UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Marek Škultéty

3. ročník

Obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání
a společenské vědy se zaměřením na vzdělávání

NUMERACE PŘIROZENÉHO ČÍSLA

Bakalářská práce

Vedoucí práce: RNDr. Martina Uhlířová, Ph.D.

Olomouc 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a použil jen prameny uvedené v seznamu literatury. Souhlasím, aby tato práce byla uložena na Univerzitě Palackého v Olomouci v knihovně Pedagogické fakulty a zpřístupněna ke studijním účelům.

V Olomouci dne ………………………

Marek Škultéty

Poděkování

Děkuji vedoucí mé bakalářské práce RNDr. Martině Uhlířové, Ph.D., za její cenné rady, připomínky, čas, a taky odborné vedení. Děkuji rovněž rodině a svým blízkým za podporu a motivaci, kterou mi během vypracovávání práce poskytli.

OBSAH

ÚVOD

„Vše je číslo. Číslo je mírou všech věcí.“ (Pythagoras ze Samu)

Aniž bychom si to někdy uvědomovali, matematika je součástí našeho každodenního života. Položení základů můžeme najít na počátku lidských dějin. Přes fakt, že prošla mnoha proměnami, je zde jedna věc neměnná. Učí člověka nejen logicky přemýšlet, ale rovněž pracovat systematičtěji a praktičtěji. V současnosti je matematika součástí mnoha vědních oborů a i nadále se rozvíjí. V době vyspělé techniky je tak oborem naprosto nezbytným.

Cílem této bakalářské práce je osvětlit historii zápisu čísel od jeho počátku až do současné doby. Číslo je užíváno například pro vyjádření pořadí, množství či mnoho jiných účelů. Rovněž vzniku jak pozičních, tak nepozičních numeračních soustav v různých kulturách. V práci se uvádí vztahy mezi jednotlivými numeračními soustavami a v některých taktéž početní operace. Seznamuje s jednotlivými fázemi jeho vývoje.

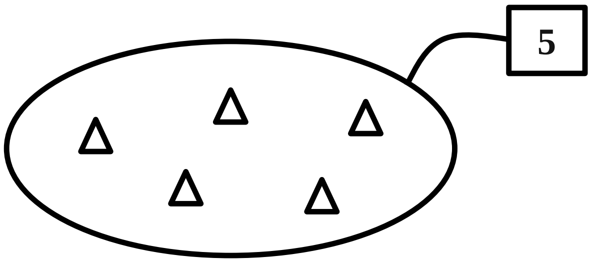
Rozeznáváme dva druhy numeračních soustav - poziční a nepoziční. U nepozičních soustav nezáleží na pořadí jednotlivých symbolů, tudíž změnou pozic znaků v zápisu čísla tím dané číslo nijak neovlivníme. Naopak u pozičních soustav záleží na pořadí jednotlivých symbolů, nemůžeme tedy dané číslo zapsat libovolným způsobem, jelikož by se jednalo o zápisy různých čísel.

Závěr je věnován definování pojmů přirozeného čísla v oblasti didaktiky matematiky, včetně didaktických postupů vzniku pojmu přirozeného čísla u žáků 1. stupně základních škol a možností využití těchto poznatků ve vyučování.

1 POJEM PŘIROZENÉHO ČÍSLA

Přirozená čísla patří mezi nejstarší koncepty matematiky. Obvykle je chápeme jako umělé, ideální pojmy, vzniklé abstrakcí z vlastností konečných množin a vlastností seřazování prvků těchto množin. Není to tedy konkrétní věc, objekt, nacházející se v našem okolí, který by byl smysly vnímatelný. (Novák, 1999)

Proces vytváření pojmu čísla je cestou od množiny (jako souboru libovolných věcí, jež se nazývají prvky množiny) k její kvantitativní charakteristice. Přirozené číslo vyjadřuje kvantitu, početnost (počet prvků) množiny. (Novák a Eberová, 1988)



Obr. 1 – Množina trojúhelníků

Na *obr. 1* můžeme vidět, že přirozené číslo 5 udává počet prvků v množině (počet trojúhelníků).

1.1 Mohutnost množiny

Jeden z nejdůležitějších kroků v matematickém myšlení spočívá v objevení jisté podobnosti mezi skupinami různých předmětů bez ohledu na případné různorodosti mezi nimi. Např. představme si skupinku dětí, ve které je Tomáš, Pavlína a Jakub. Každé z dětí má svůj míč. Je zde nějaká podobnost mezi touto skupinkou dětí a jejich míči?

Člověk musel ve své historii učinit velký pokrok k rozvoji svých duševních schopností, aby dokázal nejen popsat různé vlastnosti těles jako tvar, barva, velikost, materiál, ale rovněž vlastnosti, které nejsou tolik zřejmé a vyžadují vyšší stupeň abstrakce.

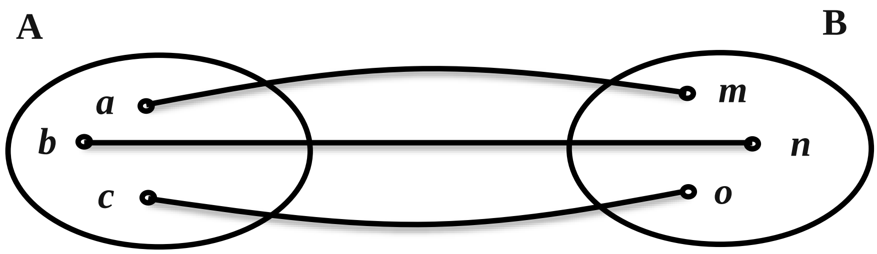
Definice. (Eberová a Stopenová, 1997) *Množina A je konečná právě tehdy, když není ekvivalentní s žádnou svou vlastní podmnožinou. Množina, která není konečná, se nazývá nekonečná.*

V příkladu, který jsme si uvedli, jsou sice prvky množin dětí a míčů zcela odlišné povahy, mají ovšem něco společného. Označme si nyní první množinu, tj. skupinku dětí písmenem A a druhou, množinu míčů, písmenem B.

Můžeme napsat:

A = {*a, b, c*} a B = {*m, n, o*}, kde *a, b, c* jsou jednotlivé děti a *m, n, o* míče.

Pokud si tento zápis vyjádříme diagramem (*obr. 2*), můžeme vidět vzájemné jednoznačné zobrazení mezi množinami A a B.



Obr. 2 – Vzájemné jednoznačné zobrazení

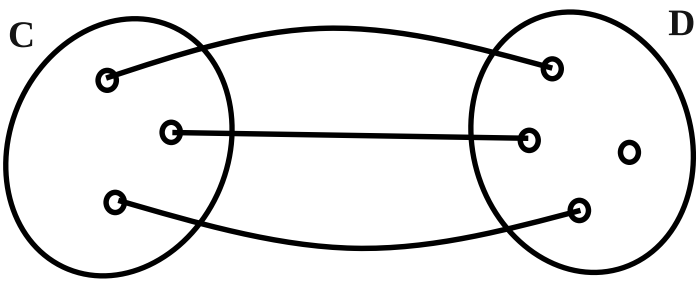
Označme si tento vztah symbolem „~“. Říkáme, že množina A je ekvivalentní s množinou B. Otázkou zůstává, jak poznáme, že se jedná o množiny stejně mohutné?

Prvním způsobem, jak to zjistit, je určení počtu prvků jednotlivých množin. U množin s větším počtem prvků však tento způsob nemusí být zcela vhodný. Druhý způsob spočívá v jednoduchém přiřazování prvků stejným způsobem, který je znázorněn na *obr. 2*.

Definice. (Jelínek, 1974) *Dvě konečné množiny se nazývají množiny stejné mohutnosti, mají-li stejný počet prvků.*

Každý z dětí má právě jedno pouzdro a žádné nezbude. Jinak řečeno, v obou množinách máme stejný počet prvků a jsou tedy stejně mohutné.

Znázorněme si další dvě množiny (*obr. 3*), které sice obsahují stejné prvky, nemají však stejnou společnou vlastnost, kterou měly množiny A a B. Zde mají množiny C a D různý počet prvků, tzn. různou mohutnost. V tomto případě tedy nejde žádným způsobem prvky jednoznačně přiřadit.

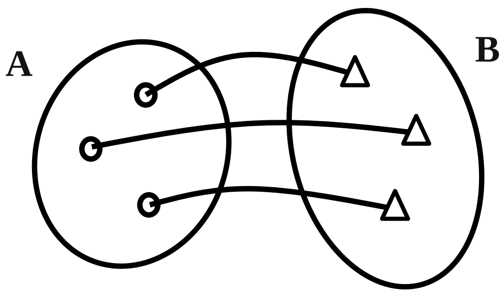


Obr. 3 – Různá mohutnost množin

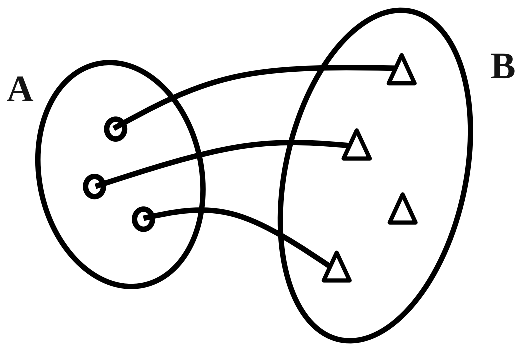
V množině D jsou prvky, které „přebývají“ – prvků je tedy více než v množině C.

Přiřazujeme-li tak prvky množiny A s prvky množiny B relací „jeden vzor – jeden obraz“, dostaneme jeden z následujících případů:

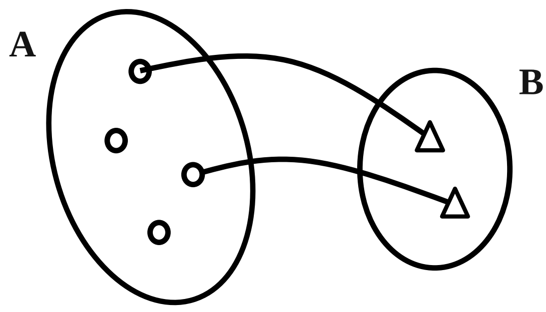
1. Množina A má stejný počet prvků jako množina B (*obr. 4*).
2. Množina A má méně prvků než množina B (*obr. 5*).
3. Množina A má více prvků než množina B (*obr. 6*).



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

1.2 Relace ekvivalence

Definice. (Blažek, 1983) *Relace R definovaná na množině M se nazývá relace ekvivalence právě tehdy, když je reflexivní, symetrická a tranzitivní.*

Relace ekvivalence se značí symbolem „~“, který jsme si uvedli ve spojitosti ekvivalence dvou množin. Jestliže pro prvky a, $b \in$ M platí, že [a, b] $\in$ ~ říkáme, že prvky a, b jsou navzájem ekvivalentní a zapisujeme a ~ b. Každá ekvivalence je sama sobě inverzní, což vyplývá z toho, že je reflexivní a zároveň i symetrická.

1.2.1 Rozklad množiny

Věta. (Perný, 2010) *Každá relace ekvivalence definovaná na množině M vytváří rozklad množiny na třídy rozkladu.*

Relace ekvivalence, která je definovaná na množině M, rozkládá tuto množinu na třídy rozkladu. Zvolíme-li si libovolný prvek $a \in$ M, můžeme pak sestavit množinu T_1, která bude obsahovat všechny prvky x ekvivalentní k prvku a. Tuto skutečnost zapisujeme $T_1 = \{x \in M; x \sim a\}$. V množině M však může existovat další prvek b, který není ekvivalentní k prvku a, tedy nepatří do množiny T_1. Vytvoříme druhou množinu T_2 z prvků množiny M, které jsou ekvivalentní k prvku b. Tuto skutečnost zapíšeme (obdobně jako u množiny T_1) $T_2 = \{x \in M; x \sim b\}$. Tímto způsobem můžeme pokračovat do té doby, než vyčerpáme všechny prvky množiny M. Výsledkem celého procesu třídění je množina T, jejíž prvky jsou neprázdné množiny, které nazýváme třídy rozkladu $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$. Zapisujeme $T = \{T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n\}$. [1]

1.2.2 Vlastnosti třídy rozkladu

Sjednocení všech tříd rozkladu množiny M se rovná vždy množině M a to znamená, že každý prvek $x \in M$ patří do některé z množin $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$.

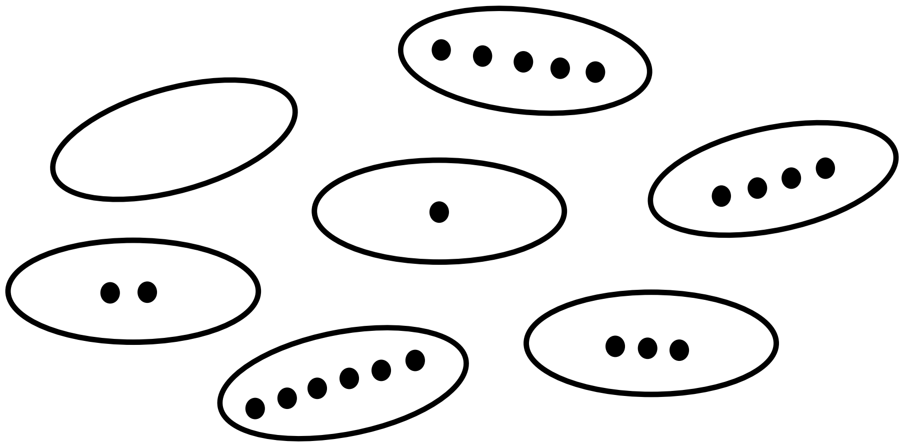
Průnik každých dvou tříd je množina prázdná a to znamená, že každý prvek je zařazen právě do jedné třídy rozkladu množiny M.

Žádná z množin $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ nemůže být množina prázdná.

Množina T se nazývá rozklad množiny M. Prvky, náležející množině T, nazýváme třídy rozkladu. Třídy rozkladu jsou jednoznačně určeny libovolným prvkem třídy. Libovolný prvek je reprezentant, to znamená, že třídu reprezentuje. (Eberová, 2003)

1.3 Standardní množina a její uspořádání

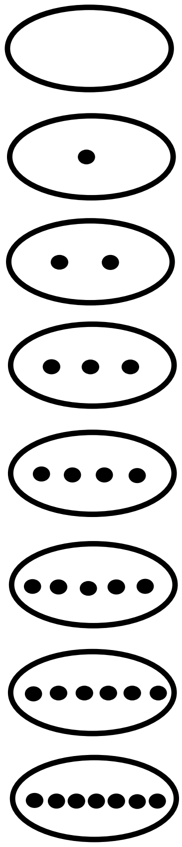
Ke studiu přirozených čísel si potřebujeme vytvořit speciální množinu, kterou můžeme nazvat standardní a označíme si ji písmenem S. Tato množina obsahuje libovolnou jednu množinu z každé třídy množiny M (*viz podkap. 1.2*), která reprezentuje příslušnou třídu. Na *obr. 7* si demonstrujeme několik vybraných množin.



Obr. 7 – Libovolné množiny z množiny M

Prvky standardní množiny S jsou množiny, kde žádné dvě nemají stejnou mohutnost.

Dovolme si v množině S zavést relaci R „M má o jeden prvek více než N“. Nyní pomocí této relace můžeme množiny z *obr. 7* uspořádat tak, že první množina bude obsahovat nejmenší počet prvků. Začněme tedy prázdnou množinou, viz *obr. 8*.



	název čísla	zápis čísla
	nula	0
	jedna	1
	dvě	2
	tři	3
	čtyři	4
	pět	5
	šest	6
	sedm	7
atd.	atd.	atd.

Obr. 8 – Standardní množina S

Z předešlého obrázku nám vyplývá, že jsme tyto množiny sestavili v přirozeném pořadí. Každá z množin totiž reprezentuje právě jedno přirozené číslo.

V případě, že jsou množiny na *obr. 8* uspořádány v přirozeném pořadí, pak musí rovněž odpovídat příslušná čísla v přirozeném pořadí:

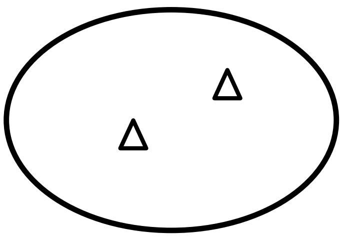
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ….

Pomocí této posloupnosti dokážeme snadno určit počet předmětů, to znamená, že dokážeme spočítat, kolik jich je. Celkový počet libovolných předmětů určuje poslední číslo tohoto počítání.

1.4 Zápis čísla, jeho pojmenování a numerace

Již nám může být zřejmé, že přirozené číslo (společná vlastnost určité skupiny množin) je pojem, a není to tedy konkrétní objekt nacházející se v přírodě. Na číslo, např. na číslo tři, nemůžeme ukázat prstem a říci, toto je číslo tři, na rozdíl od konkrétních předmětů, u kterých můžeme říci: toto je židle, tam je kniha, to je lampa apod. (Jelínek, 1974)

Abychom s přirozenými čísly mohli pracovat, musíme je pojmenovat nebo označit symbolem (znakem). Označení pojmu konkrétním znakem nebo slovem, nemusí být množinou zobrazeno zcela přesně, viz (*obr. 9*).



Obr. 9 – Množina trojúhelníků

Je tedy důležité vědět, že to, co napíšeme na papír, např. „2“, není číslo dvě, ale pouze jeho zápis. Jde pouze o dohodnutý způsob vyjádření. (Hejný, 2001)

Číslo může být zapsáno různými znaky a pojmenováno různými slovy. Např. číslo dva se v jiných jazycích nazývá two, zwei, dos, deux atd. Je to tak i v různých kulturních oblastech, které užívaly anebo užívají různé znaky k označení čísel.

Např. znaky

2, || (Egypťané), β´ (Řekové), III (Římané),
٢ (dnešní Arabové), • • (Mayové)

značí číslo dvě.

Existuje však mnoho různých způsobů, jak zapsat totéž číslo. Například zmíněné číslo dvě můžeme zapsat rovněž jako:

1 + 1, 8 - 6, 24 : 12, √4 atd.

Je podstatné říci, že čísla nemůžeme vidět, vidíme pouze jejich zápisy. Ať už jsou zápisy velké či malé anebo jsou napsány v sešitě či na tabuli. Ovšem i zde se může objevit problém. Jelikož se zápisy zdají být konkrétními objekty, lidé se mohou domnívat, že tyto zápisy, je číslo samo o sobě, ne jeho pouhý zápis.

Rozdíl mezi číslem a jeho zápisem vysvětlíme následující analogií.

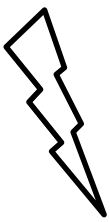
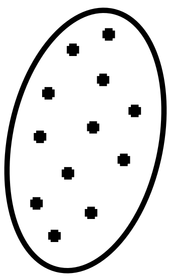
Dle Jelínka (1974) k pojmenování věcí používáme slova a při psaní těchto slov používáme soustavy symbolů (písmena), které tvoří abecedu. Tu tvoří konečný počet písmen – naše abeceda je tvořena 27 písmeny (bez háčků a čárek). Pomocí těchto písmen tedy můžeme vytvořit velké množství slov.

Podobným způsobem máme v aritmetice soustavu číselných znaků, tzv. číslice. V běžně užívané desítkové soustavě se jedná o číslice:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pomocí těchto čísel tvoříme zápis čísla. Např. pokud chceme v soustavě o základě 10 zapsat číslo dvacet osm, zápis je tvořen dvěma číslicemi, a to 28.

V následujícím příkladu je názorně demonstrována analogie mezi psaním slov a čísel.

Věc	Zápis slova	Písmena v zápisu slova	Abeceda, ze které jsou vybírána písmena
	blesk	b, l, e, s, k	a, b, c, d, e, . . ., x, y, z
Číslo	Zápis čísla	Číslice v zápisu čísla	Zákl. množina, ze které jsou vybr. číslice
	12	1, 2	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Slovo „blesk“ je pouze jedno slovo i přes fakt, že se skládá z několika písmen. Rovněž zápis čísla „12“ je pouze jeden znak i přesto, že je tvořen z číslic.

V našem jazyku existují slova, která jsou tvořena pouze jedním písmem, např. spojka a, předložky k, v, u apod. Tyto symboly proto mají dva významy – jednak jsou písmeny a rovněž slova se svým vlastním významem. Tato dvojznačnost se objevuje i u čísel. Např. u jednociferných čísel (1, 2, 3, až 9) jsou jednotlivé číslice samy o sobě číslicí, ale taktéž z nich můžeme vytvořit zápisy různých čísel.

1.5 Kardinální číslo

Pojem kardinálního čísla se dá definovat základní myšlenkou. Vezmeme všechny množiny a rozdělíme do tříd tak, aby v téže třídě byly všechny ty množiny, které jsou navzájem ekvivalentní. Prázdná množina $\emptyset$ bude přitom sama tvořit jednu třídu, druhou třídu budou tvořit všechny množiny skládající se z jediného prvku, další třídu budou tvořit množiny skládající se právě ze dvou prvků, atd. Každé třídě pak přiřadíme jakýsi symbol, který nazveme kardinálním číslem kterékoli množiny z této třídy. Např. první z výše uvedených tříd přiřadíme symbol 0, druhé symbol 1, třetí symbol 2 atd. Podle toho je kardinální číslo množiny něco, co je odpovědí na otázku, kolik prvků má tato množina. (Hruša et al., 1976)

Definice. (Eberová, 2005) *Nechť je dán na množině M systém disjunktních podmnožin. Dále nechť je mezi těmito množinami definovaná relace R: „být ekvivalentní“. Tato relace způsobuje rozklad tohoto systému na třídy rozkladu, ve kterých jsou navzájem ekvivalentní množiny. Každou třídu tohoto rozkladu, pak nazveme kardinálním číslem. Když množina A reprezentuje třídu rozkladu, pak kardinální číslo této třídy zapíšeme*

$$\boldsymbol{card\ (A) = a.}$$

Přirozená čísla se taky definují jako kardinální čísla konečných množin.

1.6 Ordinální číslo

V této kapitole *(podkap. 1.2)* jsme si rozložili množinu M na třídy. Řekli jsme si, že každá třída obsahuje různé množiny, ovšem všechny množiny jedné třídy mají stejný počet prvků - mají tak společnou charakteristickou vlastnost. Ordinální číslo definujeme pomocí následující věty a definice.

Věta. (Hruša, 1969) *Uspořádání množiny M se nazývá dobré uspořádání, jestliže každá neprázdná podmnožina množiny M má (v tomto uspořádání) první prvek. Každá množina, v níž je definováno dobré uspořádání, se nazývá dobře uspořádaná množina. Mezi dobře uspořádané množiny řadíme i prázdnou množinu ∅ a všechny jednoprvkové množiny.*

Definice. (Eberová, 2005) *Nechť je dán na množině M systém disjunktních uspořádaných podmnožin. Dále nechť je mezi těmito uspořádanými množinami definovaná relace R: „být podobný“. Tato relace pak způsobuje rozklad tohoto systému na třídy rozkladu, ve kterých jsou navzájem podobné množiny. Každou třídu tohoto rozkladu, pak nazveme ordinálním typem. Ordinální typy dobře uspořádané množiny se nazývají ordinální čísla. Když množina A reprezentuje třídu rozkladu, tak toto ordinální číslo zapíšeme*

$$\mathrm{ord}\,([A]) = a.$$

Tvrzení, že dvě uspořádané množiny mají týž ordinální typ, znamená přesně totéž, co tvrzení, že tyto množiny jsou navzájem podobné. (Hruša et al., 1976)

Přirozená čísla se taky definují jako ordinální čísla dobře uspořádané konečné množiny. Teorie ordinálních čísel je do značné míry analogií teorie kardinálních čísel. U ordinálních čísel se jedná vždy o dobře uspořádané množiny, zatímco u kardinálních čísel se jedná o neuspořádané množiny.

Věta. (Perný, 2010) *Ordinální čísla dobře uspořádaných konečných množin nazveme přirozenými čísly.*

2 NEPOZIČNÍ NUMERAČNÍ SOUSTAVY

Jelikož lidé odpradávna hledali ten správný způsob, jak všechna přirozená čísla pojmenovat a zapisovat, se závazností na různé kulturní oblasti, se používaly odlišné číselné znaky (číslice). Vznikalo tak postupně mnoho různých numeračních soustav, tzv. systémů. V naší historii bylo vyzkoušeno mnoho systémů; ať už byly úspěšně, nebo příliš složité a bránily tak v dalším rozvoji aritmetiky.

Podle Nováka (1999) se numerační soustavou obvykle rozumí soubor dohodnutých používaných znaků, nazývaných číslice (cifry), spolu s vymezením pravidel pro zápis přirozených čísel. Podoba zápisu čísla tedy závisí na volbě číselné soustavy. V této kapitole se budeme věnovat nepozičním numeračním soustavám, ve kterých nezáleží na pozici znaků v číselném zápisu.

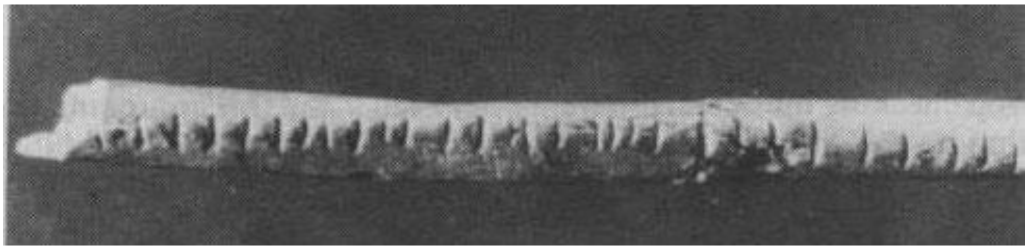
2.1 Numerace jeskynního člověka

Počítání jeskynního člověka bylo, předpokládejme, velice primitivní. Svým způsobem se zřejmě jednalo o počítání, např. kolik obyvatel žilo v jeho blízkém okolí anebo kolik ovcí vlastnil. Člověk zřejmě neznal názvy čísel a ani je nepotřeboval. Je domněnka, že na určitém stupni svého kulturního vývoje dovedl určit např. počet ovcí, které ráno vyháněl na pastvu, tím, že za každou ovci položil na hromádku kamínek a večer opět pomocí kamínků zkontroloval, zda se všechny ovce vrátily. (Jelínek, 1974)

Zcela určitě jde o matematicky zajímavý způsob zjišťování určitého počtu (za předpokladu, že je tato domněnka správná). V podstatě jde vzájemně jednoznačné přiřazení prováděné mezi dvěma množinami. Díky tomuto způsobu dokázal tedy "spočítat" ovce, aniž by znal jejich počet, dokázal rovněž určit, čeho je více, méně nebo stejně.

Jeden z dalších pokusů, jak člověk zjišťoval určitý počet, bylo zařezávání znaků do kosti, případně hole (zářezový numerační systém). Jednotlivé zápisy si lze představit následovně:

1	3	7	13	atd.



Obr. 10 - Zářezy číselných znaků do kosti [2]

Na *obr. 10* můžeme vidět fotografii lýtkové kosti paviána s 29 zářezy, nalezena v Africe v pohoří Lebombo na hranicích Svazijska. Zároveň je nejstarším známým matematickým artefaktem, a to kolem 37 tisíc let. [2] Velkým pokrokem se stalo zapisování zářezů po skupinách, jelikož u větších počtů zářezů se stávaly tyto zápisy nepřehlednými.

Způsob zapisování čísel u jeskynního člověka byl jednoduchý. Používal se zde pouze jediný znak k označení libovolného čísla. Například číslo devatenáct.

|||||||||||||||||||

Jak bylo zmíněno výše, obrovským pokrokem bylo zapisování zářezů po skupinách, často po pěti (počet prstů na ruce):

||||| ||||| ||||| ||||

Nevíme jistě, zda jeskynní člověk někdy prováděl některé početní úkony. Pokud ano, jednalo se o velmi jednoduché operace, mezi které patří sčítání, odčítání, případně dělení.

Při sčítání a odčítání se jednoduše zářezy připsaly (sjednocení množin), nebo vymazaly. Např.

||||| || ∪ ||||| | = ||||| ||||| |||

7 + 6 = 13

Jeskynní člověk tyto početní zkušenosti získával s postupem času díky své praktické činnosti a trvalo několik tisíc let, než člověk dospěl k matematické teorii.

Tato primitivní numerace stála na třech zásadách:

1. Číslo jedna značil jeden zářez nebo čárka.
2. Připsáním čárky se tak dalo zapsat číslo větší než jedna.
3. Pro přehlednější zápis u větších čísel byly zářezy sdružovány po pěti.

2.2 Numerace starých Egypťanů

Způsob zápisů čísel Egypťanů je již velmi starý (přes 5 000 let) a vychází ze zkušeností jeskynního člověka. Zde taktéž způsob zápisu prvně probíhal pomocí zářezů nebo čárek. Egypťané však brzy přišli na to, že čísla nemusí zapisovat pouhými jednotkovými vruby, ale lze je možno vyjádřit v řádech: jednotky, zvlášť desítky, zvlášť stovky. Tento objev byl velmi důležitý. Počítání s čísly i jejich zaznamenávání se tak ohromně ulehčilo.

Prvně Egypťané sdružovali čárky ne po pěti, ale po deseti – zde vzniká základ desítkové numerační soustavy. Uveďme si příklad zápisu čísla 23.

|||||||||| |||||||||| |||

Jelikož se Egypťané potýkali i s většími zápisy, bylo praktické zavést pro skupinu deseti čárek nový číselný znak, který mohl představovat ruku, resp. dvojici sousedních prstů:

|||||||||| = ∩

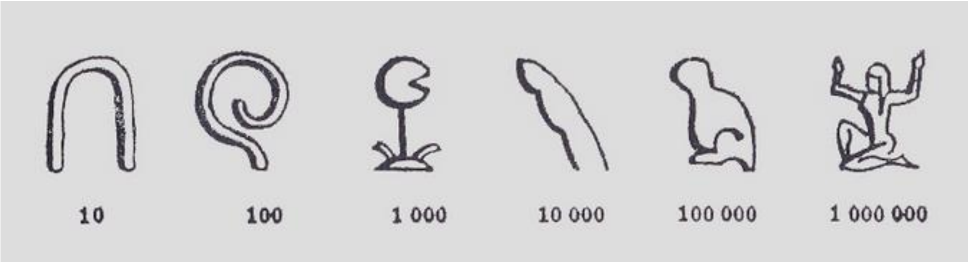
Již zmíněný zápis čísla 23 by tak vypadal následovně:

∩ ∩ |||

Logický postup následoval i pro zápis větších čísel než jen deset. Znak pro 100 je patrně stylizovaný obraz svinutého palmového listu.

∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩ = ϱ

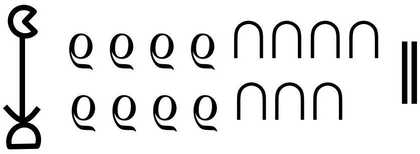
Na následujícím obrázku (*obr. 11)* můžeme vidět názorné zavádění dalších číselných znaků pro větší a větší skupiny čísel. Tyto znaky dnes nazýváme hieroglyfy (z řec. hieros = „posvátný“ a glypho = „nápis“), které byly užívány ve starém Egyptě.



Obr. 11 – Číselné znaky starých Egypťanů [3]

Každý ze znaků charakterizoval nějaký předmět. Vysoká čísla charakterizovaly hojnost a množství. Symbol pro 1 000 představoval zřejmě květ lotosu, který vykvétal na březích Nilu a byl symbolem hojnosti. Symbol pro 10 000 je obrazem prstu, asi ukazováku, 100 000 symbolizovalo obraz pulce, kterých se vždy po záplavách Nilu objevovalo velké množství a znak pro 1 000 000 je obrazem žasnoucího muže nebo kosmického boha, který drží oblohu. Podle některých pramenů existoval ještě hieroglyf pro číslo 10^7, jenž byl obdobně jako předchozí symbol užíván často ve významu „velmi mnoho“. (Polák, 2014)

Například rok 1872 by zapsali Egypťané v této podobě:



Egypťanům tento způsob zápisu čísel vyhovoval. Díky svým četným stavbám (pyramidy, chrámy) dokázali tyto znalosti dokonale využít ve stavitelství. Především měli Egypťané skvěle zavedený systém – obyvatelé museli například odvádět daně. Psaní číselných znaků nebylo zcela snadné, a proto byly s postupem času nahrazeny písmem jednodušším, tzv. hieratickým písmem (řec. hieratos = „kněžský“). Asi od 7. stol. př. n. l. se objevuje ještě další forma hieroglyfického písma: tzv. démotické písmo (řec. demotikos = „lidový“).

Je zřejmé, že Egypťané používali nepoziční desítkovou číselnou soustavu. Sčítání dvou či více přirozených čísel v ní bylo jednoduché, stejně tak i odčítání dvou přirozených čísel. Při násobení a dělení Egypťané užívali operace zdvojování a sčítání.

Například řekněme, že bychom chtěli vědět, kolik je 14 x 24. Vytvoříme si tedy dva sloupce čísel. Do levého sloupce napíšeme násobky dvou tak, abychom nepřesáhli hodnoty 14 (1, 2, 4, 8) a v pravém sloupci začneme číslem 24, opět s násobky dvou tak, abychom v obou sloupcích měli stejný počet čísel. V levém sloupci dostaneme součet čísla 14 jedním způsobem, zbývající čísla v sloupci škrtneme. Poté přeškrtneme číslo na protější straně a zbylá sečteme.

14	x	24
~~1~~		~~24~~
2		48
4		96
8		192
14		336

Egyptská numerační soustava stála na několika principech, uveďme si proto alespoň pár z nich:

1. Existoval znak pro počet několika věcí. Např. na *obr. 11* můžeme vidět symbol pulce, který znamenal sto tisíc objektů.
2. Pro označení skupin totožné velikosti se používal tentýž symbol i několikrát.
   Např. zápis

∩∩∩∩ znamenal 10 + 10 + 10 + 10 = 40.

Nutno podotknout, že v této soustavě byl kladen důraz na aditivní operaci, tedy sčítání.

3. Jedná se o soustavu vybudovanou na základě čísla 10. Deset je tvořeno deseti jednotkami, sto je tvořeno deseti desítkami.
4. Nezáleží na uspořádání znaků. Je tedy jedno, zda byl zápis prováděn zleva, či jinak.
   Bylo zvykem rovněž zapisovat znaky do geometrických tvarů.
   Např.

∩∩∩

∩∩∩

∩∩∩

5. Znak pro nulu v tomto systému nebyl nutný. Bez problému tak mohli zapisovat čísla, která jsou v naší numeraci nezbytná. Např. číslo ϱ ϱ || značí 202 a nelze tak zápis číst jako 22. Rovněž ϱ ∩∩∩ značí 130 a není třeba dodávat, že na základním místě nemáme jednotky.
6. V Egyptské numerační soustavě bylo sčítání a odčítání velmi jednoduché.
   Např. sčítání bylo prováděno následovně.

   ∩∩ |||||| + ∩ ||||| = ∩∩∩∩ |

   U odčítání pak:

   ∩∩∩ ||| - ∩ ||||| = ∩∩ ||||||||||||| - ∩ ||||| = ∩ ||||||||.

2.3 Římská a řecká numerace

Starořecké číslice vznikly původně (kolem 10. stol. př. n. l.) jako tzv. herodiánská číselná symbolika, v niž čísla 1, 5, 10, 100, 1 000 byla vyjádřena symbolicky prvními velkými písmeny svých řeckých názvů a spojením těchto znaků vznikly symboly pro čísla 50, 500 a 5 000, viz (*obr. 13)*. Ostatní přirozená čísla se zapisovala opakováním znaků pro uvedená čísla.

Obr. 13 – Zápisy čísel ve Starověkém Řecku [3]

Používaná číselná soustava byla nepoziční desítková soustava. Během dalších staletí (před 1. stol. př. n. l.) se postupně přecházelo ke stručnější, tzv. ionské (jónské) číselné symbolice. V ní byla přirozená čísla 1 až 9, desítky 10 až 90, stovky 100 až 900 označeny postupně 24 písmeny současné malé řecké abecedy a 3 historickými (dnes již nepoužívanými) písmeny psanými vesměs s čárkou, resp. pruhem (aby je odlišili od písmen). Nulu starověcí Řekové neznali. (Polák, 2014)

α	1	ι	10	ϱ	100
β	2	κ	20	σ	200
γ	3	λ	30	τ	300
δ	4	μ	40	υ	400
ε	5	ν	50	φ	500
ς′	6	ξ	60	χ	600
ζ	7	o	70	ψ	700
η	8	π	80	ω	800
θ	9	ϙ′	90	ϡ′	900

Pokud bychom chtěli v této soustavě vyjádřit tisíce, užili bychom apostrof. Např. α', β', γ' tak značí 1000, 2000 a 3000. Velkým písmenem M se označovaly desetitisíce. Mimo jiné již v této době poukázal Archimédes na fakt, že neexistuje určité největší číslo.

Tento systém byl základem pro numerační soustavu Slovanů, kterou vytvořili Konstantin a Metoděj v 9. století pro svou misi na Moravu. Napsáním „titla“, tedy krátké vlnovky nad písmeno abecedy tak vzniklo číslo.

Početní výkony v této numeraci jsou obtížné, a proto patrně Řekové nevynikli v aritmetice na rozdíl od geometrie, kterou začali jako první budovat deduktivně. Římské číslice jsou dosud v užívání. Můžeme je vidět na budovách, na starých hodinách, při označování kapitol v knize či na pomnících. (Jelínek, 1974)

Římské číslice vznikly a postupně se vyvíjely v období antického Říma (1. stol. př. n. l. – 6. stol. n. l.). Jejich původní tvary měly zřejmě původ v počítání na prstech. Římské číslice byly prvotně určeny pro kupce, kulturní a umělecké účely (letopočty, kalendáře). Později až do současnosti byly upraveny do tvaru velkých písmen latinské abecedy, kterým se původní číslice podobaly: Znak I (s původem v jednom prstu) představuje číslo 1, znak V (připomínající roztaženou ruku) pro číslo 5, znak X (jako dvě pětky, dvě ruce) pro číslo 10, L pro 50, C pro 100 (lat. centum), D pro 500 a M pro 1 000 (lat. mille). (Polák, 2014)

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

Číslice se zapisovaly zleva doprava, a to podle velikosti čísel, které znázorňují. Např.

MDCCLXXXVIIII = 1789

Všimněme si zápisu čísla IIII – zde je zápis čísla tvořen pomocí sčítání. Až časem se začala částečně používat metoda odčítání.

Např. IIII = IV (tj. 5 minus 1),

XXXX = XL (tj. 50 minus 10)

Tento princip však může vést k nejasnostem. Tak např.

IVX se může rovnat 10 – 5 – 1 = 4 nebo 10 – 4 = 6.

Polák (2014) se dále zmiňuje o spojování a opakování základních symbolů, čímž vznikají zápisy dalších přirozených čísel. Soustava římských číslic je aditivní nepoziční číselná soustava a v nynější podobě je nestandardní v tom, že používá při zápisech čísel odečítání, když menší číslice předchází větší číslici, jak jsme si ukázali výše. Pro nulu Římané používali název nullae = „nic“, k jejímu označení však neměli žádný symbol.

Zdá se, že římská čísla po dlouhá léta bránila v rozvoji matematiky. K jejímu skutečnému rozmachu došlo až poté, co do Evropy dorazil důmyslný indický způsob počítání. (Ball, 2006)

3 POZIČNÍ NUMERAČNÍ SOUSTAVY

V předchozí kapitole jsme si popsali numerační soustavy kultur, které učinily výrazný pokrok. Lidé zařezávali různé číselné znaky do holí či kostí a nedělal jim větším problém tímto způsobem zapsat i větší čísla. Ovšem obtížnější bylo s nimi provádět různé početní úkony. V této kapitole se budeme věnovat pozičním číselným soustavám, ve kterých má každá číslice v zápisu čísla přesně vymezené místo.

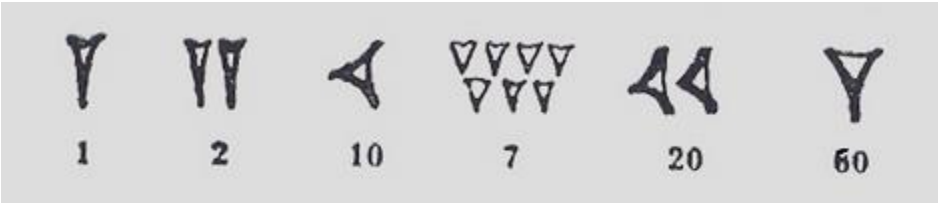
Poziční numerační soustavy jsou vybudovány na několika zásadách (Jelínek, 1974):

1. Při určování většího počtu prvků sdružujeme je do skupin s *n* prvky. Počet prvků v jedné skupině se nazývá základ soustavy.
2. Je-li těchto skupin více, sdružujeme je opět při stejném základu do větších skupin a v tomto sdružování pokračujeme podle potřeby.
3. V neúplných skupinách, které vznikají při každém dalším sdružování, je počet prvků menší než základ, podle kterého se sdružuje. Možné zbytky v těchto neúplných skupinách jsou označeny znaky, jež se nazývají číslice: 0, 1, 2, 3 až *n*-1. Počet číslic se rovná základu.
4. Nula je číslo, které označuje, že není žádný prvek ve skupině.
5. Význam znaku závisí na jeho pozici v zápisu čísla.
6. Velikost základu není rozhodující pro poziční soustavu. Například soustava o základu 10 je z matematického hlediska celkem náhodná a vznikla patrně proto, že máme deset prstů na rukou.

Vytvoření pozičních číselných soustav patří k nejvýznamnějším objevům v historii lidstva. Používaly se soustavy pětkové, desítkové, dvanáctkové, dvacítkové, šedesátkové a jiné. Zřejmě skutečnost, že člověk má na rukou deset prstů, způsobila, že v převážné většině civilizací byla vzata za základ soustava desítková. Každé malé dítě nás přesvědčí o její užitečnosti. Avšak zbytky některých nedesítkových soustav se udržely ve speciálních případech dodnes, např. šedesátková soustava při měření úhlů ve stupních, minutách a vteřinách, rovněž soustava se základem 60 při měření času v minutách a sekundách. Již jsme si tak zvykli na tyto soustavy, že přechod na desítkovou soustavu by byl v těchto konkrétních případech velmi obtížný. (Kopecký, 2002)

3.1 Numerace národů Mezopotámie

Znaky pro poziční numerační soustavu nesly již zápisy Babyloňanů - obyvatelé Mezopotámie, kteří žili na území dnešního Iráku přibližně před 5000 lety. Ti počítali nejen po desítkách, ale taky po šedesátkách. Číslo šedesát mělo pro ně stejný význam jako pro nás deset. Byli zvyklí užívat jen dvou cifer. A protože Babyloňané psali zaostřeným rydlem do hliněných destiček, které pak sušili a vypalovali, měly tyto tvar klínu. Svislý klín znamenal jednu jednotku, vodorovný klín pak desítku. (Folta, 1973)



Obr. 12 – Zápisy čísel v Mezopotámii [3]

V matematice dospěli babylónští učenci ještě dále než Egypťané. Po Sumerech převzali tento způsob zapisování čísel Babyloňané, kteří ovládli asi kolem roku 1800 př. n. l. celou Mezopotámii. Po nich se nazývá tento způsob zapisování čísel babylonský.

Mezopotámský způsob zápisů čísel však příliš nevyhovoval. Při záznamu dvěma znaky bylo nutno používat velké množství klínů. Když bylo číslo větší, docházelo asi často ke sporům, protože nebyl zvláštní znak pro řád šedesátek. Tak se třeba číslo 3600 vyjadřovalo stejně jako jednotka svislým klínem. Pro nejednoznačnost zápisů zavedli Babyloňané dva vodorovné klíny nad sebou, které značily prázdný řád a zjednodušilo tak čtení zápisu čísel. (Folta, 1973)

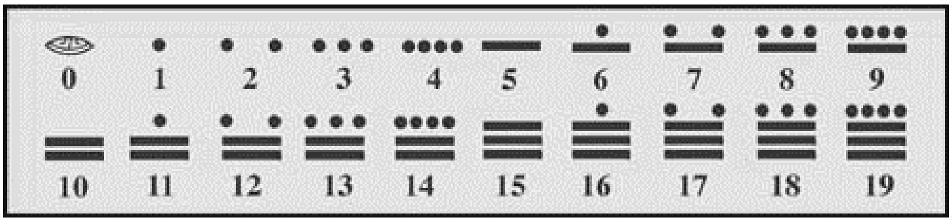
Babyloňanům chyběl znak pro „prázdné místo“ (tj. nulu). Teprve koncem první poloviny 1. tisíciletí př. n. l. byl tento znak zaveden (dva šikmé klíny), ale nebyl užíván na konci zápisu čísla. Početní operace sčítání a odčítání byly zřejmě prováděny snadno, pro násobení a dělení se užívaly tabulky součinů. (Polák, 2014)

Je zajímavé, že babylónské numerace používáme v některých případech až dosud. Například jak jsme již zmínili, pomocí soustavy o základě 60 měříme cykly a kruhy – minuta má 60 sekund, hodina 60 minut, kruh má 6 x 60 = 360 úhlových stupňů.

3.2 Numerace starých Mayů

Velmi zajímavou numerační soustavu měli Mayové, kteří pocházeli z dnešního Mexického poloostrova Yucatan. Počítali v soustavě o základu 20 a zřejmě k tomu používali prsty na rukou i na nohou. V této době byla kultura Mayů mnohem vyspělejší než kultura evropských národů. Například, dokázali si vést přesný kalendář a vypočítali, že rok má 365,242 dne. Jejich čísla připomínají fazole, dřívka a lastury – tedy předměty, s jejichž pomocí počítali. (Ball, 2006)

Mayové oproti obyvatelům Mezopotámie tedy měli číselnou soustavu o základu dvacet a kombinovali ji se soustavou o základu deset a s pozůstatky dřívější pětkové soustavy. Mayové používali pouze tři znaky (nula, jedna, pět). Znaky teček a čárek používali k vyjádření čísel od jedné do dvaceti (viz *obr. 13*).



Obr. 13 – Mayská dvacítková číselná soustava [4]

V této soustavě se čísla nezapisují do řádků, ale do sloupce zdola nahoru. Základní jednotky se v zápise objevují v základním bodě, a to dole. Nad jednotkami se vyskytují skupiny prvního řádu, druhého atd. - 20, $20^{2,}$ 20^3 jednotek.

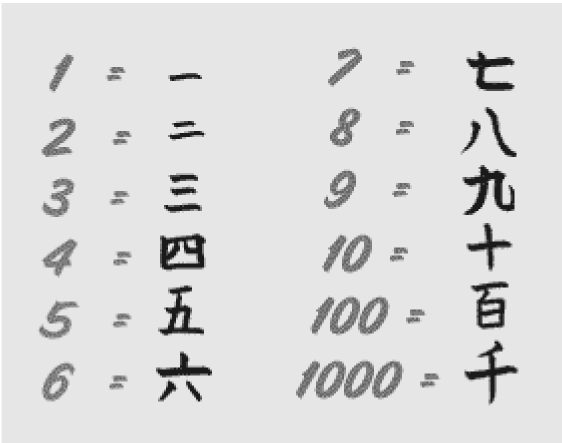
Na následujícím obrázku (*obr. 14*) můžeme vidět různé zápisy čísel větších než dvacet.

Obr. 14 – Zápisy několika čísel větších než 20 [5]

Jelikož záleželo na pozici znaků, byla tato soustava poziční. Navíc, jsou-li poznatky historiků správné, Mayové jsou zřejmě první, kteří ve své numerační soustavě používali znak pro nulu. Tu symbolizoval obraz mušle, případně uzavřené oko. Symbol pro nulu měl dva významy. První takový, že nula sloužila jako číslo (kardinální číslo prázdné množiny), druhý takový, kde nula figuruje jako číslice – znak pro prázdnou pozici. To je jeden z důkazů, že Mayové v této oblasti předčili například Římany, kteří ve stejné době používali k zápisu čísla složitou nepoziční soustavu.

3.3 Čínská numerace

Čínské číslice tradičního obrázkového písma vznikly ve starověké Číně v 2. tisíciletí př. n. l. a užívají se v omezené míře v Číně dodnes. Číňané vytvořili poziční desítkovou soustavu. Kromě číslic 1 až 9, měli znaky rovněž pro deset, sto a tisíc (*obr. 15).* Je-li pod číslicí znak „10“, pak kombinace těchto dvou znaků vyjadřuje číslo desetkrát větší apod. Tímto způsobem dostáváme tak druhý řád, a to desítky.



Obr. 15 – Čínské zápisy čísel [6]

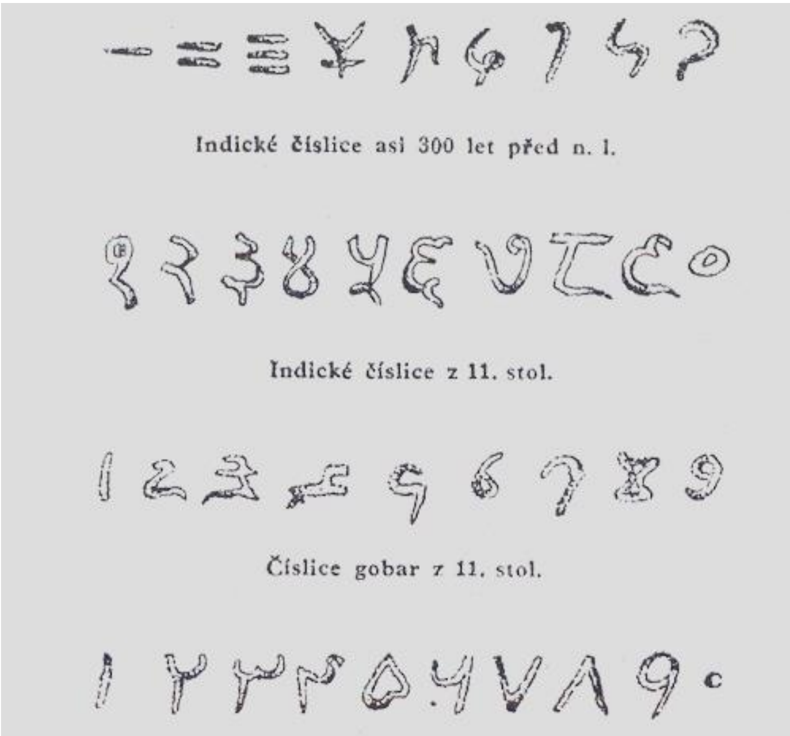
Číňané začali k zápisu čísel užívat svislé a vodorovné čárky (hůlky, tyčinky) a toto jejich vyjadřování se udrželo až do 13. stol. n. l.

Jedná se o nejstarší desítkovou poziční soustavu, která ovšem zpočátku nebyla důsledně poziční, neboť chyběl symbol pro nulu. Při počítání na početní desce příliš nevadilo, že symbol pro nulu neexistoval, protože odpovídající místo na desce zůstalo prázdné. Symbol pro nulu se do Číny později dostal z Indie, kde se v podobě tečky poprvé objevil v 8. století n. l. [7]

3.4 Indická numerace

Indie má starou numerickou tradici. Čísla jsou výrazným prvkem mnohých indických posvátných textů. Ve středověku se Indové zasloužili o zásadní rozvoj matematiky. Jednak si byli vědomi významem vědy, a taky poziční číselnou soustavou – způsobu zápisu a čtení čísel tak, jak ho známe i dnes. Byli to právě oni, kteří asi před 1500 lety na území dnešní Indie přišli s pozičním systémem. Jelikož měli Indičtí matematici vášeň pro počítání s velkými čísly, ocenili výhody sumersko – babylonské poziční soustavy, kterou dovedli do dokonalosti. To jim umožnilo provádět složité výpočty bez použití počítadla, pouze písemně.

Indické číslovky mají svůj původ v číslovkách písma *bráhmí* z 3. stol. př. n. l., které používalo čtyřicet pět znaků pro čísla od 1 do 90 000. Za nějaký čas si potřeby indických matematiků vynutily nový systém, který kombinoval názvy pro prvních devět číslic s mocninami deseti. Tak vznikly rychlé a elegantní početní postupy a způsob, jenž umožňoval zapisovat bez omezení i „velká“ čísla. (Lundy, 2011)

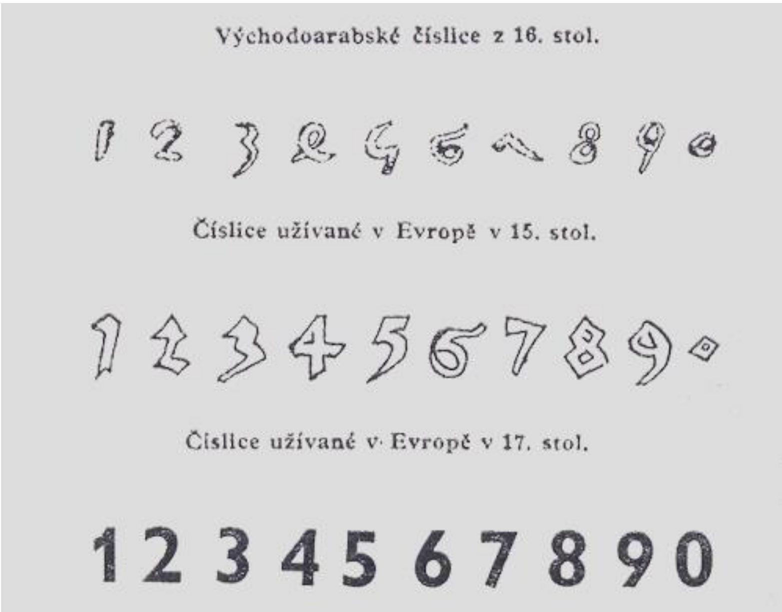


Obr. 16 – Proměna číselných zápisů v Indii [3]

Indové přišli s originálním způsobem vyjadřování, který byl pohodlnější a kratší. Rovněž v případě, kdy v číslech chyběl některý řád, například v číslech 103 nebo

1 033, pomohli si Indové s tím, že namísto názvu číslice (číslovky) vložili tzv. „prázdno“. Ovšem aby si byli jistí svým zápisem čísla, namísto tohoto „prázdného“ řádu dělali tečku, kterou později nahradili kroužkem, jenž měl ovšem stejný význam.

V podstatě se jednalo o symbol nuly. Tato dnešní číslovka je poměrně „mladá“ a pochází z latinského nullus, tedy žádný. Symbol pro nulu vynalezli lidé nezávisle na sobě minimálně třikrát. Babyloňané začali kolem roku 400 př. n. l. používat dva klíny obtištěné do hlíny jako symbol „prázdného místa“ v jejich soustavě o základě 60, tedy jako symbol, který znamenal „v tomto sloupci není žádné číslo“. Na druhé straně světa, téměř o tisíc let později, začali Mayové k témuž účelu užívat symbolu pro mušli. (Lundy, 2011)



Obr. 17 – Proměna číselných zápisů v Indii [3]

Podstatný význam má nula právě pro poziční soustavu. V zápisu číslovek závisí hodnota každé číslice v čísle na jejím umístění (pozici) v zápisu. Například jedna a táž číslice 3 označuje v čísle 306 – tři sta, v čísle 32 – třicet a v čísle 3 671 tři tisíce. Co z toho vyplývá? Znamená to, že pomocí pouhých deseti číslic můžeme zapsat libovolné jakkoli velké číslo, a je ihned zřejmé, co která číslice označuje. V 7. stol. indický matematik a astronom *Brahmagupta* slovně formuloval a zdůvodnil pravidla pro početní operace s nulou.

Indický poziční způsob zápisu čísel se brzy prokázal jako „patřičný“ pro počítání, to je taky jeden z důvodů, proč po postupné unifikaci této numerační soustavy ji dnes používá celý svět. Na *obr. 16* a *obr. 17* můžeme vidět výsledek proměn v dnešní číslice. Nazýváme je arabské číslice. (Folta, 1973)

Arabské číslice (v dnešní podobě 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) a na nich založená desítková poziční číselná soustava mají tedy původ v Indii, přesněji z období 400 př. n. l. – 400 n. l. Do Evropy se dostaly prostřednictvím arabských matematiků a astronomů, zejména díky latinskému překladu knihy arabského (perského) matematika *al-Chvárizmího: Počítání s indickými číslicemi* (napsané kolem roku 825). O jejich rozšíření v západní Evropě se zasloužil zejména italský matematik *Leonardo Pisánský (Fibonacci),* který je propagoval ve své knize *Liber abaci* (z roku 1202). (Polák, 2014)

3.5 Dekadická (desítková) numerační soustava

Všech přirozených čísel je nekonečný počet. Proto není možné, aby každé z nich bylo označeno úplně samostatným symbolem, neboť by nebylo možné se těmto ani naučit, a tím méně s nimi počítat. Všichni jsme se však již na základní škole naučili celkem jednoduchému způsobu, který nám umožňuje každé přirozené číslo zapsat užitím pouze desíti základních znaků (číslic, cifer): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (Mačát, 1971)

Základem desítkové číselné soustavy je číslo $z = 10$. Každé přirozené číslo se tedy dá v této numerační soustavě vyjádřit ve tvaru zkráceného pozičního zápisu nebo rozvinutého zápisu. Je tedy možno si vyjádřit každé přirozené číslo a právě jedním způsobem (název každého přirozeného čísla) ve tvaru:

$$(a)_{10} = a_n \,.\, 10^n + a_{n-1} \,.\, 10^{n-1} + \ldots + a_1 \,.\, 10^1 + a_0 \,.\, 10^0;\ a_n \neq 0. \qquad (1)$$

kde: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ jsou cifry; exponenty základu (0, 1, 2, …, n) udávají řád cifer – řád jednotek (10^0), desítek (10^1), stovek, tisíců atd.

Například číslo nazvané „dva tisíce čtyři sta šedesát pět“ je součtem dvou jednotek řádu třetího, čtyř jednotek druhého řádu, šesti jednotek prvního řádu a pěti jednotek řádu nultého.

$$(2\,465)_{10} = 2 \,.\, 10^3 + 4 \,.\, 10^2 + 6 \,.\, 10^1 + 5 \,.\, 10^0,\ a_3 = 2,\ a_2 = 4,\ a_1 = 6,\ a_0 = 5,$$

tj. taky: $2\,465 = 2 \,.\, 1\,000 + 4 \,.\, 100 + 6 \,.\, 10 + 5 \,.\, 1$

Každá číslice má v zápisu čísla svou hodnotu, která je určena svou pozicí v čísle (řádem). V rozvinutém zápisu čísla je ke každé číslici „připsán“ řád jednotky, kterou vyjadřuje, v pozičním zápisu je tato skutečnost vyjádřena umístěním číslice v zápisu čísla. (Jelínek, 1974)

Každé přirozené číslo vyjádřené mnohočlenem, je obecně možno zapsat v tomto zkráceném tvaru:

$$a = a_n\, a_{n-1}\, \dots\, a_1\, a_0. \tag{2}$$

V obou případech vyjadřují zápisy (1) a (2) totéž číslo.

Žáci se s principem dekadické soustavy seznamují již od 2. ročníku v rozšířeném oboru numerace do 100 tím, že prvky v souborech sdružují (seskupují) po deseti. Uvedená manipulativní činnost je ovšem proveditelná pouze s omezeným počtem předmětů: tím se vytváří představa jednotky a desítky (jako deseti jednotek), maximálně desítky a stovky (jako deseti desítek). Přitom si postupně osvojují základní pravidlo vyjádření přirozeného čísla v desítkové soustavě. Tento poznatek patří do souboru vědomostí a dovedností, které zahrnujeme do obsahu numerace. (Novák, 1999)

Do obsahu numerace dále dle Nováka (1988) patří seznámení žáků s chápáním pojmu přirozeného čísla, tj. seznámení s názvy čísel a s jejich kvantitativním významem, s uspořádáním čísel podle velikosti a se čtením a psaním čísel v desítkové soustavě.

V průběhu nácviku numerace se mají žáci naučit:

- znát a umět správně vyslovovat názvy čísel (číslovky, a to základní i řadové)
- chápat čísla jako abstraktní pojmy vyjadřující kvantitu, tj. počet prvků v množině (kardinální aspekt)
- chápat čísla jako členy přirozené posloupnosti čísel, v niž každé následující číslo je o jednotku větší než předcházející (ordinální aspekt)
- pochopit podstatu desítkové číselné soustavy a umět v této soustavě psát a číst čísla.

Uvědomělého pochopení pojmu přirozeného čísla jako základního matematického pojmu lze dosáhnout jen tehdy, má-li žák možnost poznávat a chápat všechny vlastnosti čísel, znát čísla z různých stránek.

Z pedagogických, psychologických i organizačních důvodů, zvláště se zřetelem k věkovým zvláštnostem žáků a k uplatňování zásady přiměřenosti, se poznatky z numerace přirozených čísel člení do číselných oborů, v jejichž rámci se žáci seznamují se základními početními výkony – sčítáním, odčítáním, násobením, dělením. (Novák, 1988)

Ve školské matematice se porovnávají dvě přirozená čísla:

1. Na základě porovnávání množin (tvořen dvojic prvků dvou množin, jejichž kvantita se porovnává).
2. Pomocí číselné osy (ze dvou čísel, znázorněných na číselné ose je menší než to, které je znázorněno vlevo, tj. blíže k počátku 0).
3. S využitím zápisu čísel v desítkové soustavě (porovnáním cifer od nejvyššího řádu).

Z matematického hlediska se jedná o relace „rovná se“, „je menší“ a „je větší“ v množině přirozených čísel.

3.6 Z-adická soustava

Úvahu, kterou jsme provedli v číselné soustavě o základě 10, můžeme opakovat pro kterékoli jiné přirozené číslo $z > 1$. (Podmínka $z > 1$ je nutná proto, abychom při dělení číslem z dostávali zbytek, který je menší než z.) Odtud dle Hrušy *et al.* (1976) vyplývá závěr:

Zvolíme-li libovolné, avšak pevné přirozené číslo $z > 1$, lze každé přirozené číslo a vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$a = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}, \qquad (3)$$

kde n je přirozené číslo a a_i jsou čísla z oboru přirozených čísel rozšířeného o nulu, která vyhovují nerovnostem $0 \leq a_i < z$, přičemž je $a_{n-1} \neq 0$.

Vyjádříme-li číslo a podle (3), říkáme, že jsme je vyjádřili v číselné soustavě o základu z; číslo z se nazývá základ číselné soustavy. K zapsání každého přirozeného čísla v číselné soustavě o základu z je třeba z různých znaků; každé z čísel

$$0, 1, 2, 3, \dots, z - 1$$

musí mít svůj zvláštní znak.

Je-li $z = 10$, dostáváme všeobecně používanou desítkovou soustavu, kterou jsme si představili v předchozí podkapitole. Vedle desítkové soustavy se v praxi vyskytují i zbytky jiných číselných soustav. Je to především soustava o základu 60 při údajích času nebo při měření úhlů. Základní jednotkou je vteřina neboli sekunda (časová nebo úhlová) a 60 těchto jednotek tvoří jednu jednotku vyššího řádu zvanou minuta (časová nebo úhlová), 60 minut pak tvoří hodinu nebo stupeň. Vyšších jednotek již neužíváme.

V této soustavě bychom měli mít 60 různých znaků, z nichž každý by znamenal jedno z čísel menších než 60. Abychom však vystačili s desíti číslicemi, na něž jsme zvyklí, zapisujeme i tady počet jednotek každého řádu způsobem obvyklým v desítkové soustavě. Podle toho tedy zapisujeme

$$3^{h}\,26^{m}\,18^{s},\ 23^{\circ}\,04'\,51''$$

apod. První zápis znamená, že jde o číslo mající 18 jednotek řádu 0 (sekund), 26 jednotek řádu 1 (minut) a 3 jednotky řádu 2 (hodiny), přičemž každá jednotka určitého řádu je šedesátkrát větší než jednotka řádu o 1 nižšího. Podobný význam má i druhý zápis. Připsané značky tedy značí řády v soustavě o základu 60.

4 PŘIROZENÉ ČÍSLO JAKO DIDAKTICKÝ POJEM

Elementárním matematickým pojmem na základní škole je pojem přirozeného čísla, jehož výuka je umístěna už do 1. ročníku. Pochopení tohoto pojmu je vybudováno na pojmu množina, který zde reprezentuje základní koncepci moderní matematiky. Paralelně s ním se zavádějí důležité a snadno pochopitelné logické pojmy jako rovnost, nerovnost, menší než, větší než a příslušnou symbolikou. Přesto však i početní technika zůstává podstatnou součástí matematického vyučování. Žáci se seznamují se čtyřmi základními početními výkony a jejich vlastnostmi. Seznamují se podrobněji s desítkovou číselnou soustavou. (Novák, 1988)

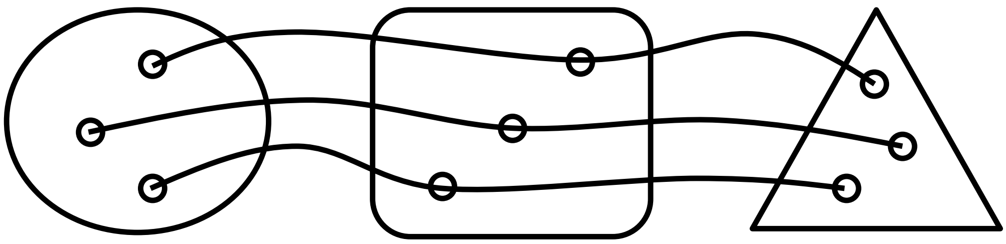
4.1 Vytváření pojmu přirozeného čísla

Ve větě: *„Ve čtvrté třídě základní školy jsou čtyři žáci, kteří mají čtyři známky z matematiky.“* se číslovka čtyři vyskytuje v několika významech. V didaktice matematiky lze pojem přirozeného čísla chápat dvojím podstatně odlišným způsobem (Novák, 1988):

1. Dvě množiny, které jsou navzájem ekvivalentní, mají totéž kardinální číslo. Kardinální číslo je tedy charakterizováno určitou množinou (např. teček na dominové kartě) a všemi ostatními množinami, které jsou s ní ekvivalentní, (nohy u židle, kola u automobilu, pomeranče na misce, talíře na stole,…). Kardinální číslo konečné množiny je přirozené číslo a se někdy taktéž nazývá mohutnost množiny.
2. Vycházíme z uspořádaných, resp. dobře uspořádaných množin, které jsou navzájem podobné a mají totéž ordinální číslo. Ordinální číslo je vyjádřeno dobře uspořádanou množinou (např. dní v týdnu) a všemi ostatními dobře uspořádanými množinami, které jsou s ní podobné (trpaslíci jdoucí za Sněhurkou, díly televizního seriálu, závodníci dobíhající do cíle, …).
3. Ordinální číslo konečné, dobře uspořádané množiny je tak přirozené číslo, vyjadřuje početnost množiny a nezáleží zde na tom, jaké prvky množina obsahuje.

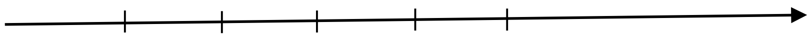
Dále také uvádí, že osvojení pojmu přirozeného čísla ve vývoji dítěte rozlišujeme na dva podobné směry:

- Postihování a chápání množství (bezprostřední percepce množství na základě skupinového vjemu) – souvisí s ekvivalencí množin, vede ke kardinálnímu pojetí (*obr. 18)*:



Obr. 18 – Kardinální pojetí pojmu přirozeného čísla

- „Počítání“ prvků v číselné řadě (první, druhý, třetí, …), předpokládající následující uspořádání – vede k ordinálnímu pojetí:



1 < 2 < 3 < 4 < 5 …….

Postupné vytváření abstraktního pojmu přirozeného čísla jsou jednotlivé předměty (prvky množin) a manipulování s nimi.

Můžeme si uvést příklad, kdy padne hráči při společenské hře „Člověče, nezlob se“ na hrací kostce „šestka“ (počet očí na příslušné stěně hrací kostky eviduje jediným pohledem) a posune figurku na hracím plánu o 6 polí kupředu za případného slovního doprovodu „jedna, dvě, tři, čtyři, pět, šest“ (počítání po jedné). Uvedený příklad demonstruje vzájemnou souvislost „kardinálního“ i „ordinálního“ pojetí přirozeného čísla. (Novák, 1999)

Během vytváření pojmu přirozeného čísla dochází k vzájemnému propojení těchto dvou interpretací – dítě pochopí, že počet prvků dané množiny je zároveň pořadím posledního prvku. Je proto důležité nezůstat jen u kardinální interpretace přirozených čísel, jelikož vytváří pouze omezenou představu.

Francouzský psycholog Piaget, který se dlouhodobě zabýval kognitivním vývojem, je toho názoru, že děti používají slova – číslovky bez porozumění, umí sice zjistit počet prvků dané množiny, ale nerozumí postupu. Abychom mohli mluvit o porozumění, musely by děti chápat kardinální a ordinální přístup k pojmu čísla.

Z výsledků svých experimentů Piaget [8] odvozuje, že děti nerozumějí své činnosti – nechápou přiřazení „jedná k jedné“ (zachování) a tranzitivnost. Jsou známy tři experimenty (Greco a Piaget):

a) Děti porovnávají dvě identické množiny, následně se jedna z množin pozmění (jsou přidány, nebo odebrány prvky množin) a děti mají opět za úkol porovnat početnosti těchto množin.
b) Děti porovnávají dvě identické množiny. Jedna z množin je pozměněna a děti mají určit „počítáním“ po jedné počet prvků jedné z těchto dvou množin, načež mají určit počet prvků i druhé množiny.
c) Třetí úkol je opět podobný. Děti mají sečíst prvky dvou množin a říci, zda jsou stejně mohutné (mají stejný počet prvků).

Piaget dále rozlišuje dětské chápání kvantity ve dvou stupních:

a) „quotité“ – děti zjistí, že dvě množiny mají stejný počet prvků, protože sčítání prvků množin vede ke stejnému „slovu“, ale v první fázi považují mohutnější množinu tu, která zabírá větší prostor
b) „quantité“ – dětské odpovědi jsou správné a nezávisí na pozorovatelných nerelevantních transformacích

Jiné výsledky mají např. Gelman a Gallistel, kteří formulovali pět základních principů. Podle jejich interpretace [8], děti dovedou provádět různé početní operace už ve 2 – 3 letech:

1. „Počítáním“ prvků po jedné, dítě chápe, že se každý objekt může použít právě jednou. (U Piageta „princip jedna k jedné“, což znamená porovnávání ekvivalentních množin.)
2. Princip stabilního pořadí – každý „počítá“ prvky množiny vždy ve stejném pořadí.
3. Kardinální princip – poslední vyslovené slovo znamená konečný počet prvků množiny (přirozené číslo).
4. Princip abstrakce – počet je nezávislý na prvcích – dítě je schopné zjistit počet prvků u heterogenních skupin.
5. Počet nezávisí na pořadí prvků, ve kterém „počítáme“.

4.2 Matematický model přirozeného čísla

Novák (1999) uvádí, že ontogenetická cesta ke skutečnému chápání přirozeného čísla je dlouhá a nesnadná, jak bylo potvrzeno mnoha teoretickými analýzami a empirickými výzkumy.

V tomto procesu je možno rozlišit čtyři etapy (Hejný, 1989):

1. První představy spojené s mnohostí (kvantitou, početností), které dítě získá, mají předmětný charakter. Dítě rozlišuje tři bonbony, tři jablka, tři auta, tři zlaté vlasy Děda Vševěda, tři prince z pohádky – ale neví, co je to „tři“ samo o sobě. Na prvcích jednotlivých (tříprvkových) souborů si všímá kvalitativních znaků, tvaru, barvy, velikosti, tedy toho, jaké jsou prvky souborů, nikoliv kolik jich je. Jednotlivé konkrétní, předmětné představy existují ve vědomí dítěte oddělené, separované. Jablka na misce představují „něco jiného“ než židle u stolu, i když je jich „stejně“, stejný počet. Ve vědomí žáka se tvoří synkretická představa (před-pojem) jako soubor separovaných modelů budoucího pojmu přirozeného čísla.

2. Vyšší úroveň představuje etapa, kdy dítě začíná evidovat kvantitu. Nepotřebuje konkrétní předměty (bonbony, jablka, auta, pohádkové bytosti), stačí mu např. prsty nebo kuličky na počitadle. Ukáže tolik prstů, kolik je na misce jablek (3) anebo kolik je před domem aut (3). Prsty nebo kuličky na počitadle nebo tečky na hrací kostce jsou jeho univerzálním modelem kvantity, který je pojmem na intuitivní úrovni. Charakteristickým znakem pojmu na intuitivní úrovni je jeho vícevýznamovost – citlivost na různé kontexty, v nichž nabývá různých významů.

3. Je třeba ještě mnoho zkušeností, času i energie k přechodu k etapě poznatku, která je vyvrcholením poznávacího, pojmotvorného procesu, interiorizací (zvnitřněním) dosavadních představ a zkušeností – abstraktního pojmu přirozeného čísla. Významným průvodním jevem této fáze osvojování je užívání specifického jazyka k označování pojmu čísla, matematické terminologie a symboliky. Teprve zde má smysl označovat kvantitu (číslo) speciálním znakem, symbolem – číslicí (cifrou), nebo skupinou cifer, „pojmenovat“ ji nějakým termínem. Slovo „tři“ (číslovka základní) nebo „třetí“ (číslovka řadová), nebo znak „3“, které vyslovíme při pojmenování čísla,

nebo napíšeme na papír, není číslo, ale pouze dohodnutý způsob vyjádření, zápis tohoto čísla. Numerace (tj. způsob pojmenování a zapisování čísel, jejich porovnávání, uspořádání podle velikostí, resp. umístění čísla v číselné řadě apod.), a počítání s čísly (početní výkony, operace s nimi) umožňují pojem přirozeného čísla dále zpřesňovat, precizovat, zařazovat do poznatkových systémů, což charakterizujeme jako etapu krystalizace.

4. Krystalizace – dítě se učí abstraktní pojem používat, aplikovat, při řešení situací a úloh matematického i zcela praktického charakteru, v životní praxi. Výsledkem je pak přesná definice (nebo soubor přesných definic) pojmu přirozeného čísla.

Žákovo učení, jeho proces poznávání, osvojování matematických poznatků, bývá označováno jako aktivní, záměrný, sociální proces konstruování významů z předložených informací a nabytých zkušeností. (Hejný, 1990)

ZÁVĚR

„Přirozená čísla jsou od Boha. Všechno ostatní v matematice je dílem lidským."
(L. Kronecker)

Cílem této bakalářské práce bylo zpracovat přehlednou studii o pojmu přirozeného čísla, jeho numeraci a numeračních soustavách tak, aby z ní bylo patrné a zřetelné, jak se v daných soustavách orientovat. Přiblížit čtenářům vývoj numeračních soustav od historie až po současnost a seznámit je s tím, jak se zapisovala čísla i před zavedením dnešních arabských číslic.

V závěru této práce je pozornost věnována pojmu přirozeného čísla z didaktického pohledu. Jedná se o vytváření pojmu přirozeného čísla u žáků 1. stupně základních škol a převedení těchto poznatků do vyučování.

Věřím, že prostudování této práce poskytne čtenářům ucelený pohled na numerační soustavy a seznámí se rovněž s rozdíly mezi poziční a nepoziční numerační soustavou.

ANOTACE

Bakalářská práce „Numerace přirozeného čísla“ pojednává o historii zápisu čísel od jeho počátku až do současné doby. Seznamuje s jednotlivými fázemi jeho vývoje, vznikem nepozičních a pozičních numeračních soustav v různých kulturách a připomíná problematiku zápisu čísel. Závěrečná část informuje o didaktických postupech vzniku pojmu přirozeného čísla u žáků 1. stupně základních škol a možnostech využití těchto poznatků ve vyučování.

KLÍČOVÁ SLOVA

Matematika, přirozené číslo, numerace, kardinální číslo, ordinální číslo, numerační soustava, pojem, didaktika, poziční, nepoziční, množina

ABSTRACT

The bachelor thesis „Numeracy of natural numbers“, deals about history of notation from his beginning until now. It introduces with single phases of his evolution, creation un-positional and positional numeration systems in different cultures and reminds issue of notation. The final part of thesis informs about didactic practices creation of concept of natural numbers for pupils of first degree in primary school and use that findings in teaching.

KEYWORDS

Mathematics, natural numbers, numeration, cardinal number, ordinal number, numeration system, concept, didactics, positional, un-positional, set

LITERATURA

1. BALL, Johnny. *Mysli si číslo: Fascinující pohled do světa čísel.* Praha: SLOVART, 2006. ISBN 80-7209-801-2.
2. BENTLEY, Peter J. *Kniha o číslech*. Praha: Rebo Production, 2013. ISBN 978-80-255-0649-3.
3. BLAŽEK, Jaroslav. *Algebra a teoretická matematika: 1. díl*. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-514-83.
4. DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ.* 1. vyd. Praha: SPN, 1989. 269 s. Učebnice pro vysoké školy (SPN). ISBN 80-04-20433-3.
5. EBEROVÁ, Jindřiška a Anna STOPENOVÁ. *Matematika I.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1997. ISBN 80-7067-740-6.
6. EBEROVÁ, Jindřiška. *Základy matematiky 2: pro studenty učitelství 1. stupně ZŠ.* 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003, 62 s. Skripta (Univerzita Palackého). ISBN 80-244-0759-0.
7. EBEROVÁ, Jindřiška. *Základy matematiky 4.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2005. ISBN 80-244-1070-2.
8. FOLTA, Jaroslav. *Svět čísel: Vyprávění o matematice.* Praha: SPN, 1973.
9. FREGE, Gottlob. *Logická zkoumání a základy aritmetiky*. Praha: Oikoymenh, 2012. ISBN 978-80-7298-319-3.
10. HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Vyd. 1. Praha: Portál, 2001, 187 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8581-4.
11. HEJNÝ, Milan. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Editor Milan Hejný, Jarmila Novotná, Naďa Vondrová. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2004, viii, 212 s. ISBN 80-7290-189-3.
12. HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky.* 2. vyd. Bratislava: SPN, 1990, 554 s. ISBN 80-0801-344-3.
13. HRUŠA, Karel. *Základy moderní matematiky pro učitele 1. - 5. ročníku ZDŠ.* Vyd. 3. Praha: Stántí pedagogické nakladatelství, 1975, 159 s.
14. HRUŠA, Karel, Zbyněk DLOUHÝ a Josef MENCL. *Aritmetika a algebra pro pedagogické fakulty.* I. Aritmetika. Praha: SPN, 1976.

15. JELÍNEK, Miloš. *Množiny 1.* Vyd. Praha: SPN, 1973, 133, [1] s. Nové směry ve školské matematice.
16. JELÍNEK, Miloš. *Numerační soustavy 3*. 1. vyd. SNTL, 1974, 127 s.
17. JELÍNEK, Miloš. *Relace a funkce.* 1. vyd. Praha: SPN, 1974, 179 p.
18. KOPECKÝ, Milan. *Aritmetika*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2002. ISBN 80-244-0546-6.
19. KROBOTOVÁ, Milena a Drahomíra HOLOUŠOVÁ. *Diplomové a závěrečné práce*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci. Pedagogická fakulta, 2002. ISBN 80-244-0458-3.
20. LUNDY, Miranda. *Posvátná čísla.* 1. vyd. v českém jazyce. Překlad Stanislav Pavlíček. Praha: Dokořán, 2011, 66 s. Pergamen, sv. 6. ISBN 978-80-7363-390-5.
21. MAČÁT, M. *Číselné soustavy.* Praha, 1971, 142 s.
22. NOVÁK, Bohumil a Jindřiška EBEROVÁ. *Kapitoly z didaktiky matematiky I.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1988.
23. NOVÁK, Bohumil. *Matematika III.: Několik capitol z didaktiky matematiky.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1999. ISBN 80-7067-979-4.
24. NOVÁK, Bohumil. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 1 pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2003. ISBN 80-244-0691-8.
25. PERNÝ, Jaroslav. *Kapitoly z elementární aritmetiky I.* Vyd. 1. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2010, 81 s. ISBN 978-80-7372-698-0.
26. POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2014, 431 s. ISBN 978-80-7238-449-5.
27. RUSSELL, Bertrand a Alfred N. WHITEHEAD. *Principles of Mathematics*. [New ed.]. Hoboken: Taylor, 2009. ISBN 02-038-6476-X.

INTERNETOVÉ ZDROJE

1. http://library.upol.cz/arl-upol/cs/csg/?repo=upolrepo&key=8603013343
2. http://www.historyofinformation.com/expanded.php?id=2338
3. http://geneze.info/pojmy/subdir/historie_cisel.htm
4. https://aztli.wordpress.com/2009/02/20/nazvy-cislovek-ve-stredoamerickem-mayskem-jazyce-a-zpusob-uziti-a-jejich-zapisovani-names-of-numerals-in-the-central-america%C2%B4s-maya%C2%B4s-language-and-method-of-utilisation-and-theirs-notatio/
5. http://cestuji.info/mexiko/mayove.html
6. http://stuweb.iszl.ch/resources/external/grade_5/ancient_numbers/maths_ma1.html
7. http://black-hole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/10/V%C3%BDvoj-%C4%8D%C3%ADseln%C3%BDch-soustav.pdf
8. http://www.eamos.cz/amos/kat_mat/externi/kat_mat_2951/Pojem_cislo.doc