Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v ČB

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Rovnice na základních školách
Equations at high schools

Bakalářská práce

Vypracovala: Denisa Janů

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice

2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 22. dubna 2019.

....

Denisa Janů

Anotace

Bakalářská práce je zaměřená na problematiku rovnic, které se probírají na základních školách, případně v nižších třídách gymnázií. Žáci se při řešení rovnic a při jejich použití dopouštějí četných chyb, které pramení ze špatného způsobu řešení konkrétní rovnice, ale hlavně z nesprávného způsobu sestavení dané rovnice. První část bakalářské práce je zaměřena na druhy rovnic (např. lineární, kvadratické,...) a jejich způsob řešení. V druhé části je samotné použití rovnic při řešení jednotlivých úloh, kde se slovní úlohy řeší jak pomocí rovnice, tak i řešení pomocí úsudku, který se často na školách zanedbává. Na závěr jsou uvedeny úlohy na procvičení.

Abstract

The Bachelor's thesis is focused on the issues of equations, taught on elementary and high schools. Students make numerous errors when solving them, which stem from the wrong ways of solving these equations, but more importantly from assembling them. The first part of the thesis is focused on the types of equations (linear, quadratic, ...) and the ways of solving them. In the second part is the usage of equations when solving given problems. These word problems are solved through the usage of equations and the through the student's judgement, that most schools don't develop. There are exercises at the end of the thesis.

Poděkování

Chtěla bych poděkovat prof. RNDr. Pavlu Pechovi, Css. za odborné vedení mé bakalářské práce. Děkuji především za jeho cenné rady, připomínky a vždy optimistický přístup. Zároveň bych chtěla poděkovat mé rodině a příteli za podporu během studia.

Obsah

1 Úvod

Téma rovnic je jedním ze základních pilířů osnov matematiky na základních, středních i vysokých školách, takže tvoří značnou část matematiky. Cílem bakalářské práce je vytvořit celkový přehled, jak řešit jednotlivé druhy rovnic, protože dochází k chybám nejen při řešení, ale i k chybám, které plynou z nesprávného způsobu sestavení dané rovnice.

V první části jsou popsány jednotlivé druhy rovnic a způsob jejich řešení. Kromě klasického řešení zde najdeme i grafické řešení. U soustav rovnic je zmíněno řešení pomocí matic a Frobeinovy věty.

Část slovních úloh je věnována použití rovnic v jednotlivých úlohách. Kromě klasického řešení úloh pomocí rovnic lze některé úlohy řešit i pomocí úsudku, který je pro žáky přínosnější než jen řešení pomocí rovnice. Řešení úloh pomocí úsudku je ve školách opomíjeno. Úsudek lze vymyslet a pochopit, než jen sestavit a vyřešit rovnici. Proto jsou jednotlivé příklady v podkapitolách řešené pomocí rovnic a některé i pomocí úsudku.

Poslední část obsahuje úlohy na procvičení, kde jsou vybrané slovní úlohy.

Práce je především založená na příkladech a jejich řešení a ne na teorii. Rovnice a úlohy jsou buď převzaté a nebo mé vlastní. U převzatých úloh je někdy jiná formulace zadání nebo hodnoty. Tyto úlohy jsou citované a zdroj těchto úloh je uveden v seznamu použitých zdrojů a literatury.

Práce je vysázená systémem LaTeX, grafy jsou vytvořené v programu GeoGebra a obrázky v Malování.

2 Druhy rovnic

2.1 Lineární rovnice s jednou neznámou

2.1.1 Charakteristika

Lineární rovnici o jedné neznámé x nazýváme lineární proto, že neznámá x je zde pouze v první mocnině neboli $x = x^1$.

Rovnici můžeme zapsat v obecném tvaru: $ax + b = 0$, kde $a, b \in R$; $a, b \neq 0$. Kořenem K (řešením) rovnice $ax + b = 0$ může být:

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 .... x = -\frac{b}{a} ...... K = \left\{-\frac{b}{a}\right\},$$

$$a \neq 0 \wedge b = 0 .... ax = 0 .... K = \{0\},$$

$$a = 0 \wedge b \neq 0 .... 0x + b = 0 .... K = \emptyset,$$

$$a = 0 \wedge b = 0 .... 0x + 0 = 0 .... K = R.$$

Lineární rovnice s jednou neznámou má buď jedno řešení, nemá žádné řešení nebo má nekonečně mnoho řešení.

2.1.2 Ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úprava rovnice je taková úprava, při které rovnice před úpravou i po úpravě mají stejné kořeny (nepřibude ani neubude žádný kořen).

Ekvivalentní úpravy, které můžeme použít:

- přičtení (odečtení) k oběma stranám rovnice stejné číslo(mnohočlen),
- vynásobení (vydělení) obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly,
- zaměnění levé a pravé strany rovnice.

2.1.3 Řešení lineární rovnice s jednou neznámou

Řešte rovnici $3 \cdot (5 - 2x) - 1 = 4 - \frac{7x}{2}$ *a proveďte zkoušku* [1].

Řešení:

V dané rovnici nejprve odstraníme závorku.

$$\begin{aligned} 3\cdot(5-2x)-1 &= 4-\frac{7x}{2} \\ 15-6x-1 &= 4-\frac{7x}{2} \end{aligned}$$

Obě strany rovnice vynásobíme číslem 2, abychom odstranili zlomek.

$$28-12x = 8-7x$$

Převedeme neznámou x na jednu stranu.

$$\begin{aligned} 28-8 &= 12x-7x \\ 20 &= 5x \\ 5x &= 20 \end{aligned}$$

Celou rovnici vydělíme číslem 5, abychom získali řešení rovnice.

$$\begin{aligned} 5x &= 20 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Řešením (kořenem) rovnice je číslo 4. Tato rovnice má jedno řešení. Nyní zkouškou ověříme, zda jsme počítali dobře. Kořen $x = 4$ dosadíme do levé (L) a pravé (P) strany rovnice, po vypočítání se L=P.

Zkouška:

$$\begin{aligned} L(4) &= 3(5-2\cdot4)-1 = 3\cdot(-3)-1 = -10 \\ P(4) &= 4-\frac{7\cdot4}{2} = 4-\frac{28}{2} = 4-14 = -10 \\ L(4) &= P(4) \end{aligned}$$

Řešte rovnici $4-\frac{7-6x}{5} = 3+\frac{7x-3}{10}+\frac{x+1}{2}$ *a proveďte zkoušku*[1].

Řešení:

Danou rovnice roznásobíme společným násobkem čísel 5, 2 a 10.

$$\begin{aligned} 4-\frac{7-6x}{5} &= 3+\frac{7x-3}{10}+\frac{x+1}{2} & &|\cdot 10 \\ 4\cdot10-\frac{7-6x}{5}\cdot10 &= 3\cdot10+\frac{7x-3}{10}\cdot10+\frac{x+1}{2}\cdot10 \\ 40-(7-6x)\cdot2 &= 30+(7x-3)+(x+1)\cdot5 \end{aligned}$$

Roznásobíme závorky.

$$\begin{aligned} 40-(7-6x)\cdot 2 &= 30+(7x-3)+(x+1)\cdot 5 \\ 40-(14-12x) &= 30+7x-3+5x+5 \\ 40-14+12x &= 32+12x \\ 26+12x &= 32+12x \end{aligned}$$

Neznámou x převedeme na druhou stranu.

$$\begin{aligned} 26+12x &= 32+12x \\ 12x-12x &= 32-26 \\ 0 &= 6 \\ 0 &\neq 6 \end{aligned}$$

Tato rovnice nemá řešení, takže zkoušku provádět nemusíme.

Řešte rovnici $\frac{5x-1}{6}-\frac{3x-1}{4}=\frac{1}{12}(x+1)$ *a proveďte zkoušku* [1].

Řešení:

Danou rovnice roznásobíme společným násobkem čísel 6, 4 a 12, což je číslo 12, abychom se zbavili zlomků.

$$\begin{aligned} \frac{5x-1}{6}-\frac{3x-1}{4} &= \frac{1}{12}(x+1) \qquad |\cdot 12 \\ 12\cdot\frac{5x-1}{6}-12\cdot\frac{3x-1}{4} &= 12\cdot\frac{1}{12}(x+1) \\ 2(5x-1)-3(3x-1) &= x+1 \end{aligned}$$

Roznásobíme závorky a upravíme.

$$\begin{aligned} 2(5x-1)-3(3x-1) &= x+1 \\ 10x-2-9x+3 &= x+1 \\ x+1 &= x+1 \end{aligned}$$

Převedeme neznámou na levou stranu.

$$\begin{aligned} x+1 &= x+1 \\ x-x &= 1-1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L &= \frac{5x-1}{6} - \frac{3x-1}{4} = \frac{2\cdot(5x-1) - 3\cdot(3x-1)}{12} = \frac{1}{12}(x+1) \\ P &= \frac{1}{12}(x+1) \\ L &= P \end{aligned}$$

Řešením této rovnice je libovolné reálné číslo ($x \in R$). Pro libovolný kořen x se L=P.

2.2 Lineární rovnice s dvěma neznámými

2.2.1 Charakteristika

Pro jednu lineární rovnici s dvěma neznámými platí, že má nekonečně mnoho řešení. Kořen K (řešení) zapisujeme $[x, y]$ a čteme „uspořádaná dvojice x, y“.

Při řešení rovnice se dvěma neznámými využíváme stejné ekvivalentní úpravy jako u rovnice s jednou neznámou.

2.2.2 Řešení lineární rovnice se dvěma neznámými

Určete tři uspořádané dvojice čísel, které jsou řešením rovnice $3(x-2y) = x-3$. *Proveďte zkoušku* [1].

Řešení:

Z dané rovnice vyjádříme jednu neznámou, např. y.

$$\begin{aligned} 3(x-2y) &= x-3 \\ 3x-6y &= x-3 \\ -6y &= x-3x-3 \\ -6y &= -2x-3 \\ y &= \frac{x}{3}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Do této upravené rovnice dosazujeme za neznámou x libovolně zvolená čísla a vypočítáme k nim příslušné hodnoty neznámé y.

$x = 0:$

$$\begin{aligned} y &= \frac{0}{3}+\frac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{2} \\ [x,y] &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

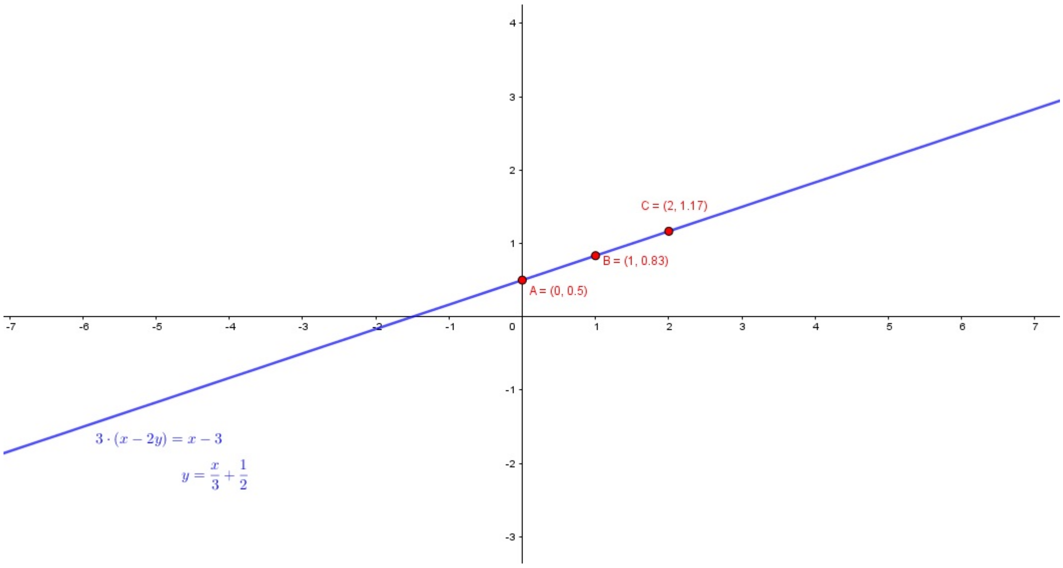
$x = 1:$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2} \\ y &= \frac{5}{6} \\ [x,y] &= \left[1, \frac{5}{6}\right] \end{aligned}$$

$x = 2:$

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}+\frac{1}{2} \\ y &= \frac{7}{6} \\ [x,y] &= \left[2, \frac{7}{6}\right] \end{aligned}$$

x	0	1	2
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$



Obrázek 1: Grafické řešení rovnice $3(x - 2y) = x - 3$

Zkouška:

pro $[x, y] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} L &= 3\left(0 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 3 \cdot (-1) = -3 \\ P &= 0 - 3 = -3 \\ L &= P \end{aligned}$$

pro $[x, y] = \left[1, \frac{5}{6}\right]$:

$$\begin{aligned} L &= 3\left(1 - 2 \cdot \frac{5}{6}\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{5}{3}\right) = -2 \\ P &= 1 - 3 = -2 \\ L &= P \end{aligned}$$

pro $[x,y] = \left[2, \frac{7}{6}\right]$:

$$\begin{aligned} L &= 3\left(1 - 2\cdot\frac{7}{6}\right) = 3\cdot\left(2-\frac{7}{3}\right) = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \\ P &= 2 - 3 = -1 \\ L &= P \end{aligned}$$

Řešením rovnice $3(x-2y) = x-3$ jsou např. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[1, \frac{5}{6}\right]$, $\left[2, \frac{7}{6}\right]$.

2.3 Soustavy dvou lineárních rovnic

Soustavu dvou lineárních rovnic můžeme obecně zapsat:

$$\begin{aligned} ax + by &= c, \\ dx + ey &= f, \end{aligned}$$

kde $a, b, c, d, e, f \in R$ a x, y jsou neznámé.

Má buď jedno řešení, žádné řešení nebo nekonečně mnoho řešení. Kořen K (řešení) soustavy je průnik všech řešení jednotlivých rovnic.

Soustavu dvou rovnic o dvou neznámých řešíme vyloučením jedné neznámé z některé z rovnic soustavy.

Metody řešení soustavy:

- sčítací - rovnice vynásobíme zvoleným číslem tak, aby koeficienty u x nebo y byly opačná čísla a po sečtení rovnic je jedna neznámá vyloučena,
- dosazovací - vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice soustavy a dosadíme je do druhé rovnice soustavy a jednu neznámou z této rovnice vyloučíme,
- grafická - jednotlivé rovnice zaneseme do grafu, ze kterého poznáme, co je řešením.

2.3.1 Sčítací metoda

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku [1].

$3x - 2y = 1$

$4x - y = -2$

Řešení:

Druhou rovnici vynásobíme (-2), tím budou koeficienty u neznámé y opačná čísla a po sečtení obou rovnic rovny 0.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ 4x - y &= -2 \qquad | \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -8x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Po této úpravě rovnice sečteme. Dostaneme rovnici o jedné neznámé a ekvivalentními úpravami dopočítáme.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -8x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5x &= 5 \qquad | \cdot (-5) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Už známe neznámou x. Neznámou y zjistíme dosazením x do jedné z rovnic soustavy.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ 3 \cdot (-1) - 2y &= 1 \\ -3 - 2y &= 1 \qquad | + 3 \\ -2y &= 4 \qquad | : (-2) \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L_1 &= 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) = -3 + 4 = 1 \\ P_1 &= 1 \\ L_1 &= P_1 \\ L_2 &= 4 \cdot (-1) - (-2) = -4 + 2 = -2 \\ P_2 &= -2 \\ L_2 &= P_2 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic je uspořádaná dvojice čísel $[-1, -2]$.

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku [1].

$\frac{x-y}{2} = 2y + 1$

$2 \cdot (5y - x) = 7$

Řešení:

Soustavu rovnic upravíme (zbavíme se zlomku, roznásobíme závorku).

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{2} &= 2y + 1 \qquad | \cdot 2 \\ 2 \cdot (5y - x) &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 4y + 2 \\ 10y - 2x &= 7 \end{aligned}$$

Všechny neznámé převedeme na levou stranu a ostatní na pravou stranu rovnice.

$$\begin{aligned} x - y &= 4y + 2 \qquad | - 4y \\ 10y - 2x &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 5y &= 2 \\ -2x + 10y &= 7 \end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme číslem 2 a poté rovnice sečteme.

$$\begin{aligned} x - 5y &= 2 \qquad\qquad | \cdot 2 \\ -2x + 10y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 10y &= 4 \\ -2x + 10y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0x + 0y &= 11 \\ 0 &\neq 11 \end{aligned}$$

Daná soustava rovnic nemá řešení. Zkoušku nemá smysl provádět.

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku [1].

$$\frac{3x-y}{2} = -1$$
$$-\frac{x+y}{x-y+1} = 2$$

Podmínka: $x \neq y - 1$

Řešení:

Zbavíme se zlomků.

$$\begin{aligned} \frac{3x-y}{2} &= -1 \qquad\qquad | \cdot 2 \\ -\frac{x+y}{x-y+1} &= 2 \qquad\qquad | \cdot (x-y+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y &= -2 \\ -(x+y) &= 2 \cdot (x-y+1) \end{aligned}$$

Neznámé převedeme na levou stranu.

$$\begin{aligned} 3x - y &= -2 \\ -x - y &= 2x - 2y + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y &= -2 \\ -3x + y &= 2 \end{aligned}$$

Nyní rovnice můžeme sečíst.

$$\begin{aligned} 3x - y &= -2 \\ -3x + y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0x + 0y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

$$\begin{aligned} 3x - y &= -2 \\ -3x + y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= y \\ y &= 3x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 3x + 2 \\ y &= 3x + 2 \end{aligned}$$

Řešení můžeme zapsat jako uspořádanou dvojici $[x, 3x + 2]$, kde $x \in R$.

Zkouška:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{3x-y}{2} = \frac{3x-(3x+2)}{2} = \frac{3x-3x-2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\
P_1 &= -1 \\
L_1 &= P_1 \\
L_2 &= -\frac{x+y}{x-y+1} = -\frac{x+(3x+2)}{x-(3x+2)+1} = -\frac{x+3x+2}{x-3x-2+1} = \\
&= -\frac{4x+2}{-2x-1} = \frac{-2\cdot(2x+1)}{(-1)\cdot(2x+1)} = 2 \\
P_2 &= 2 \\
L_2 &= P_2
\end{aligned}$$

2.3.2 Dosazovací metoda

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku [1].

$2\cdot(y+2) = 5\cdot(x+5)$

$\underline{5\cdot(y-5) = 2\cdot(x-2)}$

Řešení:

U rovnic roznásobíme závorky.

$$\begin{aligned}
2\cdot(y+2) &= 5\cdot(x+5) \\
5\cdot(y-5) &= 2\cdot(x-2) \\
\hline
2y+4 &= 5x+25 \\
5y-25 &= 2x-4
\end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme x.

$$\begin{aligned}
5y-25 &= 2x-4 \\
5y-25+4 &= 2x \qquad | \cdot 2 \\
x &= \frac{5y-21}{2}
\end{aligned}$$

Vyjádřenou neznámou x dosadíme do první rovnice, upravíme a zjistíme y.

$$\begin{aligned}
2y+4 &= 5\cdot\frac{5y-21}{2}+25 \qquad\qquad |\cdot 2\\
4y+8 &= 5\cdot(5y-21)+50\\
4y+8 &= 25y-105+50\\
8+105-50 &= 25y-4y\\
63 &= 21y\\
y &= \frac{63}{21}\\
y &= \frac{9}{3}\\
y &= 3
\end{aligned}$$

Víme, že $y=3$. Dopočítáme x.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{5y-21}{2}\\
x &= \frac{5\cdot 3-21}{2}\\
x &= \frac{15-21}{2}\\
x &= \frac{-6}{2}\\
x &= -3
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{2}{-3+5}=\frac{2}{2}=1\\
P_1 &= \frac{5}{3+2}=1\\
L_1 &= P_1\\
L_2 &= \frac{5}{-3-2}=\frac{5}{-5}=-1\\
P_2 &= \frac{2}{3-5}=\frac{2}{-2}=-1\\
L_2 &= P_2
\end{aligned}$$

Soustava rovnic má jedno řešení a tím je $[-3,3]$.

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku [1].

$3 \cdot (x-3) = 2 \cdot (y+1)$

$\underline{2 \cdot (x-y-2) = 4-x}$

Řešení:

Odstraníme zlomky, roznásobíme závorku a rovnice upravíme.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x-3) &= 2 \cdot (y+1) \\ 2 \cdot (x-y-2) &= 4-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-9 &= 2y+2 \\ 2x-2y-4 &= 4-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-2y &= 11 \\ 3x-2y &= 8 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme neznámou x.

$$\begin{aligned} 3x-2y &= 11 \\ x &= \frac{11+2y}{3} \end{aligned}$$

Nyní x dosadíme do druhé rovnice a vypočítáme y.

$$\begin{aligned} 3x-2y &= 8 \\ 3 \cdot \frac{11+2y}{3} - 2y &= 8 \\ 11+2y-2y &= 8 \\ 11 &\neq 8 \end{aligned}$$

Soustava rovnic nemá řešení. Zkoušku nemá smysl provádět.

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku [1].

$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$
$\underline{y = 2 \cdot (3 - x)}$

Řešení:

Ze soustavy rovnice odstraníme zlomky a roznásobíme závorku.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{6} &= 1 \qquad\qquad | \cdot 6 \\ y &= 2 \cdot (3 - x) \\ \hline 2x + y &= 6 \\ y &= 6 - 2x \end{aligned}$$

Do první rovnice dosadíme vyjádřenou neznámou y.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 2x + 6 - 2x &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[x, 6-2x]$, kde $x \in R$.

Zkouška:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = \frac{x}{3} + \frac{6 - 2x}{6} = \frac{2x + 6 - 2x}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ P_1 &= 1 \\ L_1 &= P_1 \\ L_2 &= y = 6 - 2x \\ P_2 &= 2 \cdot (3 - x) = 6 - 2x \\ L_2 &= P_2 \end{aligned}$$

2.3.3 Grafická metoda

Vyřešte soustavu rovnic pomocí grafické metody [1].

$4x - y = -3$

$\underline{2 \cdot (x - 3y) = 15}$

Řešení:

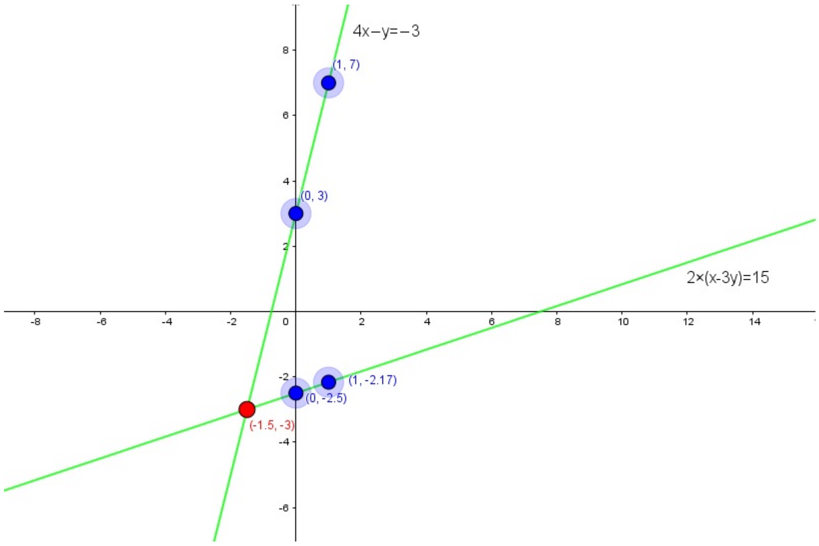
Zvolíme dvě libovolná x, které dosadíme $2 \cdot (x - 3y) = 15$ a poté i do $4x - y = -3$ a zjistíme neznámou y. Hodnoty zapíšeme do tabulky a zaneseme do kartézské soustavy souřadnic.

Hodnoty pro rovnici $2 \cdot (x - 3y) = 15$:

x	0	1
y	-2,5	-2,17

Hodnoty pro rovnici $4x - y = -3$:

x	0	1
y	3	7



Obrázek 2: Grafické řešení - dvě různoběžky

V grafu máme dvě různoběžky, které mají společný průsečík. Soustava rovnic má tedy jedno řešení a tím je uspořádaná dvojice [-1,5; -3].

Vyřešte soustavu rovnic pomocí grafické metody [1].

$$2 \cdot (5y - x) = 7$$
$$\frac{x - y}{2} = 2y + 1$$

Řešení:

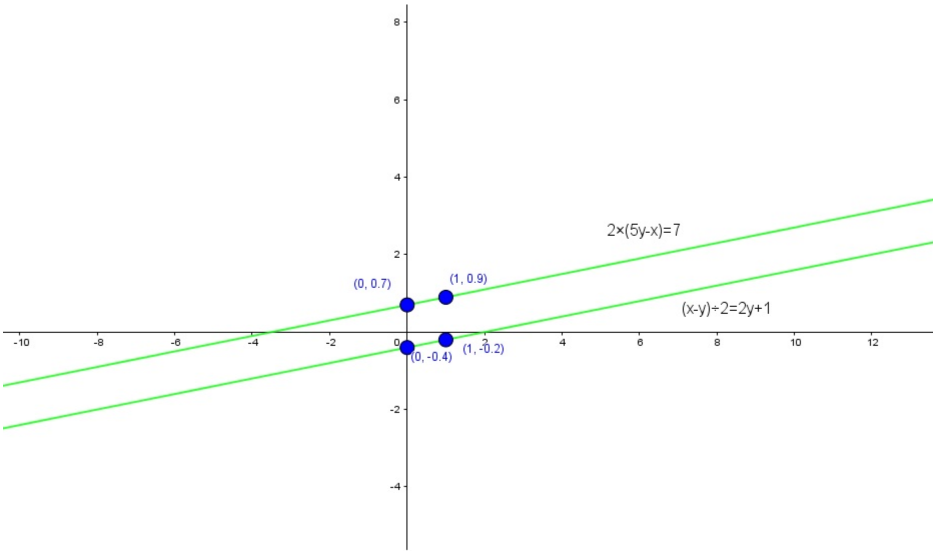
Zvolíme dvě libovolná x, které dosadíme $\frac{x-y}{2} = 2y + 1$ a poté i do $2 \cdot (5y - x) = 7$ a zjistíme neznámou y. Hodnoty zapíšeme do tabulky a poté zaneseme do kartézské soustavy souřadnic.

Hodnoty pro rovnici $\frac{x-y}{2} = 2y + 1$:

x	0	1
y	-0,4	-0,2

Hodnoty pro rovnici $2 \cdot (5y - x) = 7$:

x	0	1
y	0,7	0,9



Obrázek 3: Grafické řešení - dvě rovnoběžky

V grafu máme dvě rovnoběžky, které nemají žádný společný bod. Soustava rovnic nemá žádné řešení.

Vyřešte soustavu rovnic pomocí grafické metody [1].

$x - 0,2y = 0,6$

$\underline{2 \cdot (x - y) = 3 \cdot (1 - x) - y}$

Řešení:

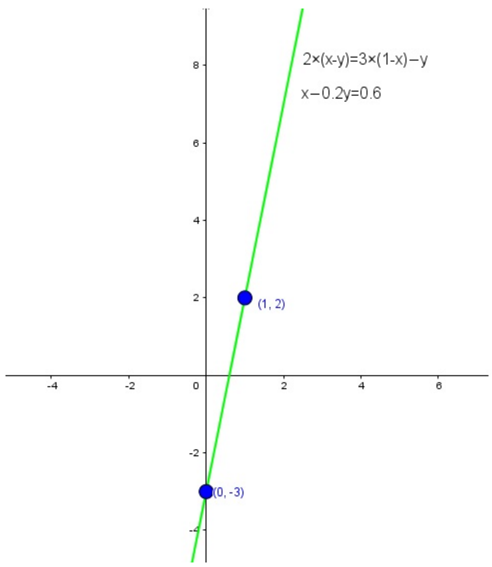
Zvolíme dvě libovolná x, které dosadíme $2 \cdot (x - y) = 3 \cdot (1 - x) - y$ a poté i do $x - 0,2y = 0,6$ a zjistíme neznámou y. Hodnoty zapíšeme do tabulky a zaneseme do kartézské soustavy souřadnic.

Hodnoty pro rovnici $2 \cdot (x - y) = 3 \cdot (1 - x) - y$:

x	0	1
y	-3	2

Hodnoty pro rovnici $x - 0,2y = 0,6$:

x	0	1
y	-3	2



Obrázek 4: Grafické řešení - jedna přímka

Dvě přímky nám splynuly v jednu, které mají všechny body společné. Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

2.3.4 Frobeniova věta

Máme m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Ze soustavy rovnic můžeme vytvořit matici A a rozšířenou matici A^* [2]. Matice soustavy A:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy A^*:

$$\mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

$$h(A) = h(A^*)$$

Hodnost matice je číslo, které udává počet nenulových řádků matice. Určíme ho pomocí tzv. Gaussovy eliminační metody.

Gaussova eliminační metoda slouží k převedení matice do odstupňovaného tvaru pomocí ekvivalentních úprav, u které na každém řádků přibude zleva alespoň jedna nula oproti řádku předchozímu.

Ekvivalentní úpravy matic:

- vzájemné prohození dvojice řádků matice,
- vynásobení řádku matice nenulovou konstantou,
- sčítání nebo odčítání násobku řádku matice k jinému řádku,
- odstranění nulového řádku.

Řešení soustavy rovnice může dopadnout:

- soustava má právě jedno řešení ... $h(A) = h(A^*) = n$,
- soustava má nekonečně mnoho řešení ... $h(A) = h(A^*) < n$,
- soustava nemá řešení ... $h(A) \neq h(A^*)$.

Vyřešte soustavu pomocí Frobeniovy věty.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= -3 \end{aligned}$$

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,75 \end{array}\right)$$

$$h(A) = 2$$

$$h(A^*) = 2$$

$$h(A) = h(A^*) = n = 2$$

Soustava rovnic má jedno řešení a tím je [-0,5; -0,75].

Vyřešte soustavu pomocí Frobeniovy věty.

$$\begin{aligned} x+y-3z &= 1 \\ 2x+3y-2z &= 1 \\ x+2y+z &= 3 \end{aligned}$$

Řešení:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} h(A) &= 2 \\ h(A^*) &= 3 \\ n &= 3 \\ h(A) &\neq h(A^*) \end{aligned}$$

Soustava rovnic nemá řešení.

Vyřešte soustavu pomocí Frobeniovy věty.

$$\begin{aligned} 2x-6y+4z &= 2 \\ -x+3y-2z &= -1 \end{aligned}$$

Řešení:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 2 \\ 2x &= 6y - 4z + 2 \\ x &= 3y - 2z + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(A) &= 1 \\ h(A^*) &= 1 \\ n &= 3 \\ h(A) = h(A^*) &< n \end{aligned}$$

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení, které můžeme zapsat jako uspořádanou trojici $[3y - 2z + 1; y; z]$.

2.4 Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice je rovnice, která obsahuje neznámou ve druhé mocnině (x^2). Jejíž obecný tvar můžeme zapsat jako $ax^2+bx+c = 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$. V rovnici se člen ax^2 nazývá kvadratický, člen bx lineární a člen c absolutní.

Typy kvadratických rovnic:

1. ryze kvadratická $ax^2 + c = 0; a \in R - \{0\}$,
2. kvadratická rovnice bez absolutního členu $ax^2+bx = 0; a \in R - \{0\}, b \in R$,
3. obecná kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0;\ a, b, c \in R$.

2.4.1 Řešení kvadratických rovnic

Ryze kvadratická rovnice

Postup:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x^2 &= -\frac{c}{a} \\ |x| &= \sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Pokud je $-\frac{c}{a} < 0$, tak rovnice nemá řešení.
Pokud je $-\frac{c}{a} > 0$ je řešením rovnice $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Vyřešte ryze kvadratickou rovnici $2x^2 - 8 = 0$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8 &= 0 && | +8 \\ 2x^2 &= 8 && | : 2 \\ x^2 &= 4 && | \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L(2) &= 2 \cdot 2^2 - 8 = 2 \cdot 4 - 8 = 0 \\ P(2) &= 0 \\ L(2) &= P(2) \\ L(-2) &= 2 \cdot (-2)^2 - 8 = 2 \cdot 4 - 8 = 0 \\ P(-2) &= 0 \\ L(-2) &= P(-2) \end{aligned}$$

Řešením je $x_{1,2} = \pm 2$.

Vyřešte ryze kvadratickou rovnici $3x^2 + 9 = 0$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 9 &= 0 \\ 3x^2 &= -9 \qquad \qquad | : 3 \\ x^2 &= -\frac{9}{3} \\ -\frac{9}{3} &< 0 \end{aligned}$$

Rovnice nemá řešení. Zkoušku nemá smysl provádět.

Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Postup:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x \cdot (ax + b) &= 0 \end{aligned}$$

Součin je roven nule, když alespoň jeden z činitelů je roven nule.

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ ax + b &= 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Vyřešte kvadratickou rovnici bez absolutního členu $4x^2 - 16x = 0$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16x &= 0 \\ x \cdot (4x - 16) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ 4x - 16 &= 0 \\ 4x &= 16 \\ x &= 4 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L(0) &= 4 \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 = 0 \\ P(0) &= 0 \\ L(0) &= P(0) \\ L(4) &= 4 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 = 0 \\ P(4) &= 0 \\ L(4) &= P(4) \end{aligned}$$

Řešením kvadratické rovnice jsou $x_1 = 0, x_2 = 4$.

Obecná kvadratická rovnice

Postup:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Řešení pomocí diskriminantu: $D = b^2 - 4ac$.

Rovnice je řešitelná v oboru reálných čísel pro $D \geq 0$.

Podmínky řešitelnosti:

- D>0, rovnice má dva různé reálné kořeny,
- D=0, rovnice má jeden dvojnásobný kořen,
- D<0, rovnice není v oboru reálných čísel řešitelná.

Kořeny kvadratické rovnice: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Vyřešte obecnou kvadratickou rovnici $5x^2 - 12x + 9 = 0$.

Řešení:

$$D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 144 - 180 = -44 < 0$$
$$D < 0$$

Rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

Vyřešte kvadratickou rovnici $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Řešení:

$$D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$$
$$D = 0$$

Rovnice má jeden dvojnásobný kořen.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned}
L\left(\frac{3}{2}\right) &= 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12 \cdot \frac{3}{2} + 9 = 4 \cdot \frac{9}{4} - 6 \cdot 3 + 9 = \\
&= 9 - 18 + 9 = 0 \\
P\left(\frac{3}{2}\right) &= 0 \\
L\left(\frac{3}{2}\right) &= P\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Řešením rovnice je $x = \frac{3}{2}$.

Vyřešte obecnou kvadratickou rovnici $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Řešení:

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0$$
$$D > 0$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \\
x_1 &= 5 \\
x_2 &= 1
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned}
L(5) &= 5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0 \\
P(5) &= 0 \\
L(5) &= P(5) \\
L(1) &= 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0 \\
P(1) &= 0 \\
L(1) &= P(1)
\end{aligned}$$

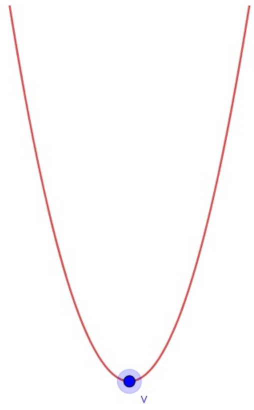
Řešením rovnice jsou $x_1 = 5, x_2 = 1$

2.4.2 Grafické řešení kvadratických rovnic

Kvadratickou rovnici můžeme také řešit pomocí proměnné kvadratické funkce s funkční hodnotou $y = 0$. Najdeme tím průsečíky grafu s osou x.

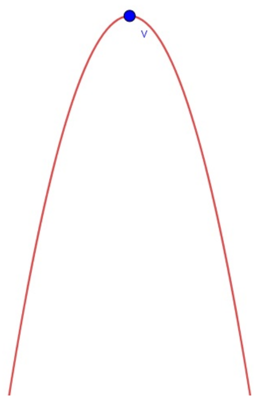
Kvadratická funkce má tvar $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0; a, b, c \in R$. Graf kvadratické funkce (otočení paraboly) závisí na a.

Pokud $a > 0$ - vrchol V je nejmenší hodnota v grafu, funkce je konvexní.



Obrázek 5: Konvexní funkce

Pokud $a < 0$ - vrchol V je největší hodnota v grafu, funkce je konkávní.



Obrázek 6: Konkávní funkce

Vrchol paraboly $V = [x_0, y_0]$ zjistíme pomocí vzorce, kde $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ a $y_0 = c - \dfrac{b^2}{4a}$ nebo pomocí metody doplnění na čtverec.

Doplnění na čtverec

Pomocí této metody můžeme vyjádřit kvadratickou funkci $y = ax^2 + bx + c$ ve tvaru $y = (x \pm x_0)^2 \pm y_0$, kde je vrchol $V = [x_0, y_0]$. Při této metodě využíváme vzorce $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Určete vrchol paraboly z daných rovnic.

Řešení:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x + 5 \\ y &= (x^2 + 2x + 1) - 1 + 5 \\ y &= (x+1)^2 + 4 \\ V &= [-1, 4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 1 \\ y &= (x^2 - 6x + 9) - 9 + 1 \\ y &= (x-3)^2 - 8 \\ V &= [3, -8] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - x + 7 \\ y &= (x^2 - 1x + 0,25) - 0,25 + 7 \\ y &= (x - 0,5)^2 + 6,75 \\ V &= [0,5; 6,75] \end{aligned}$$

Nyní si ukážeme, jak zjistit kořeny kvadratické rovnice pomocí grafického řešení.

Určete kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Řešení:

Kvadratická funkce má tvar $y = x^2 - 6x + 5$.

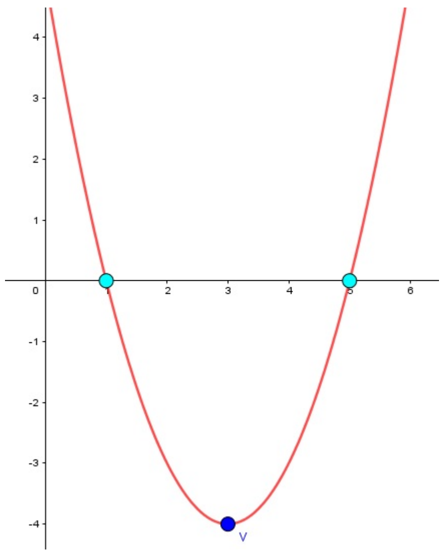
Funkce je konvexní, protože $a > 0$.

Nyní zjistíme vrchol pomocí doplnění na čtverec.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 5 \\ y &= (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 \\ y &= (x-3)^2 - 4 \\ V &= [3, -4] \end{aligned}$$

Vrchol lze zjistit také pomocí $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ a $y_0 = c - \dfrac{b^2}{4a}$.

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3 \\ y_0 &= c - \frac{b^2}{4a} = 5 - \frac{(-6)^2}{4 \cdot 1} = 5 - \frac{36}{4} = 5 - 9 = -4 \\ V &= [3, -4] \end{aligned}$$



Obrázek 7: Graf kvadratické funkce $y = x^2 - 6x + 5$

Najdeme průsečíky s osou x.

Kořeny kvadratické rovnice jsou $x_1 = 1$ a $x_2 = 5$.

Určete kořeny kvadratické rovnice $-3x^2 - 6x + 1 = 0$.

Řešení:

Kvadratická funkce má tvar $y = -3x^2 - 6x + 1$.

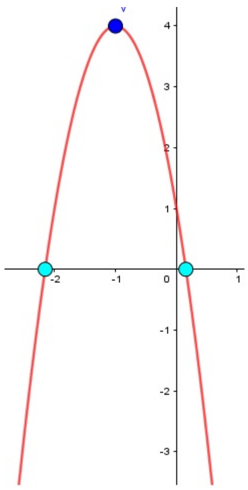
Funkce je konkávní, protože $a < 0$.

Nyní zjistíme vrchol pomocí doplnění na čtverec.

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 - 6x + 1 \\ y &= -3 \cdot (x^2 + 2x + 1^2) + 3 + 1 \\ y &= -3 \cdot (x + 1)^2 + 4 \\ V &= [-1, 4] \end{aligned}$$

Vrchol lze zjistit také pomocí $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ a $y_0 = c - \dfrac{b^2}{4a}$.

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot (-3)} = -1 \\ y_0 &= c - \frac{b^2}{4a} = 1 - \frac{(-6)^2}{4 \cdot (-3)} = 1 + \frac{36}{12} = 1 + 3 = 4 \\ V &= [-1, 4] \end{aligned}$$



Obrázek 8: Graf kvadratické funkce $y = -3x^2 - 6x + 1$

Najdeme průsečíky s osou x.

Kořeny kvadratické rovnice jsou $x_1 = -2,15$ a $x_2 = 0,15$.

2.5 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

V tomto typu rovnic se neznámá vyskytuje ve jmenovateli. Před samotným řešením rovnice určíme podmínky řešitelnosti, za kterých má rovnice smysl.

Rovnice s neznámou ve jmenovateli řešíme odstraněním zlomků z rovnice a upravením pomocí ekvivalentních úprav.

Výsledek (kořen) porovnáme s podmínkami řešitelnosti. Podmínka může totiž kořen vyloučit. Rovnice pak nemusí mít řešení. Pokud máme výsledek, provedeme i zkoušku.

Vyřešte rovnici $\frac{9}{x} = \frac{1}{3}$ *a proveďte zkoušku* [3].

Podmínky řešitelnosti: $x \neq 0$

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{9}{x} &= \frac{1}{3} \qquad | \cdot 3x \\ 27 &= x \\ x &= 27 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L(27) &= \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \\ P(27) &= \frac{1}{3} \\ L(27) &= P(27) \end{aligned}$$

Řešením rovnice je $x = 3$.

Vyřešte rovnici $\frac{4}{2x-1} = \frac{x}{4x-2}$ *a proveďte zkoušku*[3].

Podmínky řešitelnosti:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\neq 0 \\ 2x &\neq 1 \\ x &\neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 2 &\neq 0 \\ 4x &\neq 2 \\ x &\neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{2x-1} &= \frac{x}{4x-2} \\
\frac{4}{2x-1} &= \frac{x}{2\cdot(2x-1)} \qquad |\cdot 2\cdot(2x-1) \\
2\cdot 4 &= x \\
x &= 8
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned}
L(8) &= \frac{4}{2\cdot 8-1} = \frac{4}{15} \\
P(8) &= \frac{8}{4\cdot 8-2} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \\
L(8) &= P(8)
\end{aligned}$$

Řešením rovnice je $x = 8$.

Vyřešte rovnici $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{(x+2)\cdot(x+3)}$.

Podmínky řešitelnosti:

$$\begin{aligned}
x+2 &\neq 0 \\
x &\neq -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x+3 &\neq 0 \\
x &\neq -3
\end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} &= \frac{4}{(x+2)\cdot(x+3)} \qquad |\cdot(x+2)\cdot(x+3) \\
4\cdot(x+3) + 7\cdot(x+2) &= 4 \\
4x + 12 + 7x + 14 &= 4 \\
11x + 26 &= 4 \\
11x &= -22 \\
x &= -2
\end{aligned}$$

Pro $x = -2$ rovnice nemá smysl (podmínka řešitelnosti: $x \neq -2, x \neq -3$). Rovnice nemá řešení. Zkoušku nemá smysl provádět.

3 Slovní úlohy

3.1 Přímá úměrnost

Přímá úměrnost je závislost proměnné y na proměnné x, pro kterou platí:

- kolikrát se zvětší hodnota x, tolikrát se zvětší hodnota y,
- kolikrát se zmenší hodnota x, tolikrát se zmenší hodnota y.

Hodnoty x a y se mění ve stejném poměru.

Tuto závislost lze obecně zapsat jako $y = k \cdot x$, kde k je konstanta přímé úměrnosti.

Jeden rohlík stojí 2 Kč. Sestavte tabulku, kolik by stálo až 10 rohlíků.

Řešení:

x (počet kusů rohlíků)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (cena v Kč)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Kolikrát je větší počet koupených rohlíků, tolikrát je větší cena nákupu.

Kolikrát je menší počet koupených rohlíků, tolikrát je menší cena nákupu.

Počet rohlíků a ceny nákupů se mění ve stejném poměru.

Osobní automobil Škoda Combi má průměrnou spotřebu 8 litrů benzínu na 100 kilometrů. Kolik kilometrů lze ujet, když máme v nádrži 40 litrů benzínu [4]?

Řešení pomocí úsudku:

Nejdříve zjistíme na kolik km stačí 1 litr benzínu.

$$8\ l \quad .... \quad 100\ km$$
$$1\ l \quad .... \quad \frac{100}{8}\ km = \frac{25}{2}\ km = 12,5\ km$$

Výsledek vynásobíme 40.

$$40\ l \quad .... \quad 40 \cdot \frac{100}{8}\ km = 40 \cdot \frac{25}{2}\ km = 40 \cdot 12,5\ km = 500\ km$$

Nádrž, která má 40 l nám vystačí na 500 kilometrů.

Řešení pomocí trojčlenky:

Uvažujeme, že počet ujetých kilometrů se zvyšuje ve stejném poměru, jako se zvyšuje počet litrů spotřebovaného benzínu.

$$\begin{array}{c} 8\ l ......100\ km \\ \underline{\uparrow 40\ l ....y\ km \uparrow} \end{array}$$

K zápisu připojíme dvě šipky, které mají stejný směr. Začínáme šipkou od neznámé y. Šipkami vyjádříme, že počet kilometrů je přímo úměrný spotřebě benzínu.

Šipky nám zároveň ukazují, jak máme jednotlivé členy zapsat do rovnice.

$$\begin{array}{c} 8\ l .....100\ km \\ \underline{\uparrow 40\ l ....y\ km \uparrow} \\ y \div 100 = 40 \div 8 \\ \dfrac{y}{100} = \dfrac{40}{8} \end{array}$$

Rovnici podle ekvivalentních úprav upravíme a dopočítáme.

$$\begin{aligned} \frac{y}{100} &= \frac{40}{8} \\ \frac{y}{100} &= 5 \qquad \mid \cdot 100 \\ y &= 500 \end{aligned}$$

Jiným způsobem jsme se dostali ke stejnému řešení.

3.1.1 Řešení přímé úměry pomocí trojčlenky

Trojčlenka je postup řešení úlohy, pomocí které sestavíme rovnosti dvou poměrů s jedním neznámým členem a následně jeho výpočtu.

V poměrech známe tři členy a jeden neznámý člen.

Jeden kilogram vážených citronů stojí 19 Kč. $1,4$ *kg citronů v balíčku stojí 31,5 Kč. Které z citronů jsou dražší - vážené a nebo ty v balíčku*[4]?

Řešení:

Abychom zjistili, které citrony jsou dražší, spočítáme cenu za kg u balíčkových citronů a poté ceny už jen porovnáme.

$$\begin{array}{ccccc} & 1,4\ kg & .... & 31,5\ Kč & \\ \uparrow & 1\ kg & .... & y\ Kč & \uparrow \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{31,5} &= \frac{1}{1,4} \\ 1,4y &= 31,5 \\ y &= 22,5\ Kč \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22,5\ Kč &> 19\ Kč \\ 22,5\ Kč &- 19\ Kč = 3,5\ Kč \end{aligned}$$

Dražší jsou citrony v balíčku, 1 kg nás vyjde o 3,5 Kč více než u vážených citronů.

Zjistěte kolik gramů ryzího zlata je v 10 gramech osmikarátového zlata, pokud 1 karát je $\frac{1}{24}$ *obsahu zlata ve slitině* [4].

Řešení:

$$\begin{array}{rccl} & 1\ \mathit{karát} & \ldots\ldots & \frac{1}{24}\ \mathit{obsahu\ zlata} & \\ \uparrow & 8\ \mathit{karátů} & \ldots\ldots\ldots\ldots & y\ \mathit{obsahu\ zlata} & \uparrow \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{\frac{1}{24}} &= \frac{8}{1} \\ 24y &= 8 \\ y &= \frac{8}{24} \end{aligned}$$

Osmikarátové zlato je slitina, ve které je hmotnost ryzího zlata a slitiny v poměru 8:24. Je zde 8 dílů ryzího zlata 16 dílů příměsi.

Nyní stačí spočítat kolik ryzího zlata je v 10 g zlata.

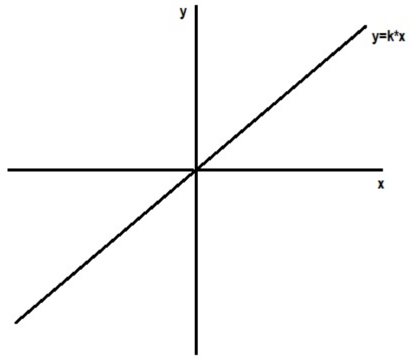
$$\frac{8}{24} \cdot 10 = \frac{80}{24} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \doteq 3,33\ g$$

Osmikarátové zlato obsahuje 3,33 g ryzího zlata.

3.1.2 Graf přímé úměrnosti

Přímou úměrnost můžeme zapsat obecně ve tvaru rovnice $y = k \cdot x$, kde k je koeficient přímé úměrnosti.

Graf přímé úměrnosti je obecně přímka procházející počátkem kartézské soustavy souřadnic, kde $Df = x \in R$.



Obrázek 9: Graf přímé úměrnosti

Ve většině případech si vystačíme s polopřímkou nebo s úsečkou a to vzhledem k definičnímu oboru (např. $Df = x \geq 0$).

U většiny případů přímé úměrnosti si vystačíme s prvním kvadrantem kartézské soustavy souřadnic - pracujeme jen s kladnými čísly.

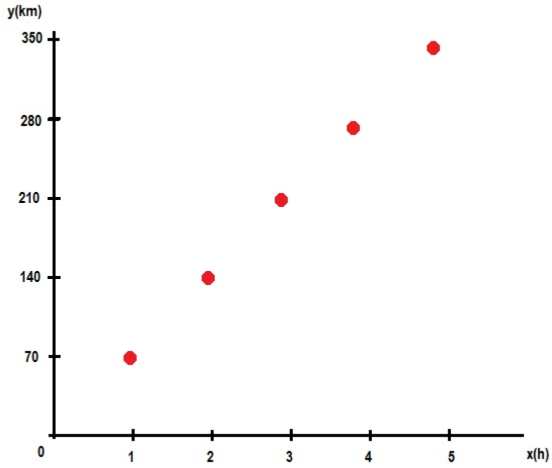
Nákladní automobil jede průměrnou rychlostí 70 km/h. Určete kolik kilometrů ujede za 1, 2, 3, 4, 5 hodin. Hodnoty zaneste do grafu a zjistěte rovnici přímé úměrnosti.

Řešení:

Sestavíme si tabulku s hodnotami.

čas (h)	1	2	3	4	5
počet ujetých km	70	140	210	280	350

Z vypočtených hodnot sestrojíme graf závislosti dráhy na čase.



Obrázek 10: Graf přímé úměrnosti-příklad

Vypočítáme rovnici přímé úměrnosti.

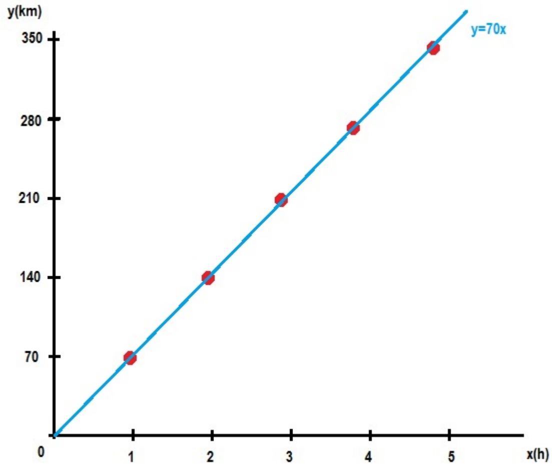
$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 70 \\ k &= ? \\ y &= k \cdot x \\ 70 &= k \cdot 1 \\ k &= 70 \end{aligned}$$

Koeficient přímé úměrnosti je $k = 70$.

Rovnice přímé úměrnosti je $y = 70x$.

Graf máme pouze v kladných hodnotách, protože rychlost ani čas nejsou záporné.

Všechny body grafu přímé úměrnosti leží na polopřímce, která začíná v počátku.



Obrázek 11: Graf přímé úměrnosti - závislost dráhy na čase

3.2 Nepřímá úměrnost

Nepřímá úměrnost je závislost proměnné y na proměnné x pro kterou platí:

- kolikrát se zvětší hodnota x, tolikrát se zmenší hodnota y,
- kolikrát se zmenší hodnota x, tolikrát se zvětší hodnota y.

Hodnoty y a hodnoty x se mění v převrácených poměrech.

Proměnná y je nepřímo úměrná proměnné x.

Tuto závislost lze obecně zapsat jako $y = \frac{x}{k}$, kde k je konstanta nepřímé úměrnosti.

Doplňte níže uvedenou tabulku, aby závislost y a x byla nepřímá úměrnost.

x	1	2	4	10
y	5	-	-	-

Řešení:

Známe vztah nepřímé úměry $y = \frac{x}{k}$

Zjistíme si koeficient k nepřímé úměry.

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 5 \\ k &= ? \\ y &= \frac{x}{k} \\ 5 &= \frac{1}{k} \\ 5k &= 1 \\ k &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Tato nepřímá úměra má rovnici ve tvaru $y = \dfrac{x}{5}$.
Pro $x = 2$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{5} \\ y &= \frac{2}{5} = 0,4 \end{aligned}$$

Pro $x = 4$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{5} \\ y &= \frac{4}{5} = 0,8 \end{aligned}$$

Pro $x = 10$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{5} \\ y &= \frac{10}{5} = 2 \end{aligned}$$

Nyní známe hodnoty této nepřímé úměry o rovnici $y = \dfrac{x}{5}$.

x	1	2	4	10
y	5	0,4	0,8	2

Máme prázdnou vodní nádrž, kterou chceme naplnit vodou. Do nádrže přitéká voda rychlostí 2 hektolitry za minutu. Nádrž se tak naplní za 7 hodin.

Za jak dlouho by se nádrž naplnila, kdybychom použili výkonnější čerpadlo, které přivede 700 litrů za minutu [4]?

Řešení pomocí úsudku:

Kolikrát se zvětší rychlost přitékané vody, tolikrát se zmenší doba potřebná k naplnění nádrže.

Jedná se o nepřímou úměru - rychlost a čas se mění v převrácených poměrech.

Vypočítáme si, jak dlouho by se nádrž plnila rychlostí 1 litru za minutu.

rychlost vody	doba plnění nádrže
200 litrů za min	7 hodin
1 litr za min	200 krát delší doba než při rychlosti 200 l za min, což je 1400 hodin
700 litrů za minutu	700 krát kratší doba než při rychlosti 1 l za min, což je 2 hodiny

Výkonnější čerpadlo naplní vodní nádrž za 2 hodiny.

Řešení pomocí trojčlenky:

Neznámou x bude počet hodin, za kterou se nádrž naplní vodou výkonnějším čerpadlem.

$$200 \text{ } \textit{litrů} ....7 \text{ } h$$
$$\underline{\downarrow 700 \text{ } \textit{litrů} ....y \text{ } h \uparrow}$$

Šipky v zápisu mají různý směr, tím vyjádříme, že doba plnění nádrže je nepřímo úměrná rychlosti přitékané vody.

Rovnici zapíšeme ve směru šipek, přičemž začínáme u neznámé x. Sestavenou rovnici poté dopočítáme.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{7} &= \frac{200}{700} \qquad | \cdot 7 \cdot 700 \\
700x &= 200 \cdot 7 \\
700x &= 1400 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Jiným způsobem jsme došli ke stejnému výsledku, že se nádrž naplní za 2 hodiny při rychlosti 700 l za minutu.

3.2.1 Řešení nepřímé úměry pomocí trojčlenky

Ve třídě je 26 dětí. Paní učitelka dělala vyúčtování výletu. Veškeré výdaje se zaplatily a ještě něco zbylo. Paní učitelka povídá dětem: „Ve třídě je vás 26, takže každý dostane zpátky 69 Kč.“Na to ale Honza namítl: „Ale Lenka, Lucka a Petr byli nemocní, neplatili zálohu a nebyli na výletě.“ Částka, která se má vrátit každému účastníkovi výletu není tedy správně a musí se přepočítat. Kolik dostane nazpátek každý žák, který byl na výletu?

Řešení:

Víme, že každý z 26 dětí, by dostal nazpátek 69 Kč.

3 děti však byly nemocné. Částku musíme tedy přepočítat na 23 dětí. Neznámá x bude částka, která bude vrácena každému účastníkovi výletu.

$$\begin{gathered}
26 \textit{ dětí}..........69 \textit{ Kč} \\
\underline{\downarrow 23 \textit{ dětí}..........x \textit{ Kč} \uparrow}
\end{gathered}$$

Čím menší bude počet dětí, tím větší bude vracená částka. Jedná se tedy o nepřímou úměru.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{69} &= \frac{26}{23} \qquad | \cdot 69 \cdot 23 \\
23x &= 26 \cdot 69 \\
23x &= 1794 \\
x &= 78
\end{aligned}$$

Každý účastník výletu dostane nazpátek 78 Kč.

Stroj má dvě ozubená kola. Větší z nich má 40 zubů a menší 25 zubů. Větší kolo se otočí 20 krát. Vypočítejte kolikrát se otočí menší kolo?

Řešení:

Neznámou x bude počet otočení menšího kola.

Kolikrát se zmenší počet zubů ozubeného kola, tolikrát se zvětší počet otočení kola. Jde tedy o nepřímou úměru.

$$40 \textit{ zubů} \ldots\ldots\ldots 20 \textit{ krát}$$

$$\underline{\downarrow 25 \textit{ zubů} \ldots\ldots\ldots x \textit{ krát} \uparrow}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{20} &= \frac{40}{25} \qquad\qquad | \cdot 20 \cdot 25 \\
25x &= 40 \cdot 20 \\
25x &= 800 \\
x &= 32
\end{aligned}$$

Menší kolo, které má 25 zubů se otočí 32 krát.

Řešení pomocí úsudku:

Stačí si uvědomit, že na jedno otočení většího kola je potřeba 40 zubů. My víme, že toto kolo se otočilo 20 krát. Takže celkem prošlo za 20 otočení $20 \cdot 40 = 800$ zubů.

Obě kola se otáčela zároveň.Menší kolo se muselo otáčet rychleji, protože má menší počet zubů.

Kolikrát se otočilo menší kolo zjistíme výpočtem: $800 \div 25 = 32$, protože menší kolo bude také potřebovat 800 zubů akorát na více otočení.

Tímto způsobem dojdeme ke stejnému výsledku.

Zahradníci vysazují v parku 120 keřů. První den pracovalo 6 zaměstnanců 8 hodin a vysadili polovinu keřů. Druhý den pracovalo 9 zaměstanců a vysázeli *druhou polovinu. Jak dlouho druhý den pracovali, pokud předpokládáme, že pracovali stejným tempem?*

Řešení:

Neznámá x bude počet hodin sázení keřů druhý den.

$$\begin{array}{c} 6 \textit{ zaměstnanců.........}8 \textit{ hodin} \\ \underline{\downarrow 9 \textit{ zaměstnanců..........}x \textit{ hodin} \uparrow} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{8} &= \frac{6}{9} \qquad\qquad | \cdot 8 \cdot 9 \\ 9x &= 6 \cdot 8 \\ 9x &= 48 \\ x &\doteq 5,33 \\ x &\doteq 5 \textit{ hodin } 20 \textit{ minut} \end{aligned}$$

9 zahraníků sázelo druhý den stromky 5 hodin 20 minut.

Příklad k zamyšlení: Dva lidé kopou studnu 100 hodin. Za jak dlouho vykope tu samou studnu 100 lidí [4]?

V tomto případě se nejedná o nepřímou úměru. Dovedete si představit, jak 100 lidí kope jednu studnu? Jak by se do ní vešli?

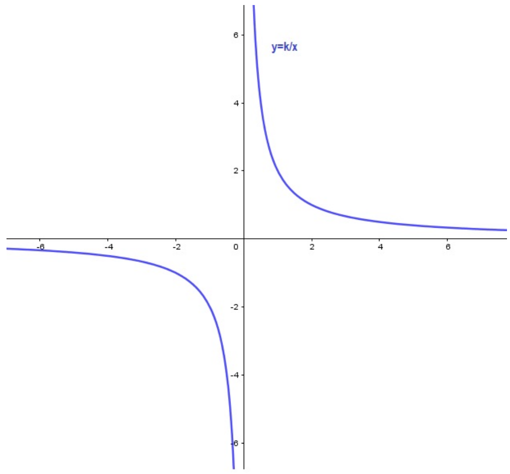
V jedné studně tedy nemůže najednou pracovat 100 lidí.

3.2.2 Graf nepřímé úměry

Nepřímá úměra je dána vzorcem $y = \frac{k}{x}$, kde k je koeficient různý od nuly.

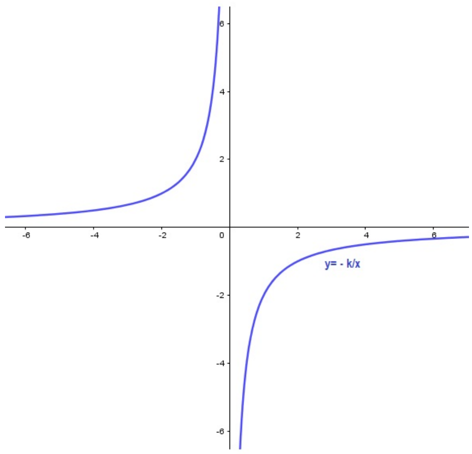
Graf nepřímé úměry je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

Pro $k > 0$:



Obrázek 12: Graf nepřímé úměrnosti pro kladné k

Pro $k < 0$:



Obrázek 13: Graf nepřímé úměrnosti pro záporné k

Definičním oborem jsou všechna čísla různá od nuly ($Df = x \in R - \{0\}$).
Obor Hodnot jsou všechna čísla různá od nuly ($Hf = y \in R - \{0\}$).
Křivka grafu se nazývá hyperbola.

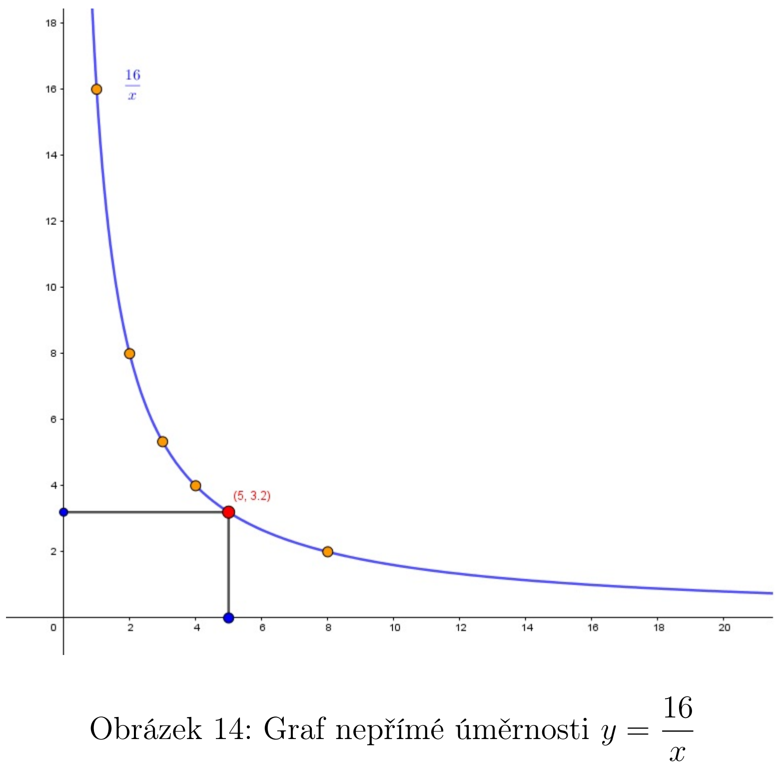
Jeden zedník postaví zeď za 16 hodin. Osm zedníků postaví tu samou zeď za

2 hodiny. Sestrojte graf a zjistěte za jak dlouho by udělalo zeď 5 dělníků?

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ y_1 &= 16 \\ k &= ? \\ y &= \frac{k}{x} \\ 16 &= \frac{k}{1} \\ k &= 1 \\ y &= \frac{16}{x} \end{aligned}$$

Tato nepřímá úměra má rovnici ve tvaru $y = \dfrac{16}{x}$.

x (počet zedníků)	1	2	3	4	8
y (h)	16	8	$\frac{16}{3}$	4	2



Obrázek 14: Graf nepřímé úměrnosti $y = \dfrac{16}{x}$

Vystačíme si s prvním kvadrantem, protože pracujeme pouze v kladných číslech.

Pět zedníků postaví zeď za $3,2\ h = 3\ h\ 12\ min$.

3.3 Slovní úlohy o směsích a roztocích

3.3.1 Řešení pomocí soustavy rovnic

Tento typ slovních úloh vede na soustavu rovnic, kterou stačí už jen vyřešit.

Cukrář chce namíchat 10 *kg ovocné směsi, ve které budou maliny a borůvky. Tato ovocná směs bude stát* 163 *Kč za kg. Jeden kilogram malin stojí* 175*Kč a jeden kilogram borůvek* 155 *Kč. Kolik kterého ovoce budeme do* 10 *kg směsi potřebovat?*

Řešení:

Neznáme hmotnost malin a borůvek, které přijdou do směsi.

hmotnost malin ...... x kg

hmotnost borůvek .... y kg

Vyjádříme si cenu směsi.

cena malin ve směsi .... $(175 \cdot x)$ *Kč*

cena borůvek ve směsi .... $(155 \cdot x)$ *Kč*

cena malin a borůvek ve směsi ...... $(175 \cdot x + 155 \cdot y)$ *Kč*

celkem za 10 kg směsi .... $(163 \cdot 10)$ *Kč*

Ze zjištěných údajů sestavíme soustavu rovnic, kterou vyřešíme.

$$\begin{aligned}
x + y &= 10 \\
175x + 155y &= 163 \cdot 10 \\
x &= 10 - y \\
175 \cdot (10 - y) + 155y &= 1630 \\
1750 - 175y + 155y &= 1630 \\
-20y &= -120 \\
y &= 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 10 - y \\ x &= 10 - 6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Budeme potřebovat 4 kg malin a 6 kg borůvek, což dá dohromady 10 kg.

10 kg směsi bude stát $175 \cdot 4 + 155 \cdot 6 = 1630$ *Kč*.

Lékárník má připravit 3%ní roztok ke kloktání. Má k dispozici 300 ml 30%ního roztoku peroxidu vodíku. Kolik do něj musí přidat destilované, aby vznikl požadovaný roztok[3]?

Řešení:

Vyjádříme si neznámou x a y.

původní 30%ní roztok .... 300 *ml*

počet ml destilované vody .... x *ml*

počet ml přidané vzniklého 3%ního roztoku .... y *ml*

Druhou rovnici soustavy budeme sestavovat s procentním zastoupením jednotlivých roztoků.

množství peroxidu vodíku v 30%ním roztoku .... $0,3 \cdot 300$

množství destilované vody - neobsahuje peroxid vodíku .... $0 \cdot x$

množství peroxidu vodíku v 3%ním roztoku .... $0,03 \cdot y$

Ze zjištěných údajů sestavíme soustavu rovnic, kterou vyřešíme.

$$\begin{aligned} 300 + x &= y \\ 0,3 \cdot 300 + 0 \cdot x &= 0,03y \\ 90 &= 0,03y \\ y &= 3000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 300 + x &= 3000 \\ x &= 2700 \end{aligned}$$

Do 30%ního roztoku musíme přidat 2700 ml destilované vody, aby vznikl 3%ní roztok.

3.3.2 Řešení pomocí úsudku

Chceme připravit pomerančový džus. Pomerančový koncentrát rozředíme vodou v poměru 1:12. Kolik koncentrátu a vody bude potřeba do nádoby o objemu 800 ml [3].

Řešení:

Vyjádříme si neznámou x a y.

objem vody v džusu .... x *ml*

objem koncentrátu v džusu ..... y *ml*

celkový objem láhve .... 800 *ml*

objem džusu .... $(x + y)$ *ml*

Džus obsahuje 1 díl koncentrátu a 12 dílů vody.

Celkový objem 800 ml vydělíme 13 a tím zjistíme 1 díl.

$$\frac{800}{13} \doteq 61,54$$

Víme, že džus je v poměru 12:1. Vody je tedy 12 dílů a koncentrátu 1 díl.

$$\frac{800}{13} \cdot 12 \doteq 738 \ \textit{ml vody}$$

$$\frac{800}{13} \cdot 1 \doteq 62 \ \textit{ml koncentrátu}$$

K přípravě džusu je potřeba 738 ml vody a 62 ml koncentrátu.

Skupina 15 dětí měla v obálce 26 mincí - 13 pětikorun a 13 desetikorun. Děti si peníze z obálky rovnoměrně rozdělily, ale nejprve musely několik mincí rozměnit. K tomu využily nedalekého automatu, který mění peníze na korunové mince. Děti do automatu vložily nejmenší možný počet mincí, aby získaly *potřebné mince. Kolik korun dostalo každé dítě? Kolik mincí děti vložily do automatu? Kolik korunových mincí děti získaly z automatu* [6]?

Řešení:

V obálce máme k dispozici 13 pětikorun a 13 desetikorun.

Obrázek 15: Mince v obálce

Nejprve si zjistíme kolik máme korun k rozdělení.

$$13 \cdot 5 + 13 \cdot 10 = 65 + 130 = 195$$

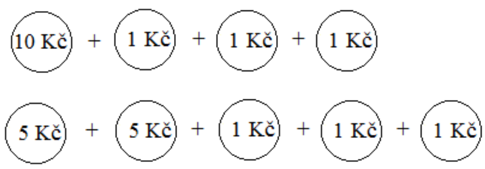
Celkem je v obálce 195 Kč, které si má rozdělit 15 dětí.

$$195 \div 15 = 13$$

Každé dítě dostane 13 Kč.

Nyní však má pouze k dispozici pětikoruny a desetikoruny.

13 Kč lze vyplatit pomocí pětikorun, desetikorun a korun takto:



Obrázek 16: Rozdělení 13ti Kč

Pro každé dítě budeme potřebovat tři jednokoruny a pro 15 dětí celkem $15 \cdot 3 = 45$ Kč drobných.

Budeme potřebovat 45 korun a usilujeme o to vložit do automatu, co nejmenší počet mincí, proto nejdříve budeme dávat do automatu mince s větší hodnotou, což jsou desetikoruny a poté zbytek bude v pětikorunách, abychom měnili co nejmenší počet mincí.

$$45\ K\check{c} = 10\ K\check{c} + 10\ K\check{c} + 10\ K\check{c} + 10\ K\check{c} + 5\ K\check{c}$$

Do automatu děti musí vložit 5 mincí. Získají tak 45 korunových mincí.

Peníze si děti rozdělí takto:

$$\begin{gathered}
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}
\end{gathered}$$

Do automatu mohou vložit i pět desetikorun, takže také 5 mincí.

A v tomto případě budou mít 50 korunových mincí.

Peníze by šly tedy rozdělit i takto:

$$\begin{gathered}
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}\\
10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}
\end{gathered}$$

$$10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$10\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$5\ K\check{c} + 5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$
$$5\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c} + 1\ K\check{c}$$

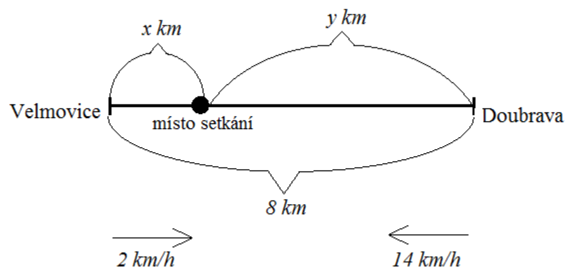
3.4 Slovní úlohy o pohybu

3.4.1 Řešení pomocí soustavy rovnic či jedné rovnice

Tonda jede na návštěvu k Jirkovi do Doubravy. Do Velmovic dojel Tonda vlakem. Poté musí 8 km pěšky do Doubravy. V tuto chvíli dá vědět Jirkovi telefonem, že už vyráží na cestu a Jirka vyjíždí na kole Tondovi naproti. Tonda jde rychlostí 2 km/h a Jirka jede rychlostí 14 km/h. Kolik kilometrů ujde Tonda než se setká s Jirkou? Kolik kilometrů ujede k setkání Jirka?

Řešení:

Nejprve si načrtneme nákres celé situace pro řešení této úlohy.



Obrázek 17: Nákres úlohy o pohybu 1

dráha Tondy .... x km

dráha Jirky .... y km

dráha celkem .... $(x+y)$ km

dráha celkem .... 8 km

čas, který stráví na cestě Tonda .... $\frac{x}{2}$ h

čas, který stráví na cestě Jirka .... $\frac{x}{14}$ h

Ze zápisu je patrné, že více km ujede Jirka na kole než Tonda pěšky. Oba chlapci však stráví stejný čas na cestě.

Z těchto údajů sestavíme soustavu rovnic s neznámými x, y a vyřešíme ji.

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ \frac{x}{2} &= \frac{y}{14} \qquad | \cdot 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ 7x &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 7x &= 8 \\ 8x &= 8 \\ x &= 1 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Tonda ujde 1 km a Jirka ujede 7 km, než se setkají.

Vašek si s Evou domluvil schůzku a vyrazil za ní rychlostí 6 km/h. Cesta je dlouhá 5 km. Eva však nevyšla hned, ale zdržela se 15 minut líčením a úpravou svého zevnějšku. Poté šla rychlostí 4 km/h. Kolik kilometrů ujde Vašek k místu setkání? Kolik ujde Eva? Jak dlouho půjde Vašek, než se s Evou setká [5]?

Řešení:

U této úlohy je nutné si uvědomit, že Eva a Vašek nevyšli ve stejnou dobu. Určíme si jakou vzdálenost ušel Vašek za 15 minut, když Eva byla ještě doma.

$$15\ min = \frac{15}{60}\ h = \frac{1}{4}\ h$$

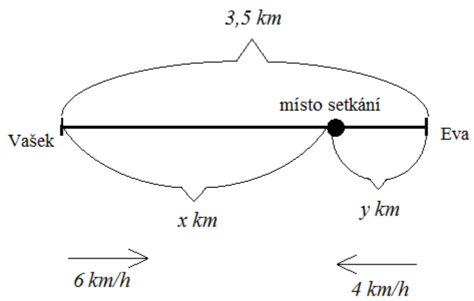
$$6 \cdot \frac{1}{4} = 1{,}5\ km$$

Vašek za 15 minut ušel 1,5 km.

Celková vzdálenost se tedy o 1,5 km zmenšila.

$5 - 1,5 = 3,5\ km$

Nyní jsou od sebe vzdáleni 3,5 km. V tento moment vychází i Eva.



Obrázek 18: Nákres úlohy o pohybu 2

Ze známých údajů si sestavíme soustavu rovnic x, y, kterou poté vyřešíme.

$$\begin{aligned} x+y &= 3,5 \\ \frac{x}{6} &= \frac{y}{4} \qquad |\cdot 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 3,5 \\ 2x &= 3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 3,5 \\ x &= \frac{3y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3y}{2}+y &= 3,5 \qquad |\cdot 2 \\ 3y+2y &= 7 \\ 5y &= 7 \\ y &= \frac{7}{5} \\ y &= 1,4 \\ x &= \frac{3\cdot 1,4}{2} \\ x &= 2,1 \end{aligned}$$

Vašek celkem ujde $2,1+1,5=3,6$ km. Eva ujde 1,4 km.

3.4.2 Řešení s využitím fyzikálního vzorce

K výpočtům využijeme vzorec s fyziky, kterým lze spočítat průměrná rychlost.

$$v=\frac{s}{t}$$

v..... průměrná rychlost v km/h (m/s)

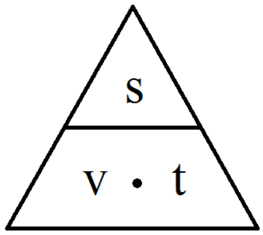
s..... dráha v km (m)

t..... čas, který je potřeba k ujetí dráhy v h (s)

Z tohoto vzorce lze výjádřit dráhu i čas.

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow s = v \cdot t \rightarrow t = \frac{s}{v}$$

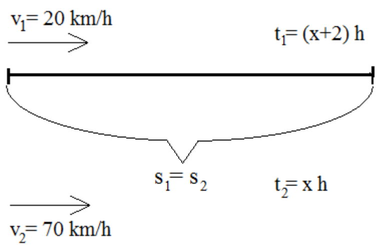
Tyto vzorce, lze odvodit i pomocí trojúhelníka:



Obrázek 19: Trojúhelník na odvození vzorců

Při výpočtech je potřeba ohlídat, zda počítáme ve stejných jednotkách.

Cyklista jede rychlostí 20 km/h. Z téhož místa o 2 hodiny později vyjede osobní automobil rychlostí 70 km/h. Za jak dlouho dohoní automobil cyklistu?



Obrázek 20: Nákres úlohy o pohybu 3

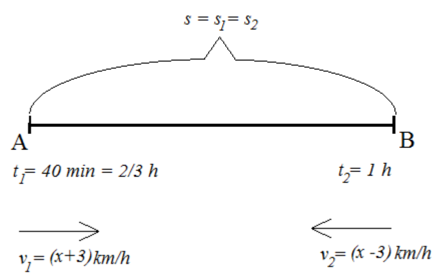
$$\begin{aligned} s_1 &= s_2 \\ v_1 \cdot t_1 &= v_2 \cdot t_2 \\ 20 \cdot (x+2) &= 70 \cdot x \\ 20x + 40 &= 70x \\ 40 &= 50x \\ 50x &= 40 \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x &= 0,8 \quad h \\
x &= 48 \quad min
\end{aligned}
$$

Automobil dohoní cyklistu za 48 minut.

Výletní loď jezdí po řece mezi městy A a B. Cesta po proudu trvá 40 minut a proti proudu 1 hodinu. Rychlost proudu řeky jsou 3 km/h. Jak velká by byla rychlost parníku ve stojaté vodě? Jaká je vzdálenost mezi městy [3]?

Řešení:



Obrázek 21: Nákres úlohy o pohybu 4

Jako neznámou x si vyjádříme rychlost lodě.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= s_2 \\
v_1 \cdot t_1 &= v_2 \cdot t_2 \\
(x+3) \cdot \frac{40}{60} &= (x-3) \cdot 1 \\
(x+3) \cdot \frac{2}{3} &= (x-3) \\
\frac{2x}{3} + 2 &= x - 3 \quad | \cdot 3 \\
2x + 6 &= 3x - 9 \\
15 &= x \\
x &= 15
\end{aligned}
$$

Rychlost parníku je 15 km/h.

Loď po proudu pluje rychlostí 18 km/h a proti proudu 12 km/h.

Vzdálenost z města A do B je stejná jako z města B do A, takže nezáleží, jestli budeme počítat vzdálenost proti proudu nebo po proudu.

Hledáme vzdálenost y. Víme, že rychlost po proudu je 18 km/h a loď vzdálenost ujede za 40 min $= \frac{40}{60}$ h $= \frac{2}{3}$ h.

Zapíšeme ho do rovnice a vypočítáme.

$$\begin{aligned} y &= 18 \cdot \frac{2}{3} \\ y &= 12 \quad km \end{aligned}$$

Vzdálenost mezi městy A a B je 12 km.

3.5 Slovní úlohy o společné práci

3.5.1 Řešení pomocí rovnice

V tomto typu slovních úloh se vyskytují lidé nebo různá zařízení, které dělají stejnou práci různý časový úsek. Máme za cíl zjistit, jak dlouho budou pracovat na daném úkolu společně.

Vodní nádrž se naplní prvním přívodem za 3 hodiny, druhým za 5 hodin. Za jak dlouho se vodní nádrž naplní, když jsou otevřeny oba přívody [5]?

Řešení:

Jako neznámou x si označíme počet hodin, za kterých oba přívody naplní vodní nádrž.

Zapíšeme si údaje o obou přívodech.

1. přívod:

za 3 hodiny ... 1 celá vodní nádrž

za 1 hodinu .... $\frac{1}{3}$ vodní nádrže

za x hodin ....$\frac{x}{3}$ vodní nádrže

2. přívod:

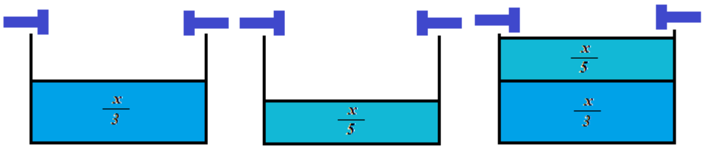
za 5 hodin ... 1 celá vodní nádrž

za 1 hodinu ...... $\frac{1}{5}$ vodní nádrže

za x hodin .... $\frac{x}{5}$ vodní nádrže

oba přívody:

za x hodin ... $\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{5}\right)$ vodní nádrže



Obrázek 22: Plnění nádrže

Oba přívody naplní jednu celou vodní nádrž za x hodin.

Z údajů sestavíme rovnici, kterou poté vyřešíme.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{x}{5} &= 1 \qquad \mid \cdot 15 \\ 5x+3x &= 15 \\ 8x &= 15 \\ x &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Vypočítali jsme, že bazén se naplní za $\frac{15}{8}$ h.

Zkouškou ověříme, zda-li se opravdu za $\frac{15}{8}$ h naplní celý bazén.

1. přívod:

za 1 hodinu .... $\frac{1}{3}$ vodní nádrže

za $\frac{15}{8}$ hodin ... $\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$ vodní nádrže

2. přívod:

za 1 hodinu .... $\frac{1}{5}$ vodní nádrže

za $\frac{15}{8}$ hodin ... $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$ vodní nádrže

oba přívody:

$$\text{za } \tfrac{15}{8} \text{ hodin ... } \left(\tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{3}{8} = 1\right) \text{ vodní nádrž}$$

$$\frac{15}{8} \text{ h} \doteq 1 \text{ h } 53 \text{ min}$$

Vodní nádrž se oběma přívody naplní přibližně za 1 hodinu a 53 minut.

Na úpravě zámecké zahrady pracují dvě skupiny zahradníků. První skupina by zahradu upravila za 15 dnů a druhá za 20 dnů. Za jak dlouho uprví zámeckou zahradu obě skupiny společně?

Řešení:

Neznámou x označíme počet dnů potřebných pro úpravu zámecké zahrady.

1. skupina zahradníků:

za 15 dnů ... 1 celá zahrada

za 1 den .... $\frac{1}{15}$ zahrady

za x dnů .... $\frac{x}{15}$ zahrady

2. skupina zahradníků:

za 20 dnů ... 1 celá zahrada

za 1 den .... $\frac{1}{20}$ zahrady

za x dnů .... $\frac{x}{20}$ zahrady

obě skupiny dohromady:

$$\text{za } x \text{ dnů ... } \left(\tfrac{x}{15} + \tfrac{x}{20}\right) \text{ zahrady}$$

Ze známých údajů sestavíme a vyřešíme rovnici.

$$\begin{aligned} \frac{x}{15} + \frac{x}{20} &= 1 \quad | \cdot 60 \\ 4x + 3x &= 60 \\ 7x &= 60 \\ x &= \frac{60}{7} \end{aligned}$$

$$\frac{60}{7}\text{ dnů} \doteq 8\text{ dnů }14\text{ hodin}$$

Obě skupiny zahradníků upraví společně zámeckou zahradů za 8 dnů a 14 hodin.

První aranžérka vyzdobí sál květinami za 6 hodin a druhá za 9 hodin. Tři hodiny pracovaly aranžérky společně. Poté první aranžérka musela odejít. Druhá aranžérka musela práci poté dokončit sama. Jak dlouho dodělávala sál sama?

Řešení:

Jako neznámou x označíme čas, který bude druhá aranžérka pracovat sama.

	1. aranžérka	2.aranžérka
každá sama	6 hodin	9 hodin
za 1 hodinu	$\frac{1}{6}$ práce	$\frac{1}{9}$ práce
za x hodinu	$\frac{3}{6}$	$\frac{3+x}{9}$

Z údajů, které známe sestavíme rovnici a vyřešíme ji.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{6}+\frac{3+x}{9} &= 1 \qquad | \cdot 18\\
9+2\cdot(3+x) &= 18\\
9+6+2x &= 18\\
15+2x &= 18\\
2x &= 3\\
x &= \frac{3}{2}\\
x &\doteq 1,5
\end{aligned}$$

Druhá aranžérka bude pracovat sama 1,5 hodiny.

3.5.2 Řešené pomocí úsudku

Skupina vazačů koberců ručně váže koberec. Každý měsíc se zhotovil stejný díl koberce. Vázání pětiny koberce trvalo půl roku. Jak dlouho trvalo vázání poloviny a kdy byl hotový celý koberec [7]?

Řešení:

Ze zadání víme že $\frac{1}{5}$ koberce trvala půl roku, což je 6 měsíců.

$$\frac{1}{5} \quad ... \quad \textit{6 měsíců = 0,5 roku}$$
$$\frac{2}{5} \quad ... \quad \textit{12 měsíců = 1 rok}$$
$$\frac{3}{5} \quad ... \quad \textit{18 měsíců = 1,5 roku}$$
$$\frac{4}{5} \quad ... \quad \textit{24 měsíců = 2 roky}$$
$$\frac{5}{5} \quad ... \quad \textit{30 měsíců = 2,5 roku}$$

Celý koberec bude hotový za 30 měsíců nebo-li 2,5 roku.

Půlka koberce bude hotová za 15 měsíců tedy za 1 rok a 3 měsíce.

3.6 Další slovní úlohy řešené pomocí úsudku

Farmář chová králíky a slepice. Všiml si, že počet králičích nožiček je trojnásobkem počtu slepičích zobáčků. Dnes našel farmář v kurníku 8 vajec a má radost,že snesla vajíčko každá slepice. Kolik má děda králíků [8]?

Řešení:

Každá slepice snesla dnes vajíčko a farmář jich přinesl 8. Má tedy 8 slepic.

Jedna slepice má vždy jeden zobák. Celkem máme tedy 8 zobáků na 8 slepic.

V zadání je uvedeno, že počet králičích nožiček je trojnásobek počtu slepičích zobáků.

$$3 \cdot 8 = 24$$

Celkem máme 24 králičích nožiček a jeden králík má 4 nohy.

$$24 \div 4 = 6$$

Farmář chová 6 králíků.

Před šesti lety bylo Honzovi a Veronice dohromady 16 let. Dnes je Hozovi 16 let. Za kolik let bude Veronice 16 let [9]?

Řešení:

Nyní je Honzovi 16 let. Před šesti lety mu bylo $16 - 6 = 10$ let.

Před šesti lety jim dohromady bylo 16 let a už víme, že Honzovi bylo 10 let.

Kolik let tedy bylo před šesti Veronice?

$$16 - 10 = 6$$

Před šesti lety jí bylo 6 let.

Kolik let jí je nyní?

$$6 + 6 = 12$$

Nyní jí je 12 let.

A za kolik let bude Veronice 16 let?

$$16 - 12 = 4$$

Veronice bude za 4 roky 16 let.

4 Úlohy na procvičení

1. K přípravě pokrmu pro 3 osoby je potřeba 780 g brambor a 300 g masa. Paní Přesná musí uvařit jídlo pro 5 osob. Kolik bude potřebovat masa a brambor?

2. Divadlo pořádá divadelní představení Kotva. Cena vstupenky je 120 Kč a snížená cena 90 Kč. Celkem se vybralo 4350 Kč od 40 návštěvníků. Kolik se prodalo klasických a kolik snížených vstupenek?

3. Osobní automobil Fabia má ujet z Plzně do Prahy trasu 95 kilometrů. Za jak dlouho tuto trasu ujede při průměrné rychlosti 90 km/h.

4. Vlaky současně vyjely proti sobě z měst A a B vzdálených 100 km. První vlak jede rychlostí 70 km/h z města A a druhý vlak jede rychlostí 55 km/h. Za jak dlouho se vlaky setkají?

5. Honza a Zdeněk sekali louku. Za 3 hodiny posekali polovinu louky. Poté jim přišel pomoci jeden kamarád. Jak dlouho sekali zbytek louky, když pracovali stejným tempem? Výsledek zapište v hodinách a minutách.

6. Potřebujeme získat 3% dezinfekční roztok. Kolik destilované vody je potřeba přilít do 600 ml 35% roztoku peroxidu vodíku?

7. Mařenka a Jeníček šetří peníze. V kasičce však mají pouze desetikoruny a dvoukoruny. Celkem mají 45 mincí v celkové hodnotě 210 Kč. Kolik dvoukorun a pětikorun našetřili?

8. Rybník se jednou hrází vypustí za 24 hodin, druhou hrází za 18 hodin. Za jak dlouho dobu by se rybník vypustil oběma hrázemi najednou?

9. Děti z letního tábora vyjely v 8:30 na turistický výlet rychlostí 15 km/h. Za 2 hodiny poté za nimi vyslal vedoucí automobil s obědem jedoucí rychlostí 50 km/h. Jakou trasu ujede automobil než dorazí k dětem?

10. Na zahradě má pan Veverka králíky a slepice. Dohromady mají 15 hlav a 36 nohy. Kolik má pan Veverka králíků a slepic?

11. Čtyři kopáči vykopali příkop za 4 dny. Nakonec se zjistilo, že příkop měl být jinde, takže musí vykopat nový a stejně velký. Jak dlouho jim bude práce trvat, jestliže jich bude kopat o jednoho více?

12. Automat na výrobu součástek do automobilů vyrobí za 30 minut 124 součástek. Kolik součástek vyrobí automat za 1 h a 50 minut?

13. Jeden truhlář vyrobí skříň za 26 hodin. Druhý truhlář vyrobí tu samou skříň za 30 hodin. Za jakou dlouho by skříň zhotovili, kdyby pracovali společně?

14. Skupina 8ti lidí splní úkol za 12 hodin. Jak dlouho to bude trvat 6ti lidem?

15. Dva tygři v zoo jedí společně kus masa, které má dohromady 10 kg. Tygr Aslan by ho sám snědl za 15 minut a tygr Simba za 20 minut. Jak dlouho budou jíst maso dohromady? Jakou část z masa sní Aslan a jakou Simba?

5 Závěr

Práce obsahuje vyřešené rovnice, jak početně tak i graficky. Poskytuje celkový přehled o tom, jak správně řešit základní druhy rovnic.

Poté následuje využití rovnic v úlohách. Žák by měl poznat jakou strategii při řešení úloh použít. Některé úlohy lze snadno vyřešit pomocí úsudku bez použití rovnic. Žák si tak rozvíjí své logické myšlení, protože úlohu musí napřed pochopit a ne jen „bezmyšlenkovitě“ sestavit a vyřešit rovnici.

Řešení úloh pomocí rovnic nebo úsudku si lze zkusit na patnácti příkladech uvedených v kapitole Úlohy na procvičení.

Práce může obohatit nebo rozšířit znalosti o rovnicích a jejich využití při řešení úloh.

Seznam použité literatury a zdrojů

[1] BĚLOUN, František. Sbírka úloh z matematiky pro základní školy: sbírka úloh k přípravě na přijímací zkoušky z matematiky na střední školy a k opakování učiva matematiky základní školy. 4. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).

[2] HAŠEK, Roman. Lineární algebra - KMA/LA. [online]. [cit. duben 2019]. Dostupný z WWW: <http://home.pf.jcu.cz/~hasek/lalgebra/LA2018_P_9.pdf/>

[3] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. Matematika pro 9. ročník základní školy,1.díl. Ilustroval Martin MAŠEK. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-281-3.

[4] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. Matematika pro 7. ročník základní školy,2.díl. 3. přeprac. vyd. Ilustroval Martin MAŠEK. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy. ISBN 978-80-7196-427-8.

[5] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. Matematika pro 8. ročník základní školy, 2.díl. 1.vydání. Praha: Prometheus, 1999. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-167-1.

[6] Centrum pro zjišťování výsledků [online] 2010 [cit. 2019-04-07]. Dostupný z WWW: <https://dokumenty.cermat.cz/Sdilene%20dokumenty/P%C5%98IJ%C3%8DMAC%C3%8D%20%C5%98%C3%8DZEN%C3%8D/2019/ilustra%C4%8Dn%C3%AD%20testy%208%20let%C3%A1/JPZ2019_IT_MA_8leta_test_M5PID19C0T01.pdf/>

[7] Centrum pro zjišťování výsledků [online] 2010 [cit. 2019-04-07]. Dostupný z WWW:<https://dokumenty.cermat.cz/Sdilene%20dokumenty/P%C5

%98IJ%C3%8DMAC%C3%8D%20%C5%98%C3%8DZEN%C3%8D/ Jednotn%C3%A1%20zkou%C5%A1ka%202018/testy%202018 /MA_2018_5_A.pdf/>

[8] Talentovaní.cz.Pythagoriáda. [online][cit.2019-04-07].Dostupný z WWW: <http://vtp.talentovani.cz//documents/10157/94297/Zadani+skolniho+ kola+Pythagoriady+pro+6.+-+8.+rocnik/0f7c5f10-cd3b-41f6-af45- 3492d335a54a />

[9] Talentovaní.cz.Pythagoriáda. [online][cit.2019-04-07].Dostupný z WWW: <http://vtp.talentovani.cz/documents/12614/0/Pythagoriada_2015_16 _okresni_kolo_6_8_rocnik.pdf/ad8f938b-b537-4ced-9bc7-1f7272411251 />

Seznam obrázků