U N I V E R Z I T A   P A L A C K É H O   V   O L O M O U C I

P E D A G O G I C K Á   F A K U L T A

K A T E D R A   M A T E M A T I K Y

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

GEOMETRICKÝ VÝZNAM TOTÁLNÍHO DIFERENCIÁLU

PETRA NEMCOVÁ

3. ročník – prezenční studium

Matematika se zaměřením na vzdělávání – Přírodopis se zaměřením na vzdělávání

Olomouc 2014 Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.**

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením paní doc. RNDr. Jitky Laitochové, CSc. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci 15.4. 2014

Poděkování

Ráda bych poděkovala paní doc. RNDr. Jitky Laitochové, CSc., za odborné vedení, rady a čas, který mi věnovala během konzultací.

Obsah

Úvod

Tématem bakalářské práce je Geometrický význam totálního diferenciálu.

Cílem bakalářské práce je ukázat Geometrický význam totálního diferenciálu a také na příkladech ukázat využití totálního diferenciálu.

Mnoho lidí si neuvědomuje, že totální diferenciál můžeme využívat i v běžném životě, např. při zjišťování změny velikosti rozměrů tělesa a následně změně objemu tohoto tělesa či při zjišťování absolutních a relativních chyb.

Bakalářská práce je rozdělena na čtyři kapitoly.

První kapitola se zaměřuje na parciální derivace. Tato kapitola je velmi důležitou částí bakalářské práce a je nezbytná pro pochopení dalších kapitol. Kapitola je rozdělena na dvě podkapitoly a to na podkapitolu parciálních derivací prvního řádu a podkapitolu parciálních derivací vyšších řádů. V obou podkapitolách jsou uvedeny jak definice a věty důležité pro pochopení dané problematiky, tak i řešené ukázkové příklady pro snadnější pochopení. Příklady se zaměřují na výpočet parciálních derivací jak všech proměnných, tak i příklad na výpočet konkrétní parciální derivace vyššího řádu.

Druhá kapitola řeší totální diferenciál. Opět je kapitola rozdělena na dvě podkapitoly a to na podkapitolu totálního diferenciálu prvního řádu a podkapitolu totálního diferenciálu vyšších řádů. I zde jsou zařazeny ukázkové řešené příklady.

Třetí kapitola ukazuje geometrický význam totálního diferenciálu. Na obrázku je pak geometrický význam jasně znázorněn.

Obsahem poslední, čtvrté, kapitoly jsou vybrané aplikace totálního diferenciálu. Setkáváme se zde s podkapitolou, která ukazuje, jak vypočítat přibližnou hodnotu výrazu bez použití kalkulačky. Další podkapitola ukazuje několik příkladů na výpočet rovnic rovin a normál. Obsahem třetí podkapitoly jsou tzv. příklady z praxe, tedy příklady, se kterými bychom se mohli setkat i v reálném životě.

V bakalářské práci jsou řešeny vybrané příklady ze Sbírky úloh a cvičení z matematické analýzy od B.P. Děmidoviče

Bakalářská práce je doplněna grafy funkcí, které jsou vytvořené v programu *Gnuplot.* Tento program jsem si vybrala, jelikož je volně dostupný.

Seznam použitého značení

R	množina reálných čísel
$\mathbf{R}^{n}$	kartézský součin $\underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n-krát}$
D_f	definiční obor funkce *f*
$D_{f'_x}$	definiční obor parciální derivace funkce *f* podle proměnné *x*
$D_{f''_{xx}}$	definiční obor parciální derivace druhého řádu funkce *f* podle proměnných *xx*
$D_{f''_{xy}}$	definiční obor smíšené parciální derivace funkce *f* podle proměnných *xy*
$f'_x\,(x, y)$	parciální derivace funkce *f* podle proměnné *x*
$f''_{xx}\,(x, y)$	parciální derivace druhého řádu funkce *f* podle proměnných *xx*
$f''_{xy}\,(x, y)$	smíšené parciální derivace funkce *f* podle proměnných *xy*
$\mathrm{d}f\,(x, y)$	totální diferenciál prvního řádu funkce *f* v bodě (x, y)
$\mathrm{d}f\,(A)$	totální diferenciál prvního řádu funkce *f* v bodě $A = (x_0,\ y_0)$
$d^2f\,(x, y)$	totální diferenciál druhého řádu funkce *f* v bodě (x, y)
$\mathrm{d}^2f\,(A)$	totální diferenciál druhého řádu funkce *f* v bodě $A = (x_0,\ y_0)$

Vzorce pro výpočet derivací

Při výpočtech parciálních derivací se využívají vztahy jako pro výpočet derivace funkce jedné proměnné.

Uvedeme základní vzorce:

Funkce	**Derivace funkce**	**Podmínky**
c (c je konstanta)	0	$c \in \mathbf{R}$
$\boldsymbol{x}$	1	$x \in \mathbf{R}$
$\boldsymbol{x^{\alpha}}$	$\alpha\, x^{\alpha - 1}$	$\alpha \in \mathbf{R}, x > 0$
$\boldsymbol{a^{x}}$	$a^{x} \ln a$	$x \in \mathbf{R}, a > 0$
$\boldsymbol{e^{x}}$	e^{x}	$x \in \mathbf{R}$
$\boldsymbol{\log_a x}$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0, a > 0, a \neq 1$
$\boldsymbol{\ln x}$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\boldsymbol{\sin x}$	$\cos x$	$x \in \mathbf{R}$
$\boldsymbol{\cos x}$	$-\sin x$	$x \in \mathbf{R}$
$\boldsymbol{tg\, x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
$\boldsymbol{cotg\, x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$
$\boldsymbol{\arcsin x}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\boldsymbol{\arccos x}$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\boldsymbol{arctg\, x}$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$x \in \mathbf{R}$
$\boldsymbol{arccotg\, x}$	$-\frac{1}{1 + x^2}$	$x \in \mathbf{R}$

1 Parciální derivace

1.1 Parciální derivace 1. řádu

Nejdříve uvedeme základní definice, vlastnosti a vztahy pro výpočet parciálních derivací funkce podle proměnných *x* a *y*.

V této práci nejsou uvedeny všechny definice a věty, které se týkají diferenciálního počtu funkce dvou a více proměnných. Jsou zde uvedeny jen ty, které budou potřebné k výpočtům v další části bakalářské práce.

V této kapitole budou citovány definice a věty z [3], [5] a [8].

Definice 1 *Nechť funkce f :* $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *je definovaná v bodě* $[x_0, y_0]$ *a nějakém jeho okolí. Položme* $\varphi(x) = f(x, y_0)$. *Má – li funkce* φ *derivaci v bodě* x_0*, nazýváme tuto derivaci* ***parciální derivací funkce f podle proměnné x*** *v bodě* $[x_0, y_0]$ *a označujeme* $f_x(x_0, y_0)$*, event.* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), f_x'(x_0, y_0)$.

To znamená, že

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Podobně, má – li funkce $\psi(x) = f(x_0, y)$ *derivaci v bodě* y_0*, nazýváme tuto derivaci parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě* $[x_0, y_0]$ *a označujeme* $f_y(x_0, y_0)$*, event.* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0)$.

Poznámka 1 *Při výpočtu parciální derivace derivujeme danou funkci jako funkci jedné proměnné (vzhledem k té, ke které máme vypočítat derivaci). Ostatní proměnné současně považujeme za konstanty.*

Věta 1 *Nechť funkce f, g :* $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *mají parciální derivaci podle proměnné* x_i*,* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$*, na otevřené množině M. Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl má na M parciální derivaci podle* x_i *a platí*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x) \pm g(x)] = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \pm \frac{\partial}{\partial x_i} g(x), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f\,(x)\,g\,(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x_i}\,f\,(x)\,g\,(x) + \frac{\partial}{\partial x_i}\,g(x)\,f\,(x), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f\,(x)}{g\,(x)}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f\,(x)\,g\,(x) - f\,(x)\frac{\partial}{\partial x_i} g(x)}{g^2\,(x)}, \tag{1.3}$$

přičemž tvrzení o podílu derivací platí jen za předpokladu, že $g\,(x) \neq 0$.

Důkaz: Důkaz této věty je možný najít v [5].

1.1.1 Řešené ukázkové příklady

Spočítejte první parciální derivace funkce *f.*

Příklad 1

$f\ (x, y) = 3x^2 + 4y - 2xy$

Řešení

Nejprve určíme definiční obor této funkce, což jsou všechna reálná čísla - $D_f = \mathbf{R}^2$.

Nyní si spočítáme parciální derivaci funkce *f* podle proměnné *x*, proměnná *y* je pro nás tedy v tomto případě konstantou. Jak již bylo zmíněno dříve, při parciálních derivací užíváme vzorce jako pro derivování funkce jedné proměnné. V tomto případě použijeme vzorce dva, a to vzorec $(\boldsymbol{x^{\alpha}})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ a derivaci konstanty $(\boldsymbol{c})' = 0$ a využijeme vztahu (1.1) z věty 1.

Použitím těchto vzorců dostaneme:

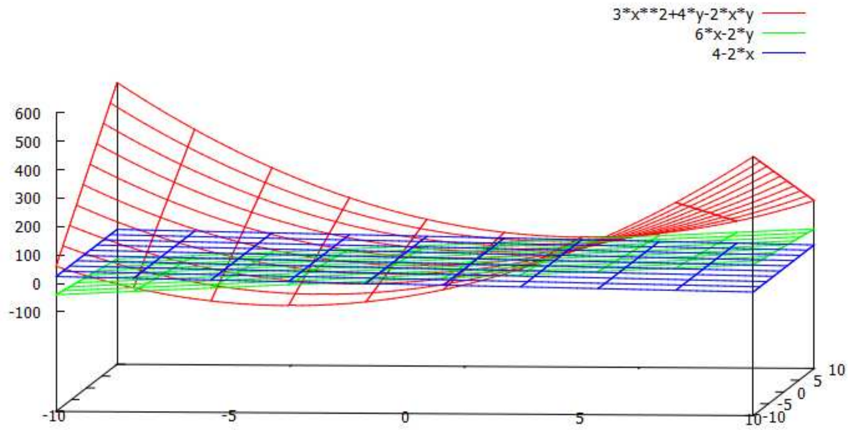
$f_x'\ (x, y) = 3 \cdot 2 \cdot\ x^1 + 0 - 2 \cdot 1 \cdot y = 6x - 2y$

Jako druhou si spočítáme parciální derivaci funkce *f* podle proměnné *y.* Nyní proměnná *x* bude konstanta. Využijeme stejných vzorců jako v předešlém parciálním derivování.

$f_y'\ (x, y) = 0 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot x \cdot 1 = 4 - 2x$

Definičním oborem parciální derivace funkce *f* podle proměnné *x* je $D_{f_x'} = \mathbf{R}^2$

Definičním oborem parciální derivace funkce *f* podle proměnné *y* je $D_{f_y'} = \mathbf{R}^2$.



Obr 1: Graf funkce $f\ (x,y) = 3x^2 + 4y - 2xy$ (červeně) a prvních parciálních derivací této funkce (podle proměnné *x* – zeleně a podle proměnné *y* – modře)

Příklad 2

$f\ (x,y) = \ \sin x \cdot \ \cos y$

Řešení

Opět si nejprve určíme definiční obor $D_f = \ \mathbf{R}^2$

Spočítáme parciální derivaci funkce *f* podle proměnné *x*, proměnná *y* je pro nás tedy v tomto případě konstantou. V tomto případě použijeme vzorec $(\sin x)' = \cos x$, $\cos y$ je pro nás konstanta. Použitím těchto vzorců dostaneme:

$f_x'\ (x,y) = (cos\ \ x) \cdot \ (\cos y)$

Při výpočtu parciální derivace funkce *f* podle proměnné *y* musíme znát vzorec $(cos\ y)' = \ -sin\ y$, $\sin x$ je konstanta.

$f_y'\ (x,y) = (sin\ x) \cdot \ (-sin\ y)$

Definičním oborem parciální derivace funkce *f* podle proměnné *x* je $D_{f_x'} = \ \mathbf{R}^2$

Definičním oborem parciální derivace funkce *f* podle proměnné *y* je $D_{f_y'} = \ \mathbf{R}^2$.

Příklad 3

$$f\ (x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2\ +\ y^2}}$$

Řešení

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2\ +\ y^2 > 0\}$$

Jako první spočítáme parciální derivaci funkce *f* podle proměnné *x*, proměnná *y* je pro nás tedy v tomto případě konstantou. V tomto případě použijeme vzorec $(\boldsymbol{x^{\alpha}})' = \alpha x^{\alpha-1}$ a využijeme vztahu (1.3) z věty 1.

Použitím těchto vzorců dostaneme:

$$f_x'(x,y) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2\ +\ y^2} - x\ \cdot\ \frac{1}{2}\cdot(x^2 +\ y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\ 2x}{x^2\ +\ y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2\ +\ y^2} - x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2\ + y^2}}}{x^2\ +\ y^2} = \frac{x^2 + y^2\ -\ x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cdot\frac{1}{x^2\ +\ y^2} =$$

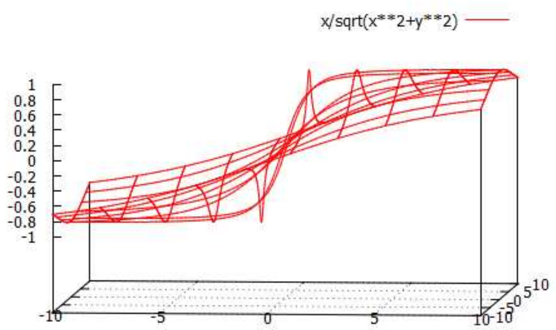
$$= \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}\cdot(x^2 +\ y^2)}$$

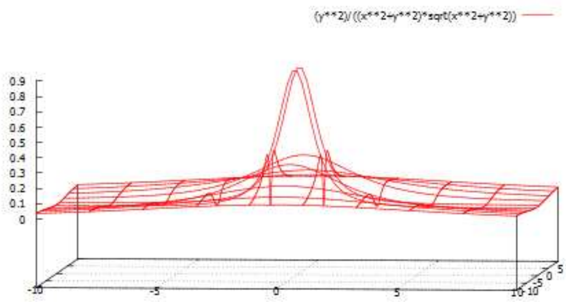
Jako druhou spočítáme parciální derivaci funkce *f* podle proměnné *y*, proměnná *x* je tedy v tomto případě konstantou.

$$f_y'(x,y) = \frac{0\cdot\sqrt{x^2\ +\ y^2} - x\ \cdot\ \frac{1}{2}\cdot(x^2 +\ y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\ 2y}{x^2\ +\ y^2} = \frac{-xy\ \cdot\ \frac{1}{\sqrt{x^2 +\ y^2}}}{x^2 +\ y^2} =$$

$$= \frac{-xy}{\sqrt{x^2 +\ y^2}\cdot(x^2 +\ y^2)}$$

$$D_{f_x'} = D_{f_y'} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2\ +\ y^2 > 0\}$$





Obr 2: Graf funkce $f\ (x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2\ + y^2}}$ (vlevo) a její první parciální derivace podle proměnné x (vpravo)

<u>Příklad 4</u>

$$f\ (x, y) = x \cdot y^2\ \ \cdot arctg\ \left(\frac{y}{x}\right)$$

Řešení

$D_f\ = \{(x, y) \in\ \mathbf{R}^2 \colon x \neq 0\ \}$

V tomto případě využijeme vzorec $(arctg)^{\prime} = \frac{1}{1+x^2}$ a vztahu (1. 2).

$$f_x^{\prime}\ (x, y) =\ y^2 \cdot arctg\ \left(\frac{y}{x}\right) +\ xy^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot\ (-1) \cdot \frac{y}{x^2} =$$

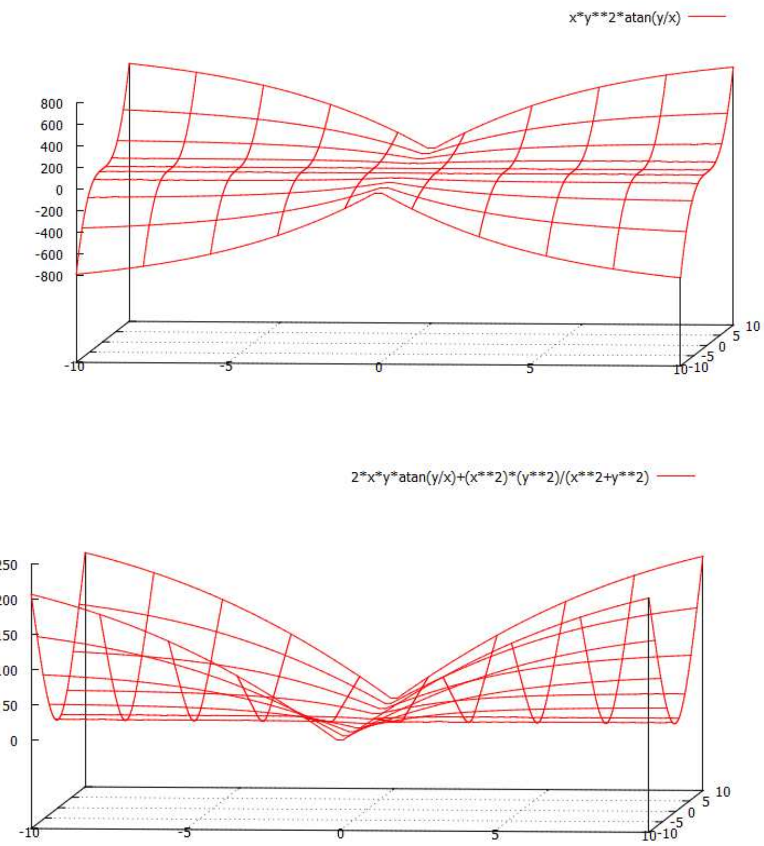
$$=\ y^2 \cdot arctg\ \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x} \cdot \frac{1}{\frac{x^2\ +\ y^2}{x^2}}\ =\ y^2 \cdot arctg\ \frac{y}{x} -\ \frac{y^3}{x} \cdot\ \frac{x^2}{x^2\ +\ y^2} =$$

$$=\ y^2 \cdot arctg\ \frac{y}{x} - \frac{y^3 x}{x^2\ +\ y^2}$$

$$f_y^{\prime}\ (x, y) =\ 2\, y\, x\ arctg\ \frac{y}{x} +\ x\ \cdot y^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot x \cdot y\ \cdot arctg\ \frac{y}{x} + \frac{y^2}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} =$$

$$= 2 \cdot x \cdot y \cdot\ arctg\ \frac{y}{x} + y^2 \cdot \frac{x^2}{x^2\ +\ y^2} = 2xy \cdot\ arctg\ \frac{y}{x} + \frac{x^2 y^2}{x^2\ +\ y^2}$$

$D_{f_x^{\prime}}\ = D_{f_y^{\prime}}\ = \{(x, y) \in\ \mathbf{R}^2 \colon x \neq 0;\ x^2\ \ +\ y^2 \neq 0\ \}$



Obr 3: Graf funkce $f\ (x, y) = x \cdot y^2\ \cdot arctg\ \left(\frac{y}{x}\right)$ (nahoře) a první parciální derivace podle proměnné *y* (dole)

1.2 Parciální derivace vyšších řádů

Definice 2 *Nechť* $[x_0, y_0] \in D\ (f_x)$. *Existuje – li parciální derivace funkce* $f_x\ (x, y)$ *podle proměnné x v bodě* $[x_0, y_0]$, *nazýváme tuto derivaci* ***parciální derivací 2. řádu*** *podle x funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ *a značíme ji* $f_{x\,x}(x_0, y_0)$, *event.* $\frac{\delta^2 f}{\delta\, x^2}(x_0, y_0)$.

Existuje – li parciální derivace funkce $f_x\ (x, y)$ *podle proměnné y v bodě* $[x_0, y_0]$, *nazýváme tuto derivaci* ***smíšenou parciální derivací 2. řádu*** *podle x funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ *a značíme ji* $f_{x\,y}(x_0, y_0)$, *event.* $\frac{\delta^2 f}{\delta\, x\, \delta\, y}(x_0, y_0)$.

Poznámka 2 *Obdobně definujeme parciální derivace 2. řádu ji* $f_{y\,x}(x_0, y_0)$ *a ji* $f_{y\,y}(x_0, y_0)$. *Parciální derivace n – tého řádu*$(n\ \geq 3)$ *definujeme jako parciální derivace derivací* $(n - 1)$ *řádu.*

Věta 2 (Schwarzova) *Nechť funkce f má v okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *parciální derivace* f_x, f_y *a smíšenou parciální derivaci* $f_{x\,y}$, *která je v bodě* $[x_0, y_0]$ *spojitá. Pak existuje také smíšená parciální derivace* $f_{y\,x}\ (x_0, y_0)$ *a platí*

$$f_{x\,y}\ (x_0, y_0) = f_{y\,x}\ (x_0, y_0).$$

Důkaz: Důkaz je možno najít v [3].

1.2.1 Řešené příklady

Jestliže chceme spočítat druhé parciální derivace, musíme nejdříve spočítat první parciální derivace podle proměnných *x* a *y*. Poté můžeme spočítat druhé parciální derivace.

Určete všechny druhé parciální derivace:

Příklad 5

$f\ (x, y) = 6x^3 + 5y^2 + 10xy$

Řešení

$D_f\ =\ \mathbf{R}^2$

$f_x'\ (x, y) = 18\,x^2 + 10\,y$

$f_y'\ (x, y) = 10\,y + 10x$

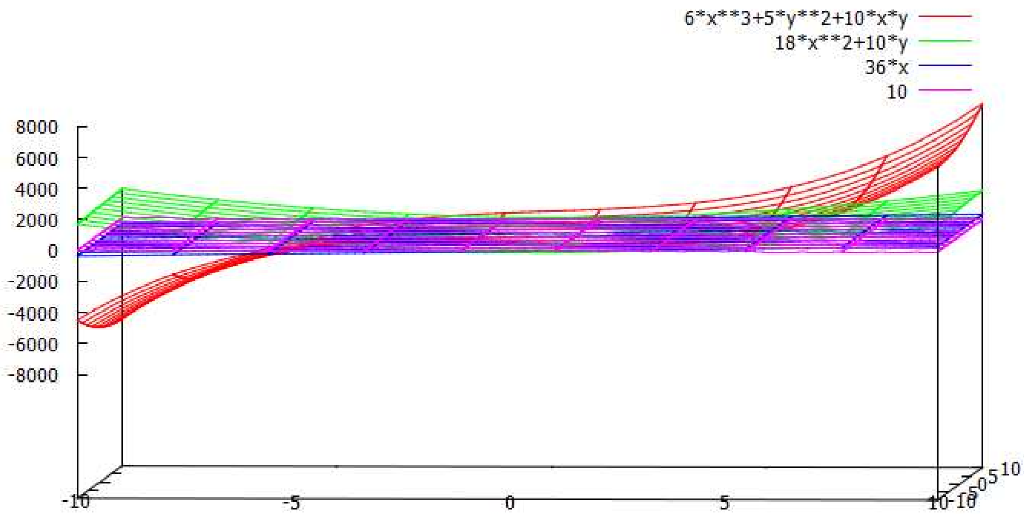
$f_{xx}''\ (x, y) = 36\,x$

$f_{yy}''\ (x, y) = 10$

$f_{xy}''\ (x, y) = 10$

$f_{yx}''\ (x, y) = 10$

$D_{f_x'}\ =\ D_{f_y'}\ =\ D_{f_{xx}''}\ =\ D_{f_{yy}''}\ =\ D_{f_{xy}''}\ =\ D_{f_{yx}''}\ =\ \mathbf{R}^2$



Obr. 4: Graf funkce *f* (červeně), první parciální derivace podle proměnné *x* (zeleně), druhá parciální derivace podle proměnných *xx* (modře) a smíšená parciální derivace podle proměnných *xy* (růžově)

Příklad 6

$f\ (x, y) = \ln\ (x)\ \cdot\ arctg\ y$

Řešení

$D_f\ =\ \{(x, y)\ \in\ \mathbf{R}^2 : x > 0\}$

$f_x^{\prime}\ (x, y) = \frac{1}{x} \cdot arctg\ y$ $\qquad$ $f_y^{\prime}\ (x, y) = \ln\ (x)\ \cdot\ \frac{1}{1+\ y^2}$

$f_{xx}^{\prime\prime}\ (x, y) = -\ \frac{1}{x^2} \cdot arctg\ y$

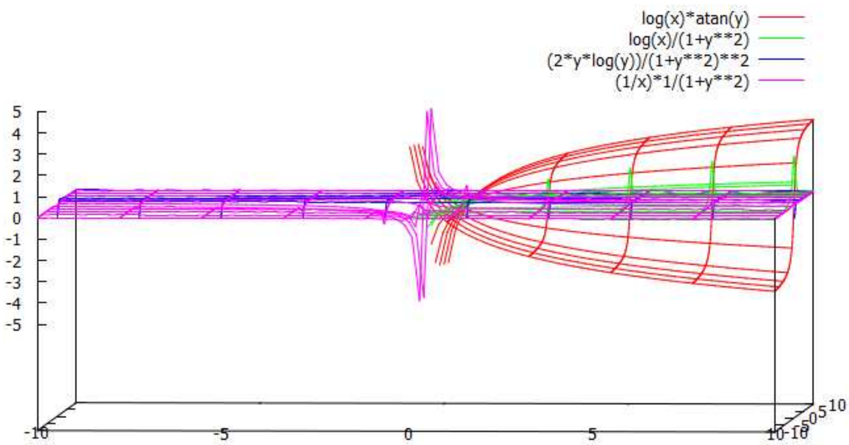
$f_{yy}^{\prime\prime}\ (x, y) = \ln\ (x)\ \cdot\ (-\ 1)\ \frac{1}{(1+\ y^2)^2} \cdot 2y = -\ \frac{2y\ln(x)}{(1+\ y^2)^2}$

$f_{xy}^{\prime\prime}\ (x, y) =\ \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\ y^2}$

$f_{yx}^{\prime\prime}\ (x, y) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 +\ y^2}$

$D_{f_x^{\prime}}\ =\ D_{f_{xx}^{\prime\prime}}\ =\ D_{f_{xy}^{\prime\prime}}\ =\ D_{f_{yx}^{\prime\prime}}\ =\ \{(x, y)\ \in\ \mathbf{R}^2 : x\ \neq 0\},$

$D_{f_y^{\prime}}\ =\ D_{f_{yy}^{\prime\prime}}\ =\ \{(x, y)\ \in\ \mathbf{R}^2 : x > 0\}$



Obr. 5: Graf funkce *f* (červeně), první parciální derivace podle proměnné *y* (zeleně), druhá parciální derivace podle proměnných *yy* (modře) a smíšená parciální derivace podle proměnných *yx* (růžově)

Příklad 7

$$f\ (x,y) = \ arctg\ \frac{x+y}{1-xy}$$

$$D_f = \{(x,y)\ \in\ \mathbf{R}^2 : xy\ \neq 0\}$$

Řešení

$$f_x^{\prime}\ (x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy-\ (x+y)\cdot\ (-\,y)}{(1-xy)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(1-xy)^2+\ (x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{1-xy+y\ \cdot\ (x+y)}{(1-xy)^2} =$$

$$= \frac{(1-xy)^2}{1-2xy+\ x^2y^2+\ x^2+2xy+\ y^2} \cdot \frac{1-xy+xy+\ y^2}{(1-xy)^2} =$$

$$= \frac{1+\ y^2}{1+\ x^2y^2+\ x^2+\ y^2} = \frac{1+\ y^2}{x^2\ (1+\ y^2)+(1+\ y^2)} =$$

$$= \frac{1+\ y^2}{(1+\ y^2)+(1+\ x^2)} = \frac{1}{1+\ x^2}$$

$$f_y^{\prime}\ (x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy-\ (x+y)\cdot\ (-\,x)}{(1-xy)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(1-xy)^2+\ (x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{1\ -xy+x\ \cdot\ (x+y)}{(1-xy)^2} =$$

$$= \frac{(1-xy)^2}{1-2xy+\ x^2y^2+\ x^2+2xy+\ y^2} \cdot \frac{1-xy+xy+\ x^2}{(1-xy)^2} =$$

$$= \frac{1+\ y^2}{1+\ x^2y^2+\ x^2+\ y^2} = \frac{1+\ x^2}{y^2\ (1+\ x^2)+(1+\ x^2)} =$$

$$= \frac{1+\ x^2}{(1+\ y^2)+(1+\ x^2)} = \frac{1}{1+\ y^2}$$

$$f_{xx}^{\prime\prime}\ (x,y) = \frac{0\cdot(x^2\ +1)-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{0 \cdot (y^2+1) - 2y}{(y^2+1)^2} = \frac{-2y}{(y^2+1)^2}$$

$$f''_{xy}\,(x,y) = 0$$

$$f''_{yx}(x,y) = 0$$

$$D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}}\, D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbf{R}^2$$

Příklad 8

$$f\,(x,y) = x \cdot sin\,(x+y)$$

Řešení

$$D_f = \mathbf{R}^2$$

$$f'_x\,(x,y) = 1 \cdot sin\,\,(x+y) + \,x \cdot cos\,\,(x+y) + \,1 = sin\,\,(x+y) + \,x\,\,\cdot cos\,(x+y)$$

$$f'_y(x+y) = x\,\,\cdot cos\,(x+y)$$

$$\begin{aligned} f''_{xx}\,(x,y) &= cos\,\,(x+y) + \,1 \cdot cos\,\,(x+y) + \,x \cdot \,[-\,sin\,(x+y)] \cdot 1 \\ &= 2\,\,cos\,(x+y) - x \cdot sin\,(x+y) \end{aligned}$$

$$f''_{yy}\,(x,y) = \,-x\,\,\cdot sin\,(x+y)$$

$$f''_{xy}(x,y) = \,cos\,\,(x+y) + \,x \cdot [-\,sin\,(x+y)] = \,cos\,\,(x+y) - \,x \cdot sin\,\,(x+y)$$

$$f''_{yx}(x,y) = \,cos\,\,(x+y) + \,x\,\,\cdot [-\,sin\,(x+y)] = \,cos\,\,(x+y) - \,x\,\,\cdot sin\,(x+y)$$

$$D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}}\, D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbf{R}^2$$

<u>Příklad 9</u>

Vypočítejte požadovanou parciální derivaci: $f'''_{xyz}\,(x, y, z) = \; e^{xyz}$

Řešení

$D_f \; = \; \mathbf{R}^2$

Máme tedy spočítat třetí parciální derivaci podle proměnných *x, y, z* v pořadí *x, y, z*.

První parciální derivace bude tedy podle proměnné *x*:

$$f'_x\,(x, y, z) = \; e^{xyz} \; \cdot yz$$

Nyní, abychom získali druhou parciální derivaci, budeme první parciální derivaci derivovat podle proměnné *y:*

$$f''_{xy}\,(x, y, z) = \; e^{xyz} \; \cdot xz \cdot yz + \; e^{xyz} \; \cdot z = \; e^{xyz} \; \cdot xyz^2 + \; e^{xyz} \; \cdot z$$

Jako poslední spočítáme třetí parciální derivaci podle proměnné *z*:

$$\begin{aligned} f'''_{xyz}\,(x, y, z) &= \; e^{xyz} \; \cdot xy \cdot xyz^2 + \; e^{xyz} \; \cdot \; xy \cdot 2z + \; e^{xyz} \; \cdot xy \cdot z + \; e^{xyz} \; \cdot 1 = \\ &= \; e^{xyz} \; \cdot (xy \cdot xyz^2 + \; xy \cdot 2z + \; xy \cdot z + 1) = \\ &= \; e^{xyz} \; \cdot (x^2y^2z^2 + \; 3xyz + 1) \end{aligned}$$

$$D_{f'_x} = D_{f''_{xy}} = \; D_{f'''_{xyz}} = \; \mathbf{R}^3$$

2 Totální diferenciál

2.1 Totální diferenciál 1. řádu

Diferenciálem funkce *f* jedné proměnné v bodě x_0 rozumíme přírůstek funkce na tečně vedené ke grafu funkce v bodě $[x_0, f\ (x_0)]$.

Pro výpočet diferenciálu pro danou funkci je nezbytné znát parciální derivace.

V této kapitole budou citovány definice a věty z [3], [5], [6] a [8].

Definice 3 *Řekneme, že funkce f :* $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ *definovaná v okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *je v tomto bodě* ***diferencovatelná****, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí*

$$\lim_{(h,k)\,\rightarrow\,(0,0)} \frac{f\ (x_0 + h, y_0 + k) - f\ (x_0, y_0) - \ (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 +\ k^2}} = 0$$

Lineární funkce Ah + Bk proměnných h, k se nazývá ***diferenciál funkce f*** *v bodě* $[x_0, y_0]$ *a značí se* $df\ (x_0, y_0)(h, k)$*, příp.* $df\ (x_0, y_0)$.

Poznámka 3 *Ekvivalentní zápis definice diferencovatelnosti funkce dvou proměnných: existují* $A, B\ \in\ \mathbf{R}$ *a funkce* $\tau\ :\ \mathbf{R}^2\ \rightarrow\ \mathbf{R}$ *tak, že platí*

$$f\ (x_0 + h, y_0 + k) - f\ (x_0, y_0) =\ (Ah + Bk) +\ \tau\ (h, k),$$

kde

$$\lim_{(h,k)\,\rightarrow\,(0,0)} \frac{\tau\ (h, k)}{\sqrt{h^2 +\ k^2}} = 0.$$

Věta 3 *Je – li funkce diferencovatelná v bodě* $[x_0, y_0]$*, pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz: Z diferencovatelnosti funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ *plyne*

$$\lim_{(h,k)\rightarrow(0,0)} [f\ (x_0 + h, y_0 + k) - f\ (x_0, y_0)] = \lim_{(h,k)\rightarrow(0,0)} [Ah + Bk +\ \tau\ (h, k)] = 0,$$

Neboť podle poznámky 3 je $\lim_{(h,k)\rightarrow(0,0)} \tau\ (h, k) = 0.$

Odtud je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f\,(x_0+h, y_0+k) = f\,(x_0, y_0),$$

Funkce f je tedy spojitá v bodě $[x_0, y_0]$. □

Věta 4 *Je – li funkce diferencovatelná v bodě* $[x_0, y_0]$*, pak má v tomto bodě parciální derivace a platí* $A = f_x\,(x_0, y_0), B = f_y\,(x_0, y_0)$*, tj.*

$$df\,(x_0, y_0) = f_x\,(x_0, y_0)h + f_y\,(x_0, y_0)k. \qquad (2.1)$$

Důkaz: Důkaz je možno najít v [3].

Poznámka 4 *Přírůstky h, k nezávisle proměnných x, y v definici diferenciálu a ve větě 4 se často značí dx, dy.*

Poznámka 5 *Je – li funkce diferencovatelná v každém bodě množiny M, má v každém bodě této množiny diferenciál, který je funkcí čtyř proměnných: x, y, h, k. Označíme – li* $dx = x - x_0 = h, dy = y - y_0 = k$*, dostáváme, že diferenciál funkce f je*

$$df\,(x, y) = f_x\,(x, y)dx + f_y\,(x, y)dy. \qquad (2.2)$$

Poznámka 6 *Jak bylo zmíněno výše, diferenciál se využívá k výpočtu přibližných hodnot. Zanedbáním funkce* τ *poznámky 4 plyne*

$$f\,(x, y) \doteq f\,(x_0, y_0) + df\,(x_0, y_0). \qquad (2.3)$$

2. 1. 1 Řešené příklady

Při výpočtu diferenciálu 1. řádu musíme nejdříve určit první parciální derivace, které poté dosadíme do rovnice pro určení diferenciálu 1. řádu:
$df\,(x,y) = f_x\,(x,y)dx + f_y\,(x,y)dy$.

Příklad 10

Určete totální diferenciál 1. řádu funkce $f\,(x,y,z) = xy + yz + zx$.

Řešení

$D_f = \mathbf{R}^3$

Abychom mohli určit totální diferenciál, musíme nejprve určit první parciální derivace

$f_x'\,(x,y,z) = y + z$

$f_y'\,(x,y,z) = x + z$

$f_z'\,(x,y,z) = y + x$

$D_{f_x'} = D_{f_y'} = D_{f_z'} = \mathbf{R}^3$

Dosazením do (2.2) získáváme totální diferenciál 1. řádu

$df\,(x,y,z) = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$

Příklad 11

Spočítejte první diferenciál funkce $f\,(x,y) = x^3 + y^2$ v bodě $A = (-2,1)$:

Řešení

$D_f = \mathbf{R}^2$

Pokud je zadán bod A o souřadnicích (x_0,y_0) dosadíme ho do uvedené rovnice:
$df\,(x_0,y_0) = f_x\,(x_0,y_0)dx + f_y\,(x_0,y_0)dy = f_x\,(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + f_y\,(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)$.

Získaná lineární funkce je totálním diferenciálem 1. řádu.

Nejprve určíme první parciální derivace funkce

$$f_x' (x, y) = 3x^2$$
$$f_y' (x, y) = 2y$$

$D_{f_x'} = D_{f_y'} = R^2$

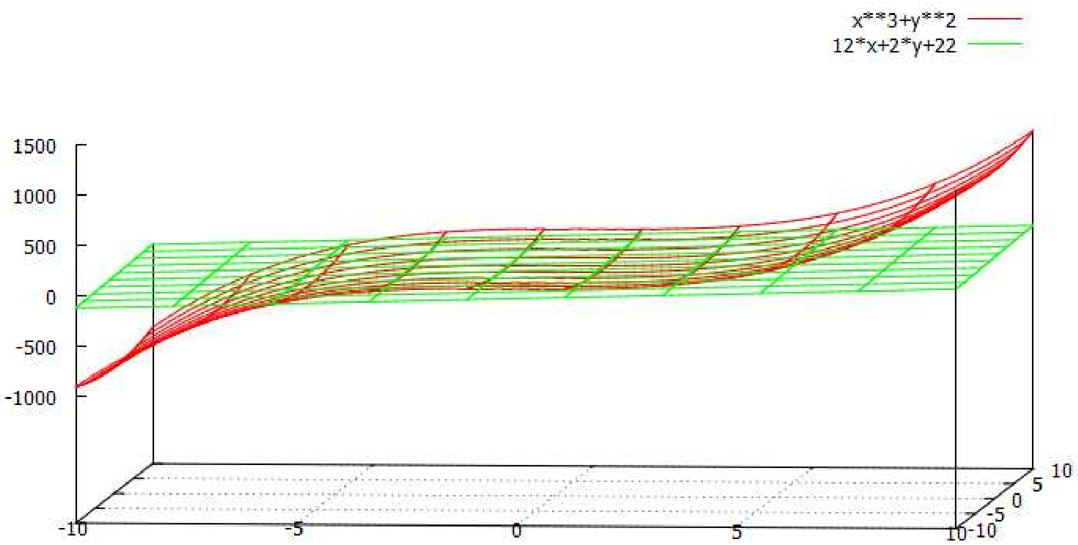
Nyní dosadíme do vzorce pro diferenciál

$$df\ (x, y) = 3x^2 \cdot dx + 2y \cdot dy$$

Po dosazení bodu *A* získáváme

$$df\ (A) = 3 \cdot (-2)^2 \cdot [x - (-2)] + 2 \cdot 1\ (y - 1) =$$
$$= 12 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (y - 1) = 12x + 24 + 2y - 2$$
$$= 12x + 2y + 22$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě *A* je $df\ (A) = 12x + 2y + 22.$



Obr. 6: Funkce $f\ (x, y) = x^3 + y^2$ (červeně) a její diferenciál (zeleně)

Příklad 12

Spočítejte první diferenciál funkce $f\ (x,y) =\ x \cdot sin^4 y$ v bodě $A = \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$:

Řešení

$D_f\ =\ \mathbf{R}^2$

Nejprve určíme první parciální derivace funkce

$$f_x^{'}\ (x,y) = sin^4 y$$
$$f_y^{'}\ (x,y) = x \cdot 4 \cdot\ sin^3 y\ \cdot \cos y = 4x \cdot sin^3 y\ \cdot \cos y$$

$D_{f_x^{'}} = D_{f_y^{'}}\ =\ \mathbf{R}^2$

Nyní dosadíme do vzorce pro diferenciál

$$df\ (x,y) =\ sin^4 y\ \cdot dx + 4x \cdot sin^3 y\ \cdot \cos y\ \cdot dy$$

Po dosazení bodu *A* získáváme

$$df\ (A) = sin^4\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (x -\ 1) + 4 \cdot 1 \cdot sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot (x -\ 1) + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \frac{4}{16} \cdot (x -\ 1) + 4 \cdot \frac{4}{16} \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + y - \frac{\pi}{4}$$
$$df\ (A) = x + 4y -\ \pi - 1$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě *A* je $df\ (A) = x + 4y -\ \pi - 1$.

2.2 Totální diferenciál vyššího řádu

Jak bylo uvedeno v minulé podkapitole, při hledání diferenciálu 1. řádu jsme funkci nahrazovali tečnou rovinou. To ale nyní nemusí stačit, proto budeme muset funkci nahrazovat funkcí složitější (polynomem druhého či vyššího stupně).

Definice 4 *Nechť funkce f :* $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *spojité parciální derivace až do řádu m včetně.* ***Diferenciálem m – tého řádu*** *funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ *rozumíme homogenní funkci m – tého stupně*

$$d^m f(x_0, y_0)\,(h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial\, x^j\, \partial\, y^{m-j}}\,(x_0, y_0) h^j k^{m-j}.$$

Poznámka 7 *Pro případ m = 1 je vzorec pro výpočet* $d^m f$ *totožný se vztahem z věty 4. Uveďme si nyní případy pro m = 2 a m = 3. Pro m = 2 dostáváme diferenciál 2. řádu a pro m = 3 pak diferenciál 3. řádu.*

m = 2: $d^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}\,(x_0, y_0)\, h^2 + 2 f_{xy}\,(x_0, y_0) hk + f_{yy}\,(x_0, y_0)\, k^2,$

m = 3: $d^3 f(x_0, y_0) = f_{xxx}\,(x_0, y_0)\, h^3 + 3 f_{xxy}\,(x_0, y_0) h^2 k + 3 f_{xyy}\,(x_0, y_0) hk^2 +$
$+ f_{yyy}\,(x_0, y_0)\, k^3.$

2.2.1 Řešené příklady

Příklad 13

Určete totální diferenciál 2. řádu funkce $f\ (x, y) = \frac{x}{y}$.

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \neq 0\}$$

Vzorec pro totální diferenciál 2. řádu je:

$d^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}\ (x_0, y_0)\ d^2x + 2f_{xy}\ (x_0, y_0) dx \cdot dy + f_{yy}\ (x_0, y_0)\ d^2y$

Musíme určit všechny druhé parciální derivace:

$$f'_x\ (x, y) = \frac{1}{y}$$

$$f'_y\ (x, y) = \frac{-x}{y^2}$$

$$f''_{xx}\ (x, y) = 0$$

$$f''_{yy}\ (x, y) = \frac{-x \cdot (-2)}{y^3} = \frac{2x}{y^3}$$

$$f''_{xy}\ (x, y) = \frac{-1}{y^2}$$

$$f''_{yx}\ (x, y) = \frac{-1}{y^2}$$

$$D_{f'_x} = D_{f''_y} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{yx}} = D_{f''_{xy}} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \neq 0\}$$

Dosazením do vzorce získáváme totální diferenciál 2. řádu

$$d^2 f(x, y) = 0 \cdot d^2x + 2\left(\frac{-1}{y^2}\right) dx \cdot dy + \frac{2x}{y^3}\ d^2y = -\frac{2}{y^2} dx \cdot dy + \frac{2x}{y^3}\ d^2y =$$
$$= -\frac{2}{y^2}\ dy\ (dx + \frac{x}{y}\ dy)$$

Diferenciál 2. řádu zadané funkce je $d^2 f(x, y) = -\frac{2}{y^2}\ dy\ (dx + \frac{x}{y}\ dy)$.

Příklad 14

Určete totální diferenciál 2. řádu funkce $f\ (x, y) = \sin(3x +\ y^2)$ v bodu $A = (0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$

Řešení

$D_f =\ \mathbf{R}^2$

Určíme všechny druhé parciální derivace

$f_x^{'}(x, y) = \cos(3x +\ y^2) \cdot 3 = 3\cos(3x +\ y^2)$

$f_y^{'}\ (x, y) = \cos(3x +\ y^2)\ \cdot 2y = 2y\ \cdot \cos(3x +\ y^2)$

$f_{xx}^{''}\ (x, y) = 3\ \cdot\ [-\sin(3x +\ y^2)] \cdot 3 =\ -9\sin(3x +\ y^2)$

$$f_{yy}^{''}\ (x, y) = 2\cos(3x +\ y^2) + 2y\ \cdot\ [-\sin(3x +\ y^2)] \cdot 2y =$$
$$= 2\cos(3x +\ y^2) - 4\,y^2 \cdot \sin(3x +\ y^2)$$

$f_{xy}^{''}\ (x, y) = 3 \cdot\ [-\sin(3x +\ y^2)] \cdot 2y =\ -6y \cdot \sin(3x +\ y^2)$

$f_{yx}^{''}\ (x, y) = 2y\ \cdot\ [-\ \sin(3x +\ y^2)]\ \cdot 3 =\ -6y \cdot \sin(3x +\ y^2)$

$D_{f_x^{'}} =\ D_{f_y^{'}} =\ D_{f_{xx}^{''}} =\ D_{f_{yy}^{''}} =\ D_{f_{xy}^{''}} =\ D_{f_{yx}^{''}} =\ \mathbf{R}^2$

Dosadíme do vzorce:

$$d^2f(x, y) =\ -9\sin(3x +\ y^2)\,d^2x + 2\ \cdot (-6y) \cdot \sin(3x +\ y^2)\,dxdy$$
$$+ [2\cos(3x +\ y^2) - 4\,y^2 \cdot \sin(3x +\ y^2)]\,d^2y$$

$$d^2f(A) = -9\sin(3x + y^2)\,(x - x_0)^2 + 2\cdot(-6y)\cdot\sin(3x + y^2)\cdot(x - x_0)\cdot$$
$$\cdot(y - y_0) + [2\cos(3x + y^2) - 4\,y^2\cdot\sin(3x + y^2)]\cdot(y - y_0)^2 =$$
$$= -9\cdot\sin\left[3\cdot 0 + \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2\right]\cdot(x - 0)^2 - 12\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot$$
$$\cdot\sin\left[3\cdot 0 + \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2\right]\cdot(x - 0)\cdot\left(y - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) +$$
$$+\left[2\cdot\cos\left[3\cdot 0 + \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2\right] - 4\cdot\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2\cdot\sin\left[3\cdot 0 + \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2\right]\right]$$
$$\cdot\left(y - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 =$$
$$= -9\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot x^2 - 12\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\left(y - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$+\left[2\cdot\cos\frac{\pi}{2} - 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right]\cdot\left(y^2 - 2y\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= -9\cdot 1\cdot x^2 - 6\cdot\sqrt{2\pi}\cdot 1\cdot x\cdot\left(y - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) + (2\cdot 0 - 2\pi\cdot 1)\cdot$$
$$\cdot\left(y^2 - 2y\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= -9x^2 - 6x\sqrt{2\pi}\cdot\left(y - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) + (-2\pi)\cdot\left(y^2 - 2y\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= -9x^2 - 2\pi y^2 - 6xy\sqrt{2\pi} + 6x\pi + 4y\pi\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \pi^2$$

$$d^2f\,(A) = 9x^2 + 2\pi y^2 + 6xy\sqrt{2\pi} - 6x\pi - 4y\pi\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \pi^2 =$$
$$= 9x^2 + 2\pi\cdot\left(y^2 - 3x - 2y\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right) + 6xy\sqrt{2\pi}$$

Diferenciál 2. řádu zadané funkce je $9x^2 + 2\pi\cdot\left(y^2 - 3x - 2y\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right) + 6xy\sqrt{2\pi}$.

3 Geometrický význam totálního diferenciálu

Nyní si ukážeme geometrický význam totálního diferenciálu, který budeme ilustrovat na grafu funkce 2 proměnných.

V této kapitole budou citovány definice a věty z [3], [5].

Rovina v $\mathbf{R}^3$ $z = Ax + By + C$ se nazývá *tečnou rovinou* ke grafu funkce $z = f\ (x, y)$ v bodě $T =\ [x_0, y_0, f\ (x_0, y_0)]$, platí – li

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x-\ x_0)^2 +\ (y-\ y_0)^2}} = 0$$

Má – li tato rovina procházet bodem *T*, musí tento bod vyhovovat rovnici roviny, tj. $f\ (x_0, y_0) = Ax_0\ + By_0\ + C$, odkud $z = A(x-\ x_0) + B(y - y_0) + f(x_0\,, y_0\,)$.

Tato rovina je tečnou rovinou, jestliže existuje diferenciál funkce v bodě $[x_0, y_0]$, tj. podle věty 4 je $A =\ f_x\ (x_0, y_0), B =\ f_y\ (x_0, y_0)$. Rovnice tečné roviny má tvar

$$z = f\ (x_0, y_0) +\ f_x\ (x_0, y_0)(x-\ x_0) +\ f_y\ (x_0, y_0)(y-\ y_0). \qquad (3.1)$$

Diferenciál funkce v daném bodě je přírůstek funkce na tečné rovině.

Věta 5 *Má – li funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ *spojité parciální derivace 1. řádu, pak má v tomto bodě také diferenciál.*

Porovnáme – li rovnici tečné roviny funkce $z = f\ (x, y)$ v bodě $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$

$$z-\ z_0 =\ f_x'\ (P_0)\ (x-\ x_0) +\ f_y'\ (P_0)\ (y-\ y_0)$$

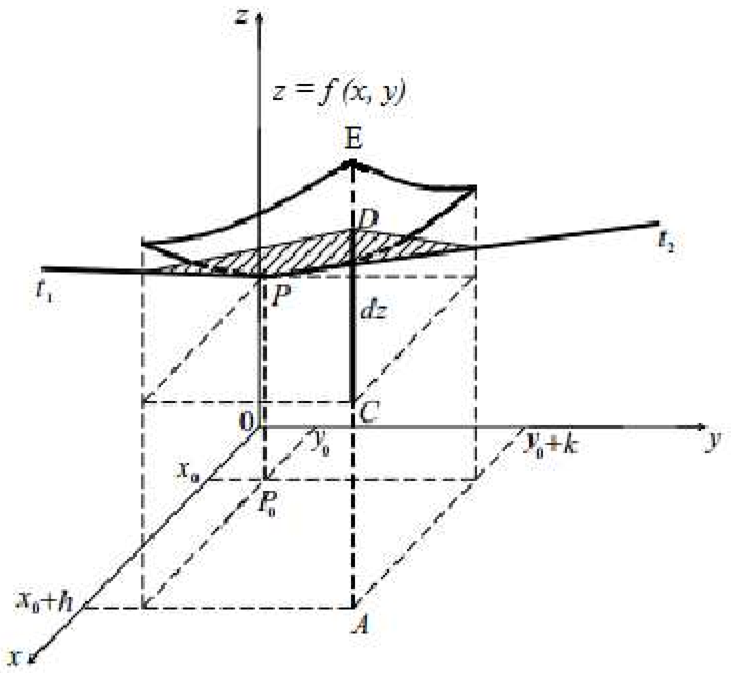
se vzorcem totálního diferenciálu v bodě $P_0\ (x_0, y_0)$

$$df\ (P_0) =\ f_x'\ (P_0)h +\ f_y'\ (P_0)\ k, \text{kde } h = x-\ x_0, k = y-\ y_0,$$

dostáváme $z-\ z_0 =\ df\ (P_0)$.

Je vidět, že totální diferenciál funkce $z = f\ (x, y)$ v bodě P_0 představuje přírůstek souřadnice bodu *D* na tečné rovin přejdeme – li z bodu $P_0\ (x_0, y_0)$ do bodu $A\ (x_0 + h,\ y_0 + k)$.

Na následujícím obrázku je přírůstek funkce znázorněn úsečkou $\overline{CE}$ a totální diferenciál znázorněn úsečkou $\overline{CD}$.



obr. 7: Graf funkce 2 proměnných

4 Aplikace totálního diferenciálu

Totální diferenciál má velmi široký rozptyl využití.

Můžeme ho využít na získávání přibližné hodnoty výrazů, rovnic tečen, rovin či normál. Totální diferenciál můžeme využít i v Taylorově polynomu či v „praktických“ příkladech, kdy po změně velikostí rozměrů potřebujeme zjistit změnu objemu či povrchu nebo relativní a absolutní chybu.

V následujících podkapitolách je uvedeno několik vybraných příkladů na využití totálního diferenciálu.

4.1 Určování přibližné hodnoty

Určování přibližné hodnoty je užitečné zejména při určování hodnot výrazů bez pomocí kalkulačky.

Příklad 15

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližnou hodnotu $1{,}02^{3{,}07}$.

Řešení:

Nejprve si zvolíme vhodný bod $A = [x_0, y_0]$, tak abychom byli schopní vypočítat funkční hodnotu funkce $f\ (x, y)\ v$ bodě $[x_0, y_0]$. Aby při výpočtu nedošlo k příliš velkému odchýlení od skutečné hodnoty, musí být tento bod blízko bodu $[1{,}02; 3{,}07]$

K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f\ (x, y) = x^y$ v bodě $A = [x_0, y_0]$ s diferencemi dx a dy.

$$\text{bod } A = [x_0, y_0] = [1, 3]$$

$$f\ (x, y) = x^y$$

$$\mathrm{d}x = 0,\ 02$$

$$\mathrm{d}y = 0,\ 07$$

Spočítáme první parciální derivace dané funkce

$$f_x^{'}\ (x, y) = yx^{y-1}$$

$$f_y^{'}(x, y) = x^y \ln x$$

Určíme funkční hodnoty funkce a parciálních derivací v bodě $A = [1, 3]$:

$$f\ (1, 3) = 1^3 = 1$$

$$f_x^{'}\ (1, 3) = 3\ \cdot 1^{3-1} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$f_y^{'}(x, y) = 1^3 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

Nyní dosazením do (2.2) určíme diferenciál funkce

$$\mathrm{d}f\ (x, y) = yx^{y-1}\mathrm{d}x + \ x^y \ln x \ \mathrm{d}y$$

tj. $\mathrm{d}f\ (1, 3) = 3 \cdot 0{,}02 + 0 \cdot 0{,}07 = 0{,}06$

tedy přibližná hodnota zadaného výrazu podle (2.3) je

$$1{,}02^{3{,}07} \cong f\ (1, 3) + \mathrm{d}f\ (1, 3) = \ 1 + 0{,}06 = 1{,}06$$

Skutečná hodnota $1{,}02^{3{,}07} \cong 1{,}063$

Přibližná hodnota daného výrazu je 1, 06.

<u>Příklad 16</u>

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližnou hodnotu $\sqrt{(2{,}06)^2 + \ (4{,}95)^2}$

Řešení:

K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f\ (x, y) = \ \sqrt{x^2 + \ y^2}$ v bodě $A = [x_0, y_0]$ s diferencemi d*x* a d*y*.

bod $A = [x_0, y_0] = \ [2, 5]$

$$f\ (x, y) = \ \sqrt{x^2 + \ y^2}$$

d*x* = 0, 06

d*y* = – 0,05

Spočítáme první parciální derivace dané funkce

$$f_x' = \frac{1}{2} \cdot \ (x^2 + \ y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \ y^2}}$$

$$f_y' = \frac{1}{2} \cdot \ (x^2 + \ y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + \ y^2}}$$

Určíme funkční hodnoty dané funkce a parciálních derivací v bodě $A = [2, 5]$

$$f\ (2,5) = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$f_x'(2,5) = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$f_y'(2,5) = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

Nyní dosazením určíme diferenciál

$$\mathrm{d}f\ (x,y) = \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y\ \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

tj. $\mathrm{d}f\ (2,5) = \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot 0{,}06 - \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot 0{,}05 = \frac{0{,}12}{\sqrt{29}} - \frac{0{,}25}{\sqrt{29}} = -\frac{0{,}13}{\sqrt{29}} = -\frac{0{,}13 \cdot \sqrt{29}}{29}$

tedy přibližná hodnota zadaného výrazu je

$$\sqrt{(2,06)^2 + (4,95)^2} \cong f\ (2,5) + df\ (2,5) = \sqrt{29} - \frac{0{,}13\ \cdot\ \sqrt{29}}{29} \cong 5,361$$

Skutečná hodnota $\sqrt{(2,06)^2 + (4,95)^2} \cong 5,362$

Přibližná hodnota daného výrazu je 5, 361.

<u>Příklad 17</u>

Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $\frac{\sqrt[5]{0{,}89}}{1{,}01^4 \cdot \sqrt[3]{0{,}93}}$.

Řešení:

K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f\ (x,y,z) = \frac{\sqrt[5]{x}}{y^4 \cdot \sqrt[3]{z}}$ v bodě $A = [x_0, y_0, z_0]$ s diferencemi dx, dy a dz.

$$f\ (x,y,z) = \frac{\sqrt[5]{x}}{y^4\ \cdot\ \sqrt[3]{z}}$$

bod $A = [x_0, y_0, z_0] = [1,1,1]$

$$\mathrm{d}x = -\,0,11$$

$$\mathrm{d}y = \ 0{,}01$$

$$\mathrm{d}z = \ -\,0,07$$

Spočítáme první parciální derivace funkce

$$f_x' \,(x, y, z) = \ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^4} \ \cdot \ y^4 \ \cdot \ \sqrt[3]{z}}$$

$$f_y' \,(x, y, z) = \ \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{z}} \cdot (-\,4) \cdot \frac{1}{y^5}$$

$$f_z' \,(x, y, z) = \frac{\sqrt[5]{x}}{y^4} \cdot \left(-\,\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{z^4}}$$

Určíme funkční hodnoty funkce a parciálních derivací v bodě $A = \ [1, 1, 1]$

$$f\,(1,1,1) = \ \frac{\sqrt[5]{1}}{1^4 \ \cdot \ \sqrt[3]{1}} = \ \frac{1}{1 \ \cdot 1} = 1$$

$$f_x' \,(A) = \ \frac{1}{5 \ \cdot 1 \ \cdot 1 \ \cdot 1} = \ \frac{1}{5}$$

$$f_y' \,(A) = \ -\ \frac{4 \cdot 1}{1} = \ -\,4$$

$$f_z' \,(A) = -\ \frac{1 \ \cdot \ 1}{3 \cdot 1} = \ -\ \frac{1}{3}$$

Nyní dosazením určíme diferenciál

$$df\,(x, y, z\,) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^4} \ \cdot \ y^4 \ \cdot \ \sqrt[3]{z}}\, dx + \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{z}} \cdot (-\,4) \cdot \frac{1}{y^5}\, dy + \frac{\sqrt[5]{x}}{y^4} \cdot \left(-\,\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{z^4}}\, dz$$

tj. $df\,(1, 1, 1) = \ \frac{1}{5} \cdot (-\,0,11) + \ (-\,4) \ \cdot 0{,}01 + \ \left(-\,\frac{1}{3}\right) \cdot (-\,0,07) = \ -\ \frac{0{,}11}{5} -$
$-\,0,04 + \ \frac{0{,}07}{3} = -\ \frac{0{,}58}{15}$

Přibližná hodnota zadaného výrazu tedy je

$$\frac{\sqrt[5]{0,89}}{1,01^4 \ \cdot \ \sqrt[3]{0,93}} \cong f\,(1, 1, 1) + df\,(1, 1, 1) = 1 - \ \frac{0{,}58}{15} \ \cong \ 0,961$$

Skutečná hodnota $\frac{\sqrt[5]{0{,}89}}{1{,}01^4 \cdot \sqrt[3]{0{,}93}} \cong 0,962$

Přibližná hodnota daného výrazu je $0,961$.

Příklad 18

Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $sin\ 29° \cdot\ tg\ 46°$.

Řešení:

Nejprve si převedeme stupně na radiány. Použijeme vzorec $a = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}$, kde a je velikost úhlu v radiánech a α je velikost úhlu ve stupních.

Tedy pro $\alpha = 29°$:

$$a = \frac{29\pi}{180}$$

pro $\alpha = 46°$:

$$a = \frac{46\pi}{180}$$

K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f\ (x, y) =\ sin\ \ x \cdot\ tg\ y$ v bodě $A = [x_0, y_0]$ s diferencemi dx a dy.

$$f\ (x, y) = sin\ \ x \cdot\ tg\ y$$

bod $A\ = [x_0, y_0] =\ \left[\frac{30\pi}{180}, \frac{45\pi}{180}\right] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

d$x = -\ \frac{\pi}{180}$

d$y = \frac{\pi}{180}$

Spočítáme první parciální derivace funkce

$$f_x' = cos\, x\ \cdot tg\ y$$

$$f_y^{'} = sin\,x \cdot \frac{1}{cos^2 y}$$

Určíme funkční hodnoty funkce a parciálních derivací v bodě $A = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{\pi}{6} \cdot tg\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$f_x^{'}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = cos\frac{\pi}{6} \cdot tg\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f_y^{'}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{cos^2\,\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} = 1$$

Nyní dosazením určíme diferenciál

$$df(x, y) = cos\,x \cdot tg\,y \cdot dx + sin\,x \cdot \frac{1}{cos^2 y} \cdot dy$$

tj. $df\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) + 1 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{360} + \frac{\pi}{180}$

Přibližná hodnota zadaného výrazu je

$$sin\,29° \cdot tg\,46° \cong f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) + df\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360} + \frac{\pi}{180} \cong 0,502$$

Skutečná hodnota $sin\,29° \cdot tg\,46° \cong 0,502$

Přibližná hodnota daného výrazu je $0,502$.

4. 2 Tečné roviny, normály

Příklad 19

Napište rovnici tečné roviny funkce $z = 3x + 2y^2 - xy$ v bodě $A = [2, 1, ?]$

Řešení

Nejprve dopočítáme $f(2,1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 3$

Bod A má tedy souřadnice $[2, 1, 3]$

Rovnice tečné roviny k ploše $z = f\ (x, y)$ má tvar

$$\tau: z - z_0 = f_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Určíme první parciální derivace

$$f_x'(x, y) = 3 - y$$

$$f_y'(x, y) = 4y - x$$

Nyní zjistíme funkční hodnotu těchto parciálních derivací v bodu A:

$$f_x'(A) = 3 - 1 = 2$$

$$f_y'(A) = 4 - 2 = 2$$

Po dosazení má rovnice tečné roviny tvar

$$\tau:\ z - 3 = 2 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1)$$

$$\tau:\ z - 3 = 2 \cdot x - 4 + 2y - 2$$

$$\tau:\ z - 3 = 2x + 2y - 6$$

$$\underline{\underline{\tau:\ 2x + 2y - z - 3 = 0}}$$

Najděte rovnice tečné roviny a normály k následujícím plochám v daných bodech:

<u>Příklad 20</u>

$z = x^2 + y^2$ v bodě $A = [1, 2, 5]$

Řešení

Rovnice tečné roviny k ploše $z = f\ (x, y)$ má tvar

$\tau: z - z_0 = f_x'\ (x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'\ (x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

Nejprve tedy určíme první parciální derivace

$$f_x'\ (x, y) = 2x$$

$$f_y'\ (x, y) = 2y$$

Nyní zjistíme funkční hodnotu těchto parciálních derivací v bodu *A*:

$$f_x'\ (A) = 2$$

$$f_y'\ (A) = 4$$

Po dosazení má rovnice tečné roviny tvar

$$\tau:\ z - 5 = 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2)$$

$$\tau:\ z - 5 = 2x - 2 + 4y - 8$$

$$\underline{\underline{\tau: 2x + 4y - z - 5 = 0}}$$

Parametrické rovnice normály:

$n:\ x = x_0 + f_x'\ (x_0, y_0) \cdot t$

$y = y_0 + f_y'\ (x_0, y_0) \cdot t$

$z = z_0 - t$

Po dosazení jsou tedy parametrické rovnice normály:

n: $x = 1 + 2t$

$y = 2 + 4t$

$z = 5 - t$

<u>Příklad 21</u>

$\mathrm{z} = \operatorname{arctg} \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$ v bodě $A = \left[1, 1, \frac{\pi}{4}\right]$

Nejprve tedy určíme první parciální derivace

$$f_x' (x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot (-1) \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{-y}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$f_y' (x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Nyní zjistíme funkční hodnotu těchto parciálních derivací v bodu *A*:

$$f_x' (A) = \frac{-1}{1^2 + 1^2} = -\frac{1}{2}$$

$$f_y' (A) = \frac{1}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

Po dosazení má rovnice tečné roviny tvar

$$\tau:\ z - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} \cdot (y - 1)$$

$$\tau: z - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot y - \frac{1}{2}$$

$$\tau: z - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y$$

$$\tau: 4z - \pi = -2x + 2y$$

$$\underline{\underline{\tau:\ 2x - 2y + 4z - \pi = 0}}$$

Parametrické rovnice normály:

n: $x = 1 + \left(-\ \frac{1}{2}\right) t$

$y = 1 + \ \frac{1}{2} t$

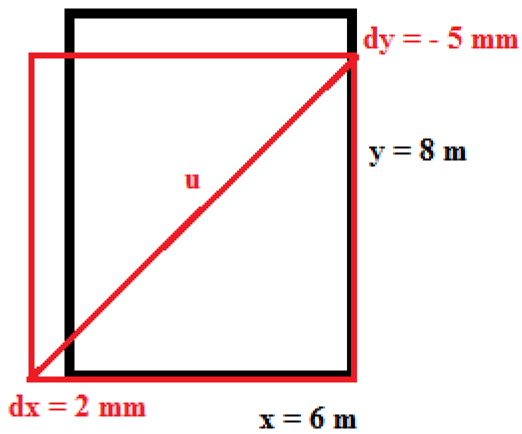
$z = \frac{\pi}{4} - t$

4. 3 Příklady z praxe

<u>Příklad 22</u>

Určete, o kolik se změní délka diagonály a obsah obdélníka o stranách délek $x = 6\ m$ a $y = 8\ m$, jestliže se strana x zvětší o $2\ mm$ a strana y zmenší o $5\ mm$?

Řešení



Obr. 8: Obrázek znázorňuje původní (černý) obdélník a obdélník se změněnými stranami (červený)

Nejprve si musíme převést všechny jednotky na stejnou jednotku (mm):

$$x = 6\ m = 6\ 000\ mm$$

$$y = 8\ m = 8\ 000\ mm$$

$$dx = 2\ mm$$

$$dy = -5\ mm$$

a) <u>Diagonála</u>

Zde využijeme Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + b^2$

Tedy pro tento případ platí $u = \sqrt{x^2 + y^2}$

Určíme první parciální derivace

$$f_x'(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y'(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Dosazením získáváme

$$f_x'(6\,000, 8\,000) = \frac{6\,000}{\sqrt{6\,000^2 + 8\,000^2}} = \frac{6\,000}{10\,000} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$f_y'(6\,000, 8\,000) = \frac{8\,000}{\sqrt{6\,000^2 + 8\,000^2}} = \frac{8\,000}{10\,000} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Totální diferenciál je

$$df\,(6\,000, 8\,000) = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot (-5) = \frac{6}{5} - 4 = -\frac{14}{5} = -2{,}8$$

Diagonála se tedy zmenší o $-2{,}8\ mm$.

b) <u>Obsah</u>

Vzorec pro obsah obdélníku $S = a \cdot b = x \cdot y$

$$f_x'(x,y) = y$$

$$f_y'(x,y) = x$$

Dosazením získáváme

$$f_x'(6\,000, 8\,000) = 8\,000$$

$$f_y'(6\,000, 8\,000) = 6\,000$$

Totální diferenciál tedy je

$$df = y\,dx + x\,dy$$

$$df\,(6\,000, 8\,000) = 8\,000 \cdot 2 + 6\,000 \cdot (-5) = 16\,000 - 30\,000 = -14\,000$$

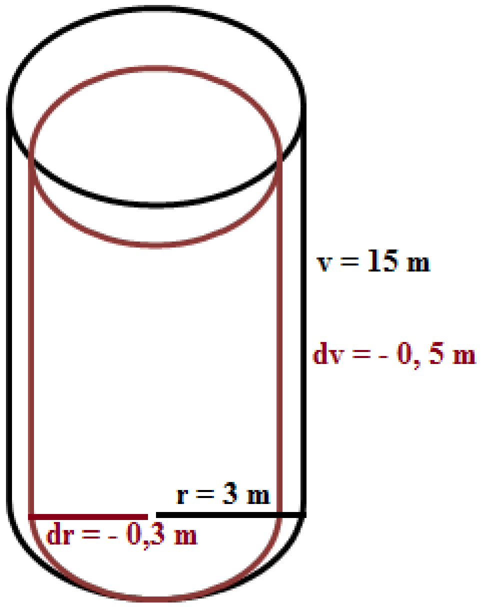
Obsah se zmenšil o $14\,000\ mm^2$, tj. $140\ cm^2$.

Diagonála se zmenšila o $2{,}8\ mm$ a obsah se zmenšil o $140\ cm^2$.

Příklad 23

Při deformaci válce se jeho poloměr r zmenšil ze $3\ m$ na $2,7\ m$ a výška se zmenšila z $15\ m$ na $14,5\ m$. Určete změnu objemu a povrchu válce.

Řešení



Obr. 9: Na obrázku je původní (černý) válec a zmenšený (vínový) válec

a) objem

vzorec pro objem válce $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

uvažujeme tedy funkce o dvou proměnných $V = f\ (r, v)$

$$r = 3\ m$$
$$v = 15\ m$$
$$dr = -\ 0,3\ m$$
$$dv = -0.5\ m$$

Pro totální diferenciál platí $\Delta\, V\ \cong dV = V_r'\ dr + V_v'\ dv$

$$V_r'\ (r, v) = \pi \cdot 2r \cdot v = 2\pi r v$$
$$V_v'\ (r, v) = \pi \cdot r^2 \cdot 1 = \pi r^2$$

Dosazením získáváme

$$V_r'\ (3, 15) = 2\pi\ \cdot 3 \cdot 15 = 90\pi$$
$$V_v'\ (3, 15) = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

Totální diferenciál tedy je

$$dV = V_r' \, dr + V_v' \, dv = 90\pi \cdot (-0{,}3) + 9\pi \cdot (-0{,}5) = -27\,\pi - 4.5\,\pi$$
$$= -31,5\pi \cong -98,96\, m^3$$

Objem se zmenšil přibližně o $98,96\, m^3$.

b) Povrch

Vzorec pro povrch válce $S = 2\pi r \cdot (r + v)$

uvažujeme tedy funkce o dvou proměnných $V = f\,(r, v)$

$$r = 3\,m$$
$$v = 15\,m$$
$$dr = -\,0,3\,m$$
$$dv = -0.5\,m$$

$V_r'\,(r, v) = 2\pi\,(r + v) + 2\pi r = 2\pi r + 2\pi v + 2\pi r = 4\pi r + 2\pi v$
$V_v'\,(r, v) = 2\pi r$

Dosazením získáváme

$V_r'\,(3, 15) = 4\pi r + 2\pi v = 4\pi \cdot 3 + 2\pi \cdot 15 = 42\pi$

$V_v'\,(3, 15) = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$

Totální diferenciál je

$$df\,(3, 15) = 42\pi \cdot (-0, 3) + 6\pi \cdot (-0, 5) = -12, 6\pi - 3\pi = -15, 6\pi$$
$$\cong -49\, m^2$$

Povrch se zmenšil o 49 m^2.

Příklad 24

Určete změnu objemu rotačního elipsoidu o poloosách $a = 3m, b = 1.5\, m$, jestliže se obě poloosy zmenší o $0, 05\, m$.

$$a = 3$$

$$b = 1{,}5$$

$$da = db = -\,0,05\ m$$

Vzorec pro objem rotačního elipsoidu $V = \frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot b^2$

$$V_a'(a,b) = \frac{4}{3}\pi \cdot b^2$$

$$V_b'(a,b) = \frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot 2b$$

$$V_a'(3;1{,}5) = \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^2 = 3\pi$$

$$V_b'(3;1{,}5) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 12\pi$$

$$dV = 3\pi \cdot (-\,0.05) + 12\pi \cdot (-\,0,05) = -0,15\,\pi - 0,6\,\pi = -0,75\,\pi = \\ \cong -\,2,356\,m^3$$

Objem se zmenšil přibližně o $2,3562\ m^3$.

Příklad 25

Měřením poloměru podstavy *R* a výšky *H* válce se získaly následující výsledky:

$R = 2,5\ m \pm 0,1\ m; H = 4,0\ m\ \pm 0{,}2\ m$. S jakou absolutní chybou Δ a relativní chybou δ může být spočítán objem tohoto válce?

Řešení

Postupujeme jako v příkladu 2: vzorec pro objem válce $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

uvažujeme tedy funkce o dvou proměnných $V = f\,(r,v)$

$$r = 2,5\ m$$
$$v = 4,0\ m$$
$$dr = \pm\,0,1\ m$$
$$dv = \pm 0.2\ m$$

Pro totální diferenciál platí $\Delta\,V\ \cong dV = V_r'\,dr + V_v'\,dv$

$$V_r'(r,v) = \pi \cdot 2r \cdot v = 2\pi r v$$
$$V_v'(r,v) = \pi \cdot r^2 \cdot 1 = \pi r^2$$

Dosazením získáváme

$$V_r'(2{,}5;\ 4,0) = 2\pi\ \cdot 2{,}5 \cdot 4 = 20\pi$$

$$V_v^{'}\ (2{,}5;\ 4{,}0) = \pi 2{,}5^2 = 6{,}25\pi$$

Totální diferenciál tedy je

$$dV = V_r^{'}\, dr + V_v^{'}\, dv = 20\pi \cdot 0{,}1 + 6{,}25\pi \cdot 0{,}2 = 2\,\pi + 1{,}25\,\pi = 3{,}25\pi \cong$$
$$\cong 10{,}21\, m^3$$

Abychom zjistili relativní chybu, musíme znát skutečný objem válce:

$$V = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 4 \doteq 78{,}54\, m^3$$

Relativní chyba pak je

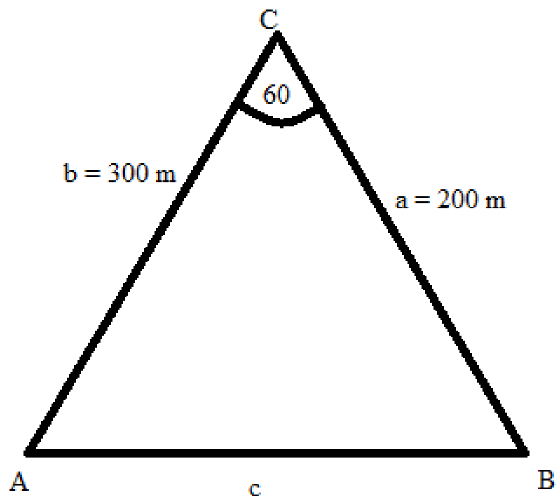
$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\delta V}{V} = \frac{10{,}21}{78{,}54} \doteq 0{,}13 \rightarrow 13\ \%$

Absolutní chyba je asi $10{,}21\, m^3$ a relativní chyba je 13 %.

Příklad 26

Strany trojúhelníku mají rozměry $a = 200\ m\ \pm 2\ m, b = 300\ m\ \pm 5\ m$ a úhel mezi nimi je roven $\gamma = 60°\ \pm 1°$. S jakou absolutní chybou lze vypočítat délku třetí strany trojúhelníka *c*?

Řešení



Obr. 10: Trojúhelník se zadanými velikostmi stran a úhlu

Využijeme kosinovou větu pro stranu *c*: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Tedy $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$

$$a = 200\, m$$

$$b = 300\, m$$

$$\gamma = 60° = \frac{\pi}{3}$$

$$da = 2\, m$$

$$db = 5\, m$$

$$d\gamma = 1° = \frac{\pi}{180}$$

$$f_a' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} \cdot (2a - 2b\cos y)$$

$$f_b' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} \cdot (2b - 2a\cos y)$$

$$f_\gamma' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} \cdot (2ab\sin\gamma)$$

Po dosazení hodnot dostáváme:

$$f_a' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{200^2 + 300^2 - 2 \cdot 200 \cdot 300 \cdot \cos\frac{\pi}{3}}} \cdot \left(2 \cdot 200 - 2 \cdot 300 \cdot \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{70\,000}} \cdot (400 - 300) = \frac{50}{\sqrt{70\,000}}$$

$$f_b' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{200^2 + 300^2 - 2 \cdot 200 \cdot 300 \cdot \cos\frac{\pi}{3}}} \cdot \left(2 \cdot 300 - 2 \cdot 200 \cdot \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{70\,000}} \cdot (600 - 200) = \frac{200}{\sqrt{70\,000}}$$

$$f_\gamma' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{200^2 + 300^2 - 2 \cdot 200 \cdot 300 \cdot \cos\frac{\pi}{3}}} \cdot \left(2 \cdot 200 \cdot 300 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{70\,000}} \cdot 60\,000 \cdot \sqrt{3} = \frac{30\,000 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{70\,000}}$$

Absolutní chyba (totální diferenciál) má tvar:

$$\Delta V = f_a^{\prime} da + f_b^{\prime} db + f_\gamma^{\prime} d\gamma = \frac{50}{\sqrt{70\,000}} \cdot 2 + \frac{200}{\sqrt{70\,000}} \cdot 5 + \frac{30\,000 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{70\,000}} \cdot \frac{\pi}{180} =$$
$$= \frac{100}{\sqrt{70\,000}} + \frac{1\,000}{\sqrt{70\,000}} + \frac{30\,000 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{70\,000}} \cdot \frac{\pi}{180} \cong 7,585\ m$$

Třetí stranu trojúhelníka lze vypočítat s absolutní chybou $7,585\ m$.

Závěr

Bakalářská práce je zaměřena na totální diferenciál. Ukazuje jak jeho geometrický význam, tak i řešené příklady s použitím totálního diferenciálu.

Cílem bakalářské práce bylo ukázat geometrický význam a na příkladech přiblížit použití totálního diferenciálu.

Bakalářská práce je rozdělena na čtyři kapitoly. První kapitola se zabývá parciálními derivacemi, které jsou nezbytné pro pochopení dalších kapitol: Z tohoto důvodu je této kapitole věnována značná pozornost.

Druhá kapitola se zabývá totálním diferenciálem. Totální diferenciál je zde definován a jsou zde obsaženy důležité věty a podmínky, které pro totální diferenciál platí.

První i druhá kapitola je doplněna vzorovými řešenými příklady.

Třetí kapitola ukazuje geometrický význam totálního diferenciálu

Čtvrtá kapitola obsahuje několik příkladů na použití totálního diferenciálu. Jsou zde obsaženy příklady na určení přibližné hodnoty výrazu .bez použití kalkulačky, pak příklady na určení rovnic normál a rovin a nakonec příklady, se kterými bychom se mohli setkat v reálném životě.

Vybrané příklady jsou vyobrazeny na grafech, které jsou tvořené v programu *Gnuplot.* Tento program je volně dostupný z internetu a i z toho důvodu jsem se rozhodla grafy vytvořit právě v tomto programu.

Referenční seznam

[1] Adams, R. 1991. Calculus: A complete course. Department of mathematics. Canada: University of British Columbia, Addison – Wesley Publishers. 942 s. ISBN 0 – 201 – 50944 – X.

[2] Děmidovič, B. P. 2003. Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Brno: Fragment. 461 s. ISBN 80 – 7200 – 587 – 1.

[3] Došlá, Z., Došlý, O. 2006. Diferenciální počet funkcí více proměnných. 3. Vydání. Brno: Masarykova univerzita. 144 s. ISBN 80 – 210 – 4159 – 5.

[4] Došlá, Z., Plch, R., Sojka, P. Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple [online]. [cit. 2014 – 20 - 03]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/hlavni.pdf

[5] Jarník, V. 1974. Diferenciální počet (I). 6. vydání. Praha: Academia. 392 s. BEZ ISBN.

[6] Jarník, V. 1976. Diferenciální počet (II). 3. vydání. Praha: Academia. 671 s. BEZ ISBN

[7] Kreml, P., Vlček, J., Volný, P. Matematika II. [online]. [cit. 2014 – 30 - 03]. Dostupné z: http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/

[8] Rektorys, K. a spol. 1963.Přehled užité matematiky, Praha: Státní nakladatelství technické literatury. 1136 s. BEZ ISBN

[9] Ostravský, J. 2009. Diferenciální počet funkce více proměnných, Nekonečné číselné řady. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. 158 s. ISBN 978 – 80 – 7318 – 856 – 6.

Seznam obrázků

Anotace

Jméno a příjmení:	Petra Nemcová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Doc. RNDr. Jitka Laitochová, Csc.
Rok obhajoby:	2014

Název práce:	Geometrický význam totálního diferenciálu
Název v angličtině:	Geometric meaning of the total differential
Anotace práce:	Hlavním cílem bakalářské práce je ukázat geometrický význam totálního diferenciálu a jeho využití v příkladech. Bakalářská práce je doplněna grafy programu *Gnuplot*. Bakalářská práce obsahuje kapitolu o parciálních derivacích, jejichž znalost je nezbytná pro výpočet totálního diferenciálu.
Klíčová slova:	Parciální derivace, totální diferenciál, geometrický význam, využití totálního diferenciálu
Anotace v angličtině:	The content of the bachelor´s thesis is to show the geometric meaning of the total differential and to show its using in the exercices. The bachelor´s thesis includes graphs which are made in the programm *Gnuplot*. The bachelor´s thesis includes a chapter about partial derivatives which are necessary for calculation of the total differential.
Klíčová slova v angličtině:	Partial derivative, total differential, geometric meaning, using of the total differential
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	54 stran
Jazyk práce:	Český jazyk