

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
NUMERICKÉ INTEGROVÁNÍ



Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.**  
Vypracoval: **Bc. Jan Hebelka**  
Studijní program: N1103 Aplikovaná matematika  
Studijní obor Aplikace matematiky v ekonomii  
Forma studia: prezenční  
Rok odevzdání: 2015

## BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

**Autor:** Bc. Jan Hebelka

**Název práce:** NUMERICKÉ INTEGROVÁNÍ

**Typ práce:** Diplomová práce

**Pracoviště:** Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

**Vedoucí práce:** RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

**Rok obhajoby práce:** 2015

**Abstrakt:** Numerické integrování se využívá k přibližnému výpočtu určitého integrálu. Práce se zabývá několika různými přístupy k této problematice, konkrétně Newton-Cotesovými a Gaussovými vzorci, výpočtu pomocí Taylorova polynomu a pomocí metody Monte Carlo. Metody jsou následně prezentovány na vytvořené aplikaci v programu Matlab.

**Klíčová slova:** Polynomiální interpolace, Taylorův polynom, numerické integrování, Newton-Cotesovy vzorce, Gaussovy vzorce, Legendery polynomy, metoda Monte Carlo, Matlab

**Počet stran:** 117

**Počet příloh:** 1

**Jazyk:** český

## BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

**Author:** Bc. Jan Hebelka

**Title:** NUMERICAL INTEGRATION

**Type of thesis:** Diploma thesis

**Department:**

Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics

**Supervisor:** RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

**The year of presentation:** 2015

**Abstract:** Numerical integration is used to approximate calculation of definite integrals. This thesis deals with several different approaches to this issue, specifically Newton-Cotes formula, Gauss quadrature rule, calculation using Taylor polynome and Monte Carlo method. The methods are presented via an application, which I created in Matlab.

**Key words:** Polynomial interpolation, Taylor polynome, Numerical integration, Newton-Cotes formula, Gauss quadrature rule, Legendre polynome, Monte Carlo method, Matlab

**Number of pages:** 117

**Number of appendices:** 1

**Language:** Czech

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně pod vedením paní RNDr. Martiny Pavlačkové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 1. března 2015

# Obsah

Úvod	7
<b>1 Interpolace funkcí a aproximace funkcí pomocí Taylorova polynomu</b>	<b>8</b>
1.1 Polynomiální interpolace	8
1.1.1 Metoda neurčitých koeficientů	9
1.1.2 Lagrangeova metoda	10
1.1.3 Newtonova metoda	13
1.1.4 Chyba při polynomiální interpolaci	15
1.2 Aproximace funkcí pomocí Taylorova polynomu	18
<b>2 Úvod do numerického integrování</b>	<b>21</b>
2.1 Newton-Cotesovy vzorce	21
2.1.1 Obdélníkové pravidlo	23
2.1.2 Lichoběžníkové pravidlo	26
2.1.3 Simpsonovo pravidlo	29
2.1.4 Složené kvadraturní formule	36
2.1.4.1 Složené obdélníkové pravidlo	36
2.1.4.2 Složené lichoběžníkové pravidlo	40
2.1.4.3 Složené Simpsonovo pravidlo	44
2.2 Gaussovy vzorce	48
2.2.1 Gaussovy kvadraturní formule s využitím Legendových polynomů	52
2.2.2 Složené kvadraturní formule	62
2.3 Přibližný výpočet určitého integrálu při aproximaci funkce pomocí Taylorova polynomu	67
2.3.1 Složené formule	84
2.4 Přibližný výpočet určitého integrálu pomocí metody Monte Carlo	93
2.4.1 Geometrická metoda založená na geometrické pravděpodobnosti	94
2.4.2 Metoda založená na odhadu střední hodnoty náhodné proměnné	101
<b>3 Popis programu pro přibližný výpočet určitého integrálu a porovnání jednotlivých metod na konkrétních příkladech</b>	<b>106</b>
Závěr	114
Literatura	116

## **Poděkování**

Rád bych tímto poděkoval své vedoucí diplomové práce, paní RNDr. Martině Pavlačkové, Ph.D., za ochotu, rady, odborné připomínky a čas, který mi věnovala. Také bych rád poděkoval své rodině, která mě velmi podporovala.

# Úvod

Ve své diplomové práci jsem se rozhodl navázat a trochu rozšířit problematiku integrálního počtu, které jsem se věnoval v bakalářské práci. Tentokrát se budu detailněji věnovat *numerickému integrování*, které se využívá k přibližnému výpočtu určitých integrálů.

V práci se postupně zabývám různými přístupy k této problematice – nejdřív jsou studovány Newton-Cotesovy vzorce, kde představuji metodu levého a pravého odhadu, obdélníkovou metodu, lichoběžníkovou metodu a Simpsonovu metodu. Dále je v práci popsán přístup k této problematice pomocí Gaussových vzorců, rozvoje v Taylorovu řadu a metody Monte Carlo. V práci jsou také odvozeny výrazy pro maximální hodnoty chyb u jednotlivých metod, díky nimž lze stanovit interval, v němž se nachází skutečná hodnota určitého integrálu. U většiny metod jsem naprogramoval také funkce v programu Matlab, které přibližnou hodnotu integrálu vždy danou metodou pro danou funkci, interval a počet dělicích bodů vypočítají a graficky aproximaci znázorní.

V poslední části se ještě zabývám srovnáním jednotlivých metod se snahou popsat jejich výhody a nevýhody, aby si čtenář mohl udělat obrázek a případně i vybrat metodu, která by byla nejvýhodnější pro jeho řešený problém.

# 1 Interpolace funkcí a aproximace funkcí pomocí Taylorova polynomu

V této kapitole se budeme zabývat tím, jak lze složitou funkci nahradit funkcí jednodušší, s níž se „lépe pracuje“. Nejprve budeme studovat interpolační úlohu, u níž chceme, aby grafy původní i nové funkce procházely několika stejnými body. Poté se budeme zabývat úlohou aproximace funkce prostřednictvím Taylorova polynomu, v níž požadujeme, aby původní funkce i aproximující polynom měly v zadaném bodě stejnou funkční hodnotu i hodnotu derivací až do řádu  $n$ .

Při tvorbě této kapitoly byly využity zdroje [1], [6], [7], [9], [10] a [12] – [17].

## 1.1 Polynomiální interpolace

V mnoha případech potřebujeme nahradit komplikovanou funkci  $f$  jednodušší funkcí. Dále předpokládáme, že u dané funkce  $f$  známe v uzlech  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $x_i \neq x_j$  pro  $i \neq j$ , její funkční hodnoty  $f(x_i) = f_i$ .

V případě interpolační úlohy hledáme funkci  $\varphi$ , pro niž platí:

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Interpolace polynomy patří mezi nejjednodušší úlohy. Při polynomiální interpolaci se snažíme najít polynom  $P_n(x)$  stupně nejvýše  $n$  splňující interpolační podmínky:

$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

**Poznámka 1.1.** *Symbolem  $\Pi_n$  bude v textu označována třída všech polynomů stupně nejvýše  $n$ .*



Jelikož je funkce  $f$  pouze aproximována nějakou jinou funkcí, dopouštíme se tak určité chyby, která se nazývá *chyba interpolace*. O té dále pojednává kapitola [1.1.4](#).

### 1.1.1 Metoda neurčitých koeficientů

Už bez jakékoliv znalosti o interpolaci se dá interpolační polynom nalézt pomocí soustavy lineárních rovnic. Hledáme-li polynom  $P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n$ , aby platilo  $P_n(x_i) = f_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , pak lze tyto podmínky přepsat následovně:

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= a_0 \cdot x_0^n + a_1 \cdot x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x_0 + a_n = f_0 \\ P_n(x_1) &= a_0 \cdot x_1^n + a_1 \cdot x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x_1 + a_n = f_1 \\ &\vdots \\ P_n(x_n) &= a_0 \cdot x_n^n + a_1 \cdot x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x_n + a_n = f_n. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že jsme dostali  $n + 1$  rovnic o  $n + 1$  neznámých, což je jednoduše řešitelný problém. V praxi však není tato metoda příliš používaná díky zvětšující se početní náročnosti při zvyšujícím se  $n$ . Proto se častěji používají metody, které jsou uvedeny v následujících dvou podkapitolách.

**Příklad 1.1.** *Uvažujme polynom  $3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 6$  a jeho funkční hodnoty v bodech  $-1$ ,  $1$  a  $3$  (viz. tabulka). Pomocí metody neurčitých koeficientů a hodnot daných tabulkou získejte příslušný interpolační polynom. (Získaný interpolační polynom samozřejmě musí vyjít stejně jako polynom zadaný.)*

$i$	0	1	2
$x_i$	-1	1	3
$f_i$	13	5	21

Tabulka 1: Zadané body a funkční hodnoty k Příkladu 1.1

$$P_2(x_0) = a_0 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0^1 + a_2 \cdot x_0^0 = f_0$$

$$P_2(x_1) = a_0 \cdot x_1^2 + a_1 \cdot x_1^1 + a_2 \cdot x_1^0 = f_1$$

$$P_2(x_2) = a_0 \cdot x_2^2 + a_1 \cdot x_2^1 + a_2 \cdot x_2^0 = f_2$$

$$a_0 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1)^1 + a_2 \cdot (-1)^0 = 13$$

$$a_0 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1^1 + a_2 \cdot 1^0 = 5$$

$$\underline{a_0 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3^1 + a_2 \cdot 3^0 = 21}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 = 13$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 5$$

$$\underline{9 \cdot a_0 + 3 \cdot a_1 + a_2 = 21}$$

Vyjádríme si z první rovnice  $a_0$  a dosadíme do druhé a třetí rovnice:

$$\Rightarrow a_0 = 13 + a_1 - a_2$$

$$13 + a_1 - a_2 + a_1 + a_2 = 5$$

$$\underline{9 \cdot (13 + a_1 - a_2) + 3 \cdot a_1 + a_2 = 21}$$

$$13 + 2 \cdot a_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \underline{\underline{-4}}$$

$$12 \cdot a_1 - 8 \cdot a_2 = -96 \quad \Rightarrow \quad 12 \cdot (-4) - 8 \cdot a_2 = -96 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \underline{\underline{6}}$$

Dopočítáme  $a_0$ :  $a_0 = 13 + a_1 - a_2 = 13 - 4 - 6 = \underline{\underline{3}}$

Dostáváme tedy:  $a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2 = \underline{\underline{3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 6}}$ .

### 1.1.2 Lagrangeova metoda

Základ metody spočívá v tom, že se hledaný polynom nesestrojí přímo, ale pomocí tzv. *fundamentálních polynomů*  $l_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , majících stupeň  $n$ , pro které platí:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Polynom  $l_i(x)$ , který má kořeny  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$ , pak lze psát ve tvaru:

$$l_i(x) = A_i \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n), \quad (1)$$

jenž bude vyhovovat podmínce  $l_i(x_i) = 1$ , pokud

$$A_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}.$$

Po dosazení konstanty  $A_i$  do vztahu (1) dostáváme:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}. \quad (2)$$

Polynom  $l_i(x)$  definovaný vztahem (2) se nazývá *i-tý fundamentální polynom*.

Polynom, který hledáme a který nazýváme *Lagrangeův interpolační polynom*, lze pak psát ve tvaru

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot l_i(x),$$

jelikož každý fundamentální polynom bude nulový ve všech uzlech mimo jednoho, v němž nabývá hodnoty 1. Znamená to, že hodnota lineární kombinace v *i*-tém uzlu je určena pouze *i*-tým fundamentálním polynomem.

**Poznámka 1.2.** *V textu dále bude použito i následující označení:*

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

kde  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou již výše zmíněné uzly.

Při derivování funkce  $\omega_{n+1}(x)$  dostáváme výraz

$$\begin{aligned} \omega'_{n+1}(x) = & (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + (x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + \\ & + \dots + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

a pokud dosadíme za  $x$  nějaké konkrétní  $x_i$ , pak se vynulují všechny jednotlivé sčítance mimo jednoho, kde se  $x_i$  nevyskytuje. Dostáváme tedy

$$\omega'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)$$

a vztah (2) lze tudíž psát ve tvaru

$$l_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i) \cdot \omega'_{n+1}(x_i)} \quad \text{pro } i = 0, \dots, n.$$

Ovšem ani Lagrangeova metoda není příliš vhodná pro praktické výpočty, protože při změně počtu uzlů je vždy potřeba přepočítat všechny fundamentální polynomy. Tento problém řeší Newtonova metoda. Využití Lagrangeovy metody je tak spíše teoretické, např. při odvozování metod numerického derivování a integrování, čehož dále v této práci bude využito.

**Příklad 1.2.** *Uvažujme polynom  $3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 6$  a jeho funkční hodnoty v bodech  $-1, 1$  a  $3$  (viz. tabulka). Pomocí Lagrangeovy metody a hodnot daných tabulkou získajte příslušný interpolační polynom. (Získaný interpolační polynom samozřejmě musí vyjít stejně jako polynom zadaný.)*

$i$	0	1	2
$x_i$	-1	1	3
$f_i$	13	5	21

Tabulka 2: Zadané body a funkční hodnoty k Příkladu 1.2

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1) \cdot (x - 3)}{(-1 - 1) \cdot (-1 - 3)} = \frac{x^2 - 4 \cdot x + 3}{8},$$

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} = \frac{(x - (-1)) \cdot (x - 3)}{(1 - (-1)) \cdot (1 - 3)} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 3)}{(1 + 1) \cdot (1 - 3)} = \\ &= -\frac{x^2 - 2 \cdot x - 3}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2(x) &= \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} = \frac{(x - (-1)) \cdot (x - 1)}{(3 - (-1)) \cdot (3 - 1)} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 1)}{(3 + 1) \cdot (3 - 1)} = \\ &= \frac{x^2 - 1}{8}. \end{aligned}$$

Protože

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot l_i(x),$$

dostáváme

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 13 \cdot \frac{x^2 - 4 \cdot x + 3}{8} + 5 \cdot \left( -\frac{x^2 - 2 \cdot x - 3}{4} \right) + 21 \cdot \frac{x^2 - 1}{8} = \frac{13}{8} \cdot x^2 - \frac{52}{8} \cdot x + \\ &+ \frac{39}{8} - \frac{10}{8} \cdot x^2 + \frac{20}{8} \cdot x + \frac{30}{8} + \frac{21}{8} \cdot x^2 - \frac{21}{8} = \frac{24}{8} \cdot x^2 - \frac{32}{8} \cdot x + \frac{48}{8} = \underline{\underline{3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 6}}. \end{aligned}$$

### 1.1.3 Newtonova metoda

Jak je již výše uvedeno, Lagrangeova metoda má jednu velkou nevýhodu, a to, že při změně počtu uzlů je třeba přepočítat všechny fundamentální polynomy. Proto se pro praktické výpočty často používá Newtonova metoda, kde tento problém odpadá, což bude názorně vidět na Příkladu 1.3. Nejprve je však potřeba zavést pojem *poměrná diference*.

**Definice 1.1.** *Nechť je dána množina bodů  $\{x_i, i \in Z\}$ ,  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j \in Z$ , a nechť je funkce  $f(x)$  v těchto bodech definovaná. Pak poměrnou diferencí prvního řádu definujeme vztahem*

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \quad \text{pro } i \neq j, i, j = 0, \dots, n.$$

*Obecně poměrnou diferencí  $k$ -tého řádu funkce  $f(x)$  v bodech  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$  definujeme pro  $k \in N$ ,  $k \geq 2$ , vztahem*

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

**Věta 1.1.** *Nechť  $P_n(x) \in \Pi_n$  je interpolační polynom pro data  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ . Pak lze tento polynom psát ve tvaru*

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot f[x_0, \dots, x_n], \quad (3)$$

*kde  $f[x_0, \dots, x_n]$  je poměrná diference  $n$ -tého řádu funkce  $f(x)$ .*

Důkaz této věty lze nalézt např. v [12].

**Poznámka 1.3.** *Interpolační polynom daný vztahem (3) se nazývá Newtonův interpolační polynom.*

**Příklad 1.3.** *Uvažujme polynom  $3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 6$  a jeho funkční hodnoty v bodech  $-1, 1$  a  $3$  (viz. tabulka). Pomocí Newtonovy metody a hodnot daných tabulkou získajte příslušný interpolační polynom. (Získaný interpolační polynom samozřejmě musí vyjít stejně jako polynom zadaný.)*

$i$	0	1	2
$x_i$	-1	1	3
$f_i$	13	5	21

Tabulka 3: Zadané body a funkční hodnoty k Příkladu 1.3

Vypočítáme poměrné diference a zapíšeme je do tabulky:

$i$	$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	-1	13		
			$f[x_0, x_1] = \frac{5 - 13}{1 - (-1)} = -4$	
1	1	5		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{8 - (-4)}{3 - (-1)} = 3$
			$f[x_1, x_2] = \frac{21 - 5}{3 - 1} = 8$	
2	3	21		

Tabulka 4: Poměrné diference

Polynom pak získáme následovně:

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f[x_0, x_1, x_2] = \\
 &= 13 + (x - (-1)) \cdot (-4) + (x - (-1)) \cdot (x - 1) \cdot 3 = 13 + (x + 1) \cdot (-4) + (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot 3 = \\
 &= 13 - 4 \cdot x - 4 + 3 \cdot x^2 - 3 = \underline{\underline{3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 6}}
 \end{aligned}$$

Na příkladu je velmi názorně vidět, že v případě přidání dalšího uzlu není třeba přepočítávat poměrné diference, ale stačí pouze dopočítat ty, které přibudou, tudíž by bylo hledání interpolačního polynomu jednoznačně snadnější než v předchozích případech.

#### 1.1.4 Chyba při polynomiální interpolaci

Při aproximaci funkce  $f$  interpolačním polynomem se dopouštíme určité chyby. Je zřejmé, že pouze v uzlových bodech bude tato chyba vždy nulová, mimo tyto body již však obecně nulová být nemusí. Zajímá nás tedy rozdíl  $f(\hat{x}) - P_n(\hat{x})$  pro  $\hat{x} \neq x_i$  pro každé  $i = 0, \dots, n$ .

Pro potřebu důkazu následující Věty 1.3 je ještě potřeba zmínit jednu větu, která se nazývá Rolleova.

**Věta 1.2.** (Rolleova) *Nechť pro funkci  $f$  platí, že*

- a)  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a; b \rangle$ ,
- b)  $f$  má (vlastní nebo nevlastní) derivaci na intervalu  $(a; b)$ ,
- c)  $f(a) = f(b)$ .

*Potom existuje alespoň jeden bod  $c \in (a; b)$  takový, že  $f'(c) = 0$ .*

Důkaz této věty lze nalézt např. v [7].

**Věta 1.3.** *Nechť je dána funkce  $f(x) \in C^{n+1} \langle a; b \rangle$ ,  $x_i \in \langle a; b \rangle$ ,  $x_i \neq x_j$  pro  $i \neq j$ ,  $i, j = 0, \dots, n$ . Nechť  $P_n(x) \in \Pi_n$  je interpolační polynom takový, že  $P_n(x_i) = f_i$  pro každé  $i = 0, \dots, n$ . Pak pro každé  $\hat{x} \in \langle a; b \rangle$ ,  $\hat{x} \neq x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , existuje  $\eta \in (a; b)$  takové, že*

$$E_n(\hat{x}) = f(\hat{x}) - P_n(\hat{x}) = \frac{\omega_{n+1}(\hat{x})}{(n+1)!} \cdot f^{n+1}(\eta), \quad \text{kde } \eta = \eta(\hat{x}).$$

*Důkaz.* Sestrojíme Newtonův interpolační polynom pro body  $x_0, \dots, x_n, \hat{x}$ :

$$P_{n+1}(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot \\ \cdot f[x_0, \dots, x_n] + (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot f[x_0, \dots, x_n, \hat{x}], \quad (4)$$

tj. můžeme psát

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot f[x_0, \dots, x_n, \hat{x}].$$

Z toho plyne, že

$$P_{n+1}(\hat{x}) = P_n(\hat{x}) + (\hat{x} - x_0) \cdot \dots \cdot (\hat{x} - x_n) \cdot f[x_0, \dots, x_n, \hat{x}], \quad (5)$$

přičemž

$$P_{n+1}(x_i) = f_i \quad \text{pro } i = 0, \dots, n$$

a

$$P_{n+1}(\hat{x}) = f(\hat{x}).$$

Rovnost (5) tak můžeme přepsat a upravit následovně:

$$f(\hat{x}) = P_n(\hat{x}) + (\hat{x} - x_0) \cdot \dots \cdot (\hat{x} - x_n) \cdot f[x_0, \dots, x_n, \hat{x}],$$

$$f(\hat{x}) - P_n(\hat{x}) = (\hat{x} - x_0) \cdot \dots \cdot (\hat{x} - x_n) \cdot f[x_0, \dots, x_n, \hat{x}],$$

$$f(\hat{x}) - P_n(\hat{x}) = \omega_{n+1}(\hat{x}) \cdot f[x_0, \dots, x_n, \hat{x}],$$

kde  $f \in C^{n+1} \langle a; b \rangle$ ,  $x_i \in \langle a; b \rangle$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $\hat{x} \in \langle a; b \rangle$ .

Definujme funkci

$$F(x) = f(x) - P_{n+1}(x). \quad (6)$$

Jelikož víme, že funkce  $f \in C^{n+1}$ , tj. má derivace až do řádu  $n + 1$ , můžeme na vztah (6) aplikovat derivaci řádu  $n + 1$ :

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_{n+1}^{(n+1)}(x). \quad (7)$$



Aplikací Rolleovy věty 1.2 na funkci  $F^{(n)}$  plyne, že má funkce  $F^{(n+1)}$  alespoň jeden nulový bod na  $\langle a; b \rangle$ , tj. existuje  $\eta$  takové, že  $F^{(n+1)}(\eta) = 0$ . Následným dosazením a upravením vztahu (7) dostáváme rovnost:

$$f^{(n+1)}(\eta) = P_{n+1}^{(n+1)}(\eta), \quad \text{kde } \eta = \eta(\hat{x}). \quad (8)$$

Nyní ještě aplikujeme derivaci řádu  $n + 1$  také na vztah (4):

$$P_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n + 1)! \cdot f[x_0, \dots, x_n, \hat{x}],$$

a tedy lze též psát

$$P_{n+1}^{(n+1)}(\eta) = (n + 1)! \cdot f[x_0, \dots, x_n, \hat{x}].$$

Upravíme a využijeme vztahu (8):

$$f[x_0, \dots, x_n, \hat{x}] = \frac{P_{n+1}^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!}.$$

Výraz pro interpolační chybu pak vypadá následovně:

$$E_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!} \quad \text{pro každé } x \in \langle a; b \rangle.$$

□

**Poznámka 1.4.** Pokud existuje konstanta  $M_{n+1} \in \mathbb{R}$  tak, že  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$  pro všechna  $x \in \langle a; b \rangle$ , potom chybu lze odhadnout následovně:

$$|E_n(x)| \leq \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n + 1)!} \cdot M_{n+1},$$

přičemž odhad je závislý jak na vlastnostech funkce  $f$ , tak i na uzlech interpolace. Je dokázáno, že maximální hodnota chyby bude nejmenší v případě, pokud za uzly interpolace budeme volit kořeny jistých polynomů.

Navíc, existuje-li  $M \in \mathbb{R}$  takové, že  $|f^{(n)}(x)| \leq M$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in \langle a; b \rangle$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0$  pro všechna  $x \in \langle a; b \rangle$ , tj. posloupnost  $\{E_n(x)\}_1^\infty$  konverguje k funkci  $f(x)$  na  $\langle a; b \rangle$ . Důkaz tohoto faktu vyplývá přímo z toho, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

## 1.2 Aproximace funkcí pomocí Taylorova polynomu

Pokud funkci  $f$  v okolí nějakého bodu  $x_0$  aproximujeme polynomem vyššího stupně, získáme v mnoha případech lepší aproximaci. Na této myšlence funguje aproximace pomocí Taylorova polynomu, u nějž platí, že všechny derivace tohoto polynomu až do stupně  $n$  mají ve středu polynomu stejné funkční hodnoty jako odpovídající derivace funkce  $f$ .

Nechť  $f$  je libovolná funkce, která má v bodě  $x_0$  derivace až do řádu  $n$  včetně,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Potom lze funkci  $f$  na určitém okolí bodu  $x_0$  aproximovat tzv. *Taylorovým polynomem  $n$ -tého stupně funkce  $f$* , který je definován vztahem

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Na nějakém okolí bodu  $x_0$  tak platí  $f(x) \approx P_n(x)$ . Pokud bychom výše uvedený polynom derivovali a za  $x$  dosadili  $x_0$ , tak zjistíme, že funkční hodnoty i hodnoty derivací funkce  $f$  a Taylorova polynomu v bodě  $x_0$  se shodují, tj.

$$f(x_0) = P_n(x_0), f'(x_0) = P'_n(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

**Poznámka 1.5.** Při volbě  $x_0 = 0$  dostáváme tzv. *Maclaurinův polynom  $n$ -tého stupně funkce  $f$  ve tvaru*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Taylorův polynom dobře aproximuje funkci  $f$  jen na určitém blízkém okolí bodu  $x_0$ . Ve vzdálenějších bodech je obecně aproximace mnohem méně přesná. Při nahrazení dané funkce  $f$  Taylorovým polynomem se tak dopouštíme chyby, kterou značíme  $R_n(x)$  a jejíž velikost je  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ . O této chybě nám další informaci poskytuje následující věta.

**Věta 1.4.** (Taylorova) Nechť funkce  $f$  má na nějakém okolí bodu  $x_0$  derivace až do řádu  $n + 1$  včetně,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Potom na tomto okolí bodu  $x_0$  platí Taylorův vzorec

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + R_n(x),$$

kde  $R_n(x)$  je zbytek a lze jej vyjádřit např.

a) v Lagrangeově tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

b) v Cauchyově tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x - \xi)^n \cdot (x - x_0),$$

kde bod  $\xi$  leží mezi body  $x$  a  $x_0$ .

Důkaz této věty lze nalézt např. v [6].

Jak je z předchozí věty vidět, pro Taylorův vzorec je třeba derivace řádu  $n + 1$  oproti pouze derivaci řádu  $n$  při konstrukci Taylorova polynomu.

**Poznámka 1.6.** Existuje-li  $M \in \mathbb{R}$  takové, že  $|f^{(n)}(x)| \leq M$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in \langle a; b \rangle$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  pro všechna  $x \in \langle a; b \rangle$ , tj. posloupnost  $\{R_n(x)\}_1^\infty$  konverguje k funkci  $f(x)$  na  $\langle a; b \rangle$ . Důkaz tohoto faktu vyplývá přímo z toho, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

**Příklad 1.4.** Vypočítejte přibližnou hodnotu  $\sqrt[3]{5.2}$  pomocí Taylorova polynomu třetího stupně funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  v bodě  $x_0 = 5$ .

Taylorův polynom třetího stupně funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  obecně vypadá následovně:

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot (x - x_0)^3.$$

Nyní je třeba si vypočítat derivace funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  až do řádu 3 včetně a k tomu vyčíslit funkční hodnoty v bodě  $x_0 = 5$ :

$$f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \qquad f'(5) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}} \doteq 0.113998,$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}} \qquad f''(5) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{5^5}} \doteq -0.0152,$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27 \cdot \sqrt[3]{x^8}} \qquad f'''(5) = \frac{10}{27 \cdot \sqrt[3]{5^8}} \doteq 0.005067.$$

Dosazením dostáváme:

$$P_3(x) \doteq \sqrt[3]{5} + 0.113998 \cdot (x - 5) - \frac{0.0152}{2} \cdot (x - 5)^2 + \frac{0.005067}{6} \cdot (x - 5)^3.$$

Když do tohoto vztahu dosadíme  $x = 5.2$ , dostaneme přibližnou hodnotu  $\sqrt[3]{5.2}$ :

$$\sqrt[3]{5.2} \approx P_3(5.2) \doteq \underline{\underline{1.732478303}}.$$

Pro srovnání skutečná hodnota  $\sqrt[3]{5.2}$  je 1.732478211...

## 2 Úvod do numerického integrování

U řešení různých problémů často potřebujeme najít hodnotu určitého integrálu. To však nemusí být vždy jednoduché, mnohdy nám nepomohou ani metody *per partes* či *substituční metoda*. V mnoha případech nemusí jít takový integrál vůbec analyticky spočítat. Často též sice symbolické řešení existuje, ale může být velmi náročné a zdouhavé, oproti tomu numerická integrace může být velmi snadná. Můžeme též mít funkci určenou jen několika diskrétními body a jejich funkčními hodnotami, z čehož určitý integrál standardními metodami také nespočteme. Právě k řešení úloh s těmito zmíněnými problémy se využívá *numerického integrování*.

Následující podkapitoly budou zaměřeny na několik možných přístupů k této problematice.

Při tvorbě této kapitoly byly využity zdroje [1] – [5], [8] – [13] a [15] – [18].

### 2.1 Newton-Cotesovy vzorce

Vychází především z myšlenky, že velmi dobře jdou integrovat polynomy. Proto k funkci  $f$  sestavíme interpolační polynom  $P_n$ , který budeme integrovat místo  $f$ , tedy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx. \quad (9)$$

U Newton-Cotesových vzorců se dále uvažuje, že všechny uzly jsou ekvidistantní, tj. předpokládáme, že jsou dány body  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$  s vlastností  $x_i = x_0 + i \cdot h$  pro  $i = 0, \dots, n$  a  $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ . Interpolační polynom k funkci  $f$  pak lze zapsat v následujícím tvaru:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \varphi_i(x), \quad \text{kde } \varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Dosazením tohoto výrazu do přibližné rovnosti (9) dostaneme tzv. *Newton-Cotesův vzorec n-tého stupně*:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i \cdot f(x_i),$$

kde  $w_i = \int_a^b \varphi_i(x) dx$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou *integrační váhy*.

Dále bude představeno několik různých pravidel, která využívají právě Newton-Cotesovy formule. Ty se ještě rozlišují na *formule uzavřeného typu*, kde je k výpočtům potřeba znát funkční hodnoty v obou krajních bodech intervalů (sem spadá např. lichoběžníkové pravidlo), a *formule otevřeného typu*, kde stačí znát funkční hodnotu nějakého bodu uvnitř daného intervalu. Ve většině případů se bere střed intervalu (sem spadá např. obdélníkové pravidlo).

Chyba  $H_n$  Newton-Cotesových vzorců se vypočte integrací chyby interpolace  $E_n(x)$ , tj.

$$H_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_a^b f^{(n+1)}(\eta) \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n) dx.$$

Zjednodušení tohoto výrazu není snadné, je jej třeba provést zvlášť pro  $n$  sudé a zvlášť pro  $n$  liché. Podrobnosti lze nalézt např. v [9].

Pro  $n$  sudé platí

$$H_n = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot \int_a^b x \cdot (x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_n) dx$$

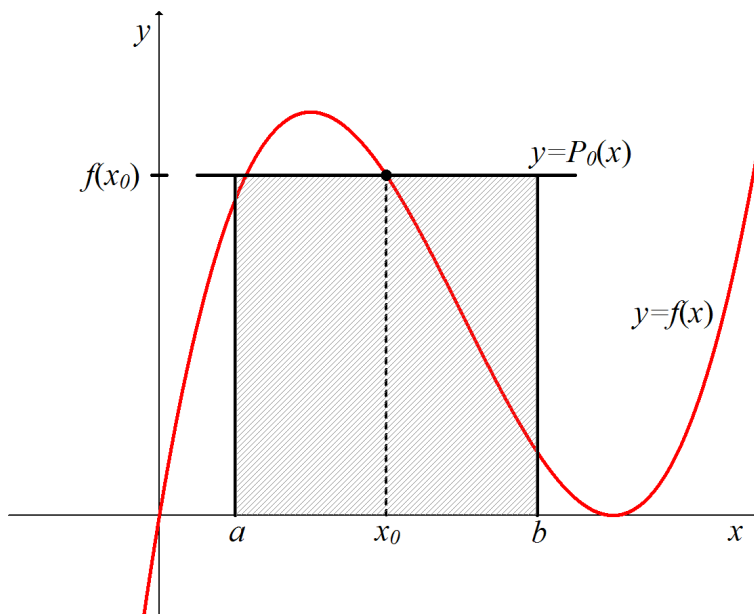
a pro  $n$  liché

$$H_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \int_a^b (x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_n) dx,$$

kde  $\xi \in \langle a; b \rangle$ .

### 2.1.1 Obdélníkové pravidlo

Jedná se o nejjednodušší případ, kdy je daná funkce  $f$  nahrazena konstantní funkcí. Zvolí se 1 uzel  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ , tj. střed intervalu  $\langle a; b \rangle$ . Funkce  $f$  je tak nahrazena polynomem 0. stupně, jak je názorně vidět na následujícím obrázku:



Obrázek 1: Princip obdélníkového pravidla

Interpolační polynom je tedy ve tvaru

$$P_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

a s využitím výrazu pro chybu  $H_n$  poté dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \int_a^b x \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot [x]_a^b + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a+b}{4} \cdot x^2\right]_a^b = \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a+b}{4} \cdot b^2 - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a+b}{4} \cdot a^2\right)\right) = \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a \cdot b^2 + b^3}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^3 + a^2 \cdot b}{4}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \\ &\cdot (b-a) + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot b^3 - 3 \cdot a \cdot b^2 - 3 \cdot b^3 - 4 \cdot a^3 + 3 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b}{12}\right) = \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) + \frac{f''(\xi)}{24} \cdot (b^3 - 3 \cdot a \cdot b^2 + 3 \cdot a^2 \cdot b - a^3) = \\ &= \underline{\underline{f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) + \frac{1}{24} \cdot f''(\xi) \cdot (b-a)^3}}, \end{aligned}$$

kde  $\xi \in \langle a; b \rangle$ .

Ve většině případů je však postačující ta část vzorce, ve které se nezaobíráme chybou, takže výsledný vzorec pak vypadá následovně:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a).$$

Jak je vidět, pro přibližný výpočet integrálu pak stačí znát pouze jednu funkční hodnotu, a to ve středu daného intervalu.

Na níže uvedeném Příkladu 2.1 je názorně předvedeno použití tohoto pravidla v praxi. V Příkladu 2.2 je totéž zadání vypočítáno standardně, tudíž se jedná o přesný výsledek, který slouží k porovnání přesnosti.



**Příklad 2.1.** Vypočítejte  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí obdélníkového pravidla.

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \frac{\frac{3+8}{2}}{\sqrt{1+\frac{3+8}{2}}} \cdot (8-3) = \frac{\frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{13}{2}}} \cdot 5 = \frac{11 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{13}} \cdot 5 \doteq \underline{\underline{10.786387}}$$

**Příklad 2.2.** Vypočítejte přesnou hodnotu  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$ .

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1+x} \\ x = t^2 - 1 \\ dt = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}} dx \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2 - 1}{\sqrt{1+x}} \cdot (2 \cdot \sqrt{1+x}) dt = \\ &= 2 \cdot \int_2^3 (t^2 - 1) dt = 2 \cdot \left[ \frac{t^3}{3} - t \right]_2^3 = 2 \cdot \left( \left( \frac{27}{3} - 3 \right) - \left( \frac{8}{3} - 2 \right) \right) = \\ &= 2 \cdot \left( \frac{18}{3} - \frac{2}{3} \right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = \underline{\underline{10.\bar{6}}} \end{aligned}$$

Na obdobné myšlenky pak fungují i další dvě metody, a to *metoda levého* (resp. *pravého*) *odhadu*, kdy se nebere funkční hodnota ve středovém bodě intervalu  $\langle a; b \rangle$ , nýbrž v krajních bodech tohoto intervalu. U *metody levého odhadu* nás tak zajímá funkční hodnota v bodě  $a$  a u *metody pravého odhadu* funkční hodnota v bodě  $b$ . Tím pádem budou i výsledné vzorce téměř totožné s výše uvedeným pro obdélníkové pravidlo, a to pro *metodu levého odhadu*

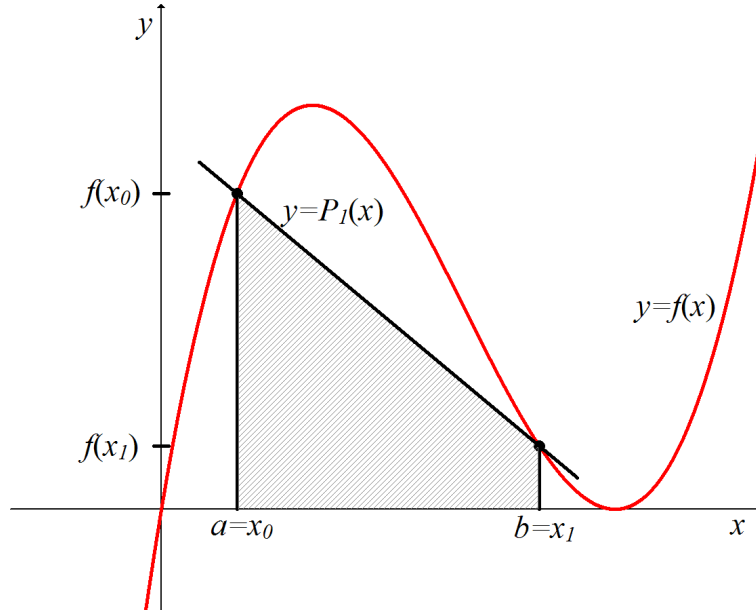
$$\int_a^b f(x) dx \approx f(a) \cdot (b - a)$$

a pro *metodu pravého odhadu*

$$\int_a^b f(x) dx \approx f(b) \cdot (b - a).$$

### 2.1.2 Lichoběžníkové pravidlo

V tomto případě se nahrazuje daná funkce  $f$  lineární funkcí. Zvolí se 2 uzly, a to konkrétně oba krajní body intervalu  $\langle a; b \rangle = \langle x_0; x_1 \rangle$ . Funkce  $f$  je tak nahrazována polynomem 1. stupně, jak je názorně vidět na následujícím obrázku:



Obrázek 2: Princip lichoběžníkového pravidla

Interpolační polynom je tedy ve tvaru

$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} \cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b)$$

a s využitím výrazu pro chybu  $H_n$  poté dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{x-b}{a-b} \cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b) \right] dx + \frac{1}{2} \cdot f''(\xi) \cdot \int_a^b (x-a) \cdot (x-b) dx = \\ &= \frac{f(a)}{a-b} \cdot \int_a^b (x-b) dx + \frac{f(b)}{b-a} \cdot \int_a^b (x-a) dx + \frac{1}{2} \cdot f''(\xi) \cdot \int_a^b (x^2 - a \cdot x - b \cdot x + a \cdot b) = \\ &= \frac{f(a)}{a-b} \cdot \left[ \frac{x^2}{2} - b \cdot x \right]_a^b + \frac{f(b)}{b-a} \cdot \left[ \frac{x^2}{2} - a \cdot x \right]_a^b + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot f''(\xi) \cdot \left[ \frac{x^3}{3} - (a+b) \cdot \frac{x^2}{2} + a \cdot b \cdot x \right]_a^b = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(a)}{a-b} \cdot \left( \frac{b^2}{2} - b^2 - \frac{a^2}{2} + a \cdot b \right) + \frac{f(b)}{b-a} \cdot \left( \frac{b^2}{2} - a \cdot b - \frac{a^2}{2} + a^2 \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot f''(\xi) \cdot \left( \frac{b^3}{3} - (a+b) \cdot \frac{b^2}{2} + a \cdot b^2 - \frac{a^3}{3} + (a+b) \cdot \frac{a^2}{2} - a^2 \cdot b \right) = \\
&= \frac{f(a)}{2 \cdot (a-b)} \cdot (b^2 - 2 \cdot b^2 - a^2 + 2 \cdot a \cdot b) + \frac{f(b)}{2 \cdot (b-a)} \cdot (b^2 - 2 \cdot a \cdot b - a^2 + 2 \cdot a^2) + \\
&+ \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot b^3 - 3 \cdot b^2 \cdot (a+b) + 6 \cdot a \cdot b^2 - 2 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot (a+b) - 6 \cdot a^2 \cdot b) = \\
&= -\frac{f(a)}{2 \cdot (a-b)} \cdot (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) + \frac{f(b)}{2 \cdot (b-a)} \cdot (b^2 - 2 \cdot a \cdot b + a^2) + \frac{f''(\xi)}{12} \cdot \\
&\cdot (2 \cdot b^3 - 3 \cdot a \cdot b^2 - 3 \cdot b^3 + 6 \cdot a \cdot b^2 - 2 \cdot a^3 + 3 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b - 6 \cdot a^2 \cdot b) = \\
&= -\frac{f(a)}{2 \cdot (a-b)} \cdot (a-b)^2 + \frac{f(b)}{2 \cdot (b-a)} \cdot (b-a)^2 - \\
&\quad - \frac{f''(\xi)}{12} \cdot (b^3 - 3 \cdot a \cdot b^2 + 3 \cdot a^2 \cdot b - a^3) = \\
&= -\frac{f(a)}{2} \cdot (a-b) + \frac{f(b)}{2} \cdot (b-a) - \frac{f''(\xi)}{12} \cdot (b-a)^3 = \\
&= \frac{f(a)}{2} \cdot (b-a) + \frac{f(b)}{2} \cdot (b-a) - \frac{f''(\xi)}{12} \cdot (b-a)^3 = \\
&= \underline{\underline{\frac{b-a}{2} \cdot [f(a) + f(b)] - \frac{f''(\xi)}{12} \cdot (b-a)^3}},
\end{aligned}$$

kde  $\xi \in \langle a; b \rangle$ .

Ve většině případů je však postačující ta část vzorce, ve které se nezaobíráme chybou, takže výsledný vzorec pak vypadá následovně:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot [f(a) + f(b)].$$

Jak je zde vidět, pro přibližný výpočet integrálu pak stačí znát pouze funkční hodnoty u dolní a horní meze.

Na Příkladu 2.3 je opět názorně předvedeno použití tohoto pravidla v praxi, přičemž přesný výsledek pro srovnání je v Příkladu 2.2.

**Příklad 2.3.** Vypočítejte  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí lichoběžníkového pravidla.

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &\approx \frac{8-3}{2} \cdot \left[ \frac{3}{\sqrt{1+3}} + \frac{8}{\sqrt{1+8}} \right] = \frac{5}{2} \cdot \left[ \frac{3}{2} + \frac{8}{3} \right] = \frac{5}{2} \cdot \frac{9+16}{6} = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{25}{6} = \frac{125}{12} = \underline{\underline{10.41\bar{6}}} \end{aligned}$$

Ne vždy však výsledek vyjde takto blízko skutečné hodnotě, což je demonstrováno na následujících dvou příkladech, kde je nejprve spočtena výsledná hodnota ručně a následně pomocí lichoběžníkového pravidla.

**Příklad 2.4.** Vypočítejte přesnou hodnotu  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) dx$ .

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \left[ \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = (-1 - 1) = \underline{\underline{-2}}$$

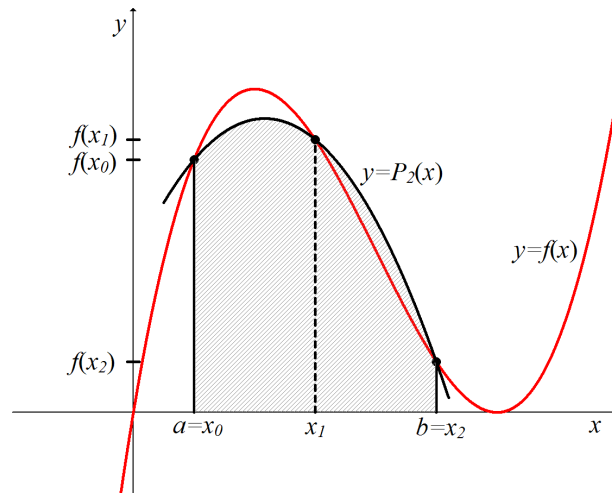
**Příklad 2.5.** Vypočítejte  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) dx$  pomocí lichoběžníkového pravidla.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) dx \approx \frac{\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) \right] = \frac{\pi}{2} \cdot (0 + 0) = \underline{\underline{0}}$$

V tomto případě se lichoběžník zdegeneroval na úsečku, tudíž jeho obsahem vyšla 0. V takových případech se pak využívá *složených kvadrurních formulí*, o kterých pojednává podkapitola [2.1.4](#).

### 2.1.3 Simpsonovo pravidlo

Někdy se mu též říká *parabolické pravidlo*. V tomto případě je nahrazována daná funkce  $f$  kvadratickou funkcí. Zvolí se 3 uzly, a to nejčastěji oba krajní body intervalu  $\langle a; b \rangle = \langle x_0; x_2 \rangle$  a také jejich střed. Funkce  $f$  je tak nahrazována polynomem 2. stupně, jak je názorně vidět na následujícím obrázku:



Obrázek 3: Princip Simpsonova pravidla

Interpolační polynom je tedy ve tvaru

$$P_2(x) = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \cdot (x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right) \cdot (a-b)} \cdot f(a) + \frac{(x-a) \cdot (x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2} - b\right)} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a) \cdot \left(b - \frac{a+b}{2}\right)} \cdot f(b).$$

Pro funkci  $f(x)$  poté i s uvažováním chyby interpolace dostaneme:

$$f(x) = P_2(x) + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x-a) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \cdot (x-b), \quad (10)$$

kde  $\xi \in \langle a; b \rangle$ .

Tento výraz (zatím bez části s chybou, která je odvozena dále) opět zintegrujeme přes interval  $\langle a; b \rangle$ :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \cdot (x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right) \cdot (a-b)} \cdot f(a) dx + \\
 &+ \int_a^b \frac{(x-a) \cdot (x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2} - b\right)} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \\
 &+ \int_a^b \frac{(x-a) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a) \cdot \left(b - \frac{a+b}{2}\right)} \cdot f(b) dx. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Vzhledem k delšímu výpočtu bude níže integrována každá část zvlášť, pro větší přehlednost i bez konstant, které by se jednoduše vytknuly.

1. část:

$$\begin{aligned}
 &\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \cdot (x-b) dx = \\
 &\left. \begin{aligned}
 x &= \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2} && \Rightarrow x - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} \cdot t \\
 &&& \Rightarrow x - b = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2} \cdot (t-1) \\
 &&& \Rightarrow t = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{2}{b-a}
 \end{aligned} \right| = \\
 &\left. \begin{aligned}
 dx &= \frac{b-a}{2} dt \\
 x = a &\Rightarrow t = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{2}{b-a} = -1 && x = b \Rightarrow t = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{2}{b-a} = 1
 \end{aligned} \right| \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} \cdot t \cdot \frac{b-a}{2} \cdot (t-1) \cdot \frac{b-a}{2} dt = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \int_{-1}^1 (t^2 - t) dt = \\
 &= \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{(b-a)^3}{12}}}.
 \end{aligned}$$

2. část:

$$\int_a^b (x-a) \cdot (x-b) dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{b-a}{2} \cdot t + a \qquad \Rightarrow x-a = \frac{b-a}{2} \cdot t \\ \qquad \qquad \qquad \Rightarrow x-b = \frac{b-a}{2} \cdot t + a - b = \frac{b-a}{2} \cdot (t-2) \\ \qquad \qquad \qquad \Rightarrow t = (x-a) \cdot \frac{2}{b-a} \\ \\ dx = \frac{b-a}{2} dt \\ \\ x = a \Rightarrow t = 0 \qquad \qquad \qquad x = b \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^2 \frac{b-a}{2} \cdot t \cdot \frac{b-a}{2} \cdot (t-2) \cdot \frac{b-a}{2} dt = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \int_0^2 (t^2 - 2 \cdot t) dt =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \left[ \frac{t^3}{3} - t^2 \right]_0^2 = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \left( \frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \left( -\frac{4}{3} \right) = \underline{\underline{-\frac{(b-a)^3}{6}}}.$$

3. část:

$$\int_a^b (x-a) \cdot \left( x - \frac{a+b}{2} \right) dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2} \qquad \Rightarrow x - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} \cdot t \\ \qquad \qquad \qquad \Rightarrow x-a = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2} \cdot (t+1) \\ \qquad \qquad \qquad \Rightarrow t = \left( x - \frac{a+b}{2} \right) \cdot \frac{2}{b-a} \\ \\ dx = \frac{b-a}{2} dt \\ \\ x = a \Rightarrow t = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{2}{b-a} = -1 \qquad \qquad \qquad x = b \Rightarrow t = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{2}{b-a} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} \cdot (t+1) \cdot \frac{b-a}{2} \cdot t \cdot \frac{b-a}{2} dt = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \int_{-1}^1 (t^2 + t) dt =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{(b-a)^3}{12}}}.$$

Dosazením do vztahu (11) a úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{f(a)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right) \cdot (a-b)} \cdot \frac{(b-a)^3}{12} + \\
&+ \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2} - b\right)} \cdot \left(-\frac{(b-a)^3}{6}\right) + \frac{f(b)}{(b-a) \cdot \left(b - \frac{a+b}{2}\right)} \cdot \frac{(b-a)^3}{12} = \\
&= \frac{f(a)}{\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot (a-b)} \cdot \frac{(b-a)^3}{12} - \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)} \cdot \frac{(b-a)^3}{6} + \\
&+ \frac{f(b)}{(b-a) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)} \cdot \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{2 \cdot f(a)}{(a-b) \cdot (a-b)} \cdot \frac{(b-a)^3}{12} - \\
&- \frac{4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a) \cdot (a-b)} \cdot \frac{(b-a)^3}{6} + \frac{2 \cdot f(b)}{(b-a) \cdot (b-a)} \cdot \frac{(b-a)^3}{12} = \\
&= \frac{f(a)}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)^3}{6} - \frac{4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)^3}{6} + \frac{f(b)}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)^3}{6} = \\
&= f(a) \cdot \frac{b-a}{6} + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{6} + f(b) \cdot \frac{b-a}{6} = \\
&= \frac{b-a}{6} \cdot \left[ \underline{\underline{f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}} \right].
\end{aligned}$$

Nyní je ještě třeba se zaměřit na výraz pro chybu, který je uveden ve vztahu (10). Jednou z možností je opět využít výraz pro chybu  $H_n$ . Integrovaní výrazu vyskytujícího se v  $H_2$  je už celkem obtížné, proto využijeme alternativní postup popsany níže. Pro něj však budou potřeba dvě věty, a to již výše zmíněná *Rolleova věta* (Věta 1.2) a níže uvedená *Lagrangeova věta*.



**Věta 2.1.** (Lagrangeova o střední hodnotě) Nechť pro funkci  $f$  platí, že

a)  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a; b \rangle$ ,

b)  $f$  má (vlastní nebo nevlastní) derivaci na intervalu  $(a; b)$ .

Potom existuje alespoň jeden bod  $c \in (a; b)$  takový, že  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Důkaz této věty lze nalézt např. v [7].

**Věta 2.2.** Nechť  $f$  je reálná funkce definovaná na intervalu  $\langle a; b \rangle$  a nechť  $f^{(4)}$  značí čtvrtou derivaci funkce  $f$ , která je taktéž definovaná na intervalu  $\langle a; b \rangle$ .

Potom platí vztah:

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \cdot \left[ f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\xi), \quad (12)$$

kde  $\xi \in (a; b)$ .

*Důkaz.* Zavedeme substituci využívanou již při úpravách výše, tedy

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2}, \quad t \in \langle -1; 1 \rangle,$$

a definujeme funkci  $F(t)$  jako  $F(t) = f\left(\frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2}\right)$ . Potom dostaneme:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \cdot \left[ f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = \\ & = \frac{b-a}{2} \cdot \left( \int_{-1}^1 F(\tau) d\tau - \frac{1}{3} \cdot [F(-1) + 4 \cdot F(0) + F(1)] \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Dále zavedeme funkci  $t \mapsto G(t)$  předpisem

$$G(t) = \int_{-t}^t F(\tau) d\tau - \frac{t}{3} \cdot [F(-t) + 4 \cdot F(0) + F(t)], \quad t \in \langle -1; 1 \rangle.$$

Je zřejmé, že pravá strana vztahu (13) je rovna  $\frac{b-a}{2} \cdot G(1)$ .

Nyní ukážeme, že výraz  $\frac{b-a}{2} \cdot G(1)$  je shodný s pravou stranou výrazu (12) pro nějaké  $\xi \in (a; b)$ . K tomu si definujeme následující funkci:

$$H(t) = G(t) - t^5 \cdot G(1), \quad t \in \langle -1; 1 \rangle,$$

a opakovaně aplikujeme *Rolleovu větu* na funkci  $H$ . Z vlastností funkce  $f$  a protože  $H(0) = H(1) = 0$ , existuje  $\zeta_1 \in (0; 1)$  takové, že  $H'(\zeta_1) = 0$ . Protože také  $H'(0) = 0$ , existuje  $\zeta_2 \in (0; \zeta_1)$  takové, že  $H''(\zeta_2) = 0$ . Opět  $H''(0) = 0$ , takže existuje  $\zeta_3 \in (0; \zeta_2)$  takové, že  $H'''(\zeta_3) = 0$ . Protože

$$G'''(t) = -\frac{t}{3} \cdot [F'''(t) - F'''(-t)],$$

platí, že

$$H'''(\zeta_3) = -\frac{\zeta_3}{3} \cdot [F'''(\zeta_3) - F'''(-\zeta_3)] - 60 \cdot \zeta_3^2 \cdot G(1).$$

Aplikováním *Lagrangeovy věty o střední hodnotě* na funkci  $F'''$  zjistíme, že existuje  $\zeta_4 \in (-\zeta_3; \zeta_3)$  takové, že

$$H'''(\zeta_3) = -\frac{\zeta_3}{3} \cdot [2 \cdot \zeta_3 \cdot F^{(4)}(\zeta_4)] - 60 \cdot \zeta_3^2 \cdot G(1) = -\frac{2 \cdot \zeta_3^2}{3} \cdot [F^{(4)}(\zeta_4) + 90 \cdot G(1)].$$

Jelikož  $H'''(\zeta_3) = 0$  a  $\zeta_3 \neq 0$ , tak dostaneme

$$G(1) = -\frac{1}{90} \cdot F^{(4)}(\zeta_4) = -\frac{(b-a)^4}{1440} \cdot f^{(4)}(\xi).$$

Po dosazení do vztahu  $\frac{b-a}{2} \cdot G(1)$  už dostaneme výraz, který je uveden na pravé straně výrazu (12). □

Vzorec pro Simpsonovo pravidlo včetně chyby tedy vypadá:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \cdot \left[ f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^5,$$

kde  $\xi \in \langle a; b \rangle$ .

Ve většině případů je však opět postačující ta část vzorce, ve které se nezaobíráme chybou, takže výsledný vzorec vypadá následovně:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left[ f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Jak je zde vidět, pro přibližný výpočet integrálu pak stačí znát pouze funkční hodnoty u dolní a horní meze a ve středu tohoto intervalu.

Na Příkladu 2.6 je opět názorně předvedeno použití tohoto pravidla v praxi, přičemž přesný výsledek pro srovnání je v Příkladu 2.2.

**Příklad 2.6.** Vypočítejte  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí Simpsonova pravidla.

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &\approx \frac{8-3}{6} \cdot \left[ \frac{3}{\sqrt{1+3}} + 4 \cdot \frac{\frac{3+8}{2}}{\sqrt{1+\frac{3+8}{2}}} + \frac{8}{\sqrt{1+8}} \right] = \\ &= \frac{5}{6} \cdot \left[ \frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{\frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{13}{2}}} + \frac{8}{3} \right] \doteq \underline{\underline{10.663147}} \end{aligned}$$

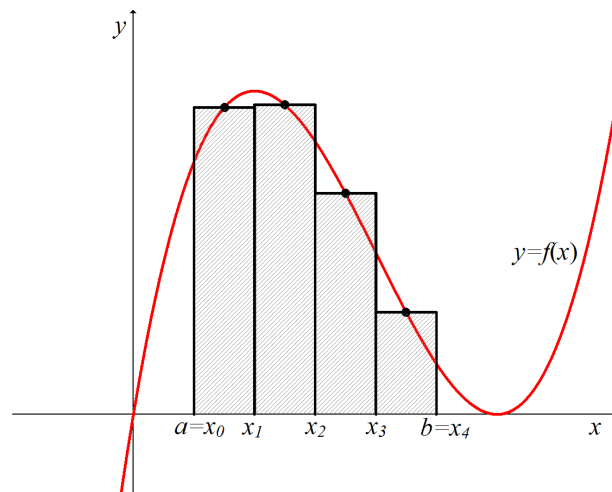
**Poznámka 2.1.** *Jak je vidět, nejpřesnějšího výsledku bylo dosaženo použitím Simpsonova pravidla, tedy metody s nejvyšším stupněm interpolačního polynomu (ze zde uváděných). Dalo by se tak předpokládat, že při použití Newton-Cotesových vzorců odvozených z interpolačních polynomů vyšších stupňů bude výsledek přesnější. Toto by platilo např. pokud má funkce  $f$  na intervalu  $\langle a; b \rangle$  všechny derivace omezené stejnou konstantou  $M$  (viz. Poznámka 1.4). Obecně to však neplatí, což je vidět např. na tzv. Rungeho příkladu (viz např. [13]).*

## 2.1.4 Složené kvadrurní formule

Jak je ukázáno v Příkladu 2.5, výše odvozené vzorce mohou občas dávat úplně nesmyslné výsledky. Proto se pro přesnější výpočty integrálů používají i tzv. *složené kvadrurní formule*, které vzniknou „slepením“ výše uvedených pravidel.

### 2.1.4.1 Složené obdélrníkové pravidlo

Vznikne jednoduše tak, že daný interval  $\langle a; b \rangle$  se rozdělí na  $n$  podintervalů  $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ , přičemž na každý z nich se aplikuje obdélrníkové pravidlo, jak je vidět na následujícím obrázku:



Obrázek 4: Princip složeného obdélrníkového pravidla pro 4 podintervaly

Jak je již výše odvozeno, přibližná hodnota integrálu při použití obdélníkového pravidla se počítá podle vzorce  $\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$ . Složené obdélníkové pravidlo vznikne tak, že spočítáme hodnotu pro každý podinterval  $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ , zvlášť:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Tyto hodnoty poté stačí sečíst, výsledný vzorec pak bude vypadat následovně:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right), \quad (14)$$

kde  $n$  je počet podintervalů.

Ještě je zde potřeba zmínit chybu. Obecně při výpočtech odhadu chyby Newton-Cotesova vzorce  $k$ -tého stupně v praxi se číslo  $f^{(m)}(\xi_i)$ , kde  $\xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$ , ohraničí hodnotou

$$M_{i,m} = \max_{x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle} |f^{(m)}(x)|,$$

kde  $m = k + 1$ , resp.  $m = k + 2$ .

Jelikož je složený vzorec prostým součtem jednoduchých vzorců, pak je i celková chyba integrace  $R_k(f)$  součtem jednotlivých chyb  $R_{i,k}(f)$ , tj.

$$R_k(f) = \sum_{i=1}^n R_{i,k}(f).$$

Jestliže je funkce  $f^{(m)}(x)$  spojitá na intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pak existuje bod  $\xi \in \langle a; b \rangle$  takový, že

$$\sum_{i=1}^n f^{(m)}(\xi_i) = n \cdot f^{(m)}(\xi).$$

Těchto poznatků se dále využije pro odvození celkové chyby integrace, přičemž  $f^{(m)}(\xi)$ , kde  $\xi \in \langle a; b \rangle$ , se při výpočtech v praxi nahrazuje číslem

$$M_m = \max_{x \in \langle a; b \rangle} |f^{(m)}(x)|. \quad (15)$$

V případě obdélníkového pravidla se jedná o Newton-Cotesův vzorec 0. stupně, tj.  $k = 0$ , a pro odhad chyby platí

$$|R_0(f)| \leq M_2 \cdot n \cdot \frac{(b-a)^3}{24 \cdot n^3} = M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{24 \cdot n^2}, \quad (16)$$

kde podle vztahu (15) je  $M_2 = \max_{x \in \langle a; b \rangle} |f''(x)|$ .

Složené obdélníkové pravidlo bude ilustrováno na následujícím příkladu s rozdělením na 4 podintervaly. Přesný výpočet je uveden v Příkladu 2.2.

**Příklad 2.7.** *Spočítejte  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí složeného obdélníkového pravidla s rozdělením na 4 podintervaly a odhadněte chybu.*

Rozdělíme tedy náš původní interval  $\langle a; b \rangle = \langle 3; 8 \rangle$  na 4 podintervaly, tj. body  $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = b$ . Dostaneme intervaly  $\langle 3; 4.25 \rangle$ ,  $\langle 4.25; 5.5 \rangle$ ,  $\langle 5.5; 6.75 \rangle$  a  $\langle 6.75; 8 \rangle$ . Dosazením do vztahu (14) dostáváme:

$$\begin{aligned} & \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \\ & \approx \frac{8-3}{4} \cdot \left[ \frac{3.625}{\sqrt{1+3.625}} + \frac{4.875}{\sqrt{1+4.875}} + \frac{6.125}{\sqrt{1+6.125}} + \frac{7.375}{\sqrt{1+7.375}} \right] \doteq \underline{\underline{10.674887}}. \end{aligned}$$

Je vidět, že výsledek je již mnohem přesnější než jednoduchým obdélníkovým pravidlem, který vyšel v Příkladu 2.1 přibližně 10.786387. Pro odhad chyby je potřeba spočítat druhou derivaci dané funkce a najít její maximum na intervalu  $\langle 3; 8 \rangle$ :

$$f'(x) = \left( \frac{x}{\sqrt{1+x}} \right)' = 1 \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^3}},$$

$$f''(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^3}} \right)' = -\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \left( 1 \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left( -\frac{3}{2} \right) \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} + \frac{3 \cdot x}{4 \cdot \sqrt{(1+x)^5}},$$

$$\max_{x \in (3;8)} |f''(x)| = |f''(3)| = \frac{7}{128}.$$

Odhad chyby je tedy po dosazení do vztahu (16)

$$|R_0(f)| \leq \frac{7}{128} \cdot \frac{(8-3)^3}{24 \cdot 4^2} \doteq \underline{\underline{0.017802}}.$$

**Příklad 2.8.** *Určete, kolik podintervalů je potřeba zvolit u složeného obdélníkového pravidla, aby bylo garantováno, že bude absolutní hodnota chyby při přibližném výpočtu integrálu  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  menší než 0.00001.*

Vyjdeme zde opět ze vztahu  $|R_0(f)| \leq M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{24 \cdot n^2}$ , kde již jsou všechny hodnoty kromě  $M_2$  a  $n$  zadané, ale  $M_2$  je spočteno v předchozím příkladě a  $n$  je naše hledaná neznámá. Dostáváme tak následující vztah:

$$\frac{7}{128} \cdot \frac{(8-3)^3}{24 \cdot n^2} \leq 0.00001.$$

Tento vztah dále upravíme a získáme tak hledané  $n$ :

$$\frac{875}{3072 \cdot n^2} \leq 0.00001,$$

$$n^2 \geq \frac{875}{3072 \cdot 0.00001},$$

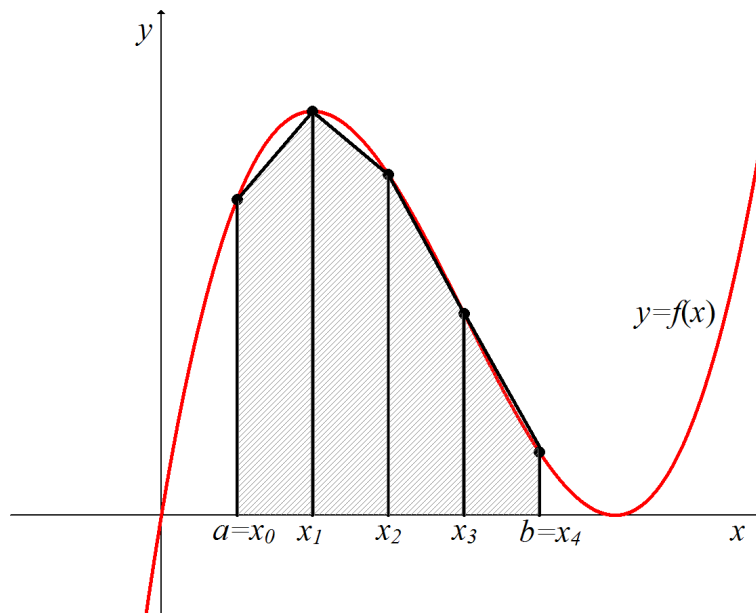
$$n^2 \geq \frac{875}{0.03072},$$

$$n \geq 168.769289 \doteq \underline{\underline{169}}.$$

Aby bylo garantováno, že bude absolutní hodnota chyby při přibližném výpočtu menší než 0.00001, je potřeba alespoň 169 podintervalů.

#### 2.1.4.2 Složené lichoběžníkové pravidlo

Idea je zde stejná jako u složeného obdélníkového pravidla. Interval  $\langle a; b \rangle$  se tedy rozdělí na  $n$  podintervalů  $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Na každý z těchto intervalů se pak aplikuje lichoběžníkové pravidlo:



Obrázek 5: Princip složeného lichoběžníkového pravidla pro 4 podintervaly

Vzorec pro libovolný podinterval pak vypadá následovně:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \cdot (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$



Potom pro celkový interval  $\langle a; b \rangle$  lze psát:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \cdot (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

Tento vzorec lze ještě upravit za použití myšlenky, že všechny funkční hodnoty bodů, mimo krajní body  $a$  a  $b$ , budou ve výpočtu vždy dvakrát, tzn.:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2 \cdot n} \cdot \left[ f(a) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]. \quad (17)$$

Co se týká chyby, opět se využije vztahů uvedených u složeného obdélníkového pravidla. V případě lichoběžníkového pravidla se jedná o Newton-Cotesův vzorec 1. stupně, tj.  $k = 1$ , a pro odhad chyby platí

$$|R_1(f)| \leq M_2 \cdot n \cdot \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^3} = M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2}, \quad (18)$$

kde podle vztahu (15) je  $M_2 = \max_{x \in \langle a; b \rangle} |f''(x)|$ .

Na Příkladu 2.9 je nyní uveden výpočet pomocí složeného lichoběžníkového pravidla. Při použití jednoduchého lichoběžníkového pravidla v Příkladu 2.5 vyšla přibližná hodnota integrálu velmi nepřesně, konkrétně  $\theta$ . Rozdělíme tedy původní interval  $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2} \cdot \pi \right\rangle$  na dva podintervaly, a to  $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$  a  $\left\langle \pi; \frac{3}{2} \cdot \pi \right\rangle$ .

**Příklad 2.9.** Spočítejte  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) dx$  pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s rozdělením na 2 podintervaly.

Dosazením do vztahu (17) dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) dx &\approx \frac{\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}}{2 \cdot 2} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \cos(\pi) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) \right] = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot [0 + 2 \cdot (-1) + 0] = \frac{\pi}{4} \cdot (-2) = -\frac{\pi}{2} \doteq \underline{\underline{-1.571}} \end{aligned}$$

Jak je zřejmé, tento výsledek je již mnohem blíže skutečné hodnotě  $-2$ . Ještě blíže skutečné hodnotě bychom se dostali v případě rozdělení na více podintervalů.

Ještě je dále také uveden příklad na výpočet pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s rozdělením na 4 podintervaly a s výpočtem odhadu chyby. Přesný výpočet je uveden v Příkladu 2.2.

**Příklad 2.10.** Spočítejte  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s rozdělením na 4 podintervaly a odhadněte chybu.

Rozdělíme tedy náš původní interval  $\langle a; b \rangle = \langle 3; 8 \rangle$  na 4 podintervaly, tj. body  $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = b$ . Dostaneme intervaly  $\langle 3; 4.25 \rangle$ ,  $\langle 4.25; 5.5 \rangle$ ,  $\langle 5.5; 6.75 \rangle$  a  $\langle 6.75; 8 \rangle$ . Dosazením do vztahu (17) dostáváme:

$$\begin{aligned} &\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \\ &\approx \frac{8-3}{2 \cdot 4} \cdot \left[ \frac{3}{\sqrt{1+3}} + 2 \cdot \left( \frac{4.25}{\sqrt{1+4.25}} + \frac{5.5}{\sqrt{1+5.5}} + \frac{6.75}{\sqrt{1+6.75}} \right) + \frac{8}{\sqrt{1+8}} \right] \doteq \\ &\doteq \underline{\underline{10.650168}}. \end{aligned}$$

Je vidět, že výsledek je již mnohem přesnější než jednoduchým lichoběžníkovým pravidlem, který vyšel v Příkladu 2.3 přibližně 10.416̄. Pro odhad chyby je třeba spočítat druhou derivaci dané funkce a najít její maximum na intervalu ⟨3; 8⟩:

$$f'(x) = \left( \frac{x}{\sqrt{1+x}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^3}},$$

$$f''(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^3}} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} + \frac{3 \cdot x}{4 \cdot \sqrt{(1+x)^5}},$$

$$\max_{x \in (3;8)} |f''(x)| = |f''(3)| = \frac{7}{128}.$$

Odhad chyby je tedy po dosazení do vztahu (18)

$$|R_1(f)| \leq \frac{7}{128} \cdot \frac{(8-3)^3}{12 \cdot 4^2} \doteq \underline{\underline{0.0356}}.$$

**Příklad 2.11.** *Určete, kolik podintervalů je potřeba zvolit u složeného lichoběžníkového pravidla, aby bylo garantováno, že bude absolutní hodnota chyby při přibližném výpočtu integrálu  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  menší než 0.00001.*

Vyjdeme zde ze vztahu  $|R_1(f)| \leq M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2}$ , kde již jsou všechny hodnoty kromě  $M_2$  a  $n$  zadané, ale  $M_2$  je spočteno v předchozím příkladě a  $n$  je naše hledaná neznámá. Dostáváme tak následující vztah:

$$\frac{7}{128} \cdot \frac{(8-3)^3}{12 \cdot n^2} \leq 0.00001.$$

Tento vztah dále upravíme a získáme tak hledané  $n$ :

$$\frac{875}{1536 \cdot n^2} \leq 0.00001,$$

$$n^2 \geq \frac{875}{1536 \cdot 0.00001},$$

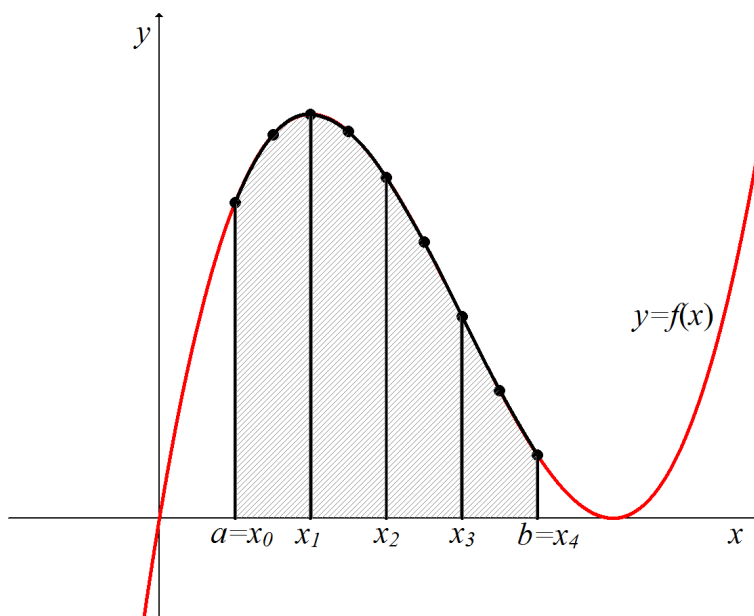
$$n^2 \geq \frac{875}{0.01536},$$

$$n \geq 238.6758174 \doteq \underline{\underline{239}}.$$

Aby bylo garantováno, že bude absolutní hodnota chyby při přibližném výpočtu menší než 0.00001, je potřeba alespoň 239 podintervalů.

### 2.1.4.3 Složené Simpsonovo pravidlo

I v tomto případě je základní idea stejná. V tomto případě se interval  $\langle a; b \rangle$  rozdělí na sudý počet podintervalů. Tím pádem dostáváme celkem  $2 \cdot n$  bodů. Poté opět na každý podinterval aplikujeme Simpsonovo pravidlo, vše je opět dobře vidět na následujícím obrázku:



Obrázek 6: Princip složeného Simpsonova pravidla pro 4 podintervaly

Můžeme pak tedy psát:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2 \cdot n-2}}^{x_{2 \cdot n}} f(x)dx.$$

Po úpravě dosazením Simpsonova vzorce do každého integrálu zvlášť dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{2 \cdot (b-a)}{6 \cdot 2 \cdot n} \cdot [f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \\ &+ \frac{2 \cdot (b-a)}{6 \cdot 2 \cdot n} \cdot [f(x_{2 \cdot n-2}) + 4 \cdot f(x_{2 \cdot n-1}) + f(x_{2 \cdot n})]. \end{aligned}$$

Vzorec lze ještě zjednodušit tak, že všechny středové funkční hodnoty jednotlivých intervalů bereme čtyřikrát (viz. základní vzorec Simpsonova pravidla), krajní body  $a$  a  $b$  jedenkrát a všechny ostatní krajní body jednotlivých podintervalů vyjma dvou zmíněných se započítávají vždy dvakrát, takže vzorec lze upravit na následující finální tvar:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6 \cdot n} \cdot \left[ f(x_0) + 4 \cdot \sum_{i=1}^n f(x_{2 \cdot i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2 \cdot i}) + f(x_{2 \cdot n}) \right]. \quad (19)$$

Ohledně chyby se opět využije vztahů uvedených u složeného obdélníkového pravidla. V tomto případě se jedná o Newton-Cotesův vzorec 2. stupně, tj.  $k = 2$ , a pro odhad chyby platí

$$|R_2(f)| \leq M_4 \cdot n \cdot \frac{(b-a)^5}{90 \cdot 2^5 \cdot n^5} = M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{2880 \cdot n^4}, \quad (20)$$

kde podle vztahu (15) je  $M_4 = \max_{x \in \langle a; b \rangle} |f^{(4)}(x)|$ .

I zde je ještě uveden příklad na výpočet pomocí složeného Simpsonova pravidla s rozdělením na 4 podintervalů a s výpočtem odhadu chyby. Přesný výpočet je uveden v Příkladu 2.2.

**Příklad 2.12.** Spočítejte  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí složeného Simpsonova pravidla s rozdělením na 4 podintervaly a odhadněte chybu.

Rozdělí se tedy původní interval  $\langle a; b \rangle = \langle 3; 8 \rangle$  na 4 podintervaly, tj. zvolí se 8 bodů  $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 = b$ . Dostaneme následující intervaly:  $\langle x_0; x_2 \rangle = \langle 3; 4.25 \rangle$ ,  $\langle x_2; x_4 \rangle = \langle 4.25; 5.5 \rangle$ ,  $\langle x_4; x_6 \rangle = \langle 5.5; 6.75 \rangle$ ,  $\langle x_6; x_8 \rangle = \langle 6.75; 8 \rangle$ . Dosazením do vztahu (19) dostáváme:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \frac{8-3}{6 \cdot 4} \cdot \left[ \frac{3}{\sqrt{1+3}} + 4 \cdot \left( \frac{3.625}{\sqrt{1+3.625}} + \frac{4.875}{\sqrt{1+4.875}} + \frac{6.125}{\sqrt{1+6.125}} + \frac{7.375}{\sqrt{1+7.375}} \right) + 2 \cdot \left( \frac{4.25}{\sqrt{1+4.25}} + \frac{5.5}{\sqrt{1+5.5}} + \frac{6.75}{\sqrt{1+6.75}} \right) + \frac{8}{\sqrt{1+8}} \right] \doteq \underline{10.666647}.$$

Je vidět, že výsledek je ještě o něco přesnější než jednoduchým Simpsonovým pravidlem, který vyšel v Příkladu 2.6 přibližně 10.663147. Pro odhad chyby je třeba spočítat čtvrtou derivaci dané funkce a najít její maximum na intervalu  $\langle 3; 8 \rangle$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x}{\sqrt{1+x}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^3}}, \\ f''(x) &= \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^3}} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} + \frac{3 \cdot x}{4 \cdot \sqrt{(1+x)^5}}, \\ f'''(x) &= \left( -\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} + \frac{3 \cdot x}{4 \cdot \sqrt{(1+x)^5}} \right)' = \frac{3}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} + \\ &+ \frac{3}{4} \cdot \left( 1 \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} + x \cdot \left( -\frac{5}{2} \right) \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}} \right) = \frac{9}{4 \cdot \sqrt{(1+x)^5}} - \frac{15 \cdot x}{8 \cdot \sqrt{(1+x)^7}}, \\ f^{(4)}(x) &= \left( \frac{9}{4 \cdot \sqrt{(1+x)^5}} - \frac{15 \cdot x}{8 \cdot \sqrt{(1+x)^7}} \right)' = -\frac{45}{8} \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{15}{8} \cdot \left( 1 \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}} + x \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{9}{2}} \right) = \\
& = -\frac{15}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^7}} + \frac{105 \cdot x}{16 \cdot \sqrt{(1+x)^9}}, \\
& \max_{x \in \langle 3; 8 \rangle} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(3)| = \frac{10070801}{500000000}.
\end{aligned}$$

Odhad chyby je tedy po dosazení do vztahu (20)

$$|R_2(f)| \leq \frac{10070801}{500000000} \cdot \frac{(8-3)^5}{2880 \cdot 4^4} \doteq \underline{\underline{0.000085}}.$$

Je zřejmé, že vypočítaná hodnota pomocí složeného Simpsonova pravidla se liší od skutečné hodnoty o menší hodnotu chyby, než vyšla maximální chyba, v tomto případě je navíc již opravdu velmi malá.

**Příklad 2.13.** *Určete, kolik podintervalů je potřeba zvolit u složeného Simpsonova pravidla, aby bylo garantováno, že bude absolutní hodnota chyby při přibližném výpočtu integrálu  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  menší než 0.00001.*

Vyjdeme zde ze vztahu  $|R_2(f)| \leq M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{2880 \cdot n^4}$ , kde již jsou všechny hodnoty kromě  $M_4$  a  $n$  zadané, ale  $M_4$  je spočteno v předchozím příkladě a  $n$  je naše hledaná neznámá. Dostáváme tak následující vztah:

$$\frac{10070801}{500000000} \cdot \frac{(8-3)^5}{2880 \cdot n^4} \leq 0.00001.$$

Tento vztah dále upravíme a získáme tak hledané  $n$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{10070801}{460800000 \cdot n^4} \leq 0.00001, \\
& n^4 \geq \frac{10070801}{460800000 \cdot 0.00001},
\end{aligned}$$

$$n^4 \geq \frac{10070801}{4608},$$

$$n \geq 6.837351 \doteq \underline{\underline{7}}.$$

Aby bylo garantováno, že bude absolutní hodnota chyby při přibližném výpočtu menší než 0.00001, je potřeba alespoň 7 podintervalů.

## 2.2 Gaussovy vzorce

V minulé podkapitole popsané Newton-Cotesovy vzorce (používající  $n + 1$  ekvidistantních uzlů) integrují obecně přesně polynomy jen do  $n$ -tého stupně. Navíc je dokázané, že limitní případ polynomu pro  $n \rightarrow \infty$  nemusí vždy odpovídat hledané hodnotě určitého integrálu (tj. Newton-Cotesovy vzorce nejsou obecně konvergentní).

Proto se využívají kromě Newton-Cotesových vzorců také Gaussovy vzorce, u nichž nejsou uzly voleny ekvidistantně. Jejich výhodou je to, že Gaussův vzorec využívající  $n + 1$  uzlů integruje přesně polynomy až do řádu  $2 \cdot n + 1$  (toto číslo se nazývá *algebraický řád přesnosti*), tedy jedná se přibližně o dvojnásobek proti Newton-Cotesovým vzorcům, kde byl řád přesnosti  $n$ . Důležitou vlastností Gaussových kvadraturních formulí je také to, že oproti Newton-Cotesovým vzorcům s rostoucím počtem uzlů konvergují k přesné hodnotě integrálu. Naopak jejich nevýhodou je komplikovanost hledání uzlových bodů.

Místo původní úlohy (9) uvažujme v této kapitole obecnější úlohu

$$\int_a^b \omega(x) \cdot f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i \cdot f(x_i), \quad (21)$$

kde neznámými jsou  $x_i$  a  $A_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , a  $\omega$  je tzv. *vahová funkce*, tj. funkce nezáporná a integrovatelná na intervalu  $\langle a; b \rangle$  splňující  $\omega(x) > 0$  skoro všude



na  $\langle a; b \rangle$ . U Gaussových vzorců nebudou uzly  $x_i$  voleny ekvidistantně, ale budou to kořeny polynomů ortogonálních na  $\langle a; b \rangle$  s vahou  $\omega$ . Po nalezení těchto uzlů se poté spočtou konstanty  $A_i = \int_a^b \omega(x) \cdot l_i(x) dx$ , kde  $l_i(x)$  jsou fundamentální polynomy z Lagrangeova interpolačního polynomu.

Pro zavedení Gaussových vzorců je tedy potřeba nejprve definovat pojem ortogonální polynomy.

**Definice 2.1.** *Posloupnost polynomů  $\{\Phi_n\}$  nazveme ortogonální na intervalu  $\langle a; b \rangle$  vzhledem k vahové funkci  $\omega$ , jestliže platí*

$$\int_a^b \omega(x) \cdot \Phi_m(x) \cdot \Phi_n(x) dx = 0 \quad \text{pro } m \neq n,$$

$$\int_a^b \omega(x) \cdot \Phi_m(x) \cdot \Phi_n(x) dx > 0 \quad \text{pro } m = n.$$

V následující větě jsou uvedeny dvě důležité vlastnosti koeficientů Gaussových kvadraturních formulí.

**Věta 2.3.** *Pro koeficienty Gaussovy kvadraturní formule platí:*

a)  $A_i > 0, \quad i = 0, \dots, n,$

b)  $\sum_{i=0}^n A_i = \int_a^b \omega(x) dx.$

*Důkaz.* a) Stupeň přesnosti Gaussovy kvadraturní formule je  $2 \cdot n + 1$ , jak již bylo výše zmíněno. Z toho plyne, že jsou tyto formule přesné i pro polynomy  $l_j^2$ ,  $j = 0, \dots, n$ , které jsou stupně  $2 \cdot n$ :

$$l_j^2(x) = \left( \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j) \cdot \omega'_{n+1}(x_j)} \right)^2.$$

Pro výpočet integrálu  $I(l_j^2) = \int_a^b \omega(x) \cdot l_j^2(x) dx$  pak lze psát:

$$\int_a^b \omega(x) \cdot l_j^2(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i \cdot l_j^2(x_i).$$

Protože víme, že  $l_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$  pro  $i, j = 0, \dots, n$ , můžeme psát:

$$A_j = \int_a^b \omega(x) \cdot l_j^2(x) dx, \quad j = 0, \dots, n,$$

přičemž všechny tyto koeficienty musí být díky vlastnostem funkcí  $\omega(x)$  a  $l_j(x)$  větší než nula.

b) Pokud aplikujeme Gaussovu kvadraturní formuli, tj. vztah (21), na funkci  $f(x) = 1$ , pro niž je samozřejmě kvadraturní formule přesná, tak hned dostaneme:

$$\int_a^b \omega(x) \cdot 1 dx = \sum_{i=0}^n A_i \cdot 1,$$

$$\int_a^b \omega(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i.$$

□

V následující větě je ukázáno, že Gaussovy formule konvergují k přesné hodnotě určitého integrálu.

**Věta 2.4.** *Nechť  $\omega$  je vahová funkce na uzavřeném, omezeném intervalu  $\langle a; b \rangle$  a nechť  $f$  je na intervalu  $\langle a; b \rangle$  spojitá. Pak Gaussův kvadrurní vzorec konverguje pro  $n \rightarrow \infty$  k přesné hodnotě integrálu.*

*Důkaz.* Protože  $f$  je na intervalu  $\langle a; b \rangle$  spojitá, existuje pro libovolné  $\varepsilon > 0$  polynom  $P$  takový, že pro každé  $x \in \langle a; b \rangle$  je  $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ . Stupeň tohoto polynomu označme  $N$ .

Vyjádríme-li chybu  $R(f)$  Gaussovy formule, pak získáme

$$|R(f)| = \left| \int_a^b \omega(x) \cdot f(x) dx - \sum_{i=0}^n A_i \cdot f(x_i) \right| \leq \left| \int_a^b \omega(x) \cdot f(x) dx - \int_a^b \omega(x) \cdot P(x) dx \right| + \left| \int_a^b \omega(x) \cdot P(x) dx - \sum_{i=0}^n A_i \cdot P(x_i) \right| + \left| \sum_{i=0}^n A_i \cdot [P(x_i) - f(x_i)] \right|.$$

Nyní odhadneme všechny tři výše uvedené členy:

$$\left| \int_a^b \omega(x) \cdot [f(x) - P(x)] dx \right| < \varepsilon \cdot \int_a^b \omega(x) dx.$$

Z vlastnosti  $b)$  z předchozí věty 2.3 plyne, že

$$\left| \sum_{i=0}^n A_i \cdot [P(x_i) - f(x_i)] \right| < \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^n A_i = \varepsilon \cdot \int_a^b \omega(x) dx.$$

Navíc, je-li  $n \geq N_0$ , kde  $N_0$  je celá část z  $\frac{N}{2}$ , pak Gaussova formule integruje polynom  $P$  přesně, a tedy

$$\int_a^b \omega(x) \cdot P(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i \cdot P(x_i), \quad \text{je-li } n \geq N_0.$$

Celkem tedy

$$|R(f)| < 2 \cdot \varepsilon \cdot \int_a^b \omega(x) dx \quad \text{pro každé } n \geq N_0,$$

čímž je tvrzení věty dokázané. □

V praxi se používají Gaussovy kvadrurní formule jako složené vzorce, tzn. abychom dosáhli větší přesnosti, rozdělí se interval  $\langle a; b \rangle$  na několik podintervalů a integrál se poté počítá jako součet jednotlivých dílčích integrálů.

Nyní se již budeme zabývat Gaussovými kvadrurními formulami pro konkrétně zvolený interval  $\langle a; b \rangle$  a vahovou funkci  $\omega(x) = 1$ .

### 2.2.1 Gaussovy kvadrurní formule s využitím Legendrových polynomů

Legendrovy ortogonální polynomy jsou pro  $n = 0, 1, \dots$  definované předpisem

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

přičemž jsou ortogonální s vahou  $\omega(x) = 1$  na intervalu  $\langle -1; 1 \rangle$ . V případě, že bychom integrovali na jiném intervalu, bylo by potřeba provést lineární transformaci zavedením substituce

$$t = \frac{2 \cdot x - b - a}{b - a},$$

čímž transformujeme původní integrál na

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{b+a}{2}\right) dt. \quad (22)$$

**Věta 2.5.** *Nechť  $f$  je reálná funkce, která má na intervalu  $\langle -1; 1 \rangle$  omezenou derivaci řádu  $2 \cdot (n+1)$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ . Pak pro chybu Gaussovy-Legendrovy kvadrurny platí vztah*

$$|R(f)| = \left| \int_{-1}^1 \omega(x) \cdot f(x) dx - \sum_{i=0}^n A_i \cdot f(x_i) \right| \leq \frac{\Omega}{(2 \cdot n)!} \cdot \int_{-1}^1 (x-x_0)^2 \cdot \dots \cdot (x-x_n)^2 dx, \quad (23)$$

kde  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  jsou kořeny Legendrova polynomu a  $\Omega$  je taková hodnota, že pro každé  $x \in \langle -1; 1 \rangle$  platí  $|f^{(2 \cdot n + 2)}(x)| \leq \Omega$ .

Důkaz této věty lze nalézt např. v [4].

V další části jsou odvozeny Gaussovy kvadrurní formule používající 2 a 3 uzly s využitím výše zmíněných Legendrových polynomů. Pro 2 uzly dostáváme obecně tuto kvadrurní formuli:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot \omega(x) dx \approx A_0 \cdot f(x_0) + A_1 \cdot f(x_1). \quad (24)$$

Protože jsou potřeba 2 uzly kvadrurní formule, odvodíme a najdeme kořeny Legendrova polynomu  $P_2(x)$ :

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 \cdot 0!} \cdot \frac{d^0}{dx^0} [(x^2 - 1)^0] = 1,$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 \cdot 1!} \cdot \frac{d^1}{dx^1} [(x^2 - 1)^1] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = x,$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2} [(x^2 - 1)^2] = \frac{1}{8} \cdot \frac{d^2}{dx^2} [x^4 - 2 \cdot x^2 + 1] = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{d}{dx} [4 \cdot x^3 - 4 \cdot x] = \frac{1}{8} \cdot (12 \cdot x^2 - 4) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot x^2 - 1). \end{aligned}$$

Najdeme kořeny polynomu  $P_2(x)$ :

$$\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Dostali jsme tedy kořeny  $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  a  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Dále se vypočítají příslušné Lagrangeovy fundamentální polynomy:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}} = -\frac{3 \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{2 \cdot \sqrt{3}} = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1(x) &= \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}} = \frac{3 \cdot \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{2 \cdot \sqrt{3}} = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Pomocí těchto polynomů se dopočtou koeficienty kvadraturní formule:

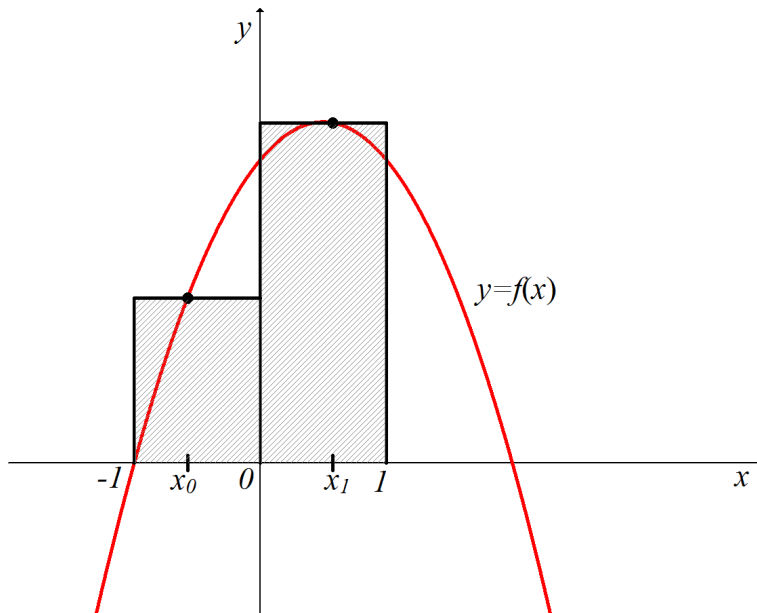
$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_{-1}^1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot x\right]_{-1}^1 = \\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot x\right]_{-1}^1 = \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Dosazením do vztahu (24) dostaneme kvadraturní formuli ve tvaru:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \underline{\underline{f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}}. \quad (25)$$

Geometricky si tuto formuli lze představit takto:



Obrázek 7: Princip Gaussovy formule o 2 uzlech Legenderova polynomu

**Příklad 2.14.** Vypočítejte hodnotu integrálu  $\int_{-1}^1 (x^4 - 3 \cdot x^2) dx$  pomocí výše odvozené formule, porovnejte s jeho přesnou hodnotou a odhadněte chybu.

Spočteme si nejprve funkční hodnoty v bodech  $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  a  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ :

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 - 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{9}{81} - 3 \cdot \frac{3}{9} = -\frac{72}{81} = -\frac{8}{9},$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{9}{81} - 3 \cdot \frac{3}{9} = -\frac{72}{81} = -\frac{8}{9}.$$

Následně už jen dosadíme do kvadraturní formule (25):

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 3 \cdot x^2) dx \approx -\frac{8}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{16}{9} = \underline{\underline{-1.7}}.$$

Nyní ještě pro kontrolu vypočítáme přesnou hodnotu integrálu:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^4 - 3 \cdot x^2) dx &= \left[ \frac{x^5}{5} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left[ \frac{x^5}{5} - x^3 \right]_{-1}^1 = \\ &= \left( \frac{1}{5} - 1 \right) - \left( -\frac{1}{5} - (-1) \right) = -\frac{4}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{8}{5} = \underline{\underline{-1.6}}. \end{aligned}$$

Dále ještě musíme odhadnout chybu. Proto je potřeba spočítat hodnotu čtvrté derivace funkce  $f$ :

$$f'(x) = (x^4 - 3 \cdot x^2)' = 4 \cdot x^3 - 6 \cdot x,$$

$$f''(x) = (4 \cdot x^3 - 6 \cdot x)' = 12 \cdot x^2 - 6,$$

$$f'''(x) = (12 \cdot x^2 - 6)' = 24 \cdot x,$$

$$f^{(4)}(x) = (24 \cdot x)' = 24.$$

Víme, že

$$|f^{(4)}(x)| \leq 24, \text{ tj. } \Omega = 24.$$

Pro hledanou chybu platí podle vztahu (23) odhad

$$\begin{aligned} |R(f)| &\leq \frac{24}{(2 \cdot 2)!} \cdot \int_{-1}^1 \left( x + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \left( x - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 dx = \\ &= \frac{24}{24} \cdot \int_{-1}^1 \left( x^2 + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \right) \cdot \left( x^2 - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \right) dx = \\ &\int_{-1}^1 \left( x^4 - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot x^3 + \frac{x^2}{3} + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot x^3 - \frac{4 \cdot x^2}{3} + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{9} \cdot x + \frac{x^2}{3} - \right. \\ &\left. - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{9} \cdot x + \frac{1}{9} \right) dx = \int_{-1}^1 \left( x^4 - \frac{2 \cdot x^2}{3} + \frac{1}{9} \right) dx = \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{9} \cdot x \right]_{-1}^1 = \\ &= \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) - \left( -\frac{1}{5} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{18 - 10}{45} = \frac{8}{45} = \underline{\underline{0.1\bar{7}}}. \end{aligned}$$



Na následujícím příkladu je ještě ukázáno použití transformace na požadovaný interval  $\langle -1; 1 \rangle$ . Přesný výsledek je spočten v Příkladu 2.2.

**Příklad 2.15.** Vypočtěte hodnotu integrálu  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí výše odvozené formule pro 2 uzly.

Nejprve tedy využijeme vztahu (22), čímž dostáváme výraz:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \frac{8-3}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\frac{8-3}{2} \cdot t + \frac{8+3}{2}}{\sqrt{1 + \frac{8-3}{2} \cdot t + \frac{8+3}{2}}} dt = \frac{5}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\frac{5}{2} \cdot t + \frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2} \cdot t + \frac{13}{2}}} dt.$$

Dále si spočteme funkční hodnoty v bodech  $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  a  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ :

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{13}{2}}} = \frac{-\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6} + \frac{11}{2}}{\sqrt{-\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6} + \frac{13}{2}}} \doteq 1.803991,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{13}{2}}} = \frac{\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6} + \frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6} + \frac{13}{2}}} \doteq 2.463588.$$

Nakonec dosadíme do kvadraturní formule (25):

$$\frac{5}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\frac{5}{2} \cdot t + \frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2} \cdot t + \frac{13}{2}}} dt \approx \frac{5}{2} \cdot (1.803991 + 2.463588) \doteq \underline{\underline{10.668949}}.$$

Dále je ještě odvozena formule pro 3 uzly, pro něž dostáváme obecně tuto kvadraturní formuli:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot \omega(x) dx \approx A_0 \cdot f(x_0) + A_1 \cdot f(x_1) + A_2 \cdot f(x_2). \quad (26)$$

Protože potřebujeme 3 uzly kvadraturní formule, najdeme kořeny Legendova polynomu  $P_3(x)$ :

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{d^3}{dx^3} [(x^2 - 1)^3] = \frac{1}{24} \cdot \frac{d^3}{dx^3} [x^6 - 3 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 - 1] = \\ &= \frac{1}{24} \cdot \frac{d^2}{dx^2} [6 \cdot x^5 - 12 \cdot x^3 + 6 \cdot x] = \frac{1}{24} \cdot \frac{d}{dx} [30 \cdot x^4 - 36 \cdot x^2 + 6] = \\ &= \frac{1}{24} \cdot (120 \cdot x^3 - 72 \cdot x) = 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x. \end{aligned}$$

Najdeme kořeny polynomu  $P_3(x)$ :

$$5 \cdot x^3 - 3 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (5 \cdot x^2 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$

$$5 \cdot x^2 - 3 = 0$$

$$5 \cdot x^2 = 3$$

$$x^2 = 0.6$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{0.6}$$

Dostali jsme tedy kořeny  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \sqrt{0.6}$  a  $x_2 = -\sqrt{0.6}$ . Dále se vypočítají příslušné Lagrangeovy fundamentální polynomy:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)} = \frac{(x-\sqrt{0.6}) \cdot (x+\sqrt{0.6})}{(0-\sqrt{0.6}) \cdot (0+\sqrt{0.6})} = \\
&= -\frac{10}{6} \cdot (x^2 + \sqrt{0.6} \cdot x - \sqrt{0.6} \cdot x - 0.6) = -\frac{5}{3} \cdot (x^2 - 0.6) = -\frac{5}{3} \cdot x^2 + 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1(x) &= \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)} = \frac{(x-0) \cdot (x+\sqrt{0.6})}{(\sqrt{0.6}-0) \cdot (\sqrt{0.6}+\sqrt{0.6})} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{6} \cdot (x^2 + \sqrt{0.6} \cdot x) = \frac{5}{6} \cdot (x^2 + \sqrt{0.6} \cdot x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2(x) &= \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)} = \frac{(x-0) \cdot (x-\sqrt{0.6})}{(-\sqrt{0.6}-0) \cdot (-\sqrt{0.6}-\sqrt{0.6})} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{6} \cdot (x^2 - \sqrt{0.6} \cdot x) = \frac{5}{6} \cdot (x^2 - \sqrt{0.6} \cdot x).
\end{aligned}$$

Pomocí těchto polynomů se dopočtou koeficienty kvadraturní formule:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_{-1}^1 \left( -\frac{5}{3} \cdot x^2 + 1 \right) dx = \left[ -\frac{5}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \\
&= \left( -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \right) - \left( -\frac{5}{3} \cdot \frac{(-1)}{3} - 1 \right) = \frac{4}{9} - \left( -\frac{4}{9} \right) = \frac{8}{9},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-1}^1 \left( \frac{5}{6} \cdot (x^2 + \sqrt{0.6} \cdot x) \right) dx = \frac{5}{6} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} + \sqrt{0.6} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \\
&= \frac{5}{6} \cdot \left( \left( \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{0.6}}{2} \right) - \left( \frac{(-1)}{3} + \frac{\sqrt{0.6}}{2} \right) \right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{-1}^1 \left( \frac{5}{6} \cdot (x^2 - \sqrt{0.6} \cdot x) \right) dx = \frac{5}{6} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} - \sqrt{0.6} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \\
&= \frac{5}{6} \cdot \left( \left( \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{0.6}}{2} \right) - \left( \frac{(-1)}{3} - \frac{\sqrt{0.6}}{2} \right) \right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

Dosazením do vztahu (26) dostaneme kvadraturní formuli ve tvaru:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \underline{\underline{\frac{8}{9} \cdot f(0) + \frac{5}{9} \cdot f(\sqrt{0.6}) + \frac{5}{9} \cdot f(-\sqrt{0.6})}}. \quad (27)$$

**Příklad 2.16.** Vypočtete hodnotu integrálu  $\int_{-1}^1 (x^4 - 3 \cdot x^2) dx$  pomocí výše odvozené formule, porovnejte s jeho přesnou hodnotou a odhadněte chybu.

Spočteme si nejprve funkční hodnoty v bodech  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \sqrt{0.6}$  a  $x_2 = -\sqrt{0.6}$ :

$$f(0) = 0^4 - 3 \cdot 0^2 = 0,$$

$$f(\sqrt{0.6}) = (\sqrt{0.6})^4 - 3 \cdot (\sqrt{0.6})^2 = 0.36 - 3 \cdot 0.6 = -1.44,$$

$$f(-\sqrt{0.6}) = (-\sqrt{0.6})^4 - 3 \cdot (-\sqrt{0.6})^2 = 0.36 - 3 \cdot 0.6 = -1.44.$$

Následně už jen dosadíme do kvadraturní formule (27):

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 3 \cdot x^2) dx \approx \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9} \cdot (-1.44) + \frac{5}{9} \cdot (-1.44) = \underline{\underline{-1.6}}.$$

Toto je i přesná hodnota integrálu, což je spočítáno v Příkladu 2.14. Pro odhad maximální chyby je potřeba spočítat hodnotu šesté derivace funkce  $f$ :

$$f^{(4)}(x) = (24 \cdot x)' = 24, \text{ (výpočet v Příkladu 2.14)}$$

$$f^{(5)}(x) = (24)' = 0,$$

$$f^{(6)}(x) = (0)' = 0.$$

Víme, že

$$|f^{(6)}(x)| \leq 0, \text{ tj. } \Omega = 0.$$

Pro hledanou chybu platí podle vztahu (23) odhad

$$|R(f)| \leq \frac{0}{(2 \cdot 3)!} \cdot \int_{-1}^1 (x+0)^2 \cdot (x-\sqrt{0.6})^2 \cdot (x+\sqrt{0.6})^2 dx = \underline{0}.$$

Na následujícím příkladu je opět ukázáno použití transformace na požadovaný interval  $\langle -1; 1 \rangle$ . Přesný výsledek je spočten v Příkladu 2.2.

**Příklad 2.17.** Vypočtěte hodnotu integrálu  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí výše odvozené formule pro 3 uzly.

Nejprve tedy využijeme vztahu (22), čímž dostáváme výraz:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \frac{8-3}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\frac{8-3}{2} \cdot t + \frac{8+3}{2}}{\sqrt{1 + \frac{8-3}{2} \cdot t + \frac{8+3}{2}}} dt = \frac{5}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\frac{5}{2} \cdot t + \frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2} \cdot t + \frac{13}{2}}} dt.$$

Dále si spočteme funkční hodnoty v bodech  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \sqrt{0.6}$  a  $x_2 = -\sqrt{0.6}$ :

$$f(0) = \frac{\frac{5}{2} \cdot 0 + \frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2} \cdot 0 + \frac{13}{2}}} = \frac{\frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{13}{2}}} \doteq 2.157277,$$

$$f(\sqrt{0.6}) = \frac{\frac{5}{2} \cdot \sqrt{0.6} + \frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2} \cdot \sqrt{0.6} + \frac{13}{2}}} \doteq 2.560278,$$

$$f(-\sqrt{0.6}) = \frac{\frac{5}{2} \cdot (-\sqrt{0.6}) + \frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2} \cdot (-\sqrt{0.6}) + \frac{13}{2}}} \doteq 1.668124.$$

Nakonec dosadíme do kvadraturní formule (27):

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\frac{5}{2} \cdot t + \frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2} \cdot t + \frac{13}{2}}} dt &\approx \frac{5}{2} \cdot \left( \frac{8}{9} \cdot 2.157277 + \frac{5}{9} \cdot 2.560278 + \frac{5}{9} \cdot 1.668124 \right) \doteq \\ &\doteq \underline{\underline{10.666731}}. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Složené kvadrurní formule

Stejně jako u Newton-Cotesových vzorců i zde můžeme uvažovat výpočty pomocí složených vzorců. Rozdělme obecný interval  $\langle a; b \rangle$  na celkem  $k$  podintervalů  $\langle x_{j-1}; x_j \rangle$ ,  $j = 1, \dots, k$ ,  $j \geq 2$ , přičemž všechny tyto podintervaly budou mít stejnou délku  $h = \frac{b-a}{k}$ . Vzhledem k aditivitě určitého integrálu platí vztah

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx,$$

kde  $x_j = a + j \cdot h$ ,  $j = 0, \dots, k$ .

Abychom mohli použít Gaussovy vzorce, převedeme každý podinterval  $\langle x_{j-1}; x_j \rangle$ ,  $j = 1, \dots, k$ , na požadovaný interval  $\langle -1; 1 \rangle$  pomocí následující substituce:

$$x = \frac{x_{j-1} + x_j}{2} + \frac{h \cdot t}{2}, \quad t \in \langle -1; 1 \rangle,$$

díky čemuž dostáváme

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{j=1}^k \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} + \frac{h \cdot t}{2}\right) dt.$$

Označme dále

$$g_j(t) = f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} + \frac{h \cdot t}{2}\right)$$

a

$$I_j = \int_{-1}^1 g_j(t)dt,$$

čímž dostáváme

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{j=1}^k \int_{-1}^1 g_j(t)dt = \frac{h}{2} \cdot \sum_{j=1}^k I_j.$$

Použitím Gaussova vzorce s  $n + 1$  uzly na každý z integrálů  $I_j$  dostaneme složený kvadrurní vzorec

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^n A_i \cdot g_j(y_i) = \frac{h}{2} \cdot \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^n A_i \cdot f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} + \frac{h \cdot y_i}{2}\right), \quad (28)$$

kde  $y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou kořeny příslušného Legendera polynomu a  $A_i$  pro  $i = 0, \dots, n$  jsou příslušné koeficienty kvadrurní formule.

I u složených Gaussových vzorců však musíme počítat s určitou chybou, o které pojednává další věta.

**Věta 2.6.** *Mějme interval  $\langle a; b \rangle$  rozdělený na  $k$  stejně dlouhých podintervalů. Nechť  $n \in \mathbb{N}$ , nechť  $m = n + 1$  je počet uzlů Gaussovy-Legenderovy kvadrurní formule v jednotlivých podintervalech a nechť  $f$  je reálná funkce, která má na intervalu  $\langle a; b \rangle$  omezenou  $2 \cdot m$ -tou derivaci. Pak pro chybu složené Gaussovy-Legenderovy kvadrurny platí vztah*

$$|R(f)| \leq \frac{\Omega \cdot (b - a)^{2 \cdot m + 1}}{(2 \cdot m)! \cdot 2^{2 \cdot m + 1} \cdot k^{2 \cdot m}} \cdot \int_{-1}^1 (x - x_0)^2 \cdot (x - x_1)^2 \cdot \dots \cdot (x - x_n)^2 dx, \quad (29)$$

kde  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  jsou kořeny Legendera polynomu a  $\Omega$  je taková hodnota, že pro každé  $x \in \langle a; b \rangle$  platí  $|f^{(2 \cdot m)}(x)| \leq \Omega$ .

Důkaz této věty lze nalézt např. v [11].

**Příklad 2.18.** Vypočítejte hodnotu integrálu  $\int_{-1}^1 (x^4 - 3 \cdot x^2) dx$  pomocí výše odvozené složené formule pro  $k = 2$  a  $n = 1$ , porovnejte s jeho přesnou hodnotou a odhadněte chybu.

Zvolíme si 2 podintervaly, tj.  $h = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$ , a jednotlivé intervaly jsou  $\langle -1; 0 \rangle$  a  $\langle 0; 1 \rangle$ . Ze zadání víme, že máme použít 2 uzly kvadraturní formule, z čehož plyne (dle již dříve odvozeného), že koeficienty jsou  $A_0 = A_1 = 1$  a kořeny Legendrova polynomu  $P_2$  jsou  $y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  a  $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Dosadíme tak do vztahu (28) a dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^4 - 3 \cdot x^2) dx &\approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^2 \sum_{i=0}^1 1 \cdot f \left( \frac{x_{j-1} + x_j}{2} + \frac{1 \cdot y_i}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ f \left( \frac{-1+0}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2} \right) + f \left( \frac{-1+0}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + f \left( \frac{0+1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2} \right) + \right. \\ &+ f \left. \left( \frac{0+1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[ f \left( \frac{-3-\sqrt{3}}{6} \right) + f \left( \frac{-3+\sqrt{3}}{6} \right) + f \left( \frac{3-\sqrt{3}}{6} \right) + \right. \\ &+ f \left. \left( \frac{3+\sqrt{3}}{6} \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \left( \frac{-3-\sqrt{3}}{6} \right)^4 - 3 \cdot \left( \frac{-3-\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right) + \right. \\ &+ \left( \left( \frac{-3+\sqrt{3}}{6} \right)^4 - 3 \cdot \left( \frac{-3+\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right) + \left( \left( \frac{3-\sqrt{3}}{6} \right)^4 - 3 \cdot \left( \frac{3-\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right) + \\ &+ \left. \left( \left( \frac{3+\sqrt{3}}{6} \right)^4 - 3 \cdot \left( \frac{3+\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right) \right] \doteq \\ &\doteq \frac{1}{2} \cdot (-1.479131 - 0.13198 - 0.13198 - 1.479131) \doteq \frac{1}{2} \cdot (-3.222222) = \underline{\underline{-1.6\bar{1}}}. \end{aligned}$$

Přesná hodnota  $-1.6$  je spočítána v Příkladu 2.14.



Dále ještě musíme odhadnout chybu. Proto je potřeba spočítat hodnotu čtvrté derivace funkce  $f$ , což již ale máme opět v Příkladu 2.14:

$$f^{(4)}(x) = 24.$$

Víme, že

$$|f^{(4)}(x)| \leq 24, \text{ tj. } \Omega = 24.$$

Pro hledanou chybu platí podle vztahu (29) odhad

$$\begin{aligned} |R(f)| &\leq \frac{24 \cdot (1 - (-1))^{2 \cdot 2 + 1}}{(2 \cdot 2)! \cdot 2^{2 \cdot 2 + 1} \cdot 2^{2 \cdot 2}} \cdot \int_{-1}^1 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \\ &= \frac{24 \cdot 2^5}{24 \cdot 2^5 \cdot 2^4} \cdot \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x^2 - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{1}{3}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2^4} \cdot \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot x^3 + \frac{x^2}{3} + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot x^3 - \frac{4 \cdot x^2}{3} + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{9} \cdot x + \frac{x^2}{3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{9} \cdot x + \frac{1}{9}\right) dx = \frac{1}{16} \cdot \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2 \cdot x^2}{3} + \frac{1}{9}\right) dx = \\ &= \frac{1}{16} \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{9} \cdot x\right]_{-1}^1 = \frac{1}{16} \cdot \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{16} \cdot \frac{18 - 10}{45} = \frac{1}{16} \cdot \frac{8}{45} = \underline{\underline{0.0\bar{1}}}. \end{aligned}$$

Výše uvedenou složenou Gaussovu-Legendrovu formuli zde ještě nyní demonstřuji na zadání Příkladu 2.2. Výpočet je proveden pro celkem 5 podintervalů, tj.  $k = 5$ ,  $h = \frac{8-3}{5} = 1$  a jednotlivé intervaly jsou  $\langle 3; 4 \rangle$ ,  $\langle 4; 5 \rangle$ ,  $\langle 5; 6 \rangle$ ,  $\langle 6; 7 \rangle$  a  $\langle 7; 8 \rangle$ , a 2 uzly kvadraturní formule, tj. koeficienty jsou  $A_0 = A_1 = 1$ . Kořeny Legendrova polynomu  $P_2$  jsou  $y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  a  $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Příklad 2.19.** Vypočítejte hodnotu integrálu  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí odvozené složené formule a výše zadaných podmínek.

Dosazením do vztahu (28) dostáváme:

$$\begin{aligned}
 \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &\approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^5 \sum_{i=0}^1 1 \cdot f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} + \frac{1 \cdot y_i}{2}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[ f\left(\frac{3+4}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + f\left(\frac{3+4}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f\left(\frac{4+5}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \right. \\
 &\quad + f\left(\frac{4+5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f\left(\frac{5+6}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + f\left(\frac{5+6}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \\
 &\quad + f\left(\frac{6+7}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + f\left(\frac{6+7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f\left(\frac{7+8}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \\
 &\quad \left. + f\left(\frac{7+8}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[ f\left(\frac{21-\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(\frac{21+\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(\frac{27-\sqrt{3}}{6}\right) + \right. \\
 &\quad + f\left(\frac{27+\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(\frac{33-\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(\frac{33+\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(\frac{39-\sqrt{3}}{6}\right) + \\
 &\quad \left. + f\left(\frac{39+\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(\frac{45-\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(\frac{45+\sqrt{3}}{6}\right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\frac{21-\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1+\frac{21-\sqrt{3}}{6}}} + \right. \\
 &\quad + \frac{\frac{21+\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1+\frac{21+\sqrt{3}}{6}}} + \frac{\frac{27-\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1+\frac{27-\sqrt{3}}{6}}} + \frac{\frac{27+\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1+\frac{27+\sqrt{3}}{6}}} + \frac{\frac{33-\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1+\frac{33-\sqrt{3}}{6}}} + \\
 &\quad \left. + \frac{\frac{33+\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1+\frac{33+\sqrt{3}}{6}}} + \frac{\frac{39-\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1+\frac{39-\sqrt{3}}{6}}} + \frac{\frac{39+\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1+\frac{39+\sqrt{3}}{6}}} + \frac{\frac{45-\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1+\frac{45-\sqrt{3}}{6}}} + \frac{\frac{45+\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1+\frac{45+\sqrt{3}}{6}}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{33 + \sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1 + \frac{33 + \sqrt{3}}{6}}} + \frac{\frac{39 - \sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1 + \frac{39 - \sqrt{3}}{6}}} + \frac{\frac{39 + \sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1 + \frac{39 + \sqrt{3}}{6}}} + \frac{\frac{45 - \sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1 + \frac{45 - \sqrt{3}}{6}}} + \\
& + \left. \frac{\frac{45 + \sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1 + \frac{45 + \sqrt{3}}{6}}} \right] \doteq \frac{1}{2} \cdot (1.564858 + 1.731329 + 1.84478 + 1.990333 + 2.09101 + \\
& + 2.221706 + 2.313006 + 2.432502 + 2.516567 + 2.627253) \doteq \frac{1}{2} \cdot 21.333344 \doteq \\
& \doteq \underline{\underline{10.666672}}.
\end{aligned}$$

**Poznámka 2.2.** Existuje i celá řada jiných Gaussových kvadrurních formulí, např. Gaussova-Čebyševova kvadrurní formule s vahovou funkcí  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  na intervalu  $(-1; 1)$ , u níž za uzly volíme kořeny Čebyševova polynomu, nebo Gaussova-Hermitova kvadrurní formule s vahovou funkcí  $\omega(x) = e^{-x^2}$  na intervalu  $(-\infty; \infty)$ , u které za uzly volíme kořeny Hermitova polynomu (více např. viz [4]).

## 2.3 Přibližný výpočet určitého integrálu při aproximaci funkce pomocí Taylorova polynomu

V této části práce se budeme zabývat tím, jak lze určitý integrál z dané funkce přibližně vypočítat v případě, když funkci neaproximujeme interpolačním polynomem, ale pomocí Taylorova polynomu.

Uvažujme tedy úlohu „vypočítat přibližně  $\int_a^b f(x)dx$ “ a nahraďme funkci  $f$  na  $\langle a; b \rangle$  Taylorovým polynomem stupně  $n$  se středem v bodě  $x_0$ , který budeme integrovat místo zadané funkce, tedy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k dx,$$

kde  $x_0 \in \langle a; b \rangle$ .

Přímým výpočtem poté získáváme:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{k=0}^n \int_a^b \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot \int_a^b (x - x_0)^k dx = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot \left[ \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} \right]_a^b = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k+1)!} \cdot ((b - x_0)^{k+1} - (a - x_0)^{k+1}), \end{aligned}$$

kde  $x_0 \in \langle a; b \rangle$ .

Pokud za střed  $x_0$  Taylorova polynomu zvolíme bod  $a$ , pak platí, že

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!} \cdot (b - a)^{k+1} = \\ &= f(a) \cdot (b - a) + \frac{f'(a)}{2} \cdot (b - a)^2 + \frac{f''(a)}{6} \cdot (b - a)^3 + \dots \end{aligned}$$

Pokud zvolíme za  $x_0$  bod  $b$ , pak

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(b)}{(k+1)!} \cdot (-(a - b)^{k+1}) = \\ &= f(b) \cdot (b - a) - \frac{f'(b)}{2} \cdot (b - a)^2 + \frac{f''(b)}{6} \cdot (b - a)^3 + \dots \end{aligned}$$

Pokud zvolíme za  $x_0$  střed intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pak

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(k+1)!} \cdot \left( \left( b - \frac{a+b}{2} \right)^{k+1} - \left( a - \frac{a+b}{2} \right)^{k+1} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(k+1)!} \cdot \left( \left( \frac{b-a}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{a-b}{2} \right)^{k+1} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(k+1)!} \cdot \left( \left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} \cdot (1 + (-1)^{k+2}) \right) = \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot (1+1) + \frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} \cdot \left( \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \cdot (1-1) \right) + \\
&\quad + \frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{6} \cdot \left( \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \cdot (1+1) \right) + \dots = \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) + \frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{24} \cdot (b-a)^3 + \dots
\end{aligned}$$

**Poznámka 2.3.** Z výše odvozeného je patrné, že pokud je  $x_0$  střed intervalu  $\langle a; b \rangle$  a  $n$  je libovolné liché přirozené číslo, pak jsou vzorce pro přibližný výpočet integrálu  $\int_a^b f(x)dx$  v případě, že aproximujeme Taylorovým polynomem stupně  $n$  nebo  $n-1$ , shodné. Z toho vyplývá, že je možné se v tomto případě zabírat např. pouze případy s lichými stupni Taylorova polynomu.

Samozřejmě, že za střed Taylorova polynomu lze volit libovolný bod z intervalu  $\langle a; b \rangle$ .

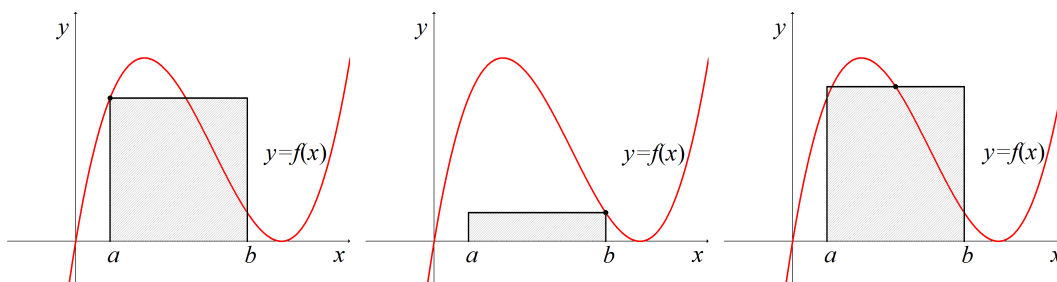
Nyní se zaměříme na to, jak vypadají vzorce pro přibližný výpočet určitého integrálu pro volbu  $n = 0, 1, 2$ .

Pokud  $n = 0$ , pak dle výše odvozených vztahů platí:

$x_0$	$\int_a^b f(x)dx \approx$
$a$	$f(a) \cdot (b - a)$
$b$	$f(b) \cdot (b - a)$
$\frac{a + b}{2}$	$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot (b - a)$

Tabulka 5: Vzorce pro přibližný výpočet integrálu při aproximaci funkce Taylorovým polynomem 0. stupně

Jak je vidět, získali jsme tak vztahy, které se shodují s již dříve popsanými metodami levého odhadu (pro  $x_0 = a$ ), pravého odhadu (pro  $x_0 = b$ ) a obdélníkovým pravidlem (pro  $x_0 = \frac{a + b}{2}$ ).



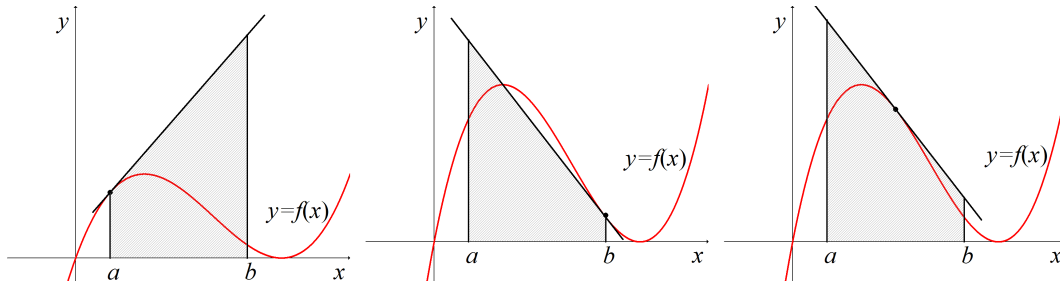
Obrázek 8: Znázornění výpočtu integrálu při aproximaci funkce Taylorovým polynomem 0. stupně se středem v bodech  $a$ ,  $b$  a  $\frac{a + b}{2}$

Pokud  $n = 1$ , pak dle výše odvozených vztahů platí:

$x_0$	$\int_a^b f(x)dx \approx$
$a$	$f(a) \cdot (b - a) + \frac{f'(a)}{2} \cdot (b - a)^2$
$b$	$f(b) \cdot (b - a) - \frac{f'(b)}{2} \cdot (b - a)^2$
$\frac{a + b}{2}$	$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot (b - a)$

Tabulka 6: Vzorce pro přibližný výpočet integrálu při aproximaci funkce Taylorovým polynomem 1. stupně

V tomto případě nahrazujeme graf funkce  $f$  na intervalu  $\langle a; b \rangle$  tečnou sestavenou v bodě  $[a, f(a)]$ , resp.  $[b, f(b)]$ , resp.  $\left[\frac{a + b}{2}, f\left(\frac{a + b}{2}\right)\right]$ .



Obrázek 9: Znázornění výpočtu integrálu při aproximaci funkce Taylorovým polynomem 1. stupně se středem v bodech  $a$ ,  $b$  a  $\frac{a + b}{2}$

Obecně se nedá říci, jaká volba  $x_0$  je ta nejvhodnější, protože vždy záleží na integrované funkci, jak je vidět na následujících dvou příkladech, kdy v každém z nich je daná funkce počítaná přesným výpočtem a také pro tři již výše zmiňované volby bodu  $x_0$ .

**Příklad 2.20.** Spočítejte  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí vztahů z tabulky pro aproximaci TP

1. stupně pro tři výše zmíněné volby bodu  $x_0$ .

Nejprve si pro další potřebu zderivujeme zadanou funkci:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( x \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \right)' = 1 \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^3}}. \end{aligned}$$

Nyní již samotné výpočty pro různé volby  $x_0$ :

1.  $x_0 = a$ :

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &\approx \frac{3}{\sqrt{1+3}} \cdot (8-3) + \frac{\frac{1}{\sqrt{1+3}} - \frac{3}{2 \cdot \sqrt{(1+3)^3}}}{2} \cdot (8-3)^2 = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 5 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{16}}{2} \cdot 25 = \underline{\underline{11.40625}}, \end{aligned}$$

2.  $x_0 = b$ :

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &\approx \frac{8}{\sqrt{1+8}} \cdot (8-3) - \frac{\frac{1}{\sqrt{1+8}} - \frac{8}{2 \cdot \sqrt{(1+8)^3}}}{2} \cdot (8-3)^2 = \\ &= \frac{8}{3} \cdot 5 - \frac{\frac{1}{3} - \frac{8}{54}}{2} \cdot 25 = \underline{\underline{11.018519}}, \end{aligned}$$

3.  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ :

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \frac{5.5}{\sqrt{1+5.5}} \cdot (8-3) = \underline{\underline{10.786387}}.$$

Přesný výsledek  $10.\bar{6}$  je vypočten v Příkladu 2.2. Je tedy vidět, že v tomto případě nám dala nejpresnější výsledek volba  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  a nejméně přesný  $x_0 = a$ .



**Příklad 2.21.** Spočítejte  $\int_0^2 x \cdot e^{-x^2} dx$  pomocí vztahů z tabulky pro aproximaci TP

1. stupně pro tři výše zmíněné volby bodu  $x_0$ .

Nejprve si opět zderivujeme zadanou funkci:

$$f'(x) = (x \cdot e^{-x^2})' = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2 \cdot x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (1 - 2 \cdot x^2).$$

Nyní již samotné výpočty pro různé volby  $x_0$ :

1.  $x_0 = a$ :

$$\int_0^2 x \cdot e^{-x^2} dx \approx 0 \cdot e^{-0^2} \cdot (2-0) + \frac{e^{-0^2} \cdot (1 - 2 \cdot 0^2)}{2} \cdot (2-0)^2 = 0 + \frac{1 \cdot (1-0)}{2} \cdot 4 = \underline{\underline{2}},$$

2.  $x_0 = b$ :

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \cdot e^{-x^2} dx &\approx 2 \cdot e^{-2^2} \cdot (2-0) - \frac{e^{-2^2} \cdot (1 - 2 \cdot 2^2)}{2} \cdot (2-0)^2 = \\ &= 4 \cdot e^{-4} - (-14 \cdot e^{-4}) = 18 \cdot e^{-4} \doteq \underline{\underline{0.329682}}, \end{aligned}$$

3.  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ :

$$\int_0^2 x \cdot e^{-x^2} dx \approx 1 \cdot e^{-1^2} \cdot (2-0) = 2 \cdot e^{-1} \doteq \underline{\underline{0.735759}}.$$

Ještě spočítáme přesný výsledek:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \cdot e^{-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = e^{-x^2} \\ dt = -2 \cdot x \cdot e^{-x^2} dx \end{array} \right|_{b=e^{-2^2}=e^{-4}}^{a=e^{-0^2}=1} = -\frac{1}{2} \cdot \int_1^{e^{-4}} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{e^{-4}}^1 dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [t]_{e^{-4}}^1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-4}) \doteq \underline{\underline{0.490842}}. \end{aligned}$$

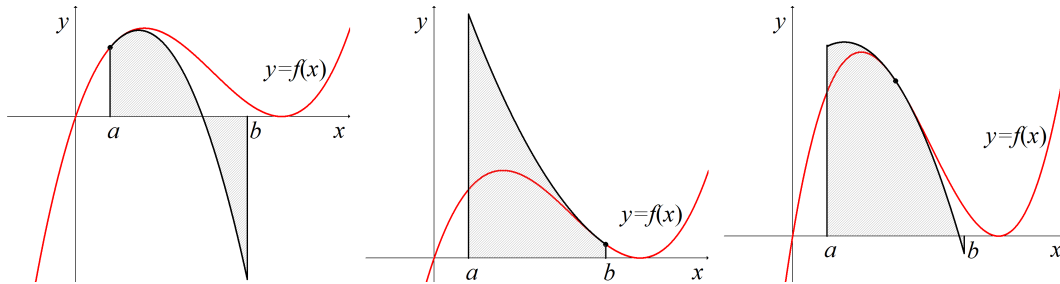
V tomto případě nám pro změnu dala nejpřesnější výsledek volba  $x_0 = b$  a nejméně přesný opět  $x_0 = a$ .

Pokud  $n = 2$ , pak dle výše odvozených vztahů platí:

$x_0$	$\int_a^b f(x)dx \approx$
$a$	$f(a) \cdot (b - a) + \frac{f'(a)}{2} \cdot (b - a)^2 + \frac{f''(a)}{6} \cdot (b - a)^3$
$b$	$f(b) \cdot (b - a) - \frac{f'(b)}{2} \cdot (b - a)^2 + \frac{f''(b)}{6} \cdot (b - a)^3$
$\frac{a + b}{2}$	$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot (b - a) + \frac{f''\left(\frac{a + b}{2}\right)}{24} \cdot (b - a)^3$

Tabulka 7: Vzorce pro přibližný výpočet integrálu při aproximaci funkce Taylorovým polynomem 2. stupně

V tomto případě nahrazujeme funkci  $f$  na intervalu  $\langle a; b \rangle$  polynomem 2. stupně, jak je vidět na obrázcích.



Obrázek 10: Znázornění výpočtu integrálu při aproximaci funkce Taylorovým polynomem 2. stupně se středem v bodech  $a$ ,  $b$  a  $\frac{a + b}{2}$

Opět zde výsledky závisí především na tvaru funkce a volbě bodu  $x_0$ , často vyjdou přesnější, ale občas i méně přesné, než v případě  $n = 1$ , což je opět názorně vidět na následujících dvou příkladech, které mají stejné zadání jako předchozí dva.

**Příklad 2.22.** Spočítejte  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí vztahů z tabulky pro aproximaci TP

2. stupně pro tři výše zmíněné volby bodu  $x_0$ .

Nejprve si pro další potřebu najdeme první a druhou derivaci dané funkce:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^3}} \quad (\text{výpočet v Příkladu 2.20}),$$

$$f''(x) = \left( (1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot x \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \right)' =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \left( 1 \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left( -\frac{3}{2} \right) \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} \cdot x \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{(1+x)^5}}.$$

Nyní již samotné výpočty pro různé volby  $x_0$ :

1.  $x_0 = a$ :

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \frac{3}{\sqrt{1+3}} \cdot (8-3) + \frac{1}{\sqrt{1+3}} - \frac{3}{2 \cdot \sqrt{(1+3)^3}} \cdot (8-3)^2 +$$

$$+ \frac{-\frac{1}{\sqrt{(1+3)^3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{(1+3)^5}}}{6} \cdot (8-3)^3 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} - \frac{3}{16} \cdot 25 + \frac{-\frac{1}{8} + \frac{9}{128}}{6} \cdot 125 \doteq \underline{\underline{10.266927}},$$

2.  $x_0 = b$ :

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \frac{8}{\sqrt{1+8}} \cdot (8-3) + \frac{1}{\sqrt{1+8}} - \frac{8}{2 \cdot \sqrt{(1+8)^3}} \cdot (8-3)^2 +$$

$$+ \frac{-\frac{1}{\sqrt{(1+8)^3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{(1+8)^5}}}{6} \cdot (8-3)^3 =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot 5 - \frac{1}{3} - \frac{8}{54} \cdot 25 + \frac{-\frac{1}{27} + \frac{6}{243}}{6} \cdot 125 \doteq \underline{\underline{10.761317}},$$

$$3. x_0 = \frac{a+b}{2}:$$

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \frac{5.5}{\sqrt{1+5.5}} \cdot (8-3) +$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(1+5.5)^3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5.5}{\sqrt{(1+5.5)^5}} \cdot (8-3)^3 \doteq \underline{\underline{10.671551}}.$$

Přesný výsledek  $10.\bar{6}$  je vypočten v Příkladu 2.2. Je tedy vidět, že i v tomto případě nám dala nejpřesnější výsledek opět volba  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  a nejméně přesný  $x_0 = a$ . Všechny výsledky se již ale začaly přibližovat skutečné hodnotě.

**Příklad 2.23.** Spočítejte  $\int_0^2 x \cdot e^{-x^2} dx$  pomocí vztahů z tabulky pro aproximaci TP

2. stupně pro tři výše zmíněné volby bodu  $x_0$ .

Nejprve si pro další potřebu najdeme první a druhou derivaci dané funkce:

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (1 - 2 \cdot x^2) \quad (\text{výpočet v Příkladu 2.21}),$$

$$f''(x) = \left( e^{-x^2} \cdot (1 - 2 \cdot x^2) \right)' = -2 \cdot x \cdot e^{-x^2} \cdot (1 - 2 \cdot x^2) + e^{-x^2} \cdot (-4 \cdot x) =$$

$$= 2 \cdot x \cdot e^{-x^2} \cdot (2 \cdot x^2 - 3)$$

Nyní již samotné výpočty pro různé volby  $x_0$ :

1.  $x_0 = a$ :

$$\int_0^2 x \cdot e^{-x^2} dx \approx 0 \cdot e^{-0^2} \cdot (2-0) + \frac{e^{-0^2} \cdot (1 - 2 \cdot 0^2)}{2} \cdot (2-0)^2 +$$

$$+ \frac{2 \cdot 0 \cdot e^{-0^2} \cdot (2 \cdot 0^2 - 3)}{6} \cdot (2-0)^3 = 0 + \frac{1 \cdot (1-0)}{2} \cdot 4 + 0 = \underline{\underline{2}},$$

2.  $x_0 = b$ :

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \cdot e^{-x^2} dx &\approx 2 \cdot e^{-2^2} \cdot (2 - 0) - \frac{e^{-2^2} \cdot (1 - 2 \cdot 2^2)}{2} \cdot (2 - 0)^2 + \\ &+ \frac{2 \cdot 2 \cdot e^{-2^2} \cdot (2 \cdot 2^2 - 3)}{6} \cdot (2 - 0)^3 = 4 \cdot e^{-4} - (-14 \cdot e^{-4}) + \frac{80}{3} \cdot e^{-4} = \\ &= \frac{134}{3} \cdot e^{-4} \doteq \underline{\underline{0.818099}}, \end{aligned}$$

3.  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \cdot e^{-x^2} dx &\approx 1 \cdot e^{-1^2} \cdot (2 - 0) + \frac{2 \cdot 1 \cdot e^{-1^2} \cdot (2 \cdot 1^2 - 3)}{24} \cdot (2 - 0)^3 = \\ &= 2 \cdot e^{-1} - \frac{2}{3} \cdot e^{-1} = \frac{4}{3} \cdot e^{-1} \doteq \underline{\underline{0.490506}}. \end{aligned}$$

Přesný výsledek je spočten v Příkladu 2.21. V tomto případě nám již nejpřesnější výsledek dala volba  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  a nejméně přesný opět  $x_0 = a$ . U volby  $x_0 = b$  je ovšem výsledek více vzdálen od skutečné hodnoty než u  $n = 1$  a u volby  $x_0 = a$  se výsledná hodnota nezměnila, což samozřejmě také může nastat.

Pokud  $n = 3$ , pak dle výše odvozených vztahů platí:

$x_0$	$\int_a^b f(x) dx \approx$
$a$	$f(a) \cdot (b-a) + \frac{f'(a)}{2} \cdot (b-a)^2 + \frac{f''(a)}{6} \cdot (b-a)^3 + \frac{f'''(a)}{24} \cdot (b-a)^4$
$b$	$f(b) \cdot (b-a) - \frac{f'(b)}{2} \cdot (b-a)^2 + \frac{f''(b)}{6} \cdot (b-a)^3 - \frac{f'''(b)}{24} \cdot (b-a)^4$
$\frac{a+b}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) + \frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{24} \cdot (b-a)^3$

Tabulka 8: Vzorce pro přibližný výpočet integrálu při aproximaci funkce Taylorovým polynomem 3. stupně

V tomto případě nahrazujeme funkci  $f$  na intervalu  $\langle a; b \rangle$  polynomem 3. stupně. Použití těchto vztahů je názorně předvedeno na následujícím příkladu, jehož výsledky jsou pak porovnány s předchozími výsledky pro  $n = 2$  i těmi, které jsme pro stejné zadání získali u Simpsonova pravidla v Příkladu 2.6.

**Příklad 2.24.** Spočtete  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí vztahů z tabulky pro aproximaci TP

3. stupně pro tři výše zmíněné volby bodu  $x_0$ .

Nejprve si pro další potřebu najdeme první, druhou a třetí derivaci dané funkce:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^3}} \quad (\text{výpočet v Příkladu 2.20}),$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{(1+x)^5}} \quad (\text{výpočet v Příkladu 2.22}),$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \left( -(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} \cdot x \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} \right)' = \\ &= \frac{3}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} + \frac{3}{4} \cdot \left( 1 \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} + x \cdot \left( -\frac{5}{2} \right) \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}} \right) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} + \frac{3}{4} \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} - \frac{15}{8} \cdot x \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}} - \frac{15}{8} \cdot \frac{x}{\sqrt{(1+x)^7}}. \end{aligned}$$

Nyní již samotné výpočty pro různé volby  $x_0$ :

1.  $x_0 = a$ :

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &\approx \frac{3}{\sqrt{1+3}} \cdot (8-3) + \frac{1}{\sqrt{1+3}} - \frac{3}{2 \cdot \sqrt{(1+3)^3}} \cdot (8-3)^2 + \\ &+ \frac{-\frac{1}{\sqrt{(1+3)^3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{(1+3)^5}}}{6} \cdot (8-3)^3 + \frac{\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+3)^5}} - \frac{15}{8} \cdot \frac{3}{\sqrt{(1+3)^7}}}{24} \cdot (8-3)^4 = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 5 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{16}}{2} \cdot 25 + \frac{-\frac{1}{8} + \frac{9}{128}}{6} \cdot 125 + \frac{\frac{9}{128} - \frac{45}{1024}}{24} \cdot 625 \doteq \\ &\doteq 7.5 + 3.90625 - 1.139323 + 0.686646 \doteq \underline{\underline{10.953573}}, \end{aligned}$$

2.  $x_0 = b$ :

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &\approx \frac{8}{\sqrt{1+8}} \cdot (8-3) - \frac{1}{\sqrt{1+8}} - \frac{8}{2 \cdot \sqrt{(1+8)^3}} \cdot (8-3)^2 + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(1+8)^3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{(1+8)^5}} \cdot (8-3)^3 - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+8)^5}} - \frac{15}{8} \cdot \frac{8}{\sqrt{(1+8)^7}} \cdot (8-3)^4 = \\ &= \frac{8}{3} \cdot 5 - \frac{1}{3} - \frac{8}{54} \cdot 25 + \frac{1}{27} + \frac{6}{243} \cdot 125 - \frac{108}{24} - \frac{5}{729} \cdot 625 \doteq \\ &\doteq 13.\bar{3} - 2.314815 - 0.257202 - 0.062514 \doteq \underline{\underline{10.698802}}, \end{aligned}$$

3.  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ :

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &\approx \frac{5.5}{\sqrt{1+5.5}} \cdot (8-3) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(1+5.5)^3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5.5}{\sqrt{(1+5.5)^5}} \cdot (8-3)^3 \doteq \underline{\underline{10.671551}}. \end{aligned}$$

Přesný výsledek  $10.\bar{6}$  je vypočten v Příkladu 2.2. Srovnáme-li všechny tyto výsledky s Příkladem 2.6, kde pomocí Simpsonova pravidla vyšla přibližná hodnota 10.663147, zjistíme, že výsledky pomocí Taylorova polynomu vychází mírně horší. Vše by ale mohlo být jinak např. u jiné funkce či u jiné volby bodu  $x_0$ . Pokud získané výsledky srovnáme s těmi vypočtenými v Příkladu 2.22, je vidět, že pro volby  $x_0 = a$  a  $x_0 = b$  se výsledky zpřesnily. V případě, kdy je  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ , je výsledek samozřejmě totožný (viz Poznámka 2.3).

Stejně jako v případě Newton-Cotesových a Gaussových vzorců se i zde dopouštíme určité chyby  $Ch_n(x_0)$ , jejíž velikost samozřejmě závisí na intervalu  $\langle a; b \rangle$ , funkci  $f$ , stupni Taylorova polynomu i jeho středu.

Porovnáme-li chybu při aproximaci interpolačním polynomem

$$E_n(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(n + 1)!} \cdot f^{(n+1)}(\eta), \quad \text{kde } \eta = \eta(x),$$

a chybu při aproximaci Taylorovým polynomem

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \cdot f^{(n+1)}(\eta), \quad \text{kde } \eta = \eta(x),$$

zjistíme, že pokud by uzly  $x_0, x_1, \dots, x_n$  byly shodné, tj. pokud by  $x_0 = x_1 = \dots = x_n$ , pak by byly shodné také výrazy  $\frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(n + 1)!}$  a  $\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$  vyskytující se v předpisech pro dané chyby. Proto lze pro chybu  $Ch_n(x_0)$  odvodit obdobné vztahy jako u Newton-Cotesových vzorců, konkrétně pro  $n$  sudé platí, že

$$Ch_n(x_0) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n + 2)!} \cdot \int_a^b x \cdot (x - x_0)^{n+1} dx, \quad \text{kde } \xi \in \langle a; b \rangle,$$

a pro  $n$  liché platí, že

$$Ch_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \cdot \int_a^b (x - x_0)^{n+1} dx, \quad \text{kde } \xi \in \langle a; b \rangle.$$

Je-li tedy např.  $n$  liché a  $x_0 = a$ , pak

$$\begin{aligned} Ch_n(a) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \cdot \int_a^b (x - a)^{n+1} dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \cdot \left[ \frac{(x - a)^{n+2}}{n + 2} \right]_a^b = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \cdot \left( \frac{(b - a)^{n+2}}{n + 2} - \frac{(a - a)^{n+2}}{n + 2} \right) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \cdot \frac{(b - a)^{n+2}}{n + 2} = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(b - a)^{n+2}}{(n + 2)!}, \quad \text{kde } \xi \in \langle a; b \rangle. \end{aligned}$$



Obdobně, je-li  $n$  liché a  $x_0 = b$ , pak

$$\begin{aligned} Ch_n(b) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \int_a^b (x-b)^{n+1} dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \left[ \frac{(x-b)^{n+2}}{n+2} \right]_a^b = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \left( \frac{(b-b)^{n+2}}{n+2} - \frac{(a-b)^{n+2}}{n+2} \right) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+2}}{n+2} = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+2)!}, \quad \text{kde } \xi \in \langle a; b \rangle. \end{aligned}$$

A je-li  $n$  liché a  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ , pak

$$\begin{aligned} Ch_n\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{n+1} dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{n+2}}{n+2} \right]_a^b = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \left( \frac{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^{n+2}}{n+2} - \frac{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^{n+2}}{n+2} \right) = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot \left( \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^{n+2} \right) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot \\ &\cdot \left( \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2} \right) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot 2 \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2}, \quad \text{kde } \xi \in \langle a; b \rangle. \end{aligned}$$

**Poznámka 2.4.** Z výše odvozeného vyplývá, že absolutní hodnota z maximální chyby, které můžeme dosáhnout, je pro volbu  $n$  liché,  $x_0 = a$  a  $x_0 = b$  shodná.

V případě, kdy je  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ , je pak absolutní hodnota z maximální chyby, které můžeme dosáhnout,  $2^{n+1}$ -krát menší než při volbě  $x_0 = a$  nebo  $x_0 = b$ .

Situace pro  $n$  sudé je z hlediska integrování komplikovanější, budeme se proto zabývat pro  $x_0 = a$  a  $x_0 = b$  jen případy  $n = 0$  a  $n = 2$ . Pro  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  bude odvozen vzorec pro chybu pro libovolné sudé  $n$ .

Je-li  $n = 0$ , pak pokud  $x_0 = a$ , bude chyba:

$$\begin{aligned}
 Ch_0(a) &= \frac{f^{(0+2)}(\xi)}{(0+2)!} \cdot \int_a^b x \cdot (x-a) dx = \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \int_a^b (x^2 - a \cdot x) dx = \\
 &= \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} - a \cdot \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left( \frac{b^3}{3} - a \cdot \frac{b^2}{2} - \left( \frac{a^3}{3} - a \cdot \frac{a^2}{2} \right) \right) = \\
 &= \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left( \frac{2 \cdot b^3 - 3 \cdot a \cdot b^2 - 2 \cdot a^3 + 3 \cdot a^3}{6} \right) = \\
 &= \frac{f''(\xi)}{12} \cdot (2 \cdot b^3 - 3 \cdot a \cdot b^2 + a^3), \quad \text{kde } \xi \in \langle a; b \rangle.
 \end{aligned}$$

Pokud  $x_0 = b$ , bude chyba:

$$\begin{aligned}
 Ch_0(b) &= \frac{f^{(0+2)}(\xi)}{(0+2)!} \cdot \int_a^b x \cdot (x-b) dx = \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \int_a^b (x^2 - b \cdot x) dx = \\
 &= \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} - b \cdot \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left( \frac{b^3}{3} - b \cdot \frac{b^2}{2} - \left( \frac{a^3}{3} - b \cdot \frac{a^2}{2} \right) \right) = \\
 &= \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left( \frac{2 \cdot b^3 - 3 \cdot b^3 - 2 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b}{6} \right) = \\
 &= -\frac{f''(\xi)}{12} \cdot (b^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 2 \cdot a^3), \quad \text{kde } \xi \in \langle a; b \rangle.
 \end{aligned}$$

Je-li  $n = 2$ , pak pokud  $x_0 = a$ , bude chyba:

$$\begin{aligned}
 Ch_2(a) &= \frac{f^{(2+2)}(\xi)}{(2+2)!} \cdot \int_a^b x \cdot (x-a)^3 dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \int_a^b x \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot a + 3 \cdot x \cdot a^2 - a^3) dx = \\
 &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \int_a^b (x^4 - 3 \cdot x^3 \cdot a + 3 \cdot x^2 \cdot a^2 - x \cdot a^3) dx = \\
 &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \left[ \frac{x^5}{5} - 3 \cdot \frac{x^4}{4} \cdot a + 3 \cdot \frac{x^3}{3} \cdot a^2 - \frac{x^2}{2} \cdot a^3 \right]_a^b = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \left( \frac{b^5}{5} - 3 \cdot \frac{b^4}{4} \cdot a + \right. \\
 &\quad \left. + b^3 \cdot a^2 - \frac{b^2}{2} \cdot a^3 - \left( \frac{a^5}{5} - 3 \cdot \frac{a^4}{4} \cdot a + a^3 \cdot a^2 - \frac{a^2}{2} \cdot a^3 \right) \right) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \\
 &\cdot \left( \frac{b^5}{5} - 3 \cdot \frac{b^4}{4} \cdot a + b^3 \cdot a^2 - \frac{b^2}{2} \cdot a^3 - \frac{a^5}{5} + 3 \cdot \frac{a^5}{4} - a^5 + \frac{a^5}{2} \right) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \left( \frac{4 \cdot b^5 -}{20} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-15 \cdot b^4 \cdot a + 20 \cdot b^3 \cdot a^2 - 10 \cdot b^2 \cdot a^3 - 4 \cdot a^5 + 15 \cdot a^5 - 20 \cdot a^5 + 10 \cdot a^5}{20} = \\
& = \frac{f^{(4)}(\xi)}{480} \cdot (4 \cdot b^5 - 15 \cdot b^4 \cdot a + 20 \cdot b^3 \cdot a^2 - 10 \cdot b^2 \cdot a^3 + a^5) = \\
& = \frac{f^{(4)}(\xi)}{480} \cdot (a + 4 \cdot b) \cdot (a - b)^4, \quad \text{kde } \xi \in \langle a; b \rangle.
\end{aligned}$$

Pokud  $x_0 = b$ , bude chyba:

$$\begin{aligned}
Ch_2(b) &= \frac{f^{(2+2)}(\xi)}{(2+2)!} \cdot \int_a^b x \cdot (x-b)^3 dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \int_a^b x \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot b + 3 \cdot x \cdot b^2 - b^3) dx = \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \int_a^b (x^4 - 3 \cdot x^3 \cdot b + 3 \cdot x^2 \cdot b^2 - x \cdot b^3) dx = \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \left[ \frac{x^5}{5} - 3 \cdot \frac{x^4}{4} \cdot b + 3 \cdot \frac{x^3}{3} \cdot b^2 - \frac{x^2}{2} \cdot b^3 \right]_a^b = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \left( \frac{b^5}{5} - 3 \cdot \frac{b^4}{4} \cdot b + \right. \\
&\quad \left. + b^3 \cdot b^2 - \frac{b^2}{2} \cdot b^3 - \left( \frac{a^5}{5} - 3 \cdot \frac{a^4}{4} \cdot b + a^3 \cdot b^2 - \frac{a^2}{2} \cdot b^3 \right) \right) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \\
&\cdot \left( \frac{b^5}{5} - 3 \cdot \frac{b^5}{4} + b^5 - \frac{b^5}{2} - \frac{a^5}{5} + 3 \cdot \frac{a^4}{4} \cdot b - a^3 \cdot b^2 + \frac{a^2}{2} \cdot b^3 \right) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \left( \frac{4 \cdot b^5 -}{20} \right. \\
&\quad \left. - 15 \cdot b^5 + 20 \cdot b^5 - 10 \cdot b^5 - 4 \cdot a^5 + 15 \cdot a^4 \cdot b - 20 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 \right) = \\
&= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{480} \cdot (b^5 - 10 \cdot b^3 \cdot a^2 + 20 \cdot b^2 \cdot a^3 - 15 \cdot b \cdot a^4 + 4 \cdot a^5) = \\
&= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{480} \cdot (4 \cdot a + b) \cdot (a - b)^4, \quad \text{kde } \xi \in \langle a; b \rangle.
\end{aligned}$$

Pokud je  $n$  sudé a  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ , bude chyba (dle Poznámky 2.3):

$$Ch_n \left( \frac{a+b}{2} \right) = Ch_{n+1} \left( \frac{a+b}{2} \right) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+3)!} \cdot 2 \cdot \left( \frac{b-a}{2} \right)^{n+3}, \quad \text{kde } \xi \in \langle a; b \rangle.$$

### 2.3.1 Složené formule

Stejně jako v případě Newton-Cotesových i Gaussových vzorců se výpočet zpřesní, rozdělíme-li interval  $\langle a; b \rangle$  na podintervaly. Rozdělme tedy interval  $\langle a; b \rangle$  ekvidistantně na  $n$  podintervalů  $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a na každém z nich aproximujme funkci  $f$  Taylorovým polynomem stupně  $m$  se středem v bodě  $x_{i0}$ .

Ve většině případů dojde při této aproximaci k tomu, že funkční hodnoty v dělicích bodech budou při aproximaci na intervalech  $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$  a  $\langle x_i; x_{i+1} \rangle$  různé, tj. např. v bodě  $x_i$  bychom měli dvě různé funkční hodnoty. Tento problém lze vyřešit např. tím, že aproximaci  $T(x)$  pomocí Taylorových polynomů provedeme na intervalech  $\langle a; x_1 \rangle$ ,  $\langle x_1; x_2 \rangle$ ,  $\dots$ ,  $\langle x_{n-2}; x_{n-1} \rangle$ ,  $\langle x_{n-1}; b \rangle$  a funkční hodnotu v dělicích bodech definujeme např. předpisem

$$T(x_i) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_i^-} T(x) + \lim_{x \rightarrow x_i^+} T(x)}{2}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Vzhledem k tomu, že hodnota určitého integrálu nezávisí na funkční hodnotě v konečně mnoha bodech, lze funkční hodnotu v dělicích bodech dodefinovat samozřejmě i libovolně jinak.

Jak již bylo výše odvozeno, je-li  $x_{i0} = x_{i-1}$ , platí, že

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_{i-1})}{(k+1)!} \cdot (x_i - x_{i-1})^{k+1}$$

a výsledný vzorec bude tudíž vypadat následovně:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_{i-1})}{(k+1)!} \cdot (x_i - x_{i-1})^{k+1}. \quad (30)$$

Je-li  $x_{i0} = x_i$ , platí, že

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_i)}{(k+1)!} \cdot (-1)^{k+2} \cdot (x_i - x_{i-1})^{k+1}$$

a výsledný vzorec bude mít tvar:

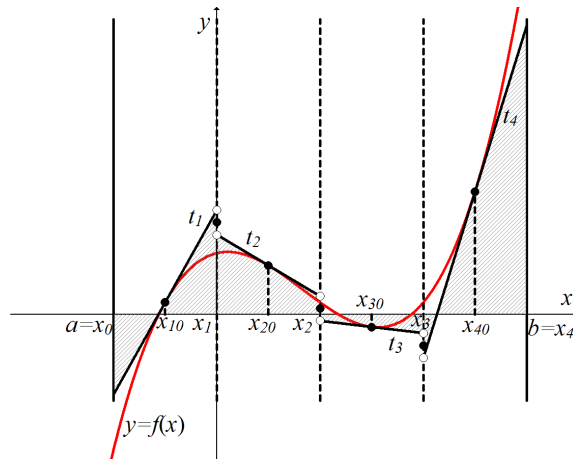
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_i)}{(k+1)!} \cdot (-1)^{k+2} \cdot (x_i - x_{i-1})^{k+1}. \quad (31)$$

Je-li  $x_{i0} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ , platí, že

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)}{(k+1)!} \cdot \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)^{k+1} \cdot (1 + (-1)^{k+2})$$

a výsledný vzorec bude mít tvar:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)}{(k+1)!} \cdot \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)^{k+1} \cdot (1 + (-1)^{k+2}). \quad (32)$$



Obrázek 11: Přibližný výpočet určitého integrálu při aproximaci Taylorovými polynomy - složená formule pro  $m = 1$ ,  $n = 4$ ,  $x_{i0} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

**Poznámka 2.5.** Z výše odvozeného je patrné, že pokud je  $x_{i0} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ ,  $n$  je libovolné přirozené číslo a  $m$  je libovolné liché přirozené číslo, pak jsou složené vzorce pro přibližný výpočet integrálu  $\int_a^b f(x)dx$  v případě, že aproximujeme Taylorovými polynomy stupně  $m$  nebo  $m - 1$ , shodné. Z toho vyplývá, že je možné se v tomto případě zabírat např. pouze případy s lichými stupni Taylorových polynomů.

V následujícím příkladě je spočten opět integrál  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pro volbu  $m = 1$  (tj. stejně, jako v Příkladu 2.20), ale s rozdělením na 5 podintervalů (tzn.  $n = 5$ ), a to pro všechny 3 zde zmiňované volby bodu  $x_{i0}$ .

**Příklad 2.25.** Spočtěte  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  pomocí složených vzorců pro aproximaci TP

1. stupně a s rozdělením na 5 podintervalů pro tři výše zmíněné volby bodu  $x_{i0}$ .

Nejprve si zde ještě uvedeme 1. derivaci funkce  $f(x)$  vypočtenou již v Příkladu 2.7:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{(1+x)^3}}.$$

Nyní již samotné výpočty pro různé volby  $x_{i0}$ :

1.  $x_{i0} = x_{i-1}$  (podle vztahu (30)):

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &\approx \sum_{i=1}^5 \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(x_{i-1})}{(k+1)!} \cdot (x_i - x_{i-1})^{k+1} = \frac{\sqrt{1+3}}{(0+1)!} \cdot (4-3)^{0+1} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1+3}} - \frac{3}{2 \cdot \sqrt{(1+3)^3}} \cdot (4-3)^{1+1} + \frac{4}{\sqrt{1+4}} \cdot (5-4)^{0+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{1+4}} - \frac{4}{2 \cdot \sqrt{(1+4)^3}} \cdot (5-4)^{1+1} + \frac{5}{\sqrt{1+5}} \cdot (6-5)^{0+1} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{1+5}} - \frac{5}{2 \cdot \sqrt{(1+5)^3}} \cdot (6-5)^{1+1} + \frac{6}{\sqrt{1+6}} \cdot (7-6)^{0+1} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{1+6}} - \frac{6}{2 \cdot \sqrt{(1+6)^3}} \cdot (7-6)^{1+1} + \frac{7}{\sqrt{1+7}} \cdot (8-7)^{0+1} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{1+7}} - \frac{7}{2 \cdot \sqrt{(1+7)^3}} \cdot (8-7)^{1+1} = \frac{3}{1} \cdot 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{16} \cdot 1 + \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot 1 + \\
& + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{2 \cdot \sqrt{125}} \cdot 1 + \frac{5}{\sqrt{6}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{5}{2 \cdot \sqrt{216}} \cdot 1 + \frac{6}{\sqrt{7}} \cdot 1 + \\
& + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{6}{2 \cdot \sqrt{343}} \cdot 1 + \frac{7}{\sqrt{8}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{7}{2 \cdot \sqrt{512}} \cdot 1 \doteq \\
& \doteq 1.65625 + 1.923018 + 2.160314 + 2.375777 + 2.574311 \doteq \underline{\underline{10.68967}}.
\end{aligned}$$

2.  $x_{i0} = x_i$  (podle vztahu (31)):

$$\begin{aligned}
& \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \sum_{i=1}^5 \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(x_i)}{(k+1)!} \cdot (-1)^{k+2} \cdot (x_i - x_{i-1})^{k+1} = \\
& = \frac{4}{(0+1)!} \cdot (-1)^{0+2} \cdot (4-3)^{0+1} + \frac{1}{\sqrt{1+4}} - \frac{4}{2 \cdot \sqrt{(1+4)^3}} \cdot (-1)^{1+2} \cdot (4-3)^{1+1} + \\
& + \frac{5}{(0+1)!} \cdot (-1)^{0+2} \cdot (5-4)^{0+1} + \frac{1}{\sqrt{1+5}} - \frac{5}{2 \cdot \sqrt{(1+5)^3}} \cdot (-1)^{1+2} \cdot (5-4)^{1+1} + \\
& + \frac{6}{(0+1)!} \cdot (-1)^{0+2} \cdot (6-5)^{0+1} + \frac{1}{\sqrt{1+6}} - \frac{6}{2 \cdot \sqrt{(1+6)^3}} \cdot (-1)^{1+2} \cdot (6-5)^{1+1} + \\
& + \frac{7}{(0+1)!} \cdot (-1)^{0+2} \cdot (7-6)^{0+1} + \frac{1}{\sqrt{1+7}} - \frac{7}{2 \cdot \sqrt{(1+7)^3}} \cdot (-1)^{1+2} \cdot (7-6)^{1+1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{(0+1)!} \cdot (-1)^{0+2} \cdot (8-7)^{0+1} + \frac{1}{\sqrt{1+8}} - \frac{8}{2 \cdot \sqrt{(1+8)^3}} \cdot (-1)^{1+2} \cdot (8-7)^{1+1} = \\
& = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{2 \cdot \sqrt{125}} \cdot (-1) \cdot 1 + \frac{5}{\sqrt{6}} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{5}{2 \cdot \sqrt{216}} \cdot (-1) \cdot 1 + \\
& + \frac{6}{\sqrt{7}} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{6}{2 \cdot \sqrt{343}} \cdot (-1) \cdot 1 + \frac{7}{\sqrt{8}} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{7}{2 \cdot \sqrt{512}} \cdot (-1) \cdot 1 + \\
& \quad + \frac{8}{1} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{3} - \frac{8}{2 \cdot 54} \cdot (-1) \cdot 1 \doteq \\
& \doteq 1.65469 + 1.922169 + 2.159797 + 2.375437 + 2.574074 \doteq \underline{\underline{10.686167}}.
\end{aligned}$$

3.  $x_0 = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$  (podle vztahu (32)):

$$\begin{aligned}
\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx & \approx \sum_{i=1}^5 \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)}{(k+1)!} \cdot \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)^{k+1} \cdot (1 + (-1)^{k+2}) = \\
& = \frac{3.5}{(0+1)!} \cdot \left(\frac{4-3}{2}\right)^{0+1} \cdot (1 + (-1)^{0+2}) + \frac{1}{\sqrt{1+3.5}} - \frac{3.5}{2 \cdot \sqrt{(1+3.5)^3}} \cdot \\
& \cdot \left(\frac{4-3}{2}\right)^{1+1} \cdot (1 + (-1)^{1+2}) + \frac{4.5}{(0+1)!} \cdot \left(\frac{5-4}{2}\right)^{0+1} \cdot (1 + (-1)^{0+2}) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{1+4.5}} - \frac{4.5}{2 \cdot \sqrt{(1+4.5)^3}} \cdot \left(\frac{5-4}{2}\right)^{1+1} \cdot (1 + (-1)^{1+2}) + \\
& + \frac{5.5}{(0+1)!} \cdot \left(\frac{6-5}{2}\right)^{0+1} \cdot (1 + (-1)^{0+2}) + \frac{1}{\sqrt{1+5.5}} - \frac{5.5}{2 \cdot \sqrt{(1+5.5)^3}} \cdot \\
& \cdot \left(\frac{6-5}{2}\right)^{1+1} \cdot (1 + (-1)^{1+2}) + \frac{6.5}{(0+1)!} \cdot \left(\frac{7-6}{2}\right)^{0+1} \cdot (1 + (-1)^{0+2}) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{1+6.5}} - \frac{6.5}{2 \cdot \sqrt{(1+6.5)^3}} \cdot \left(\frac{7-6}{2}\right)^{1+1} \cdot (1 + (-1)^{1+2}) +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{7.5}{\sqrt{1+7.5}} \cdot \left(\frac{8-7}{2}\right)^{0+1} \cdot (1+(-1)^{0+2}) + \frac{1}{\sqrt{1+7.5}} - \frac{7.5}{2 \cdot \sqrt{(1+7.5)^3}} \\
& \cdot \left(\frac{8-7}{2}\right)^{1+1} \cdot (1+(-1)^{1+2}) = \frac{3.5}{\sqrt{4.5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{4.5}} - \frac{3.5}{2 \cdot \sqrt{91.125}} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 + \\
& + \frac{4.5}{\sqrt{5.5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{5.5}} - \frac{4.5}{2 \cdot \sqrt{166.375}} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{5.5}{\sqrt{6.5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{6.5}} - \frac{5.5}{2 \cdot \sqrt{274.625}} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 + \\
& + \frac{6.5}{\sqrt{7.5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{7.5}} - \frac{6.5}{2 \cdot \sqrt{421.875}} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{7.5}{\sqrt{8.5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{8.5}} - \frac{7.5}{2 \cdot \sqrt{614.125}} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 \doteq \\
& \doteq 1.649916 + 1.918806 + 2.157277 + 2.373464 + 2.572479 \doteq \underline{\underline{10.671942}}.
\end{aligned}$$

Pokud porovnáme výsledky s těmi, které jsme získali u jednoduchých vzorců v Příkladu 2.20, tak zjistíme, že opravdu jsou přesnější a blíží se více skutečné hodnotě  $10.\bar{6}$ , kterou máme spočtenu již v Příkladu 2.2.

Jelikož opět složené vzorce nejsou nic jiného, než prostý součet výsledků jednotlivých podintervalů, tak upravíme vzorec pro chybu podobným způsobem, jako u Newton-Cotesových vzorců. Při výpočtech odhadu chyby Taylorova polynomu  $m$ -tého stupně v praxi se číslo  $f^{(m+1)}(\xi_i)$ , kde  $(\xi_i) \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$ , ohraničí hodnotou

$$M_{i,m+1} = \max_{x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle} |f^{(m+1)}(x)|.$$

Celková chyba integrace  $Ch_m(x_0)$  je pak součtem jednotlivých chyb  $Ch_{i,m}(x_0)$ , tj.

$$Ch_m(x_0) = \sum_{i=1}^n Ch_{i,m}(x_0).$$

Jestliže je funkce  $f^{(m+1)}(x)$  spojitá na intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pak existuje bod  $\xi \in \langle a; b \rangle$  takový, že

$$\sum_{i=1}^n f^{(m+1)}(x_i) = n \cdot f^{(m+1)}(\xi).$$

Tohoto dále využijeme pro odvození celkové chyby integrace, přičemž  $f^{(m+1)}(\xi)$ , kde  $\xi \in \langle a; b \rangle$ , při výpočtech nahrazujeme číslem

$$M_{m+1} = \max_{x \in \langle a; b \rangle} |f^{(m+1)}(x)|.$$

Nyní již tedy odvodíme samotné odhady chyb. Nejprve se zaměříme na případ, kdy je  $m$  liché a  $x_{i0} = x_{i-1}$ . Chybu v tomto případě označíme symbolem  $Ch_{m,n}(l)$ .

$$\begin{aligned} |Ch_{m,n}(l)| &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|f^{(m+1)}(\xi_i)|}{(m+1)!} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^{m+1} dx = \frac{1}{(m+1)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \\ &\cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^{m+1} dx = \frac{1}{(m+1)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \left[ \frac{(x - x_{i-1})^{m+2}}{m+2} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} = \\ &= \frac{1}{(m+2)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot ((x_i - x_{i-1})^{m+2} - (x_{i-1} - x_{i-1})^{m+2}) = \frac{1}{(m+2)!} \cdot \\ &\cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot (x_i - x_{i-1})^{m+2} = \frac{1}{(m+2)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \left( \frac{b-a}{n} \right)^{m+2} \leq \\ &\leq \frac{n \cdot M_{m+1}}{(m+2)!} \cdot \frac{(b-a)^{m+2}}{n^{m+2}} = \frac{M_{m+1}}{(m+2)!} \cdot \frac{(b-a)^{m+2}}{n^{m+1}}, \quad \text{kde } \xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle. \end{aligned}$$

Je-li  $m$  liché a  $x_{i0} = x_i$ , chybu označíme symbolem  $Ch_{m,n}(p)$  a pro její velikost platí:

$$\begin{aligned} |Ch_{m,n}(p)| &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|f^{(m+1)}(\xi_i)|}{(m+1)!} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)^{m+1} dx = \frac{1}{(m+1)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \\ &\cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)^{m+1} dx = \frac{1}{(m+1)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \left[ \frac{(x - x_i)^{m+2}}{m+2} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} = \\ &= \frac{1}{(m+2)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot ((x_i - x_i)^{m+2} - (x_{i-1} - x_i)^{m+2}) = \\ &= \frac{1}{(m+2)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot (-(x_{i-1} - x_i)^{m+2}) = \frac{1}{(m+2)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \\ &\cdot (x_i - x_{i-1})^{m+2} = \frac{1}{(m+2)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \left( \frac{b-a}{n} \right)^{m+2} \leq \\ &\leq \frac{n \cdot M_{m+1}}{(m+2)!} \cdot \frac{(b-a)^{m+2}}{n^{m+2}} = \frac{M_{m+1}}{(m+2)!} \cdot \frac{(b-a)^{m+2}}{n^{m+1}}, \quad \text{kde } \xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle. \end{aligned}$$

Je-li  $m$  liché a  $x_{i0} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ , chybu označíme symbolem  $Ch_{m,n}(s)$  a pro její velikost platí:

$$\begin{aligned}
|Ch_{m,n}(s)| &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|f^{(m+1)}(\xi_i)|}{(m+1)!} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^{m+1} dx = \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^{m+1} dx = \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \left[ \frac{\left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^{m+2}}{m+2} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{1}{(m+2)!} \cdot \\
&\cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \left( \left(x_i - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^{m+2} - \left(x_{i-1} - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^{m+2} \right) = \\
&= \frac{1}{(m+2)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \left( \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)^{m+2} - \left(\frac{x_{i-1} - x_i}{2}\right)^{m+2} \right) = \\
&= \frac{1}{(m+2)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot \left( \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)^{m+2} + \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)^{m+2} \right) = \\
&= \frac{1}{(m+2)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot 2 \cdot \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)^{m+2} = \\
&= \frac{1}{(m+2)!} \cdot \sum_{i=1}^n |f^{(m+1)}(\xi_i)| \cdot 2 \cdot \left(\frac{b-a}{2 \cdot n}\right)^{m+2} \leq 2 \cdot \frac{n \cdot M_{m+1}}{(m+2)!} \cdot \frac{(b-a)^{m+2}}{(2 \cdot n)^{m+2}} = \\
&= \frac{M_{m+1}}{(m+2)!} \cdot \frac{(b-a)^{m+2}}{(2 \cdot n)^{m+1}}, \quad \text{kde } \xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle. \tag{33}
\end{aligned}$$

**Poznámka 2.6.** Z výše odvozeného vyplývá, že  $i$  v případě složených vzorců je absolutní hodnota z maximální chyby, které můžeme dosáhnout pro volbu  $m$  liché,  $x_{i0} = x_{i-1}$  a  $x_{i0} = x_i$ , shodná. A v případě, kdy je  $x_{i0} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ , je absolutní hodnota z maximální chyby, které můžeme dosáhnout,  $2^{m+1}$ -krát menší než při volbě  $x_{i0} = x_{i-1}$  nebo  $x_{i0} = x_i$ .

Stejně jako u jednoduchých vzorců je i zde situace pro  $m$  sudé z hlediska integrování komplikovanější. Protože obvykle nejpřesnějších výsledků dosáhneme, je-li  $x_{i0} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ , omezíme se již jen na tuto volbu. V tomto případě poté platí (s využitím Poznámky 2.5 a výše odvozeného), že

$$|Ch_{m,n}(s)| = |Ch_{m+1,n}(s)| \leq \frac{M_{m+2}}{(m+3)!} \cdot \frac{(b-a)^{m+3}}{(2 \cdot n)^{m+2}}. \quad (34)$$

**Příklad 2.26.** *Určete, kolik podintervalů je potřeba zvolit u složeného vzorce (pro  $m = 2$ , resp.  $m = 3$ , a  $x_{i0} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ ), aby bylo garantováno, že bude absolutní hodnota chyby při přibližném výpočtu integrálu  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  menší než 0.00001.*

Zde budeme k výpočtu potřebovat hodnotu  $M_4$ . Ta je však již spočítaná v Příkladu 2.12 jako  $\max_{x \in (3;8)} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(3)| = \frac{10070801}{500000000}$ . Nyní již tedy samotný výpočet, kde využijeme výše odvozený vztah (33) pro  $m = 2$ , resp. jeho variantu (32) pro  $m = 3$ .

$$\frac{M_{m+2}}{(m+3)!} \cdot \frac{(b-a)^{m+3}}{(2 \cdot n)^{m+2}} \leq 0.00001, \quad \text{resp.} \quad \frac{M_{m+1}}{(m+2)!} \cdot \frac{(b-a)^{m+2}}{(2 \cdot n)^{m+1}} \leq 0.00001,$$

$$\frac{M_{2+2}}{(2+3)!} \cdot \frac{(b-a)^{2+3}}{(2 \cdot n)^{2+2}} \leq 0.00001, \quad \text{resp.} \quad \frac{M_{3+1}}{(3+2)!} \cdot \frac{(b-a)^{3+2}}{(2 \cdot n)^{3+1}} \leq 0.00001,$$

$$\frac{M_4}{5!} \cdot \frac{(8-3)^5}{(2 \cdot n)^4} \leq 0.00001,$$

$$\frac{10070801}{500000000} \cdot \frac{5^5}{16 \cdot n^4} \leq 0.00001,$$

$$\frac{0.032782555}{n^4} \leq 0.00001,$$

$$n^4 \geq \frac{0.032782555}{0.00001},$$

$$n^4 \geq 3278.255534,$$

$$n \geq 7.566773 \doteq \underline{8}.$$

Aby bylo garantováno, že bude absolutní hodnota chyby při přibližném výpočtu menší než 0.00001, je potřeba alespoň 8 podintervalů.

## 2.4 Přibližný výpočet určitého integrálu pomocí metody Monte Carlo

Základní princip metody Monte Carlo poprvé vyslovil v roce 1777 francouzský přírodovědec *Georges de Buffon*, když formuloval známý problém s jehlou, kde jsou v rovině narýsovány rovnoběžky, mezi nimiž je konstantní vzdálenost  $L$ , a nás zajímá pravděpodobnost, že náhodně vržená jehla délky  $l < L$  protne některou z přímek. Tento problém se podle svého autora nazývá *Buffonova úloha* a využívala se pro určení hodnoty *Ludolfova čísla*. V roce 1901 například *Lazzerrini* uskutečnil 34080 takovýchto pokusů a pro číslo  $\pi$  dostal překvapivě hodně přesnou hodnotu, konkrétně 3.1415929.

Za samotný vznik metody Monte Carlo se ale považuje až její formulace a využití *J. von Neumannem* a *S. Ulamem* při vývoji atomové bomby během 2. světové války, kdy bylo třeba zjistit, jaké procento neutronů pronikne nějakou překážkou, čímž bylo možné předpovědět trajektorii každého neutronu daného svazku. Při řešení této předpovědi se použila technika kola rulety, odkud též plyne název metody. Například je známo, že pokud se srazí atom vodíku s neutronem, je tento neutron pohlcen v průměru jednou ze 100 pokusů. Pro vytyčení trasy neutronu se tak roztočí kolo rulety rozdělené na 100 dílků, z nichž jeden je barevně odlišen od ostatních a značí pohlcení neutronu atomem vodíku. Pokud padne tento dílek, neutron zaniká, v opačném případě se pomocí jiného kola rulety

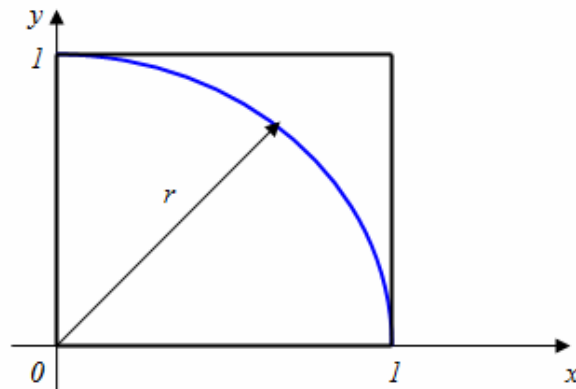
zjistí směr a rychlost neutronu po srážce. Takto se postupuje tak dlouho, dokud nedojde k zániku neutronu nebo k jeho průchodu překážkou. Kdybychom provedli vysoký počet simulací, získali bychom velmi přesnou informaci o procentu neutronů, které projdou překážkou.

Existují dva možné přístupy pro řešení úloh metodou Monte Carlo. První z nich je tzv. *Geometrická metoda založená na geometrické pravděpodobnosti*, druhá je pak *Metoda založená na odhadu střední hodnoty náhodné proměnné*. Oba tyto přístupy lze využít pro výpočet určitých integrálů a pojednávají o nich následující dvě podkapitoly.

#### 2.4.1 Geometrická metoda založená na geometrické pravděpodobnosti

Na tomto přístupu je založená i *Buffonova úloha*. Na následujícím příkladě si nejprve ukážeme, jak lze také experimentálně stanovit hodnotu  $\pi$ .

**Příklad 2.27.** *Mějme dán jednotkový čtverec, v němž je vepsána kruhová výseč (viz. následující obrázek). Stanovte experimentálně pomocí geometrického přístupu hodnotu Ludolfova čísla  $\pi$ .*



Obrázek 12: Kruhová výseč v jednotkovém čtverci

Definujeme si jev  $A$  jako „náhodně vybraný bod z jednotkového čtverce leží v kruhové výseči“. Potom můžeme na základě geometrické pravděpodobnosti a znalosti toho, že obsah kruhové výseče je čtvrtina obsahu celého kruhu, psát

$$P(A) = \frac{\pi \cdot r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}. \quad (35)$$

Nyní provedeme sérii náhodných pokusů (konkrétně 100, 1000, 10000 a 50000) výběru náhodného bodu  $X$  z jednotkového čtverce. Je zřejmé, že tento bod bude určen dvěma souřadnicemi  $[x, y]$ , a to  $x \in \langle 0; 1 \rangle$  a  $y \in \langle 0; 1 \rangle$ . V našem případě budeme tyto realizace provádět v programu *Microsoft Excel* pomocí funkce NÁHČÍSLO, která generuje rovnoměrně rozdělená náhodná čísla z námi potřebného intervalu. Jakmile máme vygenerovány všechny hodnoty, musíme rozhodnout, jestli se bod nachází v kruhové výseči (úspěch) nebo nenachází (neúspěch). Pro vzdálenost bodu od počátku souřadnic využijeme s pomocí Pythagorovy věty vztahu

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Úspěch nastane tehdy, pokud pro tento bod bude platit, že je menší nebo roven 1, protože poloměr výseče je roven 1. Následující tabulka udává, kolik úspěchů jsme zaznamenali při každé sérii náhodných pokusů:

Počet realizovaných pokusů	Počet úspěchů
100	80
1000	792
10000	7827
50000	39183

Tabulka 9: Počty úspěšných pokusů realizovaných v MS Excel pro 100, 1 000, 10 000 a 50 000 realizací

Jelikož pravděpodobnost našeho jevu  $A$  je rovna počtu úspěchů  $m$  vydělená celkovým počtem pokusů  $n$ , tj.

$$P(A) \approx \frac{m}{n}, \quad (36)$$

pak pokud tento vztah porovnáme se vztahem (35), tak dostaneme

$$\frac{m}{n} \approx \frac{\pi}{4}.$$

Jednoduchou úpravou pak získáme finální vztah

$$\pi \approx \frac{4 \cdot m}{n}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu získané hodnoty z tabulky, tak dostaneme přibližný bodový odhad hodnoty  $\pi$ , a to:

a) pro 100 realizovaných pokusů:

$$\pi \approx \frac{4 \cdot 80}{100} = \underline{\underline{3.2}},$$

b) pro 1000 realizovaných pokusů:

$$\pi \approx \frac{4 \cdot 792}{1000} = \underline{\underline{3.168}},$$

c) pro 10000 realizovaných pokusů:

$$\pi \approx \frac{4 \cdot 7827}{10000} = \underline{\underline{3.1308}},$$

d) pro 50000 realizovaných pokusů:

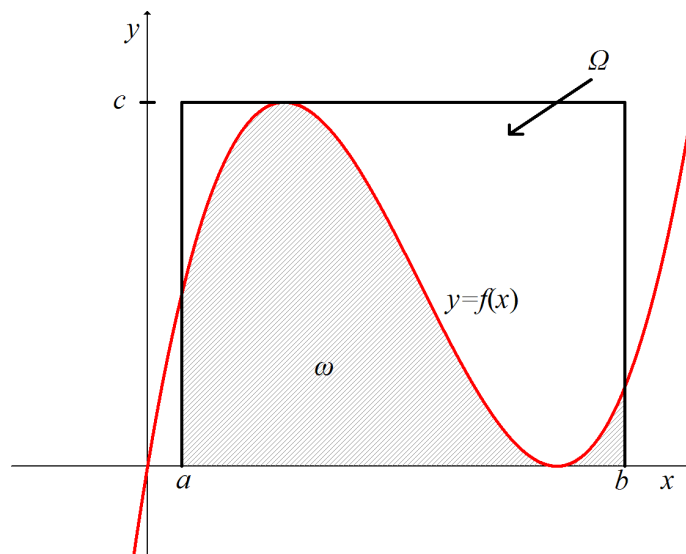
$$\pi \approx \frac{4 \cdot 39183}{50000} = \underline{\underline{3.13464}}.$$

Přibližná hodnota čísla  $\pi$  je přitom rovna 3.1415926539... a jak je zřejmé, s rostoucím počtem pokusů se této hodnotě přibližujeme.

Na podobném principu můžeme taktéž odhadnout přibližnou hodnotu určitého integrálu  $\int_a^b f(x)dx$ , kde  $f$  je nezáporná na intervalu  $\langle a; b \rangle$ . Jak známo,



hodnota integrálu se rovná obsahu plochy pod křivkou  $f(x)$ . Na následujícím obrázku je vidět, že tato plocha je rovna obsahu vyšrafované oblasti  $\omega$ . Obsah celé oblasti  $\Omega$  je roven obsahu obdélníku o stranách délek  $(b - a)$  a  $c$ , kde  $c$  je maximální funkční hodnota na intervalu  $\langle a; b \rangle$ . V této oblasti tedy generujeme body  $X_i = [x_i; y_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , z rovnoměrného rozdělení na intervalech danými hodnotami  $a$ ,  $b$  a  $0$ ,  $c$ . Následně musíme vždy zjistit, jestli vygenerovaný bod leží v požadované oblasti  $\omega$  (úspěch). Bod bude ležet v oblasti  $\omega$ , pokud bude platit nerovnost  $y_i \leq f(x_i)$ . Jev  $A$  je tedy nyní definován jako „náhodně vybraný bod  $X_i = [x_i; y_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , z oblasti  $\Omega$  splňuje nerovnost  $y_i \leq f(x_i)$ “.



Obrázek 13: Princip výpočtu integrálu pomocí metody Monte Carlo založené na geometrické pravděpodobnosti

Realizujeme celkem  $n$  takovýchto pokusů a určíme počet úspěchů, který označíme  $m$ . Položíme-li  $\frac{m}{n}$ , získáme odhad  $P(A)$ . Dále víme, že pro geometrickou pravděpodobnost platí vztah

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \quad \text{kde } \mu \text{ značí obsah plochy,}$$

a že

$$\mu(A) = \int_a^b f(x)dx.$$

Pokud bychom uvažovali pro jednoduchost  $\mu(\Omega) = 1$ , tak s využitím těchto poznatků lze psát

$$\int_a^b f(x)dx = P(A).$$

Pro další úvahu bude potřeba ještě zmínit tzv. *Bernoulliho větu*.

**Věta 2.7.** (*Bernoulliho*) *Nechť je náhodná veličina  $Y_n$  rovna počtu úspěchů v posloupnosti  $n$  nezávislých alternativních náhodných pokusů takových, že v každém pokusu nastane úspěch se stejnou pravděpodobností  $p \in (0; 1)$ . Pak pro posloupnost*

*$\left\{ \frac{Y_n}{n} \right\}_1^\infty$  relativních četností úspěchů v  $n$  pokusech platí*

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} p \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.^1$$

Důkaz této věty lze nalézt např. v [5].

Z výše uvedené věty tak plyne, že pro dostatečně velké  $n$  můžeme za přibližnou hodnotu integrálu vzít relativní počet  $\frac{m}{n}$ , tj.

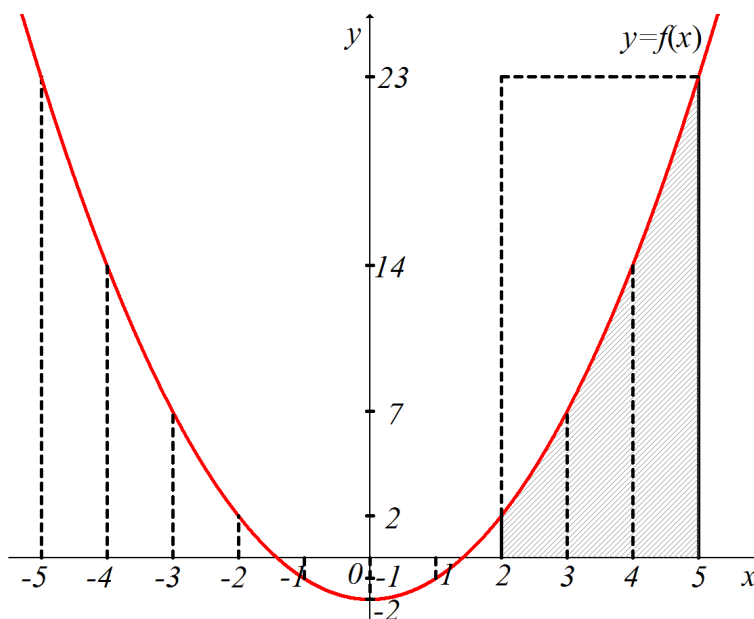
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{m}{n}.$$

---

<sup>1</sup>Pro každé  $\varepsilon > 0$  platí, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) = 0$

**Příklad 2.28.** Pomocí geometrické metody spočítejte  $\int_2^5 (x^2 - 2) dx$ .

Nejprve si zakreslíme, jak vypadá naše funkce a plocha, kterou počítáme:



Obrázek 14: Grafické znázornění počítaného obsahu plochy příkladu 2.28

Definujeme si jev  $A$  jako „náhodně vybraný bod padne do vyšrafované oblasti“, přičemž body  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , resp. jeho souřadnice, budeme náhodně generovat pomocí funkce NÁHČÍSLO v programu *Microsoft Excel*, a to  $x_i \in \langle 2; 5 \rangle$  a  $y_i \in \langle 0; 23 \rangle$ . Využijeme k tomu následující inverzní transformace:

$$x_i = 2 + (5 - 2) \cdot \text{NÁHČÍSLO}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$y_i = 0 + (23 - 0) \cdot \text{NÁHČÍSLO}, \quad i = 1, \dots, n.$$

U každého vygenerovaného bodu musíme rozhodnout, zda patří do vyšrafované oblasti (úspěch) či nepatří (neúspěch). Je celkem jasné, že úspěchu bude dosaženo právě tehdy, když bude platit nerovnost

$$y_i \leq x_i^2 - 2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Na základě geometrické pravděpodobnosti můžeme psát:

$$P(A) = \frac{\int_2^5 (x^2 - 2) dx}{(5 - 2) \cdot (23 - 0)} = \frac{\int_2^5 (x^2 - 2) dx}{69}.$$

Jelikož i zde platí vztah (36) z předchozího příkladu, dostáváme přibližný vztah:

$$\frac{m}{n} \approx \frac{\int_2^5 (x^2 - 2) dx}{69}.$$

Jednoduchou úpravou pak získáme:

$$\int_2^5 (x^2 - 2) dx \approx \frac{69 \cdot m}{n}. \quad (37)$$

Nyní již následuje tabulka realizací (pro 100, 1000 a 10000 náhodných pokusů), počty úspěchů a přibližná hodnota integrálu vypočtená podle vztahu (37):

Počet realizovaných pokusů	Počet úspěchů	Odhad hodnoty integrálu
100	48	33.12
1000	462	31.878
10000	4745	32.7405

Tabulka 10: Odhadnuté hodnoty integrálu z příkladu 2.28

Ještě si zde pro porovnání vypočítáme přesnou hodnotu integrálu:

$$\begin{aligned} \int_2^5 (x^2 - 2) dx &= \left[ \frac{x^3}{3} - 2 \cdot x \right]_2^5 = \frac{5^3}{3} - 2 \cdot 5 - \left( \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2 \right) = \\ &= \frac{125}{3} - \frac{30}{3} - \frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{99}{3} = \underline{\underline{33}}. \end{aligned}$$

Jak je vidět, nejpřesnějšího výsledku jsme dosáhli již pro pouhých 100 realizovaných pokusů. Je to ale dáno spíše náhodou, při větším počtu takovýchto pokusů bychom pro 100 realizací dostali mnohem větší rozptyl výsledků než pro 1000 či 10000 realizací, což je samozřejmě ovlivněno chybou této metody. Pro ukázkou je níže uvedena tabulka s 10 výsledky odhadu hodnoty integrálu pro 100 realizací (1. řádek), 1000 realizací (2. řádek) a 10000 realizací (3. řádek).

28.98	34.50	32.43	34.50	32.43	37.26	28.29	23.46	29.67	31.05
33.948	33.879	32.775	32.085	32.913	33.189	33.12	32.154	34.293	33.741
33.2166	32.9337	32.6715	32.3679	33.2097	32.5059	33.189	33.0786	32.9958	33.2718

Tabulka 11: Odhadnuté hodnoty integrálu pro různé počty realizací

Z tabulky je zřejmé, že výsledky pro 100 realizací dávají mnohem větší rozptyl než pro 1000 realizací, které zase dávají o něco větší rozptyl, než výsledky pro 10000 realizací. Zde by nás mohlo napadnout výsledky zprůměrnovat, což by při dostatečném počtu opakování taktéž mělo dát ještě přesnější výsledek. V našem případě by to vypadalo následovně:

$$\text{pro 100 realizací: } \int_2^5 (x^2 - 2) dx \approx \frac{28.98 + \dots + 31.05}{10} \doteq 31.257,$$

$$\text{pro 1000 realizací: } \int_2^5 (x^2 - 2) dx \approx \frac{33.948 + \dots + 33.741}{10} \doteq 33.2097,$$

$$\text{pro 10000 realizací: } \int_2^5 (x^2 - 2) dx \approx \frac{33.2166 + \dots + 33.2718}{10} \doteq 32.94405.$$

To se sice jeví velmi příznivě, ale často je potřeba udělat velmi mnoho simulací i s náročnějšími výpočty, což i v dnešní době výpočetní techniky může být časově velmi náročné.

#### 2.4.2 Metoda založená na odhadu střední hodnoty náhodné proměnné

Tento přístup je založený na modelování takové náhodné veličiny  $\xi$ , pro kterou platí, že její střední hodnota se bude rovnat naší neznámé hodnotě  $z$ , tzn.  $E(\xi) = z$ . V našem případě je tedy neznámou hodnotou  $z$  integrál.

Uvažujme náhodnou veličinu  $\xi$  s hustotou  $f(x)$ , která nabývá hodnot  $z$  intervalu  $(a; b)$ , přičemž krajní hodnoty intervalu mohou být i nekonečné. Zkoumejme spojitou funkci  $g(\xi)$  a předpokládejme, že je její střední hodnota konečná a je definována vztahem

$$E[g(\xi)] = \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx.$$

Pokud chceme odhadnout hodnotu integrálu  $I = \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx$ , můžeme použít následující postup:

1. vygenerujeme náhodná čísla  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , z rozdělení s hustotou  $f(x)$ ,
2. vypočteme  $y_i = g(x_i)$ , čímž dostaneme posloupnost  $\{y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Přibližnou hodnotu integrálu pak odhadujeme s pomocí zákona velkých čísel, konkrétně následující věty, která se jmenuje *Chinčinova*.

**Věta 2.8.** (*Chinčinova*) *Nechť  $\{X_n\}_1^\infty$  je posloupnost nezávislých náhodných veličin, které mají stejné rozdělení pravděpodobností s konečnou střední hodnotou  $E(x_n) = \mu$  pro každé  $n \in N$ . Potom pro libovolné  $\varepsilon > 0$  platí:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n X_j - \mu \geq \varepsilon \right| \right) = 0, \quad \text{tj. } \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{P} \mu \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Důkaz této věty lze nalézt např. v [8].

Podle této věty tak můžeme za přibližnou hodnotu integrálu při dostatečně velkém počtu realizací  $n$  vzít aritmetický průměr hodnot  $g(x_i)$ , tj.

$$I \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n g(x_j).$$

Máme-li tedy vypočítat určitý integrál  $J = \int_a^b h(x) dx$ , pak si nejprve zvolíme nějaké spojitě rozdělení definované na intervalu  $(a; b)$  s hustotou pravděpodobnosti  $f(x)$  tak, aby platilo

$$\int_a^b f(x) dx = 1.$$

Poté upravíme integrál následovně:

$$J = \int_a^b \frac{h(x)}{f(x)} \cdot f(x) dx = \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx, \quad \text{kde } g(x) = \frac{h(x)}{f(x)},$$

čímž dostáváme integrál v předcházejícím tvaru a lze jej počítat výše zmíněným postupem.

V případě, že máme obě hranice intervalu  $(a; b)$  konečné, můžeme za hustotu  $f(x)$  vzít hustotu normálního rozdělení, tj.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

Potom můžeme výše uvedený integrál  $J$  zapsat ve tvaru

$$J = (b-a) \cdot \int_a^b h(x) \cdot \frac{1}{b-a} dx.$$

Postup je pak již obdobný jako výše, takže vygenerujeme náhodná čísla  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , z rovnoměrného rozdělení, provedeme výpočty  $y_i = h(x_i)$  a z těchto hodnot spočteme aritmetický průměr

$$H = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i.$$

Hodnotu integrálu pak odhadujeme podle vztahu

$$J \approx (b-a) \cdot H, \tag{38}$$

čehož využijeme u následujícího příkladu, který má stejné zadání jako [Příklad 2.28](#) v předchozí podkapitole.

**Příklad 2.29.** Pomocí metody založené na odhadu střední hodnoty spočítejte

$$\int_2^5 (x^2 - 2) dx.$$

Stejným způsobem jako v příkladu v předchozí podkapitole si vygenerujeme v programu *Microsoft Excel* celkem  $n$  náhodných čísel z intervalu  $(2; 5)$  s pomocí transformace

$$x_i = 2 + (5 - 2) \cdot \text{NÁHČÍSLO}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Následně si necháme vypočítat všechny funkční hodnoty dosazením do vztahu

$$y_i = x_i^2 - 2, \quad i = 1, \dots, n,$$

a z těchto hodnot spočteme průměr. Následující tabulka udává počty realizovaných pokusů (opět 100, 1000 a 10000), spočtené průměry  $H$  a v neposlední řadě především odhadnutou hodnotu integrálu podle vztahu (38).

Počet realizovaných pokusů	Průměr $H$	Odhad hodnoty integrálu
100	10.611855	31.835566
1000	10.822947	32.468842
10000	11.086545	33.259634

Tabulka 12: Odhadnuté hodnoty integrálu z příkladu 2.29

Jak již víme z Příkladu 2.28, přesná hodnota je rovna 33. Výsledky zde však vycházejí mnohem méně rozptýleny kolem skutečné hodnoty, tudíž chyba při použití této metody je menší než u geometrické metody. Že jsou hodnoty opravdu méně rozptýleny kolem čísla 33 je vidět i z následující tabulky, kde opět v prvním řádku je 10 výsledků pro 100 realizací, v druhém řádku pro 1000 realizací a ve třetím řádku pro 10000 realizací.

32.3666	31.182	34.5344	32.63	32.0389	35.049	32.1991	36.8207	29.8456	34.8361
32.6922	32.8645	32.5799	32.6448	32.7636	33.1899	33.4472	33.3062	33.591	32.8761
33.0116	32.9767	32.7705	32.7776	32.7723	32.9907	33.368	33.2908	33.0401	33.1033

Tabulka 13: Odhadnuté hodnoty integrálu pro různé počty realizací



Také zde by nás mohlo napadnout, že když tyto výsledky zprůměrujeme, dostaneme o něco lepší výsledek než pomocí jednoho náhodného pokusu o  $n$  realizacích:

$$\text{pro 100 realizací: } \int_2^5 (x^2 - 2) dx \approx \frac{32.3666 + \dots + 34.8361}{10} \doteq 33.15024,$$

$$\text{pro 1000 realizací: } \int_2^5 (x^2 - 2) dx \approx \frac{32.6922 + \dots + 32.8761}{10} \doteq 32.99554,$$

$$\text{pro 10000 realizací: } \int_2^5 (x^2 - 2) dx \approx \frac{33.0116 + \dots + 33.1033}{10} \doteq 33.01016.$$

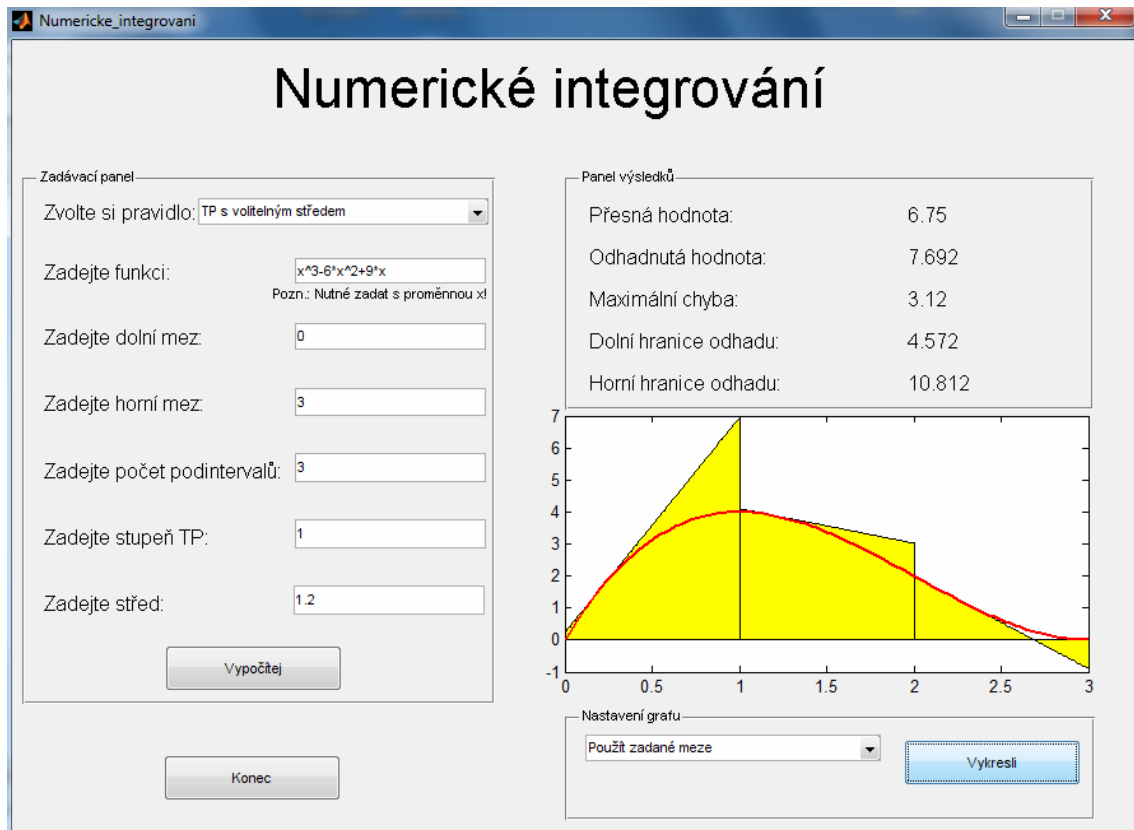
Opět ale můžeme narazit na problém algoritmické složitosti výpočtů u takových programů, kde samozřejmě závisí na dané funkci, počtu realizací a především na výpočetních schopnostech počítače, takže je jasné, že je potřeba si stanovit určitý limit.

### 3 Popis programu pro přibližný výpočet určitého integrálu a porovnání jednotlivých metod na konkrétních příkladech

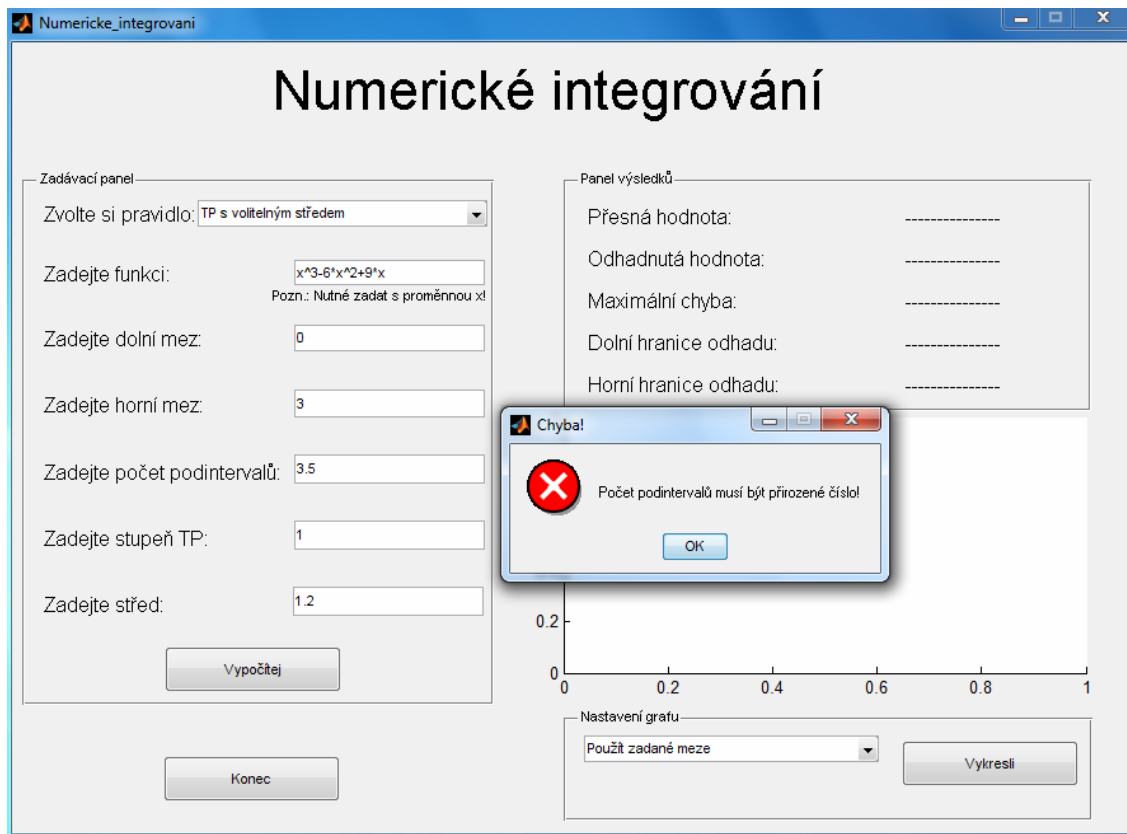
Na přiloženém CD je vytvořena aplikace v programu *Matlab* (verze R2008a) pro přibližný výpočet určitých integrálů za pomoci složených vzorců popsaných v kapitolách 2.1.1 – 2.1.3. Uživatel vždy zadá pouze integrovanou funkci (musí však být psána syntaxí používanou v Matlabu, takže např.  $e^{-x}$  se zadá jako *exp(-x)* apod.), dolní a horní integrační mez a počet podintervalů a vybere metodu, pomocí které má být výpočet proveden. U Gaussových vzorců je pak ještě potřeba zadat počet uzlů (kvůli náročnosti výpočtu je tento počet omezen na 2 až 10). Při aproximaci pomocí Taylorova polynomu je navíc potřeba zadat jeho stupeň a případně i střed (uživatel má možnost zvolit si *Taylorův polynom se středem uprostřed podintervalu* nebo *Taylorův polynom s volitelným středem*, kde zadává střed z intervalu daným dolní a horní integrační mezí a program zjistí, v kterém podintervalu a v jaké vzdálenosti od dolní meze podintervalu zadaný střed leží, a s touto vzdáleností od dolní meze podintervalu počítá i v ostatních podintervalech). Vzhledem k náročnosti výpočtu chyby u Taylorova polynomu s volitelným středem v případě sudého stupně Taylorova polynomu se v aplikaci nepočítá maximální chyba, a tudíž ani dolní a horní hranice odhadu (uživatel je o tom ovšem programem informován). Pro porovnání aplikace vypočítá pomocí příkazů již obsažených v programu Matlab také přesnou hodnotu určitého integrálu.

V aplikaci je také možnost nechat si vykreslit graf zadané funkce včetně aproximace určitého integrálu zvoleným pravidlem. Uživatel má tak možnost vidět, jak graf funkce vypadá a jak vypadá aproximace jejího určitého integrálu, a případně může podle těchto znalostí upravit své zadání. Má také možnost použít při vykreslení vlastní meze a může tak vidět průběh funkce i mimo interval zadaný pro přibližný výpočet integrálu.

Aplikace je též ošetřena na některé špatně zadané vstupy, např. při zadání dolní integrační meze větší než horní integrační meze, při zadání záporného, nulového či neceločíselného počtu podintervalů apod. V těchto případech je uživatel upozorněn, výpočet se neprovede a uživatel může změnit své zadání.



Obrázek 15: Ukázka použití programu při aproximaci pomocí Taylorova polynomu s volitelným středem



Obrázek 16: Ukázka chybového oznámení v programu při špatném zadání vstupu

Pomocí vytvořeného programu budou dále přibližně vypočítány tři určité integrály a jejich chyby a následně budou získané výsledky mezi sebou porovnány. V tabulkách níže budou použity následující zkratky:

- OM = obdélníková metoda
- LM = lichoběžníková metoda
- SM = Simpsonova metoda
- G2 = Gaussova metoda využívající 2 uzly
- G3 = Gaussova metoda využívající 3 uzly
- TP2 = Taylorův polynom 2. stupně se středem uprostřed podintervalu

- TP10 = Taylorův polynom 10. stupně se středem uprostřed podintervalu
- TP2S = Taylorův polynom 2. stupně se středem v dolní mezi podintervalu
- TP10S = Taylorův polynom 10. stupně se středem v dolní mezi podintervalu

**Příklad 3.1.** Pomocí vytvořené aplikace spočítejte absolutní hodnotu skutečné chyby při přibližném výpočtu  $\int_1^{12} \frac{\sin(x)}{x} dx$  různými metodami, a to s rozdělením na 2, 10 a 50 podintervalů.

Pro porovnání skutečná hodnota je:  $\int_1^{12} \frac{\sin(x)}{x} dx \doteq 0.558888171159190$ .

Počet podint.	2	10	50
OM - aprox.	-0.734896186091396	0.539504561407792	0.558130757323766
OM - chyba	1.293784357250586	0.019383609751398	0.000757413835424
LM - aprox.	2.373105186485024	0.597254244681073	0.560402374620844
LM - chyba	1.814217015325834	0.038366073521883	0.001514203461654
SM - aprox.	0.301104271434077	0.558754455832219	0.558887963089459
SM - chyba	0.257783899725113	0.000133715326971	0.000000208069731
G2 - aprox.	0.739762172735631	0.558977485383235	0.558888309882937
G2 - chyba	0.180874001576441	0.000089314224045	0.000000138723747
G3 - aprox.	0.548356542539818	0.558887986311003	0.55888817114775
G3 - chyba	0.010531628619372	0.000000184848187	0.00000003001144
TP2 - aprox.	1.012736663453989	0.559089900268657	0.558888483335293
TP2 - chyba	0.453848492294799	0.000201729109467	0.000000312176103
TP10 - aprox.	0.558906797488242	0.558888171159207	0.558888171159189
TP10 - chyba	0.000018626329052	0.000000000000017	0.000000000000001
TP2S - aprox.	-6.33676083307043	0.539254277678391	0.558760280446289
TP2S - chyba	6.89564900422962	0.019633893480799	0.000127890712901
TP10S - aprox.	0.425471382392409	0.558888170554472	0.558888171159191
TP10S - chyba	0.133416788766781	0.000000000604718	0.000000000000001

Tabulka 14: Aproximace a absolutní hodnota skutečné chyby při přibližném výpočtu integrálu podle různých metod

**Příklad 3.2.** Pomocí vytvořené aplikace spočítejte absolutní hodnotu skutečné chyby při přibližném výpočtu  $\int_{-2}^6 e^{-x^2} dx$  různými metodami, a to s rozdělením na 2, 10 a 50 podintervalů.

Pro porovnání skutečná hodnota je:  $\int_{-2}^6 e^{-x^2} dx \doteq 1.768308316215180$ .

Počet podint.	2	10	50
OM - aprox.	4.000000450140699	1.769905012843661	1.76838587930827
OM - chyba	2.231692133925519	0.001596696628481	0.00007756309309
LM - aprox.	0.109893833332406	1.764810063325093	1.768152689757594
LM - chyba	1.658414482882774	0.003498252890087	0.000155626457586
SM - aprox.	2.703298244537934	1.768206696337471	1.768308149458045
SM - chyba	0.934989928322754	0.000101619877709	0.000000166757135
G2 - aprox.	1.054998229105004	1.768375918341522	1.768308427388508
G2 - chyba	0.713310087110176	0.000067602126342	0.000000111173328
G3 - aprox.	1.982109882447587	1.768308490961481	1.768308316213156
G3 - chyba	0.213801566232407	0.000000174746301	0.000000000002024
TP2 - aprox.	-1.333314277377081	1.768459623705746	1.768308566363468
TP2 - chyba	3.101622593592261	0.000151307490566	0.000000250148288
TP10 - aprox.	0.613365376511718	1.768308316150405	1.768308316215179
TP10 - chyba	1.154942939703462	0.000000000064775	0.000000000000001
TP2S - aprox.	5.616795925878482	1.770433790897661	1.768346177883951
TP2S - chyba	3.848487609663302	0.002125474682481	0.000037861668771
TP10S - aprox.	679.3799897092913	1.76830876608681	1.768308316215192
TP10S - chyba	677.6116813930761	0.00000044987163	0.000000000000012

Tabulka 15: Aproximace a absolutní hodnota skutečné chyby při přibližném výpočtu integrálu podle různých metod

**Příklad 3.3.** Pomocí vytvořené aplikace spočítejte absolutní hodnotu skutečné chyby při přibližném výpočtu  $\int_1^{12} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$  různými metodami, a to s rozdělením na 2, 10 a 50 podintervalů.

Pro porovnání skutečná hodnota je:  $\int_1^{12} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \doteq -0.719774756615325$ .

Počet podint.	2	10	50
OM - aprox.	-4.111381035171642	-0.782026628711164	-0.72230531025809
OM - chyba	3.391606278556317	0.062251872095839	0.002530553642765
LM - aprox.	4.26250089130203	-0.594425133897578	-0.714710985726858
LM - chyba	4.982275647917355	0.125349622717747	0.005063770888467
SM - aprox.	-1.320087059680418	-0.719492797106635	-0.71977386874768
SM - chyba	0.600312303065093	0.00028195950869	0.000000887867645
G2 - aprox.	-0.288082989096394	-0.719951313819489	-0.719775347071535
G2 - chyba	0.431691767518931	0.000176557204164	0.00000059045621
G3 - aprox.	-0.753113909044805	-0.719786274446006	-0.719774758180189
G3 - chyba	0.03333915242948	0.000011517830681	0.000000001564864
TP2 - aprox.	0.391558393175617	-0.720126799267605	-0.719776078647438
TP2 - chyba	1.111333149790942	0.00035204265228	0.000001322032113
TP10 - aprox.	-0.72119536999552	-0.719774804904983	-0.719774756615329
TP10 - chyba	0.001420613380195	0.000000048289658	0.000000000000004
TP2S - aprox.	-3.942091196336643	-0.647477133373985	-0.719313503835279
TP2S - chyba	3.222316439721318	0.07229762324134	0.000461252780046
TP10S - aprox.	1836172.001215066	-0.697512180708224	-0.719774756446336
TP10S - chyba	1836172.720989823	0.022262575907101	0.000000000168989

Tabulka 16: Aproximace a absolutní hodnota skutečné chyby při přibližném výpočtu integrálu podle různých metod

Jak je ze všech tří výše uvedených příkladů patrné, vždy velmi záleží na funkci, jejíž integrál se snažíme vypočítat.

Zaměříme-li se na *Newton-Cotesovy vzorce*, tedy obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo, je jednoznačně vidět, že nejlepších výsledků dosahujeme obvykle s pomocí Simpsonova pravidla, což je logické vzhledem k tomu, že využívá interpolace polynomem 2. stupně. Není samozřejmě pravidlem, že vyjde vždy nejlépe z těchto tří, ale ve většině případů tomu tak bude. Mezi obdélníkovým a lichoběžníkovým pravidlem je již rozdíl menší, obecně častěji vychází přesnější hodnoty obdélníkovým pravidlem, ale není tomu tak samozřejmě vždy.

Při pohledu na výsledky získané použitím *Gaussových vzorců* je evidentní, že vychází blíže skutečné hodnotě než u *Newton-Cotesových vzorců*. Samozřejmě při vyšším počtu uzlů Legendera polynomu se výsledek ještě zpřesňuje a také s rostoucím počtem podintervalů se skutečné hodnotě blížíme podstatně rychleji. Dle zde uvedených příkladů je navíc skutečná chyba vždy relativně malá již při použití 2 nebo 3 uzlů, což je nesporně také velká výhoda.

Poslední várkou metod jsou takové, které využívají *Taylorova polynomu* daného stupně. Ty máme ještě rozděleny na dvě části, a to se středem daným uprostřed každého podintervalu a se středem, který si uživatel volí. Jak je již v kapitole, která se této problematice věnuje, zmíněno, lepších výsledků dosahujeme obvykle při volbě středu uprostřed podintervalu. Jak je zřejmé, tak při větším stupni Taylorova polynomu se dostáváme celkem rychle k přesné hodnotě. Na druhé straně, jak ale můžeme vidět na Příkladech 3.2 a 3.3, velký stupeň Taylorova polynomu může při malém počtu podintervalů a nepříliš vhodné volbě středu v určitých případech vést až k obrovskému nárůstu chyby. Je také vidět, že při volbě jiného středového bodu než uprostřed každého podintervalu se s narůstajícím počtem podintervalů blížíme k přesné hodnotě integrálu pomaleji.

Pokud bychom chtěli mezi sebou porovnat jednotlivé přístupy, pak zjistíme, že Gaussovy vzorce dávají přesnější výsledky než Newton-Cotesovy vzorce. Porovnáním odhadů pro maximální chybu u Simpsonova pravidla a aproximace pomocí Taylorova polynomu druhého stupně v bodě  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  zjistíme, že je tato hodnota u Simpsonova pravidla 1.5-krát menší. Na druhou stranu, u Simpsonova pravidla i u Gaussových vzorců bylo patrné, že by byl při zvyšování stupně aproximujícího polynomu výpočet vzorce pro přibližný výpočet integrálu i odhadu pro maximální chybu dost zdlouhavý a komplikovaný. Oproti tomu při použití aproximace Taylorovými polynomy jsou (zejména v případě, kdy  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ) vzorce pro přibližný výpočet integrálu i odhadu pro maximální chybu snadno



získatelné pro libovolný stupeň aproximujícího Taylorova polynomu. Přesnost lze tedy při použití aproximace Taylorovými polynomy jednoduše zvýšit tím, že zvýšíme stupeň použitého Taylorova polynomu.

Záleží tak na uživateli, jak moc přesně hodnotu potřebuje znát. Podle toho si může zvolit vhodnou metodu. Pokud si však zvolí dostatečně velký počet podintervalů, tak příliš nezáleží na tom, kterou metodu využije. Dříve by to byl nejspíš problém, ale v dnešní době výpočetní techniky již není takovou překážkou spočítat hodnotu integrálu i při rozdělení na tisíce podintervalů.

## Závěr

Ve své práci jsem se zabýval několika zajímavými přístupy k numerickému integrování. Toho se nejčastěji využívá u problematických funkcí, ať už z hlediska složitého či dokonce nemožného výpočtu primitivní funkce. Využijeme jej také v případě, že budeme mít jen několik diskrétních bodů a jejich funkční hodnoty, z čehož bychom standardním postupem určitý integrál taktéž nespočítali.

Po první přípravné kapitole věnující se aproximaci funkcí pomocí polynomů již začíná stěžejní část práce, a to jednotlivé vybrané přístupy k numerickému integrování. Jako první jsou zmíněny Newton-Cotesovy vzorce, konkrétně metoda levého a pravého odhadu, obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo, včetně maximálních chyb těchto metod. Následují Gaussovy vzorce, které jsou zde odvozeny pro asi nejpoužívanější polynomy, a to Legendery, opět včetně maximálních chyb. V další části pak následují metody využívající Taylorova polynomu. Zde byly všechny vzorce a odhady odvozeny víceméně bez použití literatury, jelikož daná problematika je ve většině publikací studována jen okrajově, např. ilustrováním na příkladech. Ani zde nechybí odvození maximální chyby. Ve všech zmíněných případech jsou navíc kapitoly rozšířeny o složené formule, které využívají rozdělení daného intervalu na několik podintervalů, na kterých se následně užije daná metoda. V poslední části je ještě zmíněn přístup využívající metodu Monte Carlo, který využívá generátor náhodných čísel.

Poslední kapitola se věnuje srovnání metod na třech konkrétních příkladech. K této části jsem též vytvořil aplikaci v programu Matlab, do níž uživatel zadává funkci, dolní a horní mez, počet podintervalů, u Gaussových vzorců poté počet uzlů (omezený na interval  $\langle 2; 10 \rangle$ ) a u Taylorova polynomu jeho stupeň, případně ještě uživatelsky volený střed. Aplikace vypočítá odhad zadaného určitého integrálu zvolenou metodou, maximální chybu a také dolní a horní hranici intervalu, kde se nachází skutečná hodnota. Pro srovnání aplikace vypočítá také přesnou

hodnotu integrálu (pomocí příkazů již obsažených v programu Matlab). Uživatel má navíc možnost si nechat vykreslit graf funkce, a to včetně aproximace zadaného určitého integrálu zvolenou metodou. Má i možnost změnit meze grafu, aby viděl průběh funkce i mimo zadané meze pro výpočet integrálu.

Díky své diplomové práci jsem si rozšířil spektrum znalostí z této oblasti, kterou jsem sice částečně studoval již v předmětu *Numerické metody 1*, ale hlouběji jsem do ní pronikl až díky této práci. Navíc jsem se seznámil i s dalšími přístupy, které ve zmíněném předmětu nebyly studovány. Přesto jsou velmi srozumitelné a logické. Vyzkoušel jsem si také programování v programu Matlab, při tvorbě aplikace jsem se seznámil s pro mě dosud neznámým prostředím GUIDE v tomto programu, se kterým jsem se samostatně naučil pracovat, což se mi jistě může do budoucna hodit. Navíc mě tato práce naučila i z několika různě formulovaných definic, vět a dalších textů vybrat tu podle mě nejvhodnější a nejsrozumitelnější pro čtenáře.

## Literatura

- [1] Burden R.L., Faires J.D.: Numerical Analysis, 9. vydání. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2001.
- [2] Dřimal J., Trunec D.: Úvod do metody Monte Carlo, 1. vydání. Univerzita J. E. Purkyně, Brno, 1988.
- [3] Fabian F., Kluiber Z.: Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění, 1. vydání. Prospektrum Praha, 1998.
- [4] Horová I., Zelinka J.: Numerické metody, 2. vydání. Masarykova Univerzita v Brně, 2008.
- [5] Hron K., Kunderová P.: Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky, 1. vydání. Univerzita Palackého Olomouc, 2013.
- [6] Jarník V.: Diferenciální počet I, 6. vydání. Academia Praha, 1974.
- [7] Kouřilová P., Pavlačková M.: Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii, 1. vydání. Univerzita Palackého Olomouc, 2012.
- [8] Michálek J.: Úvod do teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, 2. vydání. SPN Praha, 1989.
- [9] Ralston A.: Základy numerické matematiky, 2. české vydání. Academia Praha, 1978.
- [10] Süli E., Mayers D.: An Introduction to Numerical Analysis, 1. vydání. Cambridge University Press, 2003.
- [11] Error Estimation for Gauss Quadrature [online], dostupné z: <http://www.math.usm.edu/lambers/mat772/fall10/lecture16.pdf#page=4&zoom=auto,-265,224>, [citováno 2.11.2014].
- [12] Hasík K.: Numerické metody, Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě, studijní opora, 119 s [online], dostupné z: <http://www.slu.cz/math/cz/knihovna/ucebni-texty/Numericke-metody/Numericke-metody.pdf>, [citováno 31.8.2014].
- [13] Kučera R.: Numerické metody, Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, studijní opora, 154 s [online], dostupné z: [http://home1.vsb.cz/~kuc14/textyNM/FINALNI\\_VERZE\\_CD.pdf](http://home1.vsb.cz/~kuc14/textyNM/FINALNI_VERZE_CD.pdf), [citováno 6.9.2014].
- [14] Mocninné a Taylorovy řady [online], dostupné z: [http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id\\_file=774](http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=774), [citováno 2.10.2014].

- [15] Mošová V.: Numerické metody, Univerzita Palackého Olomouc, studijní opora, 147 s [online], dostupné z: <http://physics.ujep.cz/~jskvor/NME/DalsiSkripta/numerickemetody.pdf>, [citováno 6.9.2014].
- [16] Numerická integrace [online], dostupné z: [http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/cihakmi1/zanumat/numericka\\_integrace.pdf](http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/cihakmi1/zanumat/numericka_integrace.pdf), [citováno 12.10.2014].
- [17] Taylorův polynom [online], dostupné z: <http://math.feld.cvut.cz/mt/txtc/4/txc3ca4e.htm>, [citováno 1.10.2014].
- [18] Úvod do metody Monte Carlo [online], dostupné z: [http://home1.vsb.cz/~dor028/Aplikace\\_5.pdf](http://home1.vsb.cz/~dor028/Aplikace_5.pdf), [citováno 7.12.2014].