

Univerzita Palackého v Olomouci

Přírodovědecká fakulta

Katedra optiky



# Interakce typu dělič svazku pro dva vázané optomechanické oscilátory

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jana Trdlicová

2019

Univerzita Palackého v Olomouci

Přírodovědecká fakulta

Katedra optiky



# Interakce typu dělič svazku pro dva vázané optomechanické oscilátory

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracovala:	Jana Trdlicová
Studijní program:	B1701 - Fyzika
Studijní obor:	Obecná fyzika a matematická fyzika
Forma studia:	prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	doc. Mgr. Petr Marek, Ph.D.
Rok:	2019

## **Abstrakt**

V této bakalářské práci je studován systém tvořený vnějším Fabry-Perotovým rezonátorem, uvnitř kterého jsou zavěšeny dvě tenké dielektrické membrány jako mechanické elementy. Membrány rozdělují původní jeden rezonátor na soustavu tří navazujících rezonátorů, které jsou postupně z vnějšku čerpány laserovým svazkem o vhodné frekvenci. Tento optomechanický systém lze aproximovat modelem dvou vázaných mechanických oscilátorů ve kterém lze, pomocí optického čerpání, měnit parametry obou oscilátorů i jejich vazby. Cílem práce je ukázat, že vhodnou volbou volných parametrů systému je možné zkonstruovat mezi dvojicí studovaných oscilátorů vazbu typu dělič svazku, která mezi nimi dokáže zprostředkovat koherentní transfer energie.

## **Klíčová slova**

kvantová optomechanika, dělič svazku, vázané oscilátory

## **Abstract**

This bachelor thesis focuses on a system comprising a Fabry-Perot resonator inside which two thin dielectric membranes are suspended. These membranes function as mechanical elements and divide the resonator into three separate resonators, which are pumped by laser with appropriate frequency. This optomechanical system can be approximated with a model of two coupled mechanical oscillators. Using the laser pumping the parameters of both oscillators and their coupling can be changed. The goal of this paper is to show that it is possible to achieve beam splitter type interaction between two coupled oscillators by modulation of free system parameters. The beam splitter type interaction provides coherent energy transfer between oscillators.

## **Key words**

quantum optomechanics, beam splitter, coupled oscillators

## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce doc. Mgr. Petru Markovi, Ph.D. za čas, který mi věnoval při konzultacích, trpělivost, vstřícnost a podnětné připomínky v průběhu tvorby této práce.

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci “Interakce typu dělič svazku pro dva vázané optomechanické oscilátory” vypracovala samostatně pod vedením doc. Mgr. Petra Marka, Ph.D. a že jsem použila zdrojů, které jsou citovány a uvedeny v seznamu použité literatury.

V Olomouci dne .....

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Popis problematiky</b>	<b>4</b>
1.1 Hamiltonián systému . . . . .	5
1.1.1 Krok stranou: Tři obrazy v kvantové mechanice . . . . .	6
1.1.2 Rotační vlnová aproximace . . . . .	7
1.1.3 Linearizační aproximace . . . . .	9
1.2 Analogie v klasické mechanice . . . . .	12
<b>2 Metody řešení</b>	<b>14</b>
2.1 Analytické řešení soustavy pohybových rovnic . . . . .	14
2.2 Požadovaný tvar řešení . . . . .	15
2.2.1 Modulace vazby . . . . .	15
2.2.2 Změna lokální fáze . . . . .	16
<b>3 Výsledky numerické optimalizace</b>	<b>18</b>
3.1 Popis prvního kódu . . . . .	18
3.2 Úprava kódu a výsledek . . . . .	19
3.2.1 Ověření zachování komutačních relací . . . . .	21
3.3 Grafy . . . . .	21
<b>4 Důkaz obecnosti řešení</b>	<b>24</b>
<b>Závěr</b>	<b>27</b>
<b>Literatura</b>	<b>29</b>

# Úvod

Počátky optomechaniky sahají až do 17. století, kdy Johannes Kepler pozoroval ohony komet, které vždy směřují od Slunce. Na základě tohoto pozorování Kepler předpověděl existenci síly zvané tlak záření [1]. První úspěšné teoretické zpracování tlaku záření provedl James Clerk Maxwell, který předpověděl, že elektromagnetická vlna nese hybnost. Těleso, na něž elektromagnetická vlna dopadá, proto musí pociťovat sílu působící ve směru šíření vlny. Tlak záření je dán podílem této síly a plochy, na kterou působí. Maxwellova hypotéza byla potvrzena v roce 1901 dvěma experimenty, první provedl Pyotr Lebedev, druhý Ernest Fox Nichols a Gordon Ferrie Hull [1]. Oba experimenty byly založeny na měření tlaku záření torzními vahami umístěnými ve skleněné vakuové komoře. Na tenkém vlákně byly zavěšeny dvě malé hmotné plošky (zrcátka), na které mířil světelný paprsek. Experimentátoři byli schopni změřit vychýlení vážek z rovnovážné polohy, čímž hypotézu tlaku záření potvrdili.

K dalšímu významnému pokroku v experimentální oblasti došlo až v 70. letech minulého století díky pokroku v laserové technice. Nově mohly být využity lasery s úzkým (kvazi-monochromatickým) spektrem. V roce 1967 Vladimir Borisovich Braginsky a Anatolii Manukin publikovali článek, v němž teoreticky popsali působení tlaku záření na oscilující zrcátko tvořící stěnu Fabry-Perotova rezonátoru [2]. Zjistili, že změnou frekvence vstupního záření je možné ovlivnit mechanické vlastnosti oscilátoru. Červený posuv vůči rezonanční frekvenci rezonátoru způsobuje útlum pohybu zrcátka, kdežto modrý posuv pohyb naopak zesiluje. Stejná dvojice o tři roky později využila laserový svazek k ověření své hypotézy [3].

Interaguje-li makroskopický mechanický element (membrána či zrcátko) s elektromagnetickým polem uvnitř optického rezonátoru vlivem tlaku záření, hovoříme o tzv. optomechanické vazbě. Disciplína zabývající se tímto typem interakce se nazývá kvantová optomechanika. V současné době je optomechanika velice intenzivně studovanou oblastí na pomezí kvantové optiky a nanomateriálové fyziky [4]. Motivaci pro studium optomechanických systémů můžeme rozdělit do dvou hlavních kategorií. Jednak může být optomechanická vazba využita k pozorování velice slabých sil, malých vychylek a hmotností, což hraje klíčovou roli například u senzitivity detektorů gravitačních vln [5]. Druhý typ motivace spočívá v pozorování neklasického chování na mechanických systémech tvořených miliardami atomů, což umožňuje testování hypotéz kvantové mechaniky [6].

Do současné doby byla realizována široká škála experimentů využívajících tlaku záření. Například laserové ochlazování iontu umístěného v pasti [7] (či mikromechanického oscilátoru [8]) na teploty blízké absolutní nule; vytvoření stlačených stavů optomechanického oscilátoru uvnitř rezonátoru [9]; vytvoření silné vazby mikrome-

chanického oscilátoru s elektromagnetickým polem uvnitř optického rezonátoru [10]. Existuje také řada systémů, kde je optomechanické vazby dosaženo bez pomoci rezonátoru, a to například za použití vlnodů ve fotonických obvodech, či fotonických krystalových vláken [1].

Častou realizací optomechanické vazby je systém dvou zrcadel tvořících optický rezonátor, z nichž jedno je pevně ukotveno a druhé zrcátko (případně membrána) může vlivem tlaku záření oscilovat [1, 6]. Dalším velice běžným uspořádáním je jedna oscilující membrána uvnitř Fabry-Perotova rezonátoru [11, 12]. Přirozeným rozšířením předchozího modelu je systém, který budeme uvažovat v této práci: uvnitř vnějšího optického Fabry-Perotova rezonátoru jsou zavěšeny dvě tenké polopropustné membrány jako makroskopické mechanické elementy; tento systém byl v minulosti již studován [5, 13]. Membrány rozdělují původní jeden rezonátor na soustavu tří na sebe navazujících rezonátorů. Vstupní elektromagnetické pole (též označováno jako optické čerpání) je realizováno silným laserem s frekvencí blízkou rezonanční frekvenci rezonátoru, který je tvořen dvěma membránami. Vlivem tlaku záření obě membrány začnou oscilovat, přičemž vazbu mezi nimi zprostředkovává pouze elektromagnetické pole. Proto kmitající membrány nazýváme vázanými optomechanickými oscilátory.

Protože frekvence světla je mnohem větší než frekvence mechanického oscilátoru, lze oscilátor využít také jako kvantovou paměť uchovávající informace o stavu pole v rezonátoru, což je důležité pro rozvoj kvantové komunikace a kvantového zpracování informace [14, 15]. Při kvantovém zpracování informace je důležitá schopnost s kvantovými systémy vhodně manipulovat. Jednou ze základních operací je pasivní a koherentní transfer energie, který lze v optických systémech přímočaře realizovat pomocí děliče svazku.

Jediný druh interakce, který se vyskytuje v optomechanických systémech, zprostředkovává tlak záření, díky němuž mechanický element může oscilovat uvnitř optického rezonátoru. Tlak záření však můžeme využít k vytvoření dalších typů interakcí. Naším cílem je vytvořit mezi oběma oscilujícími membránami interakci typu dělič svazku s danou hodnotou dělicího poměru za použití optického čerpání jednotlivých rezonátorů.

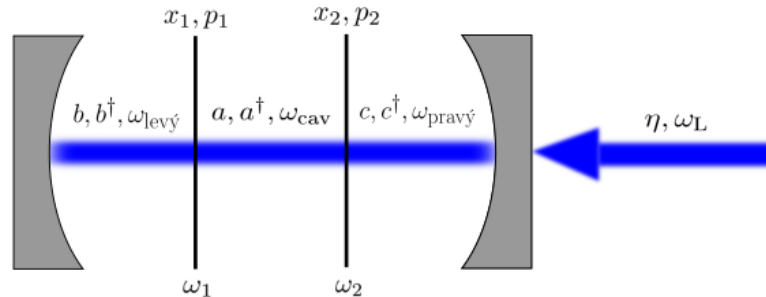
V první kapitole bude poskytnut fyzikální popis problematiky. Nejprve vyjádříme hamiltonián celého systému, následně jej vhodnými aproximacemi převedeme do podoby, z níž snadno vyjádříme pohybové rovnice. Ve druhé kapitole se budeme zabývat řešením těchto pohybových rovnic a metodami, které vedou k požadovanému tvaru řešení. Třetí kapitola je věnovaná popisu numerického řešení včetně výsledků v podobě grafů. V poslední kapitole ukážeme, že jsme schopni zkonstruovat dělič svazku s libovolným dělicím poměrem.

# Kapitola 1

## Popis problematiky

Uvažovaný systém je tvořen dvěma vysoce odrazivými sférickými zrcátky, mezi nimiž jsou zavěšeny dvě tenké polopropustné dielektrické membrány, které se mohou v daných mezích pohybovat v horizontálním směru (viz Obrázek 1). Na stejném systému byla studována synchronizace oscilátorů [5] a rovněž byl popsán adiabatický přenos energie mezi oběma membránami [13]. Rezonátor tvořený dvěma membránami označujeme jako vnitřní, rezonátor tvořený zrcátkem a membránou nazveme levý a pravý dle uspořádání na Obrázku 1. Z vnějšku je rezonátor čerpán laserovým svazkem s frekvencí  $\omega_L$  blízkou rezonanční frekvenci vnitřního rezonátoru  $\omega_{cav}$ . Parametr udávající tzv. rozladění laseru vůči rezonátoru definujeme  $\Delta = \omega_L - \omega_{cav}$ . Od zdroje vyžadujeme, aby byl schopen emitovat světlo o třech různých frekvencích, které jsou velmi blízké rezonančním frekvencím jednotlivých na sebe navazujících rezonátorů.

Pomocí optického čerpání lze na systému provádět dvě různé operace. Čerpáme-li systém pouze s frekvencí  $\omega_L$ , v levém i pravém rezonátoru dochází k exponenciálnímu útlumu vln, protože rezonanční frekvence bočních rezonátorů se velmi liší od  $\omega_L$ . Čerpáním vnitřního rezonátoru tedy lze ovlivňovat (modulovat) sílu vazby mezi oběma oscilátory [5]. Jestliže bude probíhat čerpání o frekvenci levého (pravého) rezonátoru, dojde naopak k rychlému útlumu módů ve vnitřním a pravém (levém) rezonátoru. Spojité čerpání všech tří rezonátorů bylo studováno v [13]. V této práci budeme předpokládat postupné čerpání jednotlivých rezonátorů. Interakci typu dělič svazku zkonstruujeme vhodnou posloupností diskretního čerpání.



**Obrázek 1:** Schematický obrázek systému tvořeného čerpaným Fabry-Perotovým rezonátorem se dvěma membránami, které díky působícímu tlaku záření oscilují. Vstupní elektromagnetické pole je tvořeno silným laserem s frekvencí  $\omega_L > \omega_{cav}$ .



Interakci typu dělič svazku definujeme vztahy analogickými s děličem svazku fotonů

$$\begin{aligned}x_1 &= tx_{01} + rx_{02}, & x_2 &= tx_{02} - rx_{01}, \\p_1 &= tp_{01} + rp_{02}, & p_2 &= tp_{02} - rp_{01},\end{aligned}\tag{1.1}$$

kde  $x_{01}, x_{02}$  jsou počáteční polohy oscilátorů a  $p_{01}, p_{02}$  jejich počáteční hybnosti,  $x_1, x_2$  jsou výstupní polohy a  $p_1, p_2$  výstupní hybnosti oscilátorů,  $t$  je transmisivita (propustnost) a  $r$  reflexivita (odrazivost).

## 1.1 Hamiltonián systému

Pro nalezení řešení dynamiky systému se jak v klasické, tak v kvantové mechanice vychází z hamiltoniánu, který vyjadřuje celkovou energii systému. Kompletní hamiltonián spojitě čerpaného systému obsahuje tři členy, které mají význam energie světla uvnitř jednotlivých rezonátorů, dva členy odpovídají energii oscilátorů, dva členy vyjadřují energii vazby membrán s okolním elektromagnetickým polem, dva křížové členy odpovídají „přelévání“ energie mezi sousedními rezonátory skrze polopropustné membrány a konečně poslední tři členy vyjadřují energii optického čerpání, viz [13]. V této práci se budeme primárně zabývat modulací vazby mezi oscilátory v režimu, kdy čerpáme pouze vnitřní rezonátor. Protože rezonanční frekvence zbývajících dvou rezonátorů je odlišná, výše popsaný hamiltonián se v takovém případě (viz [5]) redukuje na tvar

$$\begin{aligned}H &= \underbrace{\hbar\omega_{\text{cav}}a^\dagger a}_{\text{energie vnitřního rezonátoru}} + \underbrace{i\hbar(\eta a^\dagger e^{-i\omega_L t} - \eta^* a e^{i\omega_L t})}_{\text{energie čerpání}} \\&- \underbrace{\hbar g a^\dagger a(x_2 - x_1)}_{\text{energie optomechanické vazby}} + \underbrace{\sum_{n=1}^2 \frac{1}{2} \hbar \omega_n (x_n^2 + p_n^2)}_{\text{energie oscilátorů}},\end{aligned}\tag{1.2}$$

kde  $\omega_{\text{cav}}$  je rezonanční frekvence vnitřního rezonátoru;  $\omega_1, \omega_2$  jsou mechanické frekvence oscilujících membrán, kde indexem 1 značíme vždy levou a indexem 2 pravou (viz Obrázek 1);  $\eta, \omega_L$  jsou po řadě amplituda a frekvence použitého laserového svazku;  $a, a^\dagger$  jsou po řadě anihilační a kreační operátor elektromagnetického pole působícího ve vnitřním rezonátoru;  $t$  označuje dobu čerpání;  $g$  je člen vyjadřující sílu optomechanické vazby;  $x_1, x_2$  jsou výchylky membrán z jejich rovnovážných poloh a  $p_1, p_2$  hybnosti membrán. Pozice i hybnosti jsou bezrozměrné veličiny definované

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{b + b^\dagger}{\sqrt{2}}, & x_2 &= \frac{c + c^\dagger}{\sqrt{2}}, \\p_1 &= \frac{b - b^\dagger}{\sqrt{2}i}, & p_2 &= \frac{c - c^\dagger}{\sqrt{2}i}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Označíme-li symbolem  $\delta_{jk}$  Kroneckerovo delta, operátory splňují komutační relace

$$[x_j, p_k] = i\delta_{jk}.\tag{1.4}$$

Protože z rovnice (1.2) je zřejmé, že hamiltonián je závislý na čase, v první aproximaci tuto „nedokonalost“ odstraníme. Ukazuje se, že nejvhodnější je zvolit pro popis interakční reprezentaci. Proto si v následující podkapitole shrneme tři možné reprezentace kvantové mechaniky.

### 1.1.1 Krok stranou: Tři obrazy v kvantové mechanice

Připomeňme stručně, jaké obrazy lze v kvantové mechanice použít pro popis časového vývoje systému a jak jsou navzájem tyto obrazy propojeny. Předpokládejme, že v počátečním čase  $t_0$  všechny tři obrazy - Schrödingerův, Heisenbergův i interakční (Diracův) - splývají. Hlavní rozdíl mezi zmíněnými obrazy je v nositeli časové závislosti. Stavové vektory  $|\psi\rangle$  a operátory  $\mathcal{O}$  budeme označovat dolním indexem s počátečním písmenem obrazu, v němž je popsán.

#### I. Schrödingerův obraz

Ve Schrödingerově reprezentaci nesou časovou závislost stavové vektory, což může být popsáno jako otáčení v Hilbertově prostoru, zatímco operátory jsou v čase neměnné. Platí vztahy

$$\begin{aligned} |\psi_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(t_0)\rangle, \\ \mathcal{O}_S(t) &= \mathcal{O}_S. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Schrödingerova rovnice nabývá známé podoby

$$i\hbar\partial_t|\psi_S(t)\rangle = H|\psi_S(t)\rangle. \tag{1.6}$$

V celém textu budeme označovat parciální derivaci (operátorů i klasických veličin) podle času symbolem  $\partial_t\mathcal{O} \equiv \frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}$  a úplnou derivaci podle času budeme značit tečkou  $\frac{d\mathcal{O}}{dt} \equiv \dot{\mathcal{O}}$ .

#### II. Heisenbergův obraz

Na rozdíl od předchozího případu v Heisenbergově obrazu jsou stavové vektory v čase neměnné, zatímco operátory nesou časovou závislost. Porovnáme-li jej se Schrödingerovým obrazem, zjistíme, že operátory (a tedy i vlastní vektory) pozorovatelných veličin se otáčejí v Hilbertově prostoru přesně v protisměru v porovnání s otáčením stavových vektorů ve Schrödingerově obrazu

$$\begin{aligned} |\psi_H(t)\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi_S(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle, \\ \mathcal{O}_H(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\mathcal{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Pro libovolný operátor  $\mathcal{O}_H$  platí Heisenbergova rovnice ve tvaru

$$\dot{\mathcal{O}}_H = \frac{1}{i\hbar}[\mathcal{O}_H, H]. \tag{1.8}$$

#### III. Interakční (Diracův) obraz

Interakční obraz je propojením mezi Heisenbergovým a Schrödingerovým obrazem v tom smyslu, že časovou závislost nesou jak stavové vektory, tak operátory. Je výhodné jej použít v případě, že se pozorovatelné mění vlivem nějaké interakce. V takovém případě lze totiž časově proměnný hamiltonián zapsat ve tvaru  $H(t) = H_0 + H_{\text{INT}}(t)$ , kde  $H_0$  nezávisí na čase a typicky jeho řešení známe či umíme jednoduše spočítat. Obsahuje-li hamiltonián více členů, jakákoli volba  $H_0$  poskytne platný interakční obraz. Platí

$$\begin{aligned} |\psi_I(t)\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}|\psi_S(t)\rangle, \\ \mathcal{O}_I(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}\mathcal{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Pro lepší přehlednost zápisu zavedeme obvyklé označení  $U = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}$ . Nyní odvodíme, jak se v interakčním obraze modifikuje Schrödingerova rovnice pro libovolný stavový vektor  $|\psi_I(t)\rangle$

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t|\psi_I(t)\rangle &= i\hbar\partial_t(U^\dagger|\psi_S(t)\rangle) \\ &= i\hbar\partial_t(U^\dagger)|\psi_S(t)\rangle + U^\dagger H(t)|\psi_S(t)\rangle \\ &= (-H_0 + U^\dagger H(t)U)|\psi_I(t)\rangle, \end{aligned} \quad (1.10)$$

kde jsme ve druhém řádku využili Schrödingerovu rovnici (1.6) a ve třetím řádku jsme využili vložení identity ve tvaru  $UU^\dagger$  k oběma členům, abychom na pravé straně mohli vytknout  $|\psi_I(t)\rangle$ . Lze tedy říci, že v interakčním obraze stavové vektory splňují Schrödingerovu rovnici s modifikovaným hamiltoniánem

$$H_{\text{nový}} = U^\dagger H_{\text{starý}} U - H_0. \quad (1.11)$$

### 1.1.2 Rotační vlnová aproximace

Cílem této aproximace je odstranění časové závislosti z hamiltoniánu (1.2). Pro popis časového vývoje systému využijeme interakční reprezentaci, protože se pozorovatelné mění vlivem interakce – čerpání. Rotační vlnovou aproximaci lze využít, pokud jsou splněny dva předpoklady: jestliže je optomechanická vazba slabá a zároveň frekvence laseru je dostatečně blízká rezonanční frekvenci vnitřního rezonátoru, tedy platí nerovnosti  $\Delta \ll \omega_{\text{cav}}$ ,  $g \ll \omega_{\text{cav}}$  [16]. Předpokládejme, že v uvažovaném systému jsou obě podmínky splněny.

Rotační vlnová aproximace prakticky znamená přechod do souřadnicové soustavy rotující s frekvencí  $\omega_L$ . Změnou soustavy souřadnic elegantně odstraníme časovou závislost ze členu, který odpovídá energii čerpání rezonátoru. Modifikovaný hamiltonián vypočteme ze vztahu (1.11), nejprve však musíme vhodně zvolit člen  $H_0$ . Proto k rovnici (1.2) přičteme a odečteme člen  $\hbar\omega_L a^\dagger a$  a současně použijeme veličinu označující rozladění laseru vůči vnitřnímu rezonátoru  $\Delta = \omega_L - \omega_{\text{cav}}$ . V souladu s označením v podkapitole 1.1.1 takto upravený hamiltonián označíme  $H_{\text{starý}}$

$$\begin{aligned} H_{\text{starý}} &= H_0 - \hbar\Delta a^\dagger a - \hbar g a^\dagger a(x_2 - x_1) + \\ &+ i\hbar(\eta a^\dagger e^{-i\omega_L t} - \eta^* a e^{i\omega_L t}) + \sum_{n=1}^2 \frac{1}{2} \hbar\omega_n (x_n^2 + p_n^2), \end{aligned} \quad (1.12)$$

kde  $H_0 = \hbar\omega_L a^\dagger a$ . Abychom mohli zapsat  $H_{\text{nový}}$ , je potřeba nejprve spočítat tyto výrazy:  $U^\dagger a^\dagger a U$ ;  $U^\dagger a U$ ;  $U^\dagger a^\dagger U$ ;  $U^\dagger (x_n^2 + p_n^2) U$ ;  $n = 1, 2$ . Výpočty komutátorů pro první a poslední výraz jsou triviální, platí

$$\begin{aligned} U^\dagger a^\dagger a U &= a^\dagger a, \\ U^\dagger (x_n^2 + p_n^2) U &= (x_n^2 + p_n^2). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Druhý a třetí výraz musíme upravit jiným způsobem, protože operátor  $a$  s  $U$  nekomutuje. Využitím následující identity [17]

$$e^X A e^{-X} = A + [X, A] + \frac{1}{2!} [X, [X, A]] + \frac{1}{3!} [X, [X, [X, A]]] + \dots \quad (1.14)$$

lze díky komutačním relacím  $[\omega_L a^\dagger a t, a] = -i\omega_L t a$ ;  $[\omega_L a^\dagger a t, a^\dagger] = i\omega_L t a^\dagger$  vyjádřit požadované vztahy

$$\begin{aligned}
U^\dagger a U &= e^{i\omega_L a^\dagger a t} a e^{-i\omega_L a^\dagger a t} \\
&= a \cdot \left[ 1 - i\omega_L t + \frac{1}{2!} (i\omega_L t)^2 - \frac{1}{3!} (i\omega_L t)^3 + \dots \right] \\
&= a e^{-i\omega_L t}, \\
U^\dagger a^\dagger U &= a^\dagger e^{i\omega_L t}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Hamiltonián v interakčním obrazu, který jsme označili  $H_{\text{nový}}$ , získáme dosazením do rovnice (1.11) za využití vztahů (1.13) a (1.15)

$$H_{\text{nový}} = -\hbar\Delta a^\dagger a - \hbar g a^\dagger a (x_2 - x_1) + i\hbar(\eta a^\dagger - \eta^* a) + \sum_{n=1}^2 \frac{1}{2} \hbar \omega_n (x_n^2 + p_n^2). \tag{1.16}$$

Pro zkrácení zápisu přeznačíme  $H_{\text{nový}} \rightarrow H$ .

Jednou z metod vedoucí ke kompletnímu popisu dynamiky systému je zavedení formalismu linearizovaných Langevinových rovnic [5, 6, 11], které vyjadřují časovou změnu operátorů relevantních pro danou úlohu obecným vztahem

$$\partial_t \mathcal{O} = \frac{i}{\hbar} [H, \mathcal{O}] + \mathcal{N}, \tag{1.17}$$

kde  $\mathcal{N}$  je šumový operátor odpovídající operátoru  $\mathcal{O}$ . Pro všechny operátory obsažené v hamiltoniánu (1.16) lze explicitně zapsat Langevinovy rovnice v této podobě

$$\begin{aligned}
\partial_t x_1 &= \omega_1 p_1, \\
\partial_t x_2 &= \omega_2 p_2, \\
\partial_t p_1 &= -\omega_1 x_1 - g a^\dagger a - \gamma_1 p_1 + \xi_1, \\
\partial_t p_2 &= -\omega_2 x_2 + g a^\dagger a - \gamma_2 p_2 + \xi_2, \\
\partial_t a &= i\Delta a + i g a (x_2 - x_1) + \eta - \kappa a + \sqrt{2\kappa} a^{\text{in}}, \\
\partial_t a^\dagger &= -i\Delta a^\dagger - i g a^\dagger (x_2 - x_1) + \eta^* - \kappa a^\dagger + \sqrt{2\kappa} a^{\dagger\text{in}},
\end{aligned} \tag{1.18}$$

kde  $\xi_1, \xi_2$  jsou šumové operátory spojené s termálním tlumením oscilátorů,  $\gamma_1, \gamma_2$  jsou koeficienty spojené s mechanickým tlumením pohybu,  $\kappa$  je operátor ztrát ve Fabry-Perotově rezonátoru a  $a^{\text{in}}, a^{\dagger\text{in}}$  je vakuový šum odpovídajícího operátoru s nulovou střední hodnotou [5]. Využili jsme komutačních relací (1.4).

Další aproximací, kterou v našem modelu využijeme pro zjednodušení rovnic (1.18), je zanedbání termálních a mechanických šumových operátorů  $\gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \xi_2$ . Termální šum lze zanedbat při teplotách blízkých absolutní nule a mechanické tlumení hybnosti oscilátorů je nulové při bezztrátovém ukotvení membrán v rezonátoru. Navíc předpokládejme, že vakuový šum  $a^{\text{in}}, a^{\dagger\text{in}}$  je mnohem menší než hodnoty zbývajících

operátorů v posledních dvou rovnicích. Pak rovnice (1.18) přejdou na tvar

$$\begin{aligned}
\partial_t x_1 &= \omega_1 p_1, \\
\partial_t x_2 &= \omega_2 p_2, \\
\partial_t p_1 &= -\omega_1 x_1 - g a^\dagger a \\
\partial_t p_2 &= -\omega_2 x_2 + g a^\dagger a \\
\partial_t a &= i\Delta a + i g a (x_2 - x_1) + \eta - \kappa a, \\
\partial_t a^\dagger &= -i\Delta a^\dagger - i g a^\dagger (x_2 - x_1) + \eta^* - \kappa a^\dagger.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Člen  $a^\dagger a$  vyskytující se v rovnicích (1.19) způsobuje nelinearitu těchto rovnic. I v klasické mechanice jsou nelineární diferenciální rovnice obecně velice těžko řešitelné, protože analytické řešení ve většině případů neumíme nalézt – v takovém případě zbývá možnost řešit rovnice numericky. V kvantovém režimu však prakticky nelze nelineární rovnice vyřešit analyticky, často ani numericky [1]. Přesto existuje jedna aproximační metoda, pomocí níž lze (za splnění daných předpokladů) nelineární rovnice linearizovat a následně soustavu lineárních diferenciálních rovnic vyřešit. Podrobnějšímu popisu problematiky linearizace rovnic (1.19) se budeme věnovat v následující podkapitole.

### 1.1.3 Linearizační aproximace

Linearizační aproximace je velmi často využívána při řešení optomechanických systémů, viz například [1, 5, 6, 13, 18]. Zaměříme-li se na fluktuace operátorů  $\mathcal{O}$  relevantních pro tuto úlohu, lze všechny uvažované operátory rozdělit na stacionární část, která udává střední hodnotu operátoru, a rychle oscilující část popisující fluktuace operátoru. Stacionární část operátoru, která odpovídá klasické komplexní veličině popisující chování systému bez fluktuací, budeme značit horním indexem  $S$ . Naopak oscilující část, která odpovídá kvantovým fluktuacím operátoru s nulovou střední hodnotou, označíme  $\delta\mathcal{O}$  [5]. Pak pro všechny operátory vyskytující se v hamiltoniánu  $(a, a^\dagger, x_1, x_2, p_1, p_2)$  platí

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}^S + \delta\mathcal{O}. \tag{1.20}$$

Předpokládejme navíc, že stacionární část operátoru je mnohem větší než kvantové fluktuace  $\delta\mathcal{O} \ll \mathcal{O}^S$ .

Protože frekvence světla je mnohem větší než mechanická frekvence oscilujících membrán, módy ve vnitřním rezonátoru se vždy „stihnou“ přizpůsobit malým změnám délky tohoto rezonátoru. Operátor  $a^S$  odpovídá klasické komplexní amplitudě vlny, zatímco operátor  $\delta a$  popisuje kvantové fluktuace tohoto operátoru. Výraz  $a^\dagger a$  můžeme dle předchozích úvah aproximativně vyjádřit takto

$$(a^{S*} + \delta a^\dagger)(a^S + \delta a) \approx |a^S|^2 + a^S \delta a^\dagger + a^{S*} \delta a, \tag{1.21}$$

kde jsme zanedbali fluktuační člen druhého řádu a hvězdičkou v horním indexu označujeme komplexní sdružení.

Rovnice (1.19) lze díky linearitě derivace rozepsat takto

$$\begin{aligned}
\partial_t x_1 &= \partial_t x_1^S + \partial_t \delta x_1 = \omega_1(p_1^S + \delta p_1), \\
\partial_t p_1 &= -\omega_1(x_1^S + \delta x_1) - g(|a^S|^2 + a^S \delta a^\dagger + a^{S*} \delta a), \\
\partial_t a &= i\Delta a^S + i g a^S (x_2^S - x_1^S) + i\Delta \delta a + i g a^S (\delta x_2 - \delta x_1) + \\
&\quad + i g \delta a (x_2^S - x_1^S) - \kappa(a^S + \delta a) + \eta, \\
\partial_t a^\dagger &= -i\Delta a^{S*} - i g a^{S*} (x_2^S - x_1^S) - i\Delta \delta a^\dagger - i g a^{S*} (\delta x_2 - \delta x_1) + \\
&\quad - i g \delta a^\dagger (x_2^S - x_1^S) - \kappa(a^{S*} + \delta a^\dagger) + \eta^*.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Rovnice pro časové změny  $x_2$  a  $p_2$  jsou zcela analogické – liší se pouze o znaménko u členu  $g(|a^S|^2 + a^S \delta a^\dagger + a^{S*} \delta a)$ , proto v textu nejsou uvedeny. Nyní můžeme porovnat v rovnicích (1.22) členy stejných řádů, tedy derivace oscilujícího členu bude rovna vždy výrazu, kde se vyskytuje  $\delta$ , na rozdíl od derivace stacionárního členu, který musí obsahovat pouze stacionární operátory. Po této úpravě proto získáme dvojnásobný počet rovnic

$$\partial_t x_1^S = \omega_1 p_1^S, \tag{1.23a}$$

$$\partial_t \delta x_1 = \omega_1 \delta p_1, \tag{1.23b}$$

$$\partial_t p_1^S = -\omega_1 x_1^S - g|a^S|^2, \tag{1.23c}$$

$$\partial_t \delta p_1 = -\omega_1 \delta x_1 - g(a^S \delta a^\dagger + a^{S*} \delta a), \tag{1.23d}$$

$$\partial_t a^S = i\Delta a^S + i g a^S (x_2^S - x_1^S) + \eta - \kappa a^S, \tag{1.23e}$$

$$\partial_t \delta a = i\Delta \delta a + i g a^S (\delta x_2 - \delta x_1) + i g \delta a (x_2^S - x_1^S) - \kappa \delta a, \tag{1.23f}$$

$$\partial_t a^{S*} = -i\Delta a^{S*} - i g a^{S*} (x_2^S - x_1^S) + \eta^* - \kappa a^{S*}, \tag{1.23g}$$

$$\partial_t \delta a^\dagger = -i\Delta \delta a^\dagger - i g a^{S*} (\delta x_2 - \delta x_1) - i g \delta a^\dagger (x_2^S - x_1^S) - \kappa \delta a^\dagger. \tag{1.23h}$$

Dalším krokem linearizační aproximace je nalezení stacionárního řešení pro operátory  $\mathcal{O}^S$ , které získáme, položíme-li rovnice (1.23a, 1.23c, 1.23e, 1.23g) rovny nule [6, 13]. Úpravou těchto rovnic získáme stacionární hodnoty operátorů

$$p_1^S = 0, \quad x_1^S = -\frac{g|a^S|^2}{\omega_1}, \quad a^S = \frac{\eta}{\kappa - i[\Delta + g(x_2^S - x_1^S)]}, \tag{1.24a}$$

$$p_2^S = 0, \quad x_2^S = +\frac{g|a^S|^2}{\omega_2}, \quad a^{S*} = \frac{\eta^*}{\kappa + i[\Delta + g(x_2^S - x_1^S)]}. \tag{1.24b}$$

Užitečné zjednodušení rovnic (1.23) nastane, pokud budeme uvažovat  $a^S$  reálné. Toto zjednodušení je přípustné, jestliže vhodně upravíme fázi mezi vstupním laserem a polem uvnitř rezonátoru. Konkrétně uvažujeme-li  $\eta = |\eta|e^{-i\theta}$ , operátor  $a^S$  bude nabývat reálné hodnoty, pokud  $e^{-i\theta} = [\kappa - i\Delta - ig(x_2^S - x_1^S)] / \sqrt{\kappa^2 + [\Delta + g(x_2^S - x_1^S)]^2}$  [6]. Pak platí  $a^S = a^{S*}$ , a tedy

$$|a^S|^2 = \frac{|\eta|^2}{\kappa^2 + [\Delta + g(x_2^S - x_1^S)]^2} = \frac{|\eta|^2}{\kappa^2 + (\Delta + \frac{g^2|a^S|^2}{\omega_1} + \frac{g^2|a^S|^2}{\omega_2})^2}, \tag{1.25}$$

kde jsme využili vztah (1.24a) pro dosažení  $x_1^S, x_2^S$ . Vidíme, že mezi  $|a^S|^2$  a  $|\eta|^2$  je nelineární závislost. Pro dostatečně malé hodnoty  $|a^S|^2$  platí přibližně lineární závislost na  $|\eta|^2$ , zatímco pro vysoké hodnoty jsou veličiny svázány kubickou nelinearitou.

Navíc požadujeme, aby hledané stacionární řešení splňovalo podmínku pro časové derivace kvantových fluktuací kreačního a anihilačního operátoru, tedy  $\partial_t \delta a = 0$ ,  $\partial_t \delta a^\dagger = 0$ . Ze vztahů (1.23f) a (1.23h), který položíme roven nule, plyne

$$\begin{aligned}\delta a &= -\frac{g}{\Delta + g(x_2^S - x_1^S) - i\kappa} \cdot a^S(\delta x_2 - \delta x_1) = -C \cdot a^S(\delta x_2 - \delta x_1), \\ \delta a^\dagger &= -\frac{g}{\Delta + g(x_2^S - x_1^S) + i\kappa} \cdot a^{S*}(\delta x_2 - \delta x_1) = -C^* \cdot a^{S*}(\delta x_2 - \delta x_1),\end{aligned}\tag{1.26}$$

kde  $C = g/[\Delta + g(x_2^S - x_1^S) - i\kappa]$  označuje komplexní konstantní hodnotu pro časy mnohem menší než perioda mechanických oscilátorů;  $\delta x_1$  a  $\delta x_2$  jsou reálné hodnoty popisující malé výchylky oscilátorů. Odtud úpravou rovnice (1.23d) a dosazením konstanty  $C$  dostáváme

$$\begin{aligned}\partial_t \delta p_1 &= -\omega_1 \delta x_1 + g|a^S|^2(C + C^*)(\delta x_2 - \delta x_1), \\ \partial_t \delta p_2 &= -\omega_2 \delta x_2 - g|a^S|^2(C + C^*)(\delta x_2 - \delta x_1).\end{aligned}\tag{1.27}$$

Dále budeme předpokládat, že uvažovaný systém je symetrický, tedy obě membrány jsou shodné a boční rezonátory mají stejnou délku. V takovém případě jsou si mechanické frekvence kmitů obou membrán rovny:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Pak lze v obou rovnicích zavést substituci  $\tau = \omega t$ , která nám původní čas  $t$  nahradí bezrozměrným časem  $\tau$ . Derivace podle času tudíž přejde na tvar

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial(\frac{\tau}{\omega})} = \omega \frac{\partial}{\partial \tau} = \omega \partial_\tau.\tag{1.28}$$

Rovnice (1.27) díky této substituci přejdou do podoby

$$\begin{aligned}\partial_\tau \delta x_1 &= \delta p_1, \\ \partial_\tau \delta x_2 &= \delta p_2, \\ \partial_\tau \delta p_1 &= -\delta x_1 + G(\delta x_2 - \delta x_1), \\ \partial_\tau \delta p_2 &= -\delta x_2 - G(\delta x_2 - \delta x_1),\end{aligned}\tag{1.29}$$

kde  $G = g|a^S|^2(C + C^*)/\omega$  označuje reálnou konstantu, která pro nízké hodnoty bezrozměrného času  $\tau$  závisí na  $g$ ,  $\omega$ ,  $\Delta$ ,  $|a^S|^2$  vztahem

$$G = \frac{g|a^S|^2}{\omega} \frac{2g[\Delta + g(\frac{2g|a^S|^2}{\omega})]}{[\Delta + g(\frac{2g|a^S|^2}{\omega})]^2 + \kappa^2} = 2g^2|a^S|^2 \frac{\omega\Delta + 2g^2|a^S|^2}{(\omega\Delta + 2g^2|a^S|^2)^2 + \omega^2\kappa^2}.\tag{1.30}$$

Využili jsme vztahů (1.24) pro dosazení stacionárních poloh  $x_1^S$  a  $x_2^S$ . Abychom mohli soustavu rovnic (1.29) vyřešit, je potřeba znát alespoň řádově v jakých mezích se pohybuje parametr  $G$ , proto vyjdeme ze vztahu (1.30), do nějž budeme dosazovat za neznámé veličiny. Hodnotu  $|a^S|^2$  lze získat řešením rovnice (1.25), která vede na kubickou rovnici pro  $|a^S|^2$ . Tato kubická rovnice má obecně tři kořeny, ovšem pouze jeden z kořenů je kladný a reálný, proto dále pracujeme pouze s tímto reálným kořenem závislejícím na veličinách  $|\eta|^2$ ,  $\kappa$ ,  $\Delta$ ,  $g$ ,  $\omega$ . Analytický vztah jsme našli pomocí funkce `Solve` v programu Wolfram Mathematica. Dále lze vyjádřit kvadrát velikosti komplexní amplitudy pomocí výkonu laseru  $P$  [6]

$$|\eta|^2 = \frac{2\kappa P}{\hbar\omega_L},\tag{1.31}$$

a parametr  $g$  vyjadřující sílu optomechanické vazby je dán vztahem [1, 19]

$$g = \frac{\omega_{\text{cav}}}{L} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}. \quad (1.32)$$

Výše zmíněným postupem jsme získali vztah pro výslednou numerickou hodnotu  $G$ , která závisí na všech volitelných parametrech systému kromě času, tedy závisí na  $L, m, \omega_L, \omega, \omega_{\text{cav}}, P, \Delta, \kappa$ . Tento analytický vztah je však velice obsáhlý, a to hlavně z důvodu komplikovaného analytického vyjádření  $|a^S|^2$  z kubické rovnice, proto ani jeden z těchto vztahů není v textu uveden.

Dosadíme-li za každý volitelný parametr typický rozsah jeho hodnot, získáme odhad intervalu, v němž se parametr  $G$  nachází. Typické hodnoty veličin, které jsou používány při optomechanických experimentech: délka rezonátoru  $L \approx 10^{-5} - 10^{-2}$  m,  $m \approx 10^{-16} - 10^{-7}$  kg,  $\omega \approx 10^4 - 10^8$  Hz,  $\kappa \approx 10^5 - 10^7$  Hz [1]. Výkon laseru se obvykle pohybuje v rozmezí  $P \approx 10^{-6} - 10^0$  W a frekvenci laseru předpokládáme řádově  $\omega_L \approx 10^{15}$  Hz. Nejsilnějších indukovaných oscilací (tj. oscilací, které jsou vyvolávány samotnými oscilátory), lze dosáhnout, pro  $\Delta \approx \omega$  [5]. Proto jsme zvolili  $\Delta = \omega$ . Po dosazení do vztahu pro výpočet parametru  $G$  dosáhneme nejnižší hodnoty pro tyto krajní hodnoty volitelných parametrů  $L = 10^{-2}$  m,  $P = 10^{-6}$  W,  $m = 10^{-7}$  kg,  $\omega = 10^8$  Hz a  $\kappa = 10^5$  Hz, a to  $G = 2 \cdot 10^{-15}$ . Naopak druhý extrém je dosažen pro hodnoty  $L = 10^{-5}$  m,  $P = 10^0$  W,  $m = 10^{-16}$  kg,  $\omega = 10^4$  Hz a  $\kappa = 10^7$  Hz. V takovém případě dostáváme  $G = 0,9999999996$ . Obecně můžeme říci, že hodnoty parametru  $G$  náleží do intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ . Dokonce i při změně některého volitelného parametru mimo typický rozsah hodnot nelze přesáhnout hodnotu  $G = 1$ , teoreticky se k ní můžeme nekonečně blížit. Z pohledu numeriky však lze číslo, které je rovno jedné na osm platných číslic, prakticky považovat za jedničku.

Cílem této práce je pohybové rovnice (1.29) vyřešit a následně najít takovou kombinaci volitelných parametrů systému, abychom byli schopni vytvořit interakci typu dělič svazku. Než se budeme věnovat řešení těchto pohybových rovnic, uvedeme příklad systému známého z klasické mechaniky, jehož řešením dostaneme pohybové rovnice stejného typu jako (1.29).

## 1.2 Analogie v klasické mechanice

V této podkapitole ukážeme, že řešením klasicky mechanického problému dvou spřažených mechanických oscilátorů lze získat pohybové rovnice ve stejném tvaru jako rovnice (1.29).

Uvažujme soustavu dvou spřažených mechanických oscilátorů, které se mohou pohybovat bez tření po vodorovné přímce, viz Obrázek 2. V klasické mechanice má hamiltonián  $H$  význam celkové energie systému; obecně je funkcí zobecněných souřadnic, zobecněných hybností a času. V případě systému spřažených mechanických oscilátorů, kde neuvažujeme ztráty v podobě mechanického tlumení, má hamiltonián tvar

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}mG^2(x_2 - x_1)^2, \quad (1.33)$$

kde  $m$  je hmotnost obou oscilátorů;  $x_1, x_2$  výchylka z rovnovážné polohy odpovídající po řadě levému a pravému závaží;  $p_1, p_2$  hybnost příslušného závaží. Využili jsme



vztahů pro výpočet kruhové frekvence mechanického oscilátoru  $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$  a  $G = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , kde  $k$  je tuhost pružiny spojující dvě závaží a  $k_1$  tuhost pružiny spojující pevnou stěnu a závaží. Pro ilustraci jsou některé z veličin vyznačeny v Obrázku 2.

Pro další výpočty je vhodné hamiltonián škálovat

$$x'_i = \sqrt{m\omega^2}x_i, \quad p'_i = \sqrt{\frac{1}{m}}p_i, \quad G' = \frac{1}{\omega}G, \quad \text{pro } i = 1, 2, \quad (1.34)$$

aby se (po přeznačení  $x'_i = x_i, p'_i = p_i, G' = G$ ) změnil na jednodušší tvar, z něhož budeme vyjadřovat pohybové rovnice

$$H = \frac{1}{2}[x_1^2 + x_2^2 + p_1^2 + p_2^2 + G(x_2 - x_1)^2]. \quad (1.35)$$

Časová evoluce systému je v klasické mechanice popsána Hamiltonovými kanonickými rovnicemi ve tvaru

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \text{pro } i = 1, 2. \quad (1.36)$$

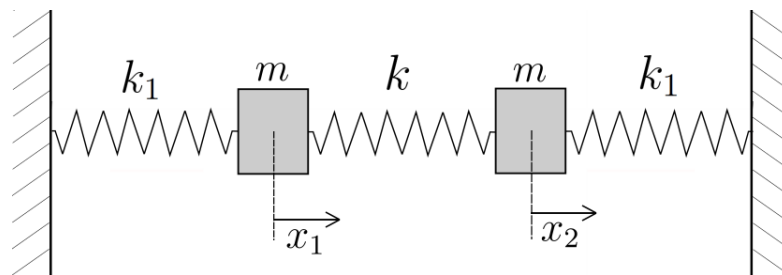
Z Hamiltonových kanonických rovnic vyjádříme časové změny poloh a hybností obou kmitajících závaží

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_1, \\ \dot{x}_2 &= p_2, \\ \dot{p}_1 &= -x_1 + G(x_2 - x_1), \\ \dot{p}_2 &= -x_2 - G(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Rovnice (1.37) nabývají formálně stejného tvaru jako (1.29). Pro kompletní popis časového vývoje dynamiky obou systémů tudíž stačí vyřešit tuto soustavu pohybových rovnic

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -x_1 - Gx_1 + Gx_2, \\ \ddot{x}_2 &= -x_2 - Gx_2 + Gx_1. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Při řešení soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic je obvykle snahou tyto rovnice separovat na dvě obyčejné diferenciální rovnice, které jsou snadněji řešitelné. V následující kapitole proto budeme diagonalizovat matici soustavy, abychom mohli nalézt analytické řešení rovnic. Dále se budeme podrobněji zabývat metodami, které povedou k požadovanému tvaru řešení.



**Obrázek 2:** Systém dvou spřažených mechanických oscilátorů.

# Kapitola 2

## Metody řešení

V této kapitole se zaměříme nejprve na analytické řešení soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic (1.38). Zapišeme-li soustavu maticově, všechny prvky matice soustavy, která popisuje dynamiku systému, budou závislé na parametru  $G$  a bezrozměrném čase  $\tau$ . Tento čas odpovídá době čerpání vnitřního rezonátoru. Pro vytvoření interakce typu dělič svazku budeme klást nutné podmínky jednak na nulovost vybraných prvků matice soustavy a jednak na splnění fyzikální podmínky  $|t|^2 + |r|^2 = 1$ . Jestliže najdeme řešení pro libovolnou relevantní hodnotu parametru  $G$ , pak je teoreticky možné interakci typu dělič svazku zkonstruovat.

### 2.1 Analytické řešení soustavy pohybových rovnic

Pohybové rovnice (1.38) lze také zapsat v maticové podobě

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - G & G \\ G & -1 - G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Jeden z možných způsobů řešení je diagonalizovat matici soustavy, kterou označíme  $M_S$ . Přejdeme-li od proměnné  $\vec{x}$  k proměnné  $\vec{y} = V\vec{x}$ , kde  $V$  je matice, v jejíž sloupcích jsou vlastní vektory matice soustavy, pak platí

$$\ddot{\vec{y}} = \underbrace{VM_S V^{-1}}_{\text{diagonální tvar } M_S} \vec{y}. \quad (2.2)$$

Soustava se tudíž separuje na dvě obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, které velice snadno vyřešíme. Vlastní čísla matice  $M_S$  jsou  $\lambda_1 = -1$ ;  $\lambda_2 = -(1 + 2G)$  a odpovídající vlastní vektory jsou  $v_1 = [1, 1]$ ,  $v_2 = [1, -1]$ . Obecné řešení soustavy lze zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cos \tau + c_2 \sin \tau \\ c_3 \cos(\sqrt{1 + 2G}\tau) + c_4 \sin(\sqrt{1 + 2G}\tau) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

kde  $\tau$  označuje čas. Hybnosti obdržíme dosazením do vztahu  $p_i = \dot{x}_i$  pro  $i = 1, 2$ . Z daných počátečních podmínek  $x_1(0) = x_{01}$ ,  $p_1(0) = p_{01}$ ,  $x_2(0) = x_{02}$ ,  $p_2(0) = p_{02}$  lze zjistit koeficienty  $c_1$  až  $c_4$

$$c_1 = x_{01} + x_{02}, \quad c_2 = p_{01} + p_{02}, \quad c_3 = x_{01} - x_{02}, \quad c_4 = \frac{p_{01} - p_{02}}{\sqrt{1 + 2G}}. \quad (2.4)$$

Řešení soustavy (2.1) popisující kompletní dynamiku systému lze nejpřehledněji zapsat v maticové podobě

$$M \begin{pmatrix} x_{01} \\ p_{01} \\ x_{02} \\ p_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

kde  $M$  označuje matici, která za použití substituce  $s = \sqrt{1 + 2G}$  nabývá tvaru

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \tau + \frac{1}{2} \cos s\tau & \frac{1}{2} \sin \tau + \frac{1}{2s} \sin s\tau & \frac{1}{2} \cos \tau - \frac{1}{2} \cos s\tau & \frac{1}{2} \sin \tau - \frac{1}{2s} \sin s\tau \\ -\frac{1}{2} \sin \tau - \frac{s}{2} \sin s\tau & \frac{1}{2} \cos \tau + \frac{1}{2} \cos s\tau & -\frac{1}{2} \sin \tau + \frac{s}{2} \sin s\tau & \frac{1}{2} \cos \tau - \frac{1}{2} \cos s\tau \\ \frac{1}{2} \cos \tau - \frac{1}{2} \cos s\tau & \frac{1}{2} \sin \tau - \frac{1}{2s} \sin s\tau & \frac{1}{2} \cos \tau + \frac{1}{2} \cos s\tau & \frac{1}{2} \sin \tau + \frac{1}{2s} \sin s\tau \\ -\frac{1}{2} \sin \tau + \frac{s}{2} \sin s\tau & \frac{1}{2} \cos \tau - \frac{1}{2} \cos s\tau & -\frac{1}{2} \sin \tau - \frac{s}{2} \sin s\tau & \frac{1}{2} \cos \tau + \frac{1}{2} \cos s\tau \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

## 2.2 Požadovaný tvar řešení

Je-li vytvořena interakce typu dělič svazku, pak v souladu s rovnicí (1.1) nutně musí matice  $M$  nabývat tvaru

$$M_{\text{BS}} = \begin{pmatrix} t & 0 & r & 0 \\ 0 & t & 0 & r \\ -r & 0 & t & 0 \\ 0 & -r & 0 & t \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

kde prvky  $t, r \in \mathbb{R}$  mají fyzikální interpretaci transmisivity (propustnosti) a reflexivity (odrazivosti) při dopadu světla na rozhraní dvou optických prostředí. Proto jsou svázány dodatečnou fyzikální podmínkou  $|t|^2 + |r|^2 = 1$ .

Aby matice  $M$  (2.6) nabyla tvar  $M_{\text{BS}}$  (2.7), musíme nejprve zajistit nulovost osmi jejích prvků. Hodnoty všech členů můžeme ovlivňovat pomocí diskrétního čerpání jednotlivých rezonátorů. Čerpáním vnitřního rezonátoru lze modulovat vazbu mezi oscilátory, kdežto čerpáním pouze levého (pravého) rezonátoru způsobujeme změnu lokální fáze v odpovídajícím rezonátoru. Schematicky je posloupnost operací, která povede na interakci typu dělič svazku, zakreslena na Obrázku 3. Podrobnější matematický popis obou typů operací je shrnut v následujících podkapitolách.

### 2.2.1 Modulace vazby

Optickým čerpáním vnitřního rezonátoru je ovlivňována vazba mezi optomechanickými oscilátory. Parametr  $G$  zahrnuje kromě času všechny volitelné parametry systému, na nichž závisí dle vztahu (1.30), výsledná hodnota se pohybuje v intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ . V průběhu operací se hodnota  $G$  nemění, je pevně dána konkrétním nastavením experimentu. Bezrozměrný čas  $\tau$  odpovídá době čerpání vnitřního rezonátoru. Vhodnou kombinací parametrů  $G$  a  $\tau$  lze dosáhnout následující podoby matice  $M$ ,

jejíž prvky označíme obecně  $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{44}$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & m_{24} \\ m_{31} & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Změna lokální fáze

Čerpáním levého nebo pravého rezonátoru lze realizovat operaci, kterou označujeme jako změnu lokální fáze, či fázový posuv. Pomocí této operace je možné zajistit nulovost čtyř členů v matici  $M$ , které nemohou být současně nulové pouze vlivem modulace vazby. Předpokládáme, že na systému jsme schopni provádět nejen postupné čerpání levého a pravého rezonátoru, ale také současně čerpání obou rezonátorů.

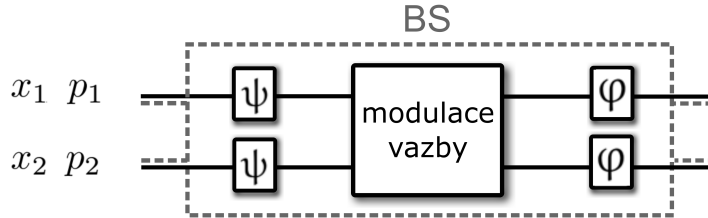
V maticové reprezentaci lze změnu lokální fáze reprezentovat násobením dané matice zleva a zprava maticí rotace, která pro obecné úhly  $\alpha_1, \alpha_2$  má tvar

$$M_{\alpha_1, \alpha_2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Díky symetrii úlohy při současném čerpání levého i pravého rezonátoru si budou oba úhly navzájem rovny, proto budeme psát pouze jeden dolní index. Pro vhodně zvolené - numericky nalezené - úhly  $\varphi$  a  $\psi$  lze aplikací odpovídajících matic rotace  $M_\varphi M M_\psi$  získat výslednou matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ m_{41} & m_{42} & 0 & m_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Rovněž lze nalézt analytické vyjádření úhlů  $\psi$  a  $\varphi$  tak, aby pro libovolnou nenulovou matici  $M$  byl výsledek zmíněného maticového násobení ve tvaru (2.10). Analytický vztah je však velice komplikovaný, proto budeme hledat hodnoty obou úhlů numericky spolu s modulací parametrů  $G$  a  $\tau$ . Podrobnější popis bude poskytnut v kapitole 3.1.



**Obrázek 3:** Schematický obrázek posloupnosti operací modulace vazby a změny lokální fáze (značíme pomocí úhlu otočení  $\psi$  a  $\varphi$ ). Tato posloupnost operací vede na typ interakce definovaný jako dělič svazku. Schematicky je dělič svazku vyznačen šedou čárkovanou čarou.

Aplikujeme-li na matici  $M$  kombinaci operací modulace vazby a změny lokální fáze, výslednou matici

$$F = M_\varphi M M_\psi \quad (2.11)$$

lze zapsat ve tvaru (2.7), kde však není automaticky splněna dodatečná podmínka  $|t|^2 + |r|^2 = 1$ . Konkrétně bude-li čerpán nejprve současně levý i pravý rezonátor (fázový posuv o vhodný úhel  $\psi$ ), následně vnitřní rezonátor po dobu  $\tau$  (modulace vazby) a nakonec opět oba boční rezonátory (změna fáze o  $\varphi$ ), pak pro vhodné hodnoty parametrů systému lze dosáhnout interakce typu dělič svazku (viz Obrázek 3). Interakci typu dělič svazku budeme dále označovat zkráceně BS. V následující kapitole proto budeme numericky hledat kombinaci volitelných parametrů systému  $G$  a  $\tau$  tak, aby byla dodatečná fyzikální podmínka splněna.

# Kapitola 3

## Výsledky numerické optimalizace

Protože hodnota parametru  $G$  je závislá na konkrétním geometrickém nastavení experimentu, hmotnosti oscilujících membrán a dalších parametrech, které souvisí s laserovým čerpáním, v praxi nebude možno dosáhnout zcela libovolné hodnoty. Hlavním cílem numerické optimalizace volitelných parametrů systému je pro libovolný pevně zvolený parametr  $G$  nalézt takový čas  $\tau$ , aby matice  $F$  (2.11) nabývala tvaru  $M_{BS}$  (2.7), kde nenulové prvky musí splňovat podmínku  $|t|^2 + |r|^2 = 1$ . Pro numerickou optimalizaci byl využit software MATLAB. Oproti nižším programovacím jazykům je výhodné, že MATLAB nabízí možnost využití implementovaných funkcí (například funkce hledající numerické řešení soustavy rovnic).

Fyzikálně relevantní hodnoty pro parametr  $G$ , které jsme uvedli již v podkapitole 1.1.3, jsou z intervalu  $G \in \langle 0, 1 \rangle$ . Interval hodnot pro parametr  $G$ , kterým se budeme z numerického hlediska zabývat, byl proto zvolen  $G \in \langle 0, 1; 1 \rangle$ .

### 3.1 Popis prvního kódu

Cílem kódu je nalézt vhodnou kombinaci dvou volitelných parametrů systému tak, aby po provedení dané posloupnosti operací (viz Obrázek 3) výstupní matice  $F$  (2.11) nabývala požadovaného tvaru matice děliče svazku (2.7), kde je zaručeno splnění fyzikální podmínky  $|t|^2 + |r|^2 = 1$ . Proto se oba parametry mění ve dvou vnořených `for` cyklech,  $G$  ve vnějším cyklu a  $\tau$  ve vnořeném cyklu. Pro přehlednost rozdělíme kód na logické kroky a budeme diskutovat výstupy v jednotlivých krocích.

1. krok: V každé iteraci vnořeného cyklu `for` je vyčíslena matice  $M$  (2.6), která je následně symbolicky vynásobena zleva a zprava maticí rotace  $F = M_\varphi M M_\psi$ . Prvky matice  $F$  budeme dále značit  $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{44}$ .  
Výstup: symbolicky zapsaná výsledná matice  $F$  závislá na úhlech  $\psi$  a  $\varphi$ .
2. krok: Pomocí implementované funkce `vpasolve` je numericky vyřešena soustava dvou rovnic  $f_{12} = 0; f_{21} = 0$  pro dvě neznámé  $\psi$  a  $\varphi$ , obě z intervalu  $\langle -\pi, \pi \rangle$ . Vypočtené úhly jsou následně dosazeny do symbolicky vyjádřené matice  $F$  z předchozího kroku.  
Výstup: výsledná reálná matice  $F$  se čtyřmi nulovými prvky ve tvaru (2.10).
3. krok: Na matici  $F$  je následně kladen požadavek splnění fyzikální podmínky pro odrazivost a propustnost, a to se zvolenou přesností, protože numericky

přesného řešení nelze dosáhnout. Maximální povolenou odchylku označujeme písmenem  $\epsilon$ . Podmínky, které musí být současně splněny, jsou následující

$$\text{P1: } |f_{11}|^2 + |f_{13}|^2 - 1 < \epsilon \quad \text{ověření fyzikální podmínky } |t|^2 + |r|^2 = 1;$$

$$\text{P2: } |f_{14}| + |f_{23}| < \epsilon \quad \text{testuje nulovost členů na antidiagonále};$$

$$\text{P3: } 0,19 < |f_{11}|^2 < 0,81 \quad \text{omezuje interval hledaných transmisivit.}$$

Pokud bychom podmínku P3 nepožadovali, mnoho nalezených řešení by bylo triviálních - tím rozumíme, že buď transmisivita, nebo reflexivita, jsou přibližně rovny jedné. Taková řešení však nejsou relevantní. Jinými slovy hledáme řešení, v němž hodnota propustnosti i odrazivosti je menší než 0,9. V kapitole 4 bude podmínka upřesněna.

Výstup: výsledná matice  $F$  ve tvaru  $M_{BS}$ , kde je zajištěna platnost fyzikální podmínky mezi odrazivostí a propustností.

4. krok: Není-li splněna alespoň jedna z podmínek P1-P3, končí jedna iterace vnořeného `for` cyklu a program pokračuje 1. krokem s vyšší hodnotou  $\tau$ . Splňují-li matice  $F$  současně podmínky P1-P3, řešení se uloží do pomocné matice. Výstup: řešení splňující P1-P3 je uloženo do jednoho řádku pomocné matice, v jejichž sloupcích jsou po řadě:  $G$ ;  $\tau$ ;  $|f_{11}|^2 + |f_{13}|^2 - 1$ ;  $|f_{14}| + |f_{23}|$ ;  $f_{11}$ ;  $f_{13}$ ;  $f_{14}$ .

5. krok: Po ukončení jednoho vnitřního `for` cyklu pomocná matice obsahuje všechna fyzikálně relevantní řešení pro jedno  $G$ , jejichž chyba nepřesahuje hodnotu  $\epsilon$ . Pro každou hodnotu  $G$  mění se ve vnějším cyklu je vyhodnoceno řešení s minimální odchylkou v podmínce P1. Toto řešení je následně uloženo do jednoho řádku matice  $M_{\text{vysl}}$ . Ukládání dat v podobě matice je výhodné pro následnou tvorbu grafů.

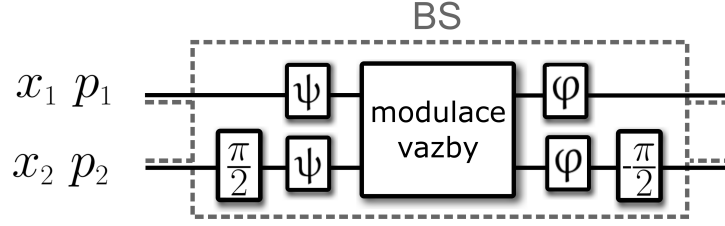
Výstup: Matice  $M_{\text{vysl}}$ , která v řádcích obsahuje nejpřesnější nalezená řešení jednotlivé hodnoty parametru  $G$ .

Konkrétní hodnoty či intervaly hodnot, které byly použity při řešení:  $G \in \langle 0, 1; 1 \rangle$  s krokem  $10^{-3}$ ;  $\tau \in \langle 0; 12 \rangle$  s krokem  $10^{-4}$ ;  $\epsilon = 10^{-3}$ .

Prvním problémem, se kterým jsme se při řešení potýkali, bylo nenalezení řešení v požadovaném tvaru. I přes zvýšení maximální odchylky na  $\epsilon = 0,1$  a rozšíření intervalu  $\tau \in \langle 0; 50 \rangle$  program nenašel žádné relevantní řešení. Proto bylo nutno kód upravit.

## 3.2 Úprava kódu a výsledek

Protože první verze programu nebyla schopna nalézt žádné řešení, znamená to, že posloupnost operací, kterou jsme v kapitole 2.2 označili jako **BS**, není postačující. Tento problém lze vyřešit, přidáme-li do definice **BS** dvě operace změny lokální fáze v módu 2, tedy přidáme-li do posloupnosti operací navíc čerpání pravého rezonátoru. Schematicky je nová posloupnost operací, kterou budeme značit opět **BS**, zakreslena na Obrázku 4.



**Obrázek 4:** Schematický obrázek posloupnosti operací, jejichž výstupem je operace BS.

Změníme-li lokální fázi v módu 2 o úhel  $\frac{\pi}{2}$ , což odpovídá čerpání pouze pravého rezonátoru, je tato operace reprezentována maticí rotace (2.9), která po dosažení odpovídajících úhlů nabývá tvar

$$M_{0, \frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Aplikace fázového posuvu o  $\frac{\pi}{2}$  před celou původní operací BS a  $-\frac{\pi}{2}$  po operaci v maticové reprezentaci znamená násobení matice  $F$  zprava  $M_{0, \frac{\pi}{2}}$  (3.1) a zleva maticí transponovanou. Násobení maticí zleva způsobí změnu znaménka ve třetím řádku a následnou výměnu třetího řádku za čtvrtý, násobení zprava maticí  $M_{0, \frac{\pi}{2}}$  změní znaménko ve třetím sloupci a vymění třetí za čtvrtý sloupec. Proto může mít matice  $F$  nenulové antidiagonální prvky a naopak nulové členy na druhé poddiagonále a druhé naddiagonále. Díky symetrii problému se každý člen v matici opakuje dvakrát, proto stačí ověřovat podmínky pouze pro prvky z prvních dvou řádků

$$P4: |f_{11}|^2 + |f_{14}|^2 - 1 < \epsilon$$

$$P5: |f_{13}| + |f_{24}| < \epsilon.$$

Modifikace kódu spočívá v záměně podmínky P1 za P4 a zároveň P2 za P5, tedy  $F$  musí splňovat současně podmínky P3-P5. Po následné aplikaci operace změny fáze v pravém rezonátoru o úhly  $\frac{\pi}{2}$  a  $-\frac{\pi}{2}$  proto bude řešení nabývat požadovaného tvaru matice děliče svazku (2.7).

Pro ilustraci uvedeme příklad výsledné matice  $F$ , která byla výše popsáním programem nalezena. Pro dvojici parametrů  $G = 1; \tau = 1.8138$  byly nalezeny úhly  $\varphi = 1,1173; \psi = -0,4535$ ; odpovídající odchylky jsou  $|f_{11}|^2 + |f_{14}|^2 - 1 \doteq 5,0 \cdot 10^{-7}$ ,  $|f_{13}| + |f_{24}| \doteq 6,4 \cdot 10^{-7}$ . Číselná matice  $F$  je ve tvaru

$$F = \begin{pmatrix} -0,7876 & 0,0000 & -0,0000 & 0,6162 \\ 0 & -0,7876 & -0,6162 & 0,0000 \\ -0,0000 & 0,6162 & -0,7876 & 0,0000 \\ -0,6162 & 0,0000 & 0 & -0,7876 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Výsledná matice děliče svazku byla získána maticovým násobením  $M_{0, -\frac{\pi}{2}} F M_{0, \frac{\pi}{2}}$ , kde jsme formálně přeznačili  $x_1 \rightarrow -x_1, \dots, p_2 \rightarrow -p_2$

$$M_{BS} = \begin{pmatrix} 0,7876 & -0,0000 & 0,6162 & 0,0000 \\ 0 & 0,7876 & 0,0000 & 0,6162 \\ -0,6162 & 0,0000 & 0,7876 & 0 \\ 0,0000 & -0,6162 & 0,0000 & 0,7876 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$



### 3.2.1 Ověření zachování komutačních relací

Ze vztahu (2.5) je zřejmé, že matice  $M_{BS}$  představuje lineární transformaci souřadnic, která zapůsobením na vektor  $r_0 = (x_{01}, p_{01}, x_{02}, p_{02})^T$  dává  $r = (x_1, p_1, x_2, p_2)^T$ . Na výsledné matici děliče svazku můžeme ověřit, zda jsou zachovány kanonické komutační relace. Před provedením transformace je můžeme zapsat buď v podobě  $[x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0; [x_k, p_l] = i\delta_{kl}$  pro  $k, l = 01, 02$ , nebo ekvivalentně pomocí matice  $\Omega$

$$[r_k, r_l] = i\Omega_{kl}, \quad (3.4)$$

kde  $\Omega$  nabývá tvaru

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Lineární transformaci lze chápat také jako změnu báze, která na matici  $\Omega$  působí dle předpisu známého z lineární algebry  $\Omega' = M_{BS}\Omega M_{BS}^{-1}$ . Aby byly kanonické komutační relace zachovány i po transformaci, musí být splněna podmínka  $\Omega' = \Omega$ . Navíc matice děliče svazku je z definice ortogonální (tj.  $M_{BS}^{-1} = M_{BS}^T$ ), proto výsledná matice děliče svazku splňuje tuto podmínku

$$M_{BS}^T \Omega M_{BS} = \Omega. \quad (3.6)$$

Každá matice  $M_{BS}$  vyhovující rovnici (3.6) zachovává kanonické komutační relace a nazývá se symplektická. Snadno lze ověřit, že výše uvedená numericky nalezená matice (3.3) podmínku (3.6) splňuje, tedy zachovává komutační relace. Můžeme proto říci, že výsledek nalezený programem je fyzikálně relevantní. Ukazuje se, že všechny numericky nalezené výsledné matice jsou symplektické.

## 3.3 Grafy

Pro názornost ukážeme nejen řešení nalezená výše popsaným programem (tj. výsledná matice nabývá tvaru  $M_{BS}$ ), ale i časový vývoj hodnot vyskytujících se v podmínkách P4-P5. Dále budeme označovat prvek  $|f_{11}| = t$  (transmisivita) a  $|f_{14}| = r$  (reflexivita), protože prvky výsledné matice děliče svazku (2.7) musí těmto fyzikálním hodnotám odpovídat.

Nejprve zobrazíme průběh hodnot podmínek P4-P5 v čase. Na osu  $y$  vyneseme hodnoty:  $t^2 + r^2 - 1$ ;  $|f_{13}| + |f_{24}|$ ; a zvolíme jednu pevnou hodnotu parametru  $G$ . Výsledná matice nabývá požadovaného tvaru (2.7), jestliže obě hodnoty nepřevyšují danou nejvyšší povolenou odchylku  $\epsilon$ , která byla zvolena  $\epsilon = 10^{-3}$ . Pro zvolené  $G = 1$  je v Grafu 1 znázorněn průběh hodnot  $t^2 + r^2 - 1$  a  $|f_{13}| + |f_{24}|$  v závislosti na čase  $\tau$ . Z Grafu 1 vyplývá, že lokální minimum jedné křivky není vždy současným lokálním minimum druhé křivky. Z těchto dat lze vybrat pouze ta, která splňují současně obě minimalizační podmínky (viz Tabulka 3.1), avšak správná řešení nalezená programem musí splňovat navíc podmínku P3:  $0,19 < |f_{11}|^2 < 0,81$ . Z Tabulky 3.1 vyplývá, že existují čtyři různá řešení pro  $G = 1$  a  $\tau \in \langle 0; 15 \rangle$ , která splňují současně všechny tři požadované podmínky. Odchylky obou minimalizovaných hodnot jsou přibližně o tři řády nižší než námi zvolená maximální hodnota.

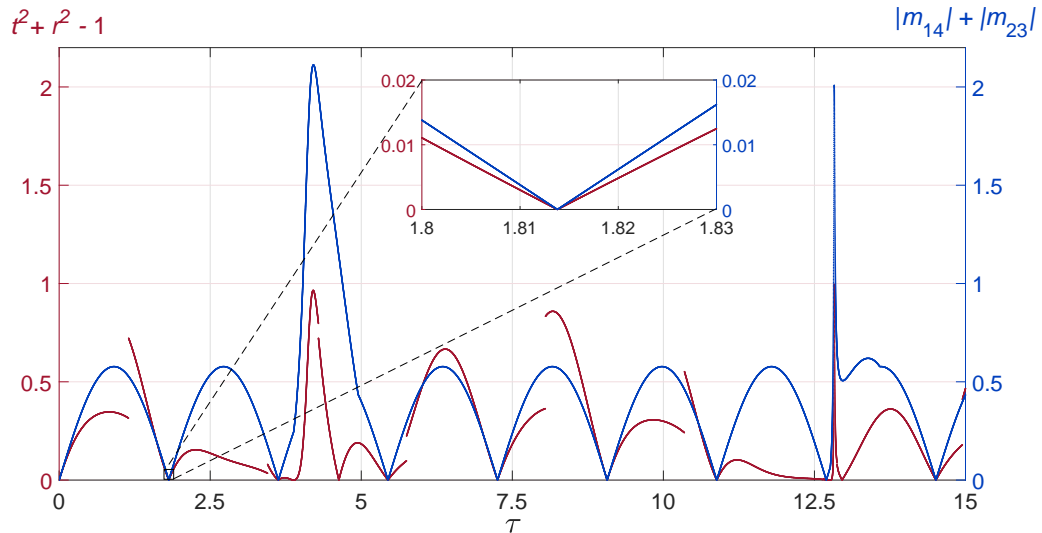
**Tabulka 3.1:** Nalezená současná lokální minima obou křivek v grafu 1 pro  $G = 1$  v intervalu  $\tau \in \langle 0; 15 \rangle$ . V tabulce  $n$  značí číslo minima.

$n$	$\tau$	$t$	$r$	$t^2 + r^2 - 1$	$ f_{13}  +  f_{24} $
1	1,8138	0,7876	0,6162	$5,0 \cdot 10^{-7}$	$6,4 \cdot 10^{-7}$
2	3,6276	0,2406	0,9706	$3,1 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
3	5,4414	0,4086	0,9127	$7,8 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$
4	7,2552	0,8842	0,4671	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$
5	10,8828	0,6661	0,7458	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$3,8 \cdot 10^{-6}$
6	12,6966	0,0651	0,9979	$2,9 \cdot 10^{-7}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$
7	14,5104	0,5636	0,8260	$2,9 \cdot 10^{-6}$	$5,1 \cdot 10^{-6}$

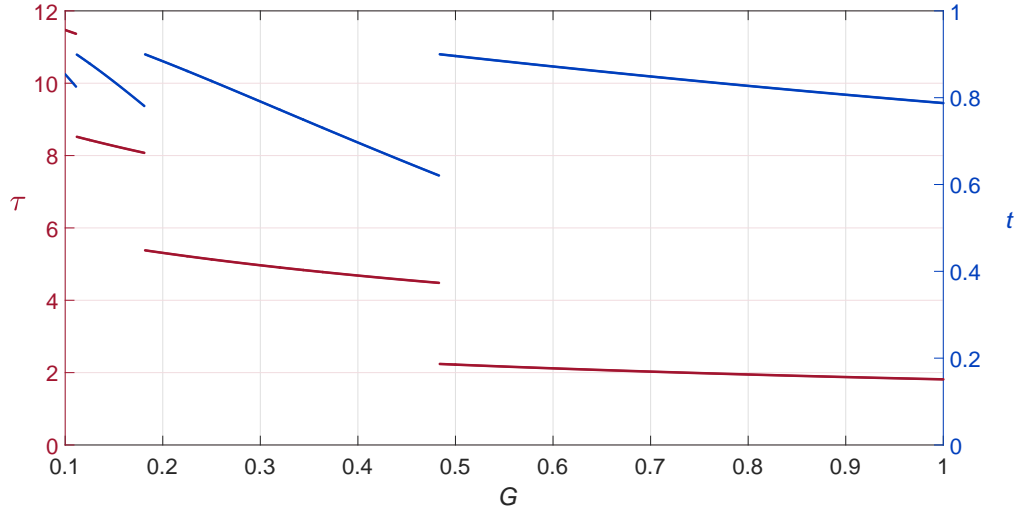
Zaměříme-li se na první nalezené minimum obou křivek v čase  $\tau = 1,8138$  (v čase  $\tau = 0$  řešení není relevantní), můžeme hledání minima zpřesnit jemnějším dělením intervalu. Zvolili jsme čas z intervalu  $\tau \in \langle 1,8; 1,83 \rangle$  s krokem  $10^{-6}$ . Vložený graf v Grafu 1 zobrazuje přiblížení pro časy blízké první nalezené minimální hodnotě. Z hlediska stability řešení lze říci, že v okolí lokálního minima lze obě křivky aproximovat lineární funkcí.

V úvodu této kapitoly bylo zmíněno, že hodnota parametru  $G$  je pevně dána konkrétním nastavením experimentu, tudíž vyžadujeme, aby pro libovolnou relevantní hodnotu parametru  $G$  bylo nalezeno řešení. Proto jsme následně rozšířili zkoumaný interval pro parametr  $G$  na  $\langle 0, 1; 1 \rangle$  a jeho hodnotu jsme měnili s krokem  $10^{-3}$ . Odpovídající hodnoty nejnižšího nalezeného času  $\tau$  spadají do intervalu  $\tau \in \langle 0; 12 \rangle$ . Čas jsme měnili s krokem  $10^{-4}$ , aby bylo dosaženo nízké nepřesnosti, maximálně  $\epsilon = 10^{-3}$ .

Z Grafu 2, v němž jsou zobrazeny závislosti nalezeného času  $\tau$  a výsledné propustnosti  $t$  na parametru  $G$ , je patrné, že na intervalu  $G \in \langle 0, 1; 1 \rangle$  existují tři



**Graf 1:** Závislost hodnot  $t^2 + r^2 - 1$  (červená) a  $|f_{13}| + |f_{24}|$  (modrá) na čase  $\tau \in \langle 0; 15 \rangle$  s krokem  $10^{-4}$  pro  $G = 1$ . Vložený graf zobrazuje přiblížení hodnot pro časy z intervalu  $\tau \in \langle 1,8; 1,83 \rangle$  s krokem  $10^{-6}$ .



**Graf 2:** Závislost nejnižšího nalezeného času  $\tau$  (červená) a výsledné propustnosti  $t$  (modrá) na parametru  $G$  pro  $\tau \in \langle 0; 12 \rangle$ .

oblasti, v nichž pozorujeme nespojitost křivky. Nespojitost je dána tím, že nejvyšší povolená hodnota hledané transmisivity je 0,9. Po překročení této hodnoty tudíž musí být nalezen nejbližší vyšší čas  $\tau$  tak, aby řešení vyhovovalo podmínkám P3-P5. Vyjma těchto nespojitých oblastí platí, že při malé změně  $G$  dochází k malým změnám funkčních hodnot. Další trend, který v Grafu 2 můžeme pozorovat, je postupné zvyšování nejnižšího nalezeného času  $\tau$  se snižujícím se parametrem  $G$ .

Obecně lze na základně předchozích výsledků předpokládat, že pro libovolně nízkou hodnotu  $G$  řešení existuje, avšak čas  $\tau$  bude velice rychle narůstat se snižujícím se  $G$ . Zvolili jsme několik diskretních hodnot parametru  $G$  z intervalu  $\langle 0; 0,1 \rangle$  a našli nejnižší čas  $\tau$  pro který existuje řešení v požadovaném tvaru. Výsledky shrnuje Tabulka 3.2. Snížili-li se parametr  $G$  o jeden řád, první nalezený čas  $\tau$  zvýší taktéž o jeden řád. Vysoké hodnoty času však nejsou relevantní, neboť při odvození v podkapitole 1.1.3 jsme hledali stacionární řešení, kdy pro malé časy lze považovat pozice a hybnosti membrán za konstanty.

**Tabulka 3.2:** První nalezená řešení pro různé diskretní hodnoty  $G \in \langle 0; 0,01 \rangle$ .

$G$	$\tau$	$t$	$r$	$t^2 + r^2 - 1$	$ f_{13}  +  f_{24} $
0,1	11,5	0,8539	0,5205	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$
0,05	21,0	0,8719	0,4897	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$
0,01	96,4	0,8871	0,4616	$4,2 \cdot 10^{-7}$	$4,8 \cdot 10^{-7}$
0,005	187,6	0,8926	0,4509	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$4,2 \cdot 10^{-8}$
0,001	1971,0	0,5529	0,8333	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$

# Kapitola 4

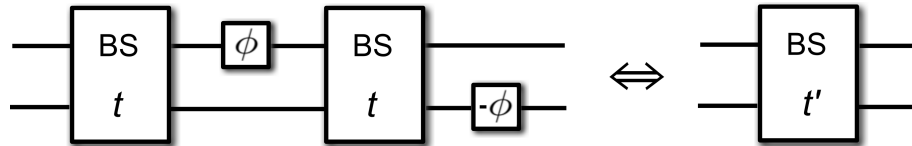
## Důkaz obecnosti řešení

Máme-li systém s pevně danou hodnotou parametru  $G$ , dokážeme pomocí postupného optického čerpání rezonátorů zkonstruovat interakci BS s diskrétními výslednými hodnotami transmisivity. V této kapitole ukážeme, že jsme schopni zkonstruovat BS s libovolným dělicím poměrem označeným  $t'$ , jestliže zařadíme za sebe dvě operace BS s nalezeným dělicím poměrem  $t$  a vhodně manipulujeme s fázovými posuvy. Důkaz tohoto tvrzení je ekvivalentní důkazu na systému s klasickými optickými děliči svazků, které proto budeme také značit BS. V této kapitole budeme uvažovat dva děliče svazku fotonů zařazených do konfigurace Machova-Zehnderova interferometru se dvěma vstupními svazky. Interferometr jako celek, stejně jako jeden BS, lze reprezentovat abstraktním prvkem se dvěma vstupy a dvěma výstupy [20].

Uvažujme následující uspořádání: dva optické svazky dopadají na dělič svazku BS s dělicím poměrem  $t$ , následně mezi oběma děliči přidáme jednomu svazku fázi  $\phi$ , dále svazky dopadají na druhý BS se stejným dělicím poměrem  $t$  a nakonec přidáme druhému svazku fázi  $-\phi$ . Schematicky je uspořádání prvků zakresleno na Obrázku 5. Matematicky lze každý prvek reprezentovat maticí. Jsou-li prvky zařazeny za sebou, pak jim odpovídající matice násobíme, proto můžeme snadno vyjádřit tvar výstupních svazků

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 e^{i\phi} - r^* r & r t e^{i\phi} + r t^* \\ -r^* t^* e^{-i\phi} - r^* t & t^{*2} e^{-i\phi} - r r^* \end{pmatrix}.$$

Cílem je dokázat, že systém tvořený Mach-Zehnerovým interferometrem s vhodně přidanými fázemi (viz Obrázek 5 vlevo) je ekvivalentní systému, který je tvořen pouze jedním BS s pevně zvolenou transmisivitou  $t'$ . Tvrzení platí právě tehdy, když



**Obrázek 5:** Schematický obrázek Machova-Zehnderova interferometru s přidanou fází  $\phi$  uvnitř a  $-\phi$  vně interferometru (vlevo). Tento systém je ekvivalentní jednomu děliči svazku s dělicím poměrem  $t'$  (vpravo).

platí maticová rovnost

$$\begin{pmatrix} t^2 e^{i\phi} - r^* r & r t e^{i\phi} + r t^* \\ -r^* t^* e^{-i\phi} - r^* t & t^{*2} e^{-i\phi} - r r^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t' & r' \\ -r'^* & t'^* \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Výsledky numerické optimalizace uvedené v předchozí kapitole jsou diskrétní a reálné hodnoty  $t$ . Bez újmy na obecnosti v důkazu proto klademe  $t \in \mathbb{R}$ , tudíž  $r = \sqrt{1 - t^2}$ , obecně ale  $t' \in \mathbb{C}$ . Za tohoto předpokladu z (4.1) vyplývá

$$\begin{aligned} t' &= t^2 e^{i\phi} - (1 - t^2), \\ r' &= t \sqrt{1 - t^2} \cdot e^{i\phi} + t \sqrt{1 - t^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Po rozepsání exponenciály pomocí Eulerova vzorce můžeme v obou rovnicích na pravé straně rozdělit reálnou a imaginární část. Dále použijeme definici absolutní hodnoty komplexního čísla  $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$  k vyjádření  $|t'|^2$  v závislosti na úhlu  $\phi$ . Zmíněné úpravy vedou k rovnicím

$$\begin{aligned} |t'|^2 &= 1 - 2t^2(1 - t^2)(1 + \cos \phi), \\ |r'|^2 &= 2t^2(1 - t^2)(1 + \cos \phi). \end{aligned} \quad (4.3)$$

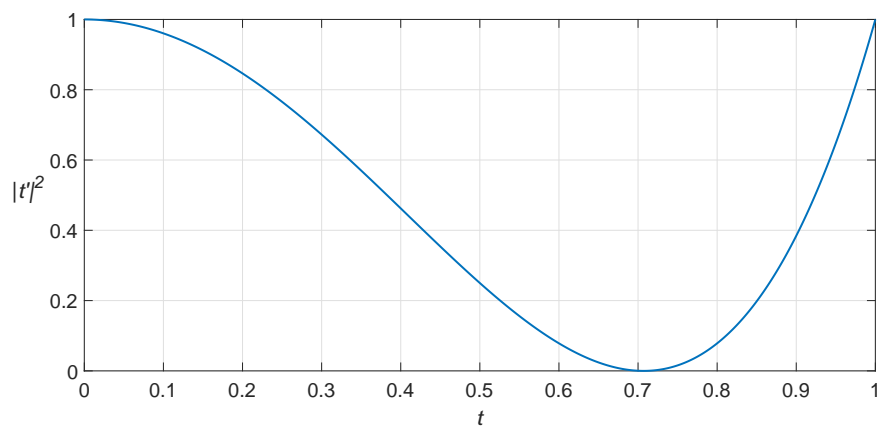
Proveďme diskuzi možných výstupních hodnot  $|t'|^2$  pro limitní hodnoty úhlu  $\phi$ :

- (a)  $\phi = \pi \Rightarrow |t'|^2 = 1$ ;
- (b)  $\phi = 0 \Rightarrow |t'|^2 = 1 - 4t^2(1 - t^2)$ .

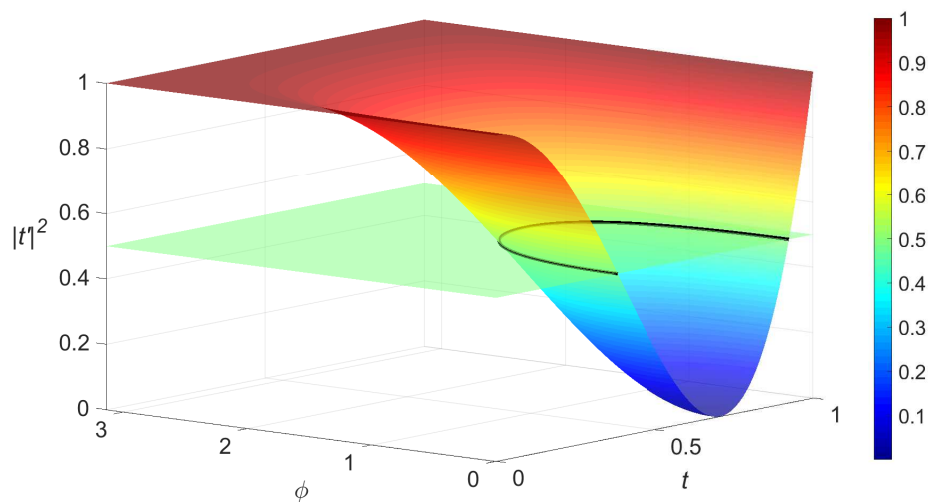
Pokud přidaná fáze  $\phi = \pi$ , obdržíme na výstupu vždy  $|t'|^2 = 1$ . Jestliže však fázi nepřidáme, pak existuje jediná hodnota  $t'$ , které lze dosáhnout zařazením dvou děličů za sebe, což je zobrazeno v Grafu 3. Kdybychom zmenšovali fázi od  $\pi$  do 0, funkce zobrazená v Grafu 3 se bude postupně přibližovat ke konstantní funkci  $|t'|^2 = 1$ .

Stačí ukázat, že  $|t'|^2$  může nabývat libovolné hodnoty z intervalu  $\langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$ , pro libovolné pevné  $t \in \langle 0; 1 \rangle$  a vhodně zvolené  $\phi \in \langle 0; \pi \rangle$ . Pokud toto tvrzení dokážeme, kvadrátu výsledné transmisivity z intervalu  $\langle 0; \frac{1}{2} \rangle$  lze dosáhnout formální záměnou  $t' \rightarrow r'$ , která odpovídá otočení děliče o  $180^\circ$ .

Důkaz byl proveden graficky. Funkce dvou proměnných  $t$  a  $\phi$ , jejíž funkční hodnoty odpovídají  $|t'|^2$ , je vykreslena v grafu 4 spolu s rovinou  $|t'|^2 = \frac{1}{2}$ . Z průsečíku těchto dvou ploch jsme odečetli, že pro  $t \in \langle 0,38; 0,93 \rangle$  a vhodně zvolený úhel  $\phi \in \langle 0; \pi \rangle$  lze na výstupu dosáhnout libovolné hodnoty  $|t'|^2 \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ . Podmínka P3, kterou jsme zavedli při hledání numerického řešení v podkapitole 3.1, je ještě silnější, neboť za maximální hodnotu transmisivity povoluje  $t_{\max} = 0,9$  a minimální  $t_{\min} = 0,44$ . Tudíž řešení nalezená v kapitole 3 nám umožňují zkonstruovat interakci typu dělič svazku s libovolným dělicím poměrem.



**Graf 3:** Funkce  $|t'|^2 = 1 - 4t^2(1 - t^2)$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .



**Graf 4:** Funkce  $|t'|^2 = 1 - 2t^2(1 - t^2)(1 - \cos \phi)$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$ .

# Závěr

Interakci typu dělič svazku lze na systému dvou oscilujících membrán zavěšených uvnitř Fabry-Perotova rezonátoru realizovat pomocí vhodné posloupnosti čerpání jednotlivých rezonátorů. Čerpání levého či pravého rezonátoru způsobí fázový posuv v odpovídajícím rezonátoru, kdežto čerpáním vnitřního rezonátoru lze modulovat vazbu mezi oscilátory. Výstupní dělicí poměr  $t$  je dán parametry systému, které zpravidla nelze spojitě měnit. Ukázali jsme, že na daném systému jsme schopni dosáhnout interakce typu dělič svazku s libovolným dělicím poměrem  $t'$ , jestliže za sebe zařadíme dvě interakce typu dělič svazku spolu s vhodně přidanými fázovými posuvy.

V programu MATLAB byla hledána kombinace dvou volitelných parametrů systému  $G$  a  $\tau$  tak, aby matice popisující dynamiku systému nabývala požadovaného tvaru matice děliče svazku (2.7). Pro každý zvolený parametr  $G$  bylo v čase  $\tau$  nalezeno více relevantních řešení. V dalších výpočtech jsme se z důvodu stability zaměřili pouze na první nalezená řešení. Řešení byla hledána pro  $G \in \langle 0, 1; 1 \rangle$  s krokem  $10^{-3}$ ; čas byl měněn s jemnějším krokem  $10^{-4}$ , aby odchylka daná fyzikální podmínkou pro odrazivost a propustnost  $t^2 + r^2 - 1 < \epsilon$  byla nižší než  $\epsilon = 10^{-3}$ . Pro libovolný parametr  $G$  z uvažovaného intervalu byl nalezen čas  $\tau \in (0, 12)$  a odpovídající hodnoty propustnosti a odrazivosti nižší než 0,9.

Možným pokračováním této práce je rozšíření, v němž bude rigorózně popsáno působení všech šumových operátorů a operátorů ztrát, které jsme v prvním přiblížení zanedbali. Pak bude možné teoretické výsledky experimentálně ověřit. Druhou možností je pokusit se na podobném systému zkonstruovat jiný typ interakce mezi oscilátory.

# Literatura

- [1] Aspelmeyer, M., Kippenberg, T. J. & Marquardt, F. Cavity optomechanics. *Rev. Mod. Phys.* **86**, 1391–1452 (2014).
- [2] V.B. Braginskii, A. M. Ponderomotive effects of electromagnetic radiation. *Soviet Physics JETP* **25**, 653–655 (1967).
- [3] V.B. Braginskii, A. M. & Tikhonov, M. Y. Ponderomotive effects of electromagnetic radiation. *Soviet Physics JETP* **31**, 829–831 (1970).
- [4] Thomas Rakich, P. & Marquardt, F. Quantum theory of continuum optomechanics. *New J. Phys* (2016).
- [5] Bemani, F., Motazedifard, A., Roknizadeh, R., Naderi, M. H. & Vitali, D. Synchronization dynamics of two nanomechanical membranes within a fabry-perot cavity. *Phys. Rev. A* **96**, 023805 (2017).
- [6] Paternostro, M. *et al.* Reconstructing the dynamics of a movable mirror in a detuned optical cavity. *New J. Phys* **8**, 107 (2006).
- [7] Diedrich, F., Bergquist, J. C., Itano, W. M. & Wineland, D. J. Laser cooling to the zero-point energy of motion. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 403–406 (1989).
- [8] Schliesser, A., Rivière, R., Anetsberger, G., Arcizet, O. & Kippenberg, T. J. Resolved-sideband cooling of a micromechanical oscillator. *Nature Physics* **4**, 415–419 (2008).
- [9] Jähne, K. *et al.* Cavity-assisted squeezing of a mechanical oscillator. *Phys. Rev. A* **79** (2009).
- [10] Groeblacher, S., Hammerer, K., Vanner, M. R. & Aspelmeyer, M. Observation of strong coupling between a micromechanical resonator and an optical cavity field. *Nature* **460**, 724–7 (2009).
- [11] Buchmann, L. F. *et al.* Macroscopic tunneling of a membrane in an optomechanical double-well potential. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 210403 (2012).
- [12] Jayich, A. M. *et al.* Dispersive optomechanics: a membrane inside a cavity. *New J. Phys* **10**, 095008 (2008).
- [13] Garg, D., Chauhan, A. K. & Biswas, A. Adiabatic transfer of energy fluctuations between membranes inside an optical cavity. *Phys. Rev. A* **96**, 023837 (2017).



- [14] Stannigel, K. *et al.* Optomechanical quantum information processing with photons and phonons. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 013603 (2012).
- [15] Braunstein, S. L. & van Loock, P. Quantum information with continuous variables. *Rev. Mod. Phys.* **77**, 513–577 (2005).
- [16] Irish, E. K., Gea-Banacloche, J., Martin, I. & Schwab, K. C. Dynamics of a two-level system strongly coupled to a high-frequency quantum oscillator. *Phys. Rev. B* **72**, 195410 (2005).
- [17] Fujii, K. Introduction to the rotating wave approximation (rwa) : Two coherent oscillations. *J. Mod. Phys.* **08** (2013).
- [18] Pina-Otey, S., Jiménez, F., Degenfeld-Schonburg, P. & Navarrete-Benlloch, C. Classical and quantum-linearized descriptions of degenerate optomechanical parametric oscillators. *Phys. Rev. A* **93**, 033835 (2016).
- [19] Kubala, B., Ludwig, M. & Marquardt, F. Optomechanics 153–164 (2009).
- [20] Reck, M., Zeilinger, A., Bernstein, H. & Bertani, P. Experimental realization of any discrete unitary operator. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 58–61 (1994).