývá **replikační portfolio**.

Poznámka 5 Stejným způsobem bychom určovali cenu opce i v případě binomického stromu o více krocích.

Nyní se blíže podíváme na vztah (3.2) pro výpočet pravděpodobnostní míry q. Ukážeme si, že pouze v případě, kdy $q > 0$, je na trhu dosaženo jakési spravedlnosti ve smyslu nemožnosti realizovatelnosti arbitráže. Lze předpokládat, že hodnota ve jmenovateli bude vždy kladná, proto se zaměříme na hodnotu čitatele. Mohou nastat tyto tři možnosti:

1. $$S_0 \frac{B_1}{B_0} - S_1^d < 0 \qquad \wedge \qquad S_1^d < S_1^u.$$

   Představme si, že v čase $t = 0$ jsme nakoupili akcii za cenu S_0. V čase $t = 1$ bude cena naší akcie $S_0 \frac{B_1}{B_0}$. Rozhodneme-li se akcii v čase $t = 1$ prodat za tržní cenu S_1^d, která je dle předpokladu větší než $S_0 \frac{B_1}{B_0}$, pak to ale znamená, že na tomto obchodu vždy vyděláme. Je zde umožněna jakási arbitráž, což my nechceme.

2.

$$S_0\frac{B_1}{B_0} - S_1^d = 0 \qquad \wedge \qquad S_1^d < S_1^u.$$

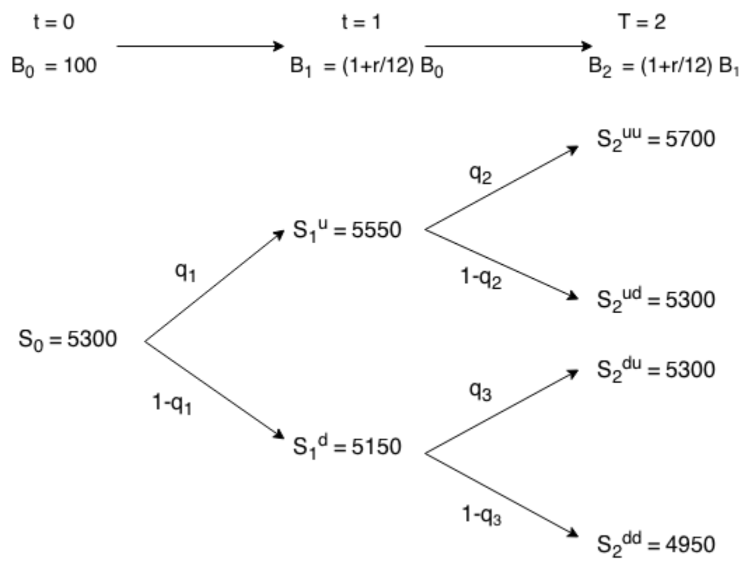
Jedná se o podobný případ, jako když jsme uvažovali hodnotu čitatele menší než 0. Pokud bude v čase $t = 1$ tržní hodnota akcie S_1^d, pak při prodeji akcie dostanu zpět hodnotu $S_0\frac{B_1}{B_0}$. Pokud ale bude kurz akcie v čase $t = 1$ ve výši S_1^u, pak je zde opět umožněna možnost realizovat bezarbitrážní zisk ve výši $S_1^u - S_0\frac{B_1}{B_0}$. I tento případ proto zamítáme.

3.

$$S_0\frac{B_1}{B_0} - S_1^d > 0 \qquad \wedge \qquad S_1^d < S_1^u.$$

Pouze v tomto případě není zaručeno, že na daném obchodu vždycky vyděláme. Pokud bude totiž v čase $t = 1$ tržní cena akcie S_1^d, pak bychom při prodeji akcie prodělali, jelikož $S_0\frac{B_1}{B_0} > S_1^d$. Naopak vyděláme, pokud bude kurz akcie roven S_1^u. Tržní cena akcie se ale vyvíjí náhodně, proto nikdy dopředu nevíme, která z možností nastane. Z toho tedy plyne, že pouze pravděpodobnostní míra $q > 0$ nám zaručí bezarbitrážní cenu opce.

Příklad 3 Vypočítejte cenu dvouměsíční evropské call opce, jejímž podkladovým aktivem je akcie Komerční banky, která se obchoduje za tržní cenu $S_0 = 5\,300$ Kč. Realizační cena opce je $K = 5\,250$ Kč. Za jedno období volíme jeden měsíc. Bezriziková úroková míra r činí 0,07 % p.a. [1] a cena dluhopisu B_0 je 100 Kč. Vývoj kurzu akcie v Kč je znázorněn na následujícím obrázku.



Obr. 3.3: Model binomického stromu k příkladu 3.

Řešení: Abychom mohli spočítat cenu opce v čase $t = 1$ a $t = 0$, musíme znát hodnotu pravděpodobností pro každou větev stromu. Pravděpodobnost q_2 určíme ze vztahu pro výpočet ceny akcie S_1^u

$$S_1^u = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)} \left[S_2^{uu} q_2 + S_2^{ud}(1 - q_2)\right]$$

$$5\,550 = \frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right)} [5\,700 q_2 + 5\,300(1 - q_2)]$$

$$399{,}98\, q_2 = 250{,}31$$

$$q_2 = 0{,}63, \qquad 1 - q_2 = 0{,}37.$$

[1] Bezriziková úroková míra byla stanovena jako průměrný výnos ze státních pokladničních poukázek s dobou splatnosti 0,75 roku emitovaných v roce 2014

Na stejném principu určíme i zbývající pravděpodobnostní míry q_3 a q_1. Pro tržní cenu akcie S_1^d platí

$$S_1^d = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)} \left[S_2^{du} q_3 + S_2^{dd}(1 - q_3)\right]$$

$$5\,150 = \frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right)} [5\,300 q_3 + 4\,950(1 - q_3)]$$

$$349{,}98\, q_3 = 200{,}29$$

$$q_3 = 0{,}57, \qquad 1 - q_3 = 0{,}43.$$

Nakonec určíme q_1

$$S_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)} \left[S_1^u q_1 + S_1^d(1 - q_1)\right]$$

$$5\,300 = \frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right)} [5\,550 q_1 + 5\,150(1 - q_1)]$$

$$399{,}98\, q_1 = 150{,}3$$

$$q_1 = 0{,}38, \qquad 1 - q_1 = 0{,}62.$$

Nyní již můžeme přistoupit ke stanovení ceny opce. Nejdříve si vypočteme cenu opce v době splatnosti neboli v čase $T = 2$.

$$C_2^{uu} = \max(0; S_2^{uu} - K) = \max(0; 5\,700 - 5\,250) = 450 \text{ Kč},$$

$$C_2^{ud} = \max\left(0; S_2^{ud} - K\right) = \max(0; 5\,300 - 5\,250) = 50 \text{ Kč},$$

$$C_2^{du} = \max\left(0; S_2^{du} - K\right) = \max(0; 5\,300 - 5\,250) = 50 \text{ Kč},$$

$$C_2^{dd} = \max\left(0; S_2^{dd} - K\right) = \max(0; 4\,950 - 5\,250) = 0 \text{ Kč}.$$

Cenu opce budeme počítat jako diskontovanou střední hodnotu, stejně jako tomu bylo u akcií. Pro cenu opce C_1^u v čase $t = 1$ platí

$$C_1^u = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)} \left[C_2^{uu} q_2 + C_2^{ud}(1 - q_2)\right].$$

Po dosazení příslušných cen opcí, bezrizikové úrokové míry a pravděpodobnostní míry q_2 dostaneme

$$C_1^u = \frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right)} [450 \cdot 0{,}63 + 50 \cdot 0{,}37] = 300{,}29 \text{ Kč}.$$

Obdobně určíme i cenu opce C_1^d a C_0.

$$C_1^d = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)} \left[C_2^{du} q_3 + C_2^{dd}(1 - q_3)\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right)} [50 \cdot 0{,}57 + 0 \cdot 0{,}43] = 28{,}61 \text{ Kč}.$$

$$C_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)} \left[C_1^u q_1 + C_1^d(1 - q_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right)} [300{,}29 \cdot 0{,}38 + 28{,}61 \cdot 0{,}62] = 130{,}69 \text{ Kč}.$$

Zjistili jsme, že cena opce v čase $t = 0$ činí 130,69 Kč.

Nyní musíme ověřit, že získaná cena opce je bezarbitrážní. Vytvoříme si portfolio, které bude na počátku neboli v čase $t = 0$ složené z ϕ_0 kusů akcií v ceně $S_0 = 5300$ Kč a φ_0 kusů dluhopisů za cenu $B_0 = 100$ Kč. Aby cena opce byla bezarbitrážní, musí se cena opce v každém čase rovnat hodnotě tohoto portfolia. Pro čas $t = 0$ platí

$$C_0 = \phi_0 S_0 + \varphi_0 B_0.$$

Tuto skladbu si bude portfolio držet až do času $t = 1$, zároveň však dojde ke změně ceny akcie a i cena dluhopisu bude vyšší o úrok ve výši $\left(1 + \frac{r}{12}\right)$. Opět musí být splněno, že i v čase $t = 1$ je cena opce stejná jako hodnota portfolia neboli

$$C_1^u = \phi_0 S_1^u + \varphi_0 B_1,$$

$$C_1^d = \phi_0 S_1^d + \varphi_0 B_1.$$

Z této soustavy rovnic vypočítáme počet kusů akcií ϕ_0 a dluhopisů φ_0. Dostaneme

$$\phi_0 = 0{,}68, \qquad \varphi_0 = -34{,}69.$$

Do svého portfolia jsme tedy nakoupili 0,68 ks akcií za cenu $S_0 = 5\,300$ a zároveň jsme emitovali 34,69 ks dluhopisů v celkové hodnotě 3 469 Kč. Dosazením nyní ověříme, že hodnota portfolia v čase $t = 0$ je stejná jako hodnota opce ve stejném čase

$$C_0 = \phi_0 S_0 + \varphi_0 B_0 = 0{,}68 \cdot 5\,300 - 34{,}69 \cdot 100 = 130{,}69 \text{ Kč}.$$

Stejné ověření provedeme i pro čas $t = 1$

$$C_1^u = \phi_0 S_1^u + \varphi_0 B_1 = 0{,}68 \cdot 5\,550 - 34{,}69 \cdot 100 \left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right) = 300{,}29 \text{ Kč},$$

$$C_1^d = \phi_0 S_1^d + \varphi_0 B_1 = 0{,}68 \cdot 5\,150 - 34{,}69 \cdot 100 \left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right) = 28{,}61 \text{ Kč}.$$

Zjistili jsme, že cena opce je stejná jako hodnota portfolia. Nyní nám již zbývá jen ověření pro čas $T = 2$. Potřebujeme ale provést revizi našeho portfolia, tzn. zjistit nové podíly akcií a dluhopisů. Nejdříve uvažujme, že v čase $t = 1$ se cena akcie bude pohybovat nahoru. Nové podíly pak získáme vyřešením soustavy rovnic

$$C_2^{uu} = \phi_1 S_2^{uu} + \varphi_1 B_2,$$

$$C_2^{ud} = \phi_1 S_2^{ud} + \varphi_1 B_2,$$

odkud po dosazení dostaneme

$$\phi_1 = 1, \qquad \varphi_1 = -52{,}49.$$

Znamená to, že jsme do našeho portfolia přikoupili 0,32 ks akcií za cenu $S_1^u = 5\,550$ Kč. Abychom si je mohli pořídit, museli jsme si půjčit peníze. Tyto peníze jsme získali emisí dalších 17,8 ks dluhopisů v ceně $B_1 = 100{,}01$ Kč. Nyní určíme hodnotu portfolia v době splatnosti

$$\phi_1 S_2^{uu} + \varphi_1 B_2 = 5\,700 - 52{,}49 \cdot 100{,}01 \left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right) = 450,$$

$$\phi_1 S_2^{ud} + \varphi_1 B_2 = 5\,300 - 52{,}49 \cdot 100{,}01 \left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right) = 50.$$

Vidíme, že vypočtené hodnoty odpovídají cenám opce. Nakonec totéž provedeme pro případ, že cena akcie se v čase $t = 1$ bude pohybovat dolů. Podíly akcií a dluhopisů v našem novém portfoliu opět dostaneme vyřešením soustavy rovnic

$$C_2^{du} = \phi_1 S_2^{du} + \varphi_1 B_2,$$

$$C_2^{dd} = \phi_1 S_2^{dd} + \varphi_1 B_2,$$

odkud dostaneme

$$\phi_1 = 0{,}14, \qquad \varphi_1 = -7{,}07.$$

Vypočteme hodnotu portfolia

$$\phi_1 S_2^{du} + \varphi_1 B_2 = 0{,}14 \cdot 5\,300 - 7{,}07 \cdot 100{,}01 \left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right) = 50,$$

$$\phi_1 S_2^{dd} + \varphi_1 B_2 = 0{,}14 \cdot 4\,950 - 7{,}07 \cdot 100{,}01 \left(1 + \frac{0{,}0007}{12}\right) = 0.$$

Ověřili jsme, že cena opce je bezarbitrážní.

Poznámka 6 Výpočet provedený v Excelu naleznete v příloze D.

Jak již bylo zmíněno, na vývoj ceny akcie pohlížíme jako na stochastický proces. Z binomického modelu je zřejmé, že cenu akcie v čase předchozím počítáme jako diskontovanou střední hodnotu budoucích odhadů cen akcie, která je ovšem podmíněna předchozím vývojem ceny akcie. Lépe je to vidět na dvoustupňovém, resp. vícestupňovém binomickém modelu, viz příklad 3. Takovýto proces potom nazýváme martingal vzhledem k pravděpodobnostní míře $\mathbb{Q}$.

Definice 3.3.1 Martingal

Stochastický proces $\{S_t\}_{t=0}^n$ nazveme martingalem vzhledem k pravděpodobnostní míře $\mathbb{Q}$ a filtraci (F_t), jestliže

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} = (S_j|F_t) = S_t, \qquad \forall j \geq t.$$

V definici se nám objevuje doposud nezmíněný pojem - **filtrace**. Filtrace $(F_t)_{t=0}^n$ nám podává informaci o vývoji ceny akcie do času t včetně. Pro lepší pochopení si ji vysvětlíme na příkladu.

Příklad 4 Uvažujme binomický strom z obr. 3.3. Určete filtraci $(F_t)_{t=0}^2$.

Řešení:

V čase $t = 0$ filtrace (F_0) odpovídá ceně akcie $S_0 = 5\,300$. V čase $t = 1$ se může cena akcie vyvíjet dvojím způsobem. Cena akcie může vzrůst na hodnotu S_1^u nebo klesnout na hodnotu S_1^d. Pro filtraci (F_1), která v tomto případě reprezentuje vývoj ceny akcie do času $t = 1$ včetně, platí

$$(F_1) = \left\{\{S_0, S_1^u\}, \{S_0, S_1^d\}\right\} = \{\{5\,300, 5\,550\}, \{5\,300, 5\,150\}\}.$$

Stejně budeme postupovat i v čase $t = 2$, proto

$$(F_2) = \left\{\{S_0, S_1^u, S_2^{uu}\}, \{S_0, S_1^u, S_2^{ud}\}, \{S_0, S_1^d, S_2^{du}\}, \{S_0, S_1^d, S_2^{dd}\}\right\} =$$

$$= \{\{5\,300, 5\,550, 5\,700\}, \{\{5\,300, 5\,550, 5\,300\}, \{5\,300, 5\,150, 5\,300\}, \{5\,300, 5\,150, 4\,950\}\}.$$

Nyní se ještě blíže podíváme na replikační portfolio, jehož tvorba je teoreticky podložena následující větou.

Věta 3.3.1 ***Věta o binomické reprezentaci***

Nechť $\mathbb{Q}$ *je pravděpodobnostní míra taková, že binomický proces* $S = (S_t)_{t=0}^n$ *je martingal vzhledem k pravděpodobnostní míře* $\mathbb{Q}$. *Jestliže* $N = (N_t)_{t=0}^n$ *je jiný martingal, též vzhledem k pravděpodobnostní míře* $\mathbb{Q}$, *pak existuje proces* $\phi = (\phi_t)_{t=0}^n$ *takový, že platí*

$$N_i = N_0 + \sum_{t=1}^{i} \phi_t \Delta S_t,$$

kde $\Delta S_t = S_i - S_{i-1}$ *značí změnu hodnoty procesu během časového intervalu pro* $i - 1 < t \leq i$ *a* ϕ_t *značí hodnotu procesu* ϕ *během tohoto časového intervalu.*

Tuto větu můžeme aplikovat na cenné papíry, kdy N bude představovat cenu opce a S cenu akcie.

Problém nastává v tom, že jsme v našem původním replikačním portfoliu předpokládali i dluhopisy, o kterých věta nehovoří. Aby tato věta byla použitelná, uvažují se zde tzv. diskontované procesy. To znamená, že místo procesu $S = (S_t)_{t=0}^n$ budeme uvažovat proces diskontované ceny akcie $Z = (Z_t)_{t=0}^n = (B^{-1} S_t)$, $t = 0, \ldots, n$. Tímto jsme vlastně vyjádřili cenu akcie v počtu kusů dluhopisů. Protože proces $S = (S_t)_{t=0}^n$ je podle Věty 3.3.1 martingal, pak i proces $Z = (Z_t)_{t=0}^n$ je martingal. Podle věty o binomické reprezentaci, pokud existuje nějaký jiný martingal pod stejnou pravděpodobnostní mírou $\mathbb{Q}$, který si označíme jako E_t, pak existuje proces ϕ takový, že

$$E_i = E_0 + \sum_{t=1}^{i} \phi_t \Delta Z_t.$$

Na E_i budeme pohlížet jako na diskontovaný proces ceny opce, pro který platí $E_i = N_i B_i^{-1}$. Jestliže se E_i týká opcí a S_i akcií, pak v čase $t = i$ máme portfolio složené z ϕ_i kusů akcií, které jsou vyjádřené v počtu kusů dluhopisů, a z ψ_i kusů dluhopisů neboli

$$E_i = \phi_i Z_i + \psi_i. \tag{3.5}$$

Počet kusů dluhopisů si můžeme ze vztahu (3.5) vyjádřit jako

$$\psi_i = E_i - \phi_i Z_i = N_i B_i^{-1} - \phi_i S_i B_i^{-1} \tag{3.6}$$

Vynásobením vztahu (3.6) hodnotou B_i dostaneme

$$N_i = \phi_i S_i + \psi B_i.$$

Odtud plyne, že věta o binomické reprezentaci je použitelná pro celé portfolio a platí

$$N_i = N_0 + \sum_{t=1}^{i} \phi_t \Delta S_t + \sum_{t=1}^{i} \psi_t \Delta B_t, \quad \forall t = 1, \ldots, n. \tag{3.7}$$

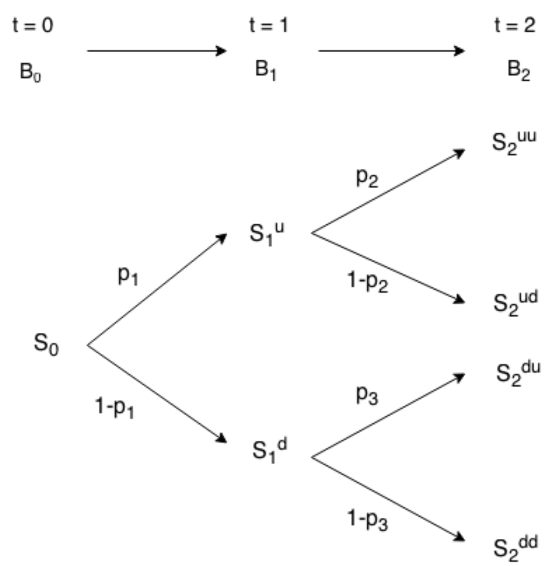
Cena N_0 představuje jedinou bezarbitrážní cenu opce.

3.3.2 Změna pravděpodobnostní míry

U binomického modelu jsme předpokládali, že cena akcie se bude měnit v diskrétních časových okamžicích. Ve skutečnosti se ale cena akcie vyvíjí spojitě. Zde však narážíme na problém, který představuje pravděpodobnostní míra. Zatímco v diskrétním binomickém modelu jsme ji byli schopni přímo vyčíslit, tak u spojitého modelu to takto jednoduše nejde, a proto budeme muset provést změnu pravděpodobnostní míry. Opět budeme chtít najít takovou pravděpodobnostní míru, která nám zaručí bezarbitrážní cenu opce.

Změna pravděpodobnostní míry v binomickém procesu

Abychom získali představu o tom, jak se provádí změna pravděpodobnostní míry, zůstaneme ještě chvíli u diskrétních procesů.
Uvažujme jednoduchý dvoustupňový binomický model vývoje ceny akcie, která se ale bude vyvíjet pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$.



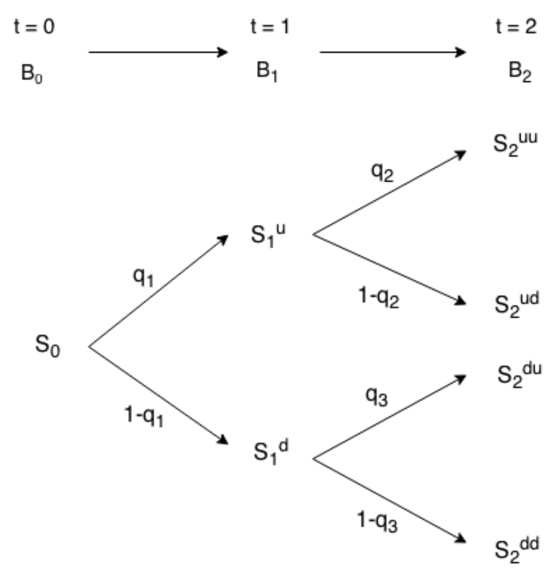
Obr. 3.4: Vývoj ceny akcie pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$

Existují celkem čtyři možné cesty, jak se dostat z času $t = 0$ do času $t = 2$. Tyto cesty společně s jejich pravděpodobnostmi jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Cesta	Pravděpodobnost	Označení
$\{S_0, S_1^u, S_2^{uu}\}$	$p_1 p_2$	$=: \pi_1$
$\{S_0, S_1^u, S_2^{ud}\}$	$p_1 (1 - p_2)$	$=: \pi_2$
$\{S_0, S_1^d, S_2^{du}\}$	$(1 - p_1) p_3$	$=: \pi_3$
$\{S_0, S_1^d, S_2^{dd}\}$	$(1 - p_1)(1 - p_3)$	$=: \pi_4$

Tab. 3.1: Cesta akcie do času $t = 2$ pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$

Nyní předpokládejme vývoj ceny akcie pod jinou pravděpodobnostní mírou $\mathbb{Q}$.



Obr. 3.5: Vývoj ceny akcie pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{Q}$

I zde existují čtyři možné způsoby přechodu z času $t = 0$ do času $t = 2$, které jsou opět uvedeny spolu se svými pravděpodobnostmi v tabulce 3.2.

Cesta	Pravděpodobnost	Označení
$\{S_0, S_1^u, S_2^{uu}\}$	$q_1 q_2$	$=: \pi_1^{'}$
$\{S_0, S_1^u, S_2^{ud}\}$	$q_1 (1 - q_2)$	$=: \pi_2^{'}$
$\{S_0, S_1^d, S_2^{du}\}$	$(1 - q_1) q_3$	$=: \pi_3^{'}$
$\{S_0, S_1^d, S_2^{dd}\}$	$(1 - q_1)(1 - q_3)$	$=: \pi_4^{'}$

Tab. 3.2: Cesta akcie do času $t = 2$ pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{Q}$

Nyní si pro každou cestu i vytvoříme poměr pravděpodobností $\frac{\pi_i^{'}}{\pi_i}$. Zobrazení množiny cest do množiny poměrů pak nazýváme jako **Radon-Nikodymova derivace** a značíme ji $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Pomocí ní můžeme získat pravděpodobnostní míru $\mathbb{Q}$ z míry $\mathbb{P}$.

Abychom mohli Radon-Nikodymovu derivaci použít, musí být pravděpodobnostní míry ekvivalentní.

Definice 3.3.2 Dvě pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$ se nazývají ekvivalentní, jestliže

1. náleží k témuž pravděpodobnostnímu prostoru Ω,
2. platí

$$\mathbb{P}[\omega] > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{Q}[\omega] > 0.$$

Jinými slovy, jestliže náhodný jev ω nastane pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$, pak musí nastat i pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{Q}$. Pokud však pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$ náhodný jev ω nenastane, nesmí nastat ani pod mírou $\mathbb{Q}$.

Uvažujme náhodnou veličinu S_2, která dle binomického modelu může nabývat hodnot $S_2^{uu}, S_2^{ud}, S_2^{du}, S_2^{dd}$. Pro očekávanou hodnotu této náhodné veličiny vzhledem k pravděpodobnostní míře $\mathbb{P}$ platí

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2) = \sum_i \pi_i S_2^i,$$

kde $i = uu, ud, du, dd$. S využitím Radon-Nikodymovy derivace si vyjádříme středního hodnotu této náhodné veličiny pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{Q}$ jako

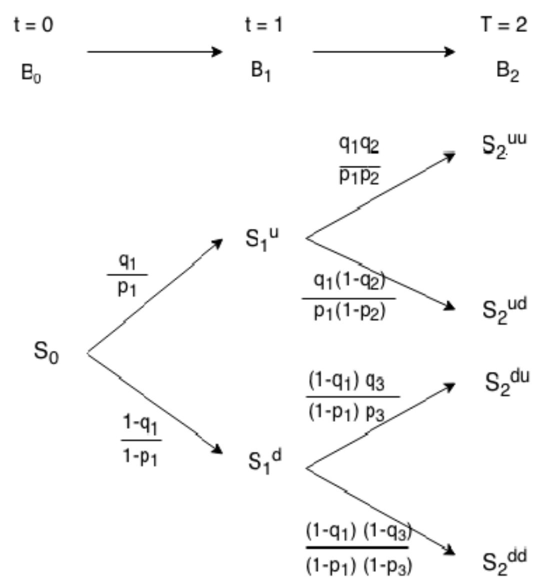
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_2) = \sum_i \pi_i^{'} S_2^i = \sum_i \pi_i \left(\frac{\pi_i^{'}}{\pi_i} \right) S_2^i = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} S_2 \right),$$

kde $i = uu, ud, du, dd$.

Formálně bychom tento vztah mohli zapsat jako

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(S_2 | F_0 \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} S_2 | F_0 \right),$$

Ukázali jsme si způsob, jakým provést změnu pravděpodobnostní míry v binomickém modelu pomocí Radon-Nikodymovy derivace, zatím ale pouze pro cesty resp. trajektorie odpovídající časovému horizontu $t = 2$. Vyvstává otázka, jestli můžeme Radon-Nikodymovu derivaci použít i pro kratší časové okamžiky. Abychom tak mohli učinit, nestačí nám znalost poměrů $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ pouze v čase $t = 2$. Musíme si zavést **Radon-Nikodymovův proces** neboli posloupnost podílů pravděpodobností $\left(\frac{\pi_i^{'}}{\pi_i} \right)_{t=0}^{T}$, $t = 0, 1, \ldots, T$, viz obr. 3.6



Obr. 3.6: Radon-Nikodymovův proces

Radon-Nikodymovův proces budeme označovat symbolem $(\xi_t)_{t=0}^{T}$ a můžeme jej definovat jako

$$\xi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|F_t\right).$$

V čase $t = 0$ je $\xi_0 = 1$.

Střední hodnotu náhodné veličiny $S_t, 0 < t < T$ lze určit vzhledem k pravděpodobnostní míře $\mathbb{Q}$ a filtraci F_t jako

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(S_t|F_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\xi_t S_t|F_t\right)$$

a vzhledem k pravděpodobnostní míře $\mathbb{Q}$ a filtraci F_s, kdy $s < t$, jako

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(S_t|F_s\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\xi_t S_t|F_s\right)\left(\xi_s^{-1}\right).$$

Změna pravděpodobnostní míry ve spojitém procesu

Při změně pravděpodobnostní míry u spojitého stochastického procesu budeme užívat následující tvar Radon-Nikodymovy derivace (viz [2]).

$$\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)(\omega) = \lim_{n\to\infty}\frac{f_{\mathbb{Q}}^{n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)}{f_{\mathbb{P}}^{n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)},$$

kde $f_{\mathbb{P}}^{n}\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}e^{-\frac{(\Delta x_i)^2}{2(t_i-t_{i-1})}}$ pro interval $\langle 0,T\rangle = \bigcup_{i=0}^{n}(t_i,t_{i-1}\rangle$. Označením $x_i, i = i{-}1,\ldots,n$ rozumíme hodnoty Brownova pohybu $W_{t_i}(\omega)$ v čase $t_i, i = 1,\ldots,n$ pro cestu vývoje ω v čase.

Jednou z možností, jak může Radon-Nikodymova derivace pro spojitý případ vypadat, je (viz [2])

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{-\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 t}, \qquad t \in \langle 0,T\rangle.$$

Abychom mohli změnu pravděpodobnostní míry u spojitých stochastických procesů provést, potřebujeme stejně jako u diskrétních stochastických procesů zajistit, aby byly pravděpodobnostní míry ekvivalentní. To nám zabezpečuje podmínka, která je uvedena v následující větě.

Věta 3.3.2 *Cameronova-Martinova-Girsanovova věta*

Nechť W_t *je Brownův pohyb vzhledem k pravděpodobnostní míře* $\mathbb{P}$ *a* $(\gamma_t)_{t=0}^{T}$ *stochastický proces. Jestliže* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt}\right] < \infty$*, potom*

1. *existuje pravděpodobnostní míra* $\mathbb{Q}$*, která je ekvivalentní s pravděpodobnostní mírou* $\mathbb{P}$*,*

2. *pro Radon-Nikodymovu derivaci platí:* $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt}$*,*

3. $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ *je Brownův pohyb vzhledem k pravděpodobnostní míře* $\mathbb{Q}$*.*

3.3.3 Black-Scholesův model

Provedli jsme veškeré potřebné kroky, abychom si mohli ukázat, jakým způsobem stanovit cenu opce v případě, že se cena akcie vyvíjí spojitě. Budeme se zabývat jedním z nejznámějších zástupců spojitých modelů a tím je Black-Scholesův model.

V kapitole o tržní ceně akcie jsme si uvedli, že její chování je popsáno pomocí stochastické diferenciální rovnice

$$d\left(\ln S_t\right) =_{\mathbb{P}} \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t. \tag{3.8}$$

Ze zápisu je zřejmé, že proces $d\left(\ln S_t\right)$ uvažujeme pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$. Abychom však mohli najít bezarbitrážní cenu opce, musíme provést změnu pravděpodobnostní míry z $\mathbb{P}$ na míru $\mathbb{Q}$, přičemž tuto změnu budeme provádět právě u procesu, který popisuje tržní cenu akcie.

Nejprve si ve vzorci (3.8) provedeme drobnou úpravu, která spočívá v roznásobení závorky a následném vytknutí σ. Dostaneme

$$d\left(\ln S_t\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t = \mu dt - \frac{1}{2}\sigma^2 dt + \sigma dW_t = \sigma\left(\frac{\mu}{\sigma} dt + dW_t\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt.$$

Výraz $\left(\frac{\mu}{\sigma} dt + dW_t\right)$ představuje přírůstek Brownova pohybu, který si označíme jako $d\widetilde{W}_t$. Dle věty 3.3.2 se jedná o přírůstek Brownova pohybu vzhledem k pravděpodobnostní míře $\mathbb{Q}$. Odtud plyne, že chování ceny akcie pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{Q}$ můžeme vyjádřit následující rovnicí:

$$d\left(\ln S_t\right) =_{\mathbb{Q}} \sigma d\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt. \tag{3.9}$$

Pravděpodobnostní míru $\mathbb{Q}$ jsme potřebovali proto, abychom měli zaručenu bezarbitrážnost ceny opce. Cenu akcie pod mírou $\mathbb{Q}$ můžeme zjistit takto:

$$\int_0^t d\left(\ln S_u\right) du =_{\mathbb{Q}} \int_0^t \sigma d\widetilde{W}_u du - \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 du,$$

$$\ln S_t - \ln S_0 =_{\mathbb{Q}} \sigma \left(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_0\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 (t-0),$$

$$\ln \frac{S_t}{S_0} =_{\mathbb{Q}} \sigma \widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t.$$

Odtud

$$\ln S_t =_{\mathbb{Q}} S_0 \left(\sigma \widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

a odlogaritmováním získáme

$$S_t =_{\mathbb{Q}} S_0 e^{\sigma \widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}. \tag{3.10}$$

Princip stanovení ceny opce je velice podobný jako u binomického modelu, kdy jsme cenu opce hledali stejným postupem jako cenu akcie, a sice průměrováním budoucích odhadů hodnot pod pravděpodobnostní mírou $\mathbb{Q}$ a diskontováním. Zároveň jsme věděli, že cena akcie je martingal a i cena opce byla martingal při stejné pravděpodobnostní míře. Jelikož ale nemáme zaručeno, že proces $d(\ln S_t)$ při pravděpodobnostní míře $\mathbb{Q}$ je martingal, musíme z něj martingal vyrobit. K tomu je určená následující definice.

Definice 3.3.3 Proces $(M_t)_{t=0}^T$ se nazývá martingal vzhledem k pravděpodobnostní míře $\mathbb{P}$, právě tehdy když

1. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|M_t|) < \infty$, pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$,
2. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(M_t|F_s) = M_s$, pro každé $s \leq t$.

Uvažujme místo obecného procesu $(M_t)_{t=0}^T$ proces vývoje ceny call opce $(C_t)_{t=0}^T$. Pracujeme v čase $T = 2$ (době splatnosti), kdy výplatní funkce call opce má tvar

$$C_T = \max\{0, S_T - K\},$$

kde S_T je náhodná veličina vyjadřující tržní cenu podložené akcie v době splatnosti a K je prováděcí cena akcie v době splatnosti.

Pokud platí, že

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\max\left\{0, S_T - K\right\}\right) < \infty,$$

a jestliže jsme schopni vytvořit tento průměr

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\max\left\{0, S_T - K\right\}|F_0\right) = C_0,$$

pak proces $(C_t)_{t=0}^{T}$ je martingal vzhledem k pravděpodobnostní míře $\mathbb{Q}$. Máme tedy zaručeno, že cena opce je martingal, jak jsme požadovali.

Abychom mohli cenu opce C_0 odvodit, vyjdeme dle definice spojitého martingalu ze vztahu

$$C_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)_+ |F_0\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (S_T - K)_+ f(x) d(x), \tag{3.11}$$

kde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}}$ je funkcí hustoty přírůstku $d\ln S_T$ a $(S_T - K)_+ =$ $= \max\left\{0, S_T - K\right\}.$

Dále za S_T dle vztahu (3.10) dosadíme

$$S_T = S_0 e^x,$$

kde $x = \sigma\widetilde{W}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T.$

Obdržíme

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^x - K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}} d(x).$$

Protože u výplatní funkce pracujeme pouze s jejími kladnými hodnotami, musí platit

$$S_0 e^x - K_+ \geq 0,$$

odtud

$$x \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right).$$

Jelikož x musí být vždy větší nebo rovno než $\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$, pak tento výraz nahradí dolní mez integrálu.

$$C_0 = \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} (S_0 e^x - K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}} d(x) =$$

$$= \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} S_0 e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}} d(x) - \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} K \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}} d(x) =$$

$$= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} e^{-\frac{\left(x-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}} d(x) - \frac{K}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} e^{-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}} d(x).$$

U prvního integrálu zavedeme substituci ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{sub.:}\quad u_1 &= \tfrac{x-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}} & \text{meze } x &= \ln\tfrac{K}{S_0} \to u_1 = \tfrac{\ln\frac{K}{S_0}-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}} \\ \mathrm{d}u_1 &= \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sigma^2 T}} & x &= \infty \quad\to u_1 = \infty \\ \mathrm{d}x &= \sqrt{\sigma^2 T}\mathrm{d}u_1 \end{aligned}$$

U druhého z integrálů provedeme také substituci ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{sub.:}\quad u_1 &= \tfrac{x-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}} & \text{meze } x &= \ln\tfrac{K}{S_0} \to u_1 = \tfrac{\ln\frac{K}{S_0}-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}} \\ \mathrm{d}u_1 &= \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sigma^2 T}} & x &= \infty \quad\to u_1 = \infty \\ \mathrm{d}x &= \sqrt{\sigma^2 T}\mathrm{d}u_1 \end{aligned}$$

Dostaneme

$$\frac{S_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}}}^{\infty} e^{-\frac{u_1^2}{2}} \sqrt{\sigma^2 T} du_1 - \frac{K}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}}}^{\infty} e^{-\frac{u_2^2}{2}} \sqrt{\sigma^2 T} du_2 =$$

$$= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}}} e^{-\frac{u_1^2}{2}} du_1 - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}}} e^{-\frac{u_2^2}{2}} du_2 =$$

$$= S_0 \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u_1^2}{2}} du_1 - K \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}}} \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{u_2^2}{2}} du_2 =$$

$$= S_0\Phi_0\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sqrt{\sigma^2T}}\right] - K\Phi_0\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sqrt{\sigma^2T}}\right] = C_0. \tag{3.12}$$

Doposud jsme neuvažovali žádné časové rozlišení, které ale musíme zohlednit, neboť C_0 je splatná v čase $t = 0$ a prováděcí cena K až v čase $t = T = 2$. Proto musíme částku K diskontovat pomocí bezrizikové úrokové míry r o T časových jednotek zpět. Bezrizikovou mírou proto, že částku K musí mít kupec opce k dispozici s jistotou, aby mohl v případě, že $K < S_T$, opci uplatnit a koupit akcii za levnější cenu K. Diskontování provedeme ve vzorci (3.12) následujícím způsobem

$$C_0 = S_0\Phi_0\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{Ke^{-rT}}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sqrt{\sigma^2T}}\right] - Ke^{-rT}\Phi_0\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{Ke^{-rT}}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sqrt{\sigma^2T}}\right] =$$

$$= S_0\Phi_0\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+rT+\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sqrt{\sigma^2T}}\right] - Ke^{-rT}\Phi_0\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+rT-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sqrt{\sigma^2T}}\right].$$

I u spojitého modelu musíme ověřit, zda je v každém čase cena opce bezarbitrážní. Opět tedy budeme vytvářet replikační portfolio, jehož hodnota bude v každém čase stejná jako cena opce a zároveň se bude jedna o samofinancující portfolio. Samofinancující portfolio je takové, které pořídíme na počátku za určitou cenu, ale dále již do něj žádné peněžní prostředky neinvestujeme, pouze dochází ke změně jeho skladby. Při vytváření replikačního portfolia se opřeme o větu, která je analogií věty o binomické reprezentaci.

Věta 3.3.3 *Věta o reprezentaci martingalu*

Nechť M_t je martingal vzhledem k pravděpodobnostní míře $\mathbb{Q}$, N_t je jiný martingal. Potom platí

$$N_t = N_0 + \int \phi dM_t. \tag{3.13}$$

Věta nám říká, jestliže máme dva martingaly na stejném pravděpodobnostním prostoru, pak jsou na sebe přepočitatelné. Stejné tvrzení nám dává i věta o binomické reprezentaci.

Poznámka 7 Vztah (3.13) můžeme vyjádřit také jako

$$N_t - N_0 = \int \phi dM_t$$

neboli

$$dN_t = \phi dM_t.$$

Tuto větu aplikujeme na cenné papíry, kdy N_t představuje proces ceny opce a M_t proces ceny akcie.

V našem portfoliu jsme nezahrnovali pouze akcie, ale i dluhopisy. Budeme chtít tedy vytvořit portfolio ve tvaru

$$V_t = \phi_t S_t + \varphi_t B_t.$$

Stejně jako u diskrétních procesů si i zde vypomůžeme diskontováním. Uvažujme diskontovaný proces $Z_t = B_T^{-1} S_t$, který popisuje vývoj ceny akcie, kdy cena akcie je vyjádřena nikoli v peněžních jednotkách, ale v počtu kusů dluhopisů. Dále budeme uvažovat diskontovaný proces $E_t = B_T^{-1} V_t$, který vyjadřuje vývoj ceny opce opět v počtu kusů dluhopisů. Portfolio, které bude kopírovat cenu opce, bude složené z ϕ_t kusů akcií Z_t a φ_t kusů dluhopisů Z_t, kde $\varphi_t = E_t - \phi_t Z_t$, neboli

$$E_t = \phi_t Z_t + \varphi_t. \tag{3.14}$$

Aby bylo portfolio samofinancující, musí dle věty 3.3.3 platit

$$dE_t = d\left(\phi_t Z_t + \varphi_t\right) = \phi_t dZ_t. \tag{3.15}$$

Abychom neměli portfolio vyjádřené v počtu kusů dluhopisů, vynásobíme rovnici (3.14) členem B_t. Dostaneme

$$E_t B_t = \phi_t Z_t B_t + \varphi_t B_t = \phi_t S_t + \varphi_t B_t.$$

Abychom ukázali, že portfolio složené z akcií a dluhopisů je samofinancující, musí platit

$$d\left(E_t B_t\right) = \phi_t dS_t + \varphi_t dB_t = dV_t.$$

S výrazem budeme zacházet jako s derivací. Jeho úpravou dostaneme

$$d\left(E_tB_t\right) = dE_tB_t + E_tdB_t = \phi_t dZ_tB_t + \left(\phi_tZ_t + \varphi_t\right)dB_t =$$

$$= \phi_t dZ_tB_t + \phi_tZ_tdB_t + \varphi_t dB_t = \phi_t\left(dZ_tB_t + Z_tdB_t\right) + \varphi_t dB_t =$$

$$= \phi_t d\left(Z_tB_t\right) + \varphi_t dB_t = \phi_t dS_t + \varphi_t dB_t = dV_t.$$

Dokázali jsme, že při spojité změně jsme schopni vždy samofinancující portfolio vytvořit.

Na závěr nám zbývá ukázat, jak můžeme určit skladbu samofinancujícího portfolia V_t, na které se budeme dívat jako na funkci dvou proměnných $V_{S_t,t}$. Použijeme k tomu Taylorův rozvoj do členu druhého řádu. Jeho aplikací obdržíme

$$dV_{S_t,t} \doteq \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial V_t}{\partial S_t}dS_t + \frac{\partial V_t}{\partial t}dt\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + 2\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t \partial t}dS_tdt + \frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}dt^2\right).$$

Poslední dva členy nabývají zanedbatelných hodnot, proto je budeme dále uvažovat a za dS_t dosadíme z rovnice (3.10):

$$dV_{S_t,t} \doteq \frac{\partial V_t}{\partial S_t}dS_t + \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\left[S_t\left(\sigma d\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt\right)\right]^2.$$

Výraz $\left[S_t\left(\sigma d\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt\right)\right]^2$ budeme dále upravovat do následující podoby

$$\left[S_t\left(\sigma d\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt\right)\right]^2 = \sigma^2\left(d\widetilde{W}_t\right)^2 - 2\sigma d\widetilde{W}_t\frac{1}{2}\sigma^2 dt + \frac{1}{4}\sigma^4\left(dt\right)^2 \doteq \sigma^2 dt,$$

kde znovu zanedbáváme poslední dva členy. Pro přírůstek dV_t dostáváme

$$dV_{S_t,t} \doteq \frac{\partial V_t}{\partial S_t}dS_t + \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2 dt,$$

$$dV_{S_t,t} \doteq \frac{\partial V_t}{\partial S_t}dS_t + \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2\right)dt,$$

kde $\frac{\partial V_t}{\partial S_t} = \phi_t$ představuje počet kusů akcií v čase t a $\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2$ počet kusů dluhopisů v čase t.

Příklad 5 Uvažujte data z příkladu 1 a 3. Určete cenu opce C_0 pomocí Black-Scholesova modelu.

Řešení: Pro přehlednost jsou všechny potřebné údaje z příkladu 1 a 3 uvedeny v následující tabulce.

S_0	K	r	T	σ^2
5 300	5 250	0,07%	$\frac{2}{12}$	0,042433

Tab. 3.3: Údaje potřebné pro výpočet ceny opce pomocí Black-Scholesova modelu

Dosadíme do vzorce

$$C_0 = S_0 \Phi_0 \left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}} \right] - Ke^{-rT} \Phi_0 \left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}} \right]$$

a získáme

$$C_0 = 5\,300 \cdot \Phi_0 \left[\frac{\ln\left(\frac{5\,300}{5\,250}\right) + 0{,}0007\frac{1}{6} + \frac{1}{12}0{,}042433}{\sqrt{0{,}042433\frac{1}{6}}} \right] -$$

$$-5\,250e^{-0{,}042433\frac{1}{6}} \cdot \Phi_0 \left[\frac{\ln\left(\frac{5\,300}{5\,250}\right) + 0{,}0007\frac{1}{6} - \frac{1}{12}0{,}0007}{\sqrt{0{,}0007\frac{1}{6}}} \right] =$$

$$= 5\,300 \cdot \Phi_0\,(0{,}16) - 5\,250e^{-0{,}00012} \cdot \Phi_0\,(0{,}07) =$$

$$= 5\,300 \cdot 0{,}56356 - 5\,250e^{-0{,}00012} \cdot 0{,}52790 = 215{,}72.$$

Pro zjištění hodnot $\Phi_0\,(0{,}16)$ a $\Phi_0\,(0{,}07)$ jsme využili tabulky pro distribuční funkci normálního rozdělení.

Poznámka 8 Výpočet provedený v Excelu naleznete v příloze E.

Závěr

Ve své práci jsem se zabývala vybranými modely pro oceňování cenných papírů, konkrétně akcií a opcí. Tyto modely se nejčastěji využívají v případech stanovených zákonem, kdy je potřeba znalecky ocenit cenné papíry vstupující do nedobrovolné dražby aj.

Po první úvodní kapitole věnující se charakteristice cenných papírů, přichází stěžejní část práce, a to popis vybraných modelů pro oceňování akcií a následně opcí. U akcií jsou nejdříve popsány vybrané dividendové diskontní modely a ziskové modely pro stanovení vnitřní hodnoty. Následovalo modelování tržní hodnoty akcie. Tyto teoretické poznatky byly dále využity při výpočtu příkladů, které u akcií tvoří samostatnou podkapitolu. K výpočtům tržní hodnoty i vnitřní hodnoty byly použity reálné kurzy akcie Komerční banky, a.s. Komerční banka byla zvolena kvůli zajímavé výši dividend, kterou vyplácí. Na problém jsem narazila především při stanovení vnitřní hodnoty akcie, kde bylo potřeba vypočítat i požadovanou výnosovou míru a míru růstu dividend. S tím samozřejmě souvisí i volba vhodné metody. Např. pro míru růstu dividend jsem zvolila metodu nejmenších čtverců, která ze všech čtyř prezentovaných metod dávala nejlepší výsledek. V poslední kapitole týkající se opcí jsem se nejdříve zabývala popisem diskrétního binomického modelu a následně složitějšího stochastického Black-Scholesova modelu. Opět nechybí ani příklady, které nenajdeme v samostatné podkapitole, ale byly zakomponovány do teoretické části.

Díky této práci jsem si prohloubila znalosti získané v předmětech *Finanční matematika 1* a *Finanční matematika 2*. Kromě modelů probíraných v těchto předmětech jsem se seznámila i s pro mě novými modely a metodami jako je např. H - model či metody pro stanovení míry růstu dividend. Navíc jsem se také procvičila v programu Microsoft Excel, který jsem použila pro výpočet příkladů.

Literatura

[1] Ambrož, L.: *Oceňování opcí.* C. H. Beck, Praha, 2002.

[2] Baxter, M., Rennie, A.: *Financial calculus. An introduction to derivative pricing.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] Cipra, T.: *Matematika cenných papírů.* Professional Publishing, Příbram, 2013.

[4] Cox, J., Rubinstein, M.: *Options markets.* Prentice Hall, New Jersey, 1985.

[5] Musílek, P.: *Trhy cenných papírů.* Ekopress, s.r.o., 2011.

[6] Veselá, J.: *Analýza trhu cenných papírů - II. díl Fundamentální analýza.* Oeconomica, Praha, 2003.

[7] Bílek, O.: *Albert Einstein a Brownův pohyb.* [online]. 2005, [cit. 2015-02-25]. dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141268/PokrokyMFA$_5$0 $-$ 2005 $-$ 3_1.*pdf*.

[8] BusinessInfo.cz. Cenné papíry [online]. [cit. 2015-02-12]. Dostupné z: http://www.businessinfo.cz/cs/clanky/cenne-papiry-ppbi-50790.html!&chapter=2.

[9] BusinessInfo.cz. Občanský zákoník [online]. [cit. 2015-02-12]. Dostupné z: http://business.center.cz/business/pravo/zakony/obcansky-zakonik/cast1h4d4.aspx.

[10] Burza cenných papírů Praha. Komerční banka [online]. [cit. 2015-02-28]. Dostupné z: http://www.pse.cz/Cenne-Papiry/Detail.aspx?isin=CZ0008019106KL.

[11] Burza cenných papírů Praha. Burzovní indexy [online]. [cit. 2015-03-28]. Dostupné z: https://www.pse.cz/dokument.aspx?k=Burzovni-Indexy.

[12] ČESKO. Zákon č. 90 ze dne 22. března 2012 o obchodních společnostech a družstvech (zákon o obchodních korporacích). In: Sbírka zákonů České republiky. [online] [cit. 2015-02-13]. Dostupné z: http://aplikace.mvcr.cz/sbirka-zakonu/SearchResult.aspx?q=90/2012&typeLaw=zakon&what=Cislo_zakona_smlouvy.

[13] ČNB. Seznam emitovaných pokladničních poukázek a poukázek ČNB [online]. [cit. 2015-03-10]. Dostupné z: http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/trh_statnich_dluhopisu/spp/poukazky.jsp.

[14] E-learningový portál Moodle. KMA/FIM2 Finanční matematika 2 [online]. [cit. 2015-03-16]. Dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/course/view.php?id=207.

[15] Investopedia. The Capital Asset Pricing Model [online]. [cit. 2015-02-26]. Dostupné z: http://www.investopedia.com/articles/06/capm.asp.

[16] KB. Základní informace [online]. [cit. 2015-02-16]. Dostupné z: http://www.kb.cz/cs/o-bance/o-nas/zakladni-informace.shtml.

[17] Tht. Squezee-out [online]. [cit. 2015-02-13]. Dostupné z: http://thtak.cz/cz/nase-sluzby/Squeeze-out.

[18] Úvod do financí. Finanční trhy [online]. [cit. 2015-02-12]. Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/uf/Financnitrhy.htm.