Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta

Funkcionální rovnice a jejich využití v úlohách matematické olympiády

Diplomová práce

Bc. Hana Loudová

Školitelka: Doc. RNDr. Ing. Jana Kalová, Ph.D.
Školitel – specialista, konzultant: Mgr. Michaela Petrová

České Budějovice 2022

Loudová, H., 2022: Funkcionální rovnice a jejich využití v úlohách matematické olympiády. [Functional equations and their use in mathematical olympiad problems. Mgr. Thesis, in Czech.] – 85 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace:

The diploma thesis focuses on solving functional equations that appeared in the problems of Mathematical Olympiads. The thesis provides an overview of the best known and the most commonly used methods to solve these mathematics problems. Specifically, it is the substitution method, the variable symmetry method, the Cauchy method, and the fixed-point method. The contribution of the diploma thesis are the summary Mathematical tasks concerning the functional equations found from available years of both the Czech Mathematical Olympiad and the Middle European Mathematical Olympiad, the European Girls' Mathematical Olympiads, and the International Mathematical Olympiads. In addition, the summary of Mathematical tasks from the Czech Mathematical Olympiad provides a detailed written procedure of their solutions. Also, some of the several tasks of functional equations are solved in detail in each method. The work also brings a chart, which compares the success of the Czech representatives with other countries in problems containing functional equations in the above types of Mathematical Olympiads.

Prohlašuji, že jsem autorem této kvalifikační práce a že jsem ji vypracovala pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Českých Budějovicích, dne: 13. 4. 2022

Podpis: Loudová

Seznam použitých zkratek a značení:

EGMO – *European Girl´s Mathematical Olympiad*, Evropská dívčí matematická olympiáda

IMO – *International Mathematical Olympiad*, Mezinárodní matematická olympiáda

MEMO – *Middle European Mathematical Olympiad*, Středoevropská matematická olympiáda

MO – Matematická olympiáda

LL – *the longlisted problems*, zaslané návrhy úloh pro IMO

SL – *the shortlisted problems*, úlohy z užšího výběru IMO

$D(f)$ – definiční obor funkce f

$H(f)$ – obor hodnot funkce f

$\mathbb{N}$ – množina přirozených čísel, množina kladných celých čísel

$\mathbb{N}_0$ – množina nezáporných celých čísel, množina přirozených čísel včetně nuly

$\mathbb{Q}$ – množina racionálních čísel

$\mathbb{Q}^+$ – množina kladných racionálních čísel

$\mathbb{Q}_0^+$ – množina nezáporných racionálních čísel

$\mathbb{R}$ – množina reálných čísel

$\mathbb{R}^+$ – množina kladných reálných čísel

$\mathbb{R}_0^+$ – množina nezáporných reálných čísel

$\mathbb{Z}$ – množina celých čísel

Obsah

1. Úvod

Diplomová práce se zaměřuje na funkcionální rovnice, které se vyskytly v úlohách matematických olympiád, jichž se účastní čeští středoškolští studenti. Tato práce uvádí přehled nejznámějších a nejčastěji používaných metod, které vedou k vyřešení těchto příkladů. Na téma funkcionálních rovnic již některé závěrečné práce vznikly, např. bakalářská práce Funkcionální rovnice (Beníšková, 2020; Konopecký, 2008), diplomová práce Funkcionální rovnice v příkladech matematické olympiády (Pešková, 2012) a Funkcionální rovnice s více proměnnými (Vítovec, 2005) a disertační práce Elementární metody řešení funkcionálních rovnic (Šatný, 2018).

Přínosem této diplomové práce je souhrnná sbírka nalezených úloh týkajících se funkcionálních rovnic z dostupných ročníků, jak české Matematické olympiády (MO), tak Středoevropské matematické olympiády (Middle European Mathematical Olympiad – MEMO), Evropské dívčí matematické olympiády (European Girls´ Mathematical Olympiad – EGMO) a Mezinárodní matematické olympiády (International Mathematical Olympiad – IMO). Sbírka příkladů z MO navíc u všech poskytuje podrobně rozepsaný postup jejich řešení, stejně tak je v rámci každé metody řešení funkcionálních rovnic podrobně vyřešeno několik úloh. Práce rovněž přináší tabulky porovnávající úspešnost českých reprezentantů s ostatními státy v příkladech obsahujících funkcionální rovnice v uvedených typech matematických olympiád.

Teorie řešení funkcionálních rovnic se řadí mezi nejstarší odvětví matematické analýzy. Největší rozvoj však zaznamenala v posledních staletích a k jejímu rozpracování podstatně přispěli známí matematici jako Euler, d'Alembert, Cauchy, Gauss, Abel a další (Kuczma 1964). Úlohy vedoucí na funkcionální rovnice vznikají nejčastěji při řešení problémů z geometrie, mechaniky, aerodynamiky apod (Davidov 1984). V přírodních, společenských a behaviorálních vědách (stejně jako v matematice samotné) jsou často vlastnosti neznámé funkce popisující nějaký proces objasněny a lze je zapsat ve tvaru funkcionálních rovnic (Aczél 2001).

Studium funkcionálních rovnic se dříve klasifikovalo spíše jako univerzitní matematika, pravděpodobně pro zjevnou příbuznost s diferenciálními a integrálními rovnicemi. Existuje ale řada funkcionálních rovnic, které lze vyřešit bez použití matematicky propracovaného aparátu a bez odvolávání se na složité koncepty (Small 2007), proto jsou vhodné i pro středoškolské studenty. Přestože uvedená problematika výrazně překračuje rámec vzdělávacích programů pro výuku matematiky na středních školách, čeští studenti se spolu s jejich učiteli setkávají s řešením funkcionálních rovnic jak v rámci olympiád, tak i v dalších matematických soutěžích (Matematický klokan, Matematický korespondenční seminář atd.) (Calábek a Švrček 2013). Nejen soutěže, ale i mnohé časopisy vyzývají k řešení matematických problémů s elementárními (středoškolskými popřípadě základními vysokoškolskými) znalostmi bez pokročilé teorie (Small 2007).

V České republice probíhá každoročně od roku 1951 Matematická olympiáda (MO – *http://www.matematickaolympiada.cz/*), která si klade za cíl napomáhat vyhledávání talentovaných žáků a systematicky podporovat a rozvíjet jejich odborný růst. V rámci středních škol probíhá domácí, školní, krajské a ústřední kolo ve třech kategoriích A, B, C podle věku. Příklady týkající se funkcionálních rovnic se vyskytují pouze v kategorii A pro 3. a 4. ročník. MO nabízí zájemcům o matematiku nejen příležitost k řešení náročných problémů, ale vytváří rovněž soustavu odborných činností, které vedou k popularizaci matematiky a k všestranné péči o talentované žáky. Pro nejúspěšnější soutěžící z ústředního kola kategorie A pořádá ústřední komise MO každoročně přípravné soustředění pro další ročník a výběrové soustředění před Mezinárodní matematickou olympiádou.

V roce 1959 se setkalo 7 evropských států včetně Československa, aby porovnaly své síly v prvním ročníku Mezinárodní matematické olympiády. Postupně se připojovaly další země ze všech kontinentů a dnes se IMO účastní více než sto zemí. IMO se tak právem považuje za nejvýznamnější a nejprestižnější matematickou soutěž pro žáky středních škol, která soutěžícím umožňuje nejen porovnat své schopnosti se zbytkem světa, ale i navázat přátelství s budoucími kolegy na poli odborné a vědecké matematiky (Djukić et al. 2011).

Výběr soutěžních příkladů sestává z několika kroků. Zúčastněné země zasílají své návrhy (the longlisted problems – LL), z nichž komise vybere kratší seznam (the shortlisted problems – SL), ze kterého porota složená z vedoucích týmů vybere šest problémů pro daný ročník (Djukić et al. 2011). Pro jednoznačnost a snadné dohledání v příslušných zdrojích zavedeme následující značení úloh: např. (LL67-50) odkazuje na 50. příklad ze zaslaných problémů z roku 1967 (9. IMO). Podle statistik byla nejtěžší olympiáda v roce 1971 (13. IMO), po ní následovala v letech 1996 (37. IMO), 1993 (34. IMO) a 1999 (40. IMO); vítězný tým získal nejnižší skóre v roce 1977 (19. IMO), následně v letech 1960 (2. IMO) a 1999 (40. IMO) (Djukić et al. 2011). Z výše uvedených jen roky 1960 (2. IMO) a 1971 (13. IMO) neobsahovaly příklady na funkcionální rovnice, proto je můžeme považovat za jedny z nejobtížnějších.

Jako pokračování rakousko-polské matematické soutěže vznikla Středoevropská matematická olympiáda (MEMO – *https://www.memo-official.org/MEMO/*). Iniciátoři jejího vzniku se snažili umožnit dalším studentům zemí střední Evropy porovnat své znalosti z matematiky v mezinárodním měřítku. Žáci posledních ročníků nemají nárok být součástí soutěžního týmu MEMO za účelem pomoci mladším studentům připravit se na nějakou budoucí IMO.. Podobně jako v IMO každá země vysílá maximálně šestici studentů a dva vedoucí týmu. Úlohy odpovídají ostatním olympiádám a jsou rozdělené do čtyř oblastí: algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel. Úlohy zahrnující funkcionální rovnice se vyskytují především v oblasti algebry. Účastníci mezi sebou soupeří nejen sami za sebe, ale i za svůj tým, což dodává velmi zvláštní atmosféru. Týmová část existovala i v rámci rakousko-polské matematické soutěže, ale jinak je v matematických kláních raritou. Nyní se MEMO účastní deset zemí včetně České republiky

V Matematické olympiádě České republiky i ostatních evropských zemí soutěží chlapci i děvčata výhradně společně. Nejlepší umístění ovšem s převahou získávají chlapci, kteří proto tvoří i větší části národních týmů pro celosvětovou IMO. Aby i dívky ve větší míře mohly zažít atmosféru mezinárodních soutěží, někteří organizátoři matematických olympiád přišli s myšlenkou pořádání Evropských dívčích matematických olympiád (EGMO – *http://www.matematickaolympiada.cz/cs/evropska-divci-mo*), které by svým pojetím a průběhem byly podobné tradičním olympiádám. EGMO se koná každoročně od roku 2012 za účasti nejlepších účastnic nejvyšších kol národních matematických olympiád. Český tým se EGMO zúčastnil poprvé v roce 2016.

2. Klasifikace funkcionálních rovnic

Ve středoškolské algebře se studenti učí o algebraických rovnicích zahrnujících jedno či více neznámých reálných čísel, funkcionální rovnice jim do jisté míry velmi odpovídají, ale neznámou veličinou jsou funkce oproti reálným číslům (Small 2007). Pojem funkcionální rovnice původně zahrnoval veškeré rovnice, za jejichž neznámou se považuje nějaká funkce, čili rovnice diferenciální, integrální apod. Dnes se toto označení obvykle užívá v užším smyslu (bez diferenciálních a integrálních rovnic), nicméně různí autoři předkládají různé definice (Kuczma 1964). Běžné studium funkcionálních rovnic staví na vlastnostech limit a spojitosti funkcí. S těmito oblastmi matematiky se ale studenti často setkávají až na univerzitě, tudíž bychom při řešení funkcionálních rovnic v rámci středoškolských soutěží neměli tyto pojmy předpokládat (Small 2007). Přesnou definici funkcionální rovnice v rámci středoškolské matematiky nejsme s to podat, lze ale říci, že se jedná o rovnici, u které hledáme jistou neznámou funkci (popřípadě více funkcí) na základě jejích zadaných vlastností (Davidov 1984).

Funkcionální rovnice můžeme stejně jako rovnice, jejichž neznámou reprezentuje nějaké číslo, dělit do různých kategorií. Funkcionální rovnice, ve kterých všechny neznámé funkce jsou funkce jedné proměnné, nazýváme obyčejné funkcionální rovnice, pokud alespoň jedna hledaná funkce je funkcí více proměnných, pak ji označujeme jako parciální funkcionální rovnici (Kuczma 1964). Při práci s funkcionálními rovnicemi bychom si měli dávat pozor na záměnu funkcionálních rovnic v jedné, dvou či více proměnných s funkcemi jedné nebo více proměnných, např. Cauchyova funkcionální rovnice (5) dvou proměnných x a y obsahuje funkci jediné reálné proměnné (Small 2007). Středoškolská úroveň většinou zahrnuje zpravidla funkcionální rovnice a funkce jedné reálné proměnné. Funkcionální rovnice mají často nekonečně mnoho řešení (Kuczma, Choczewski, a Ger 1990), zároveň se při jejich vyšetřování mohou objevit i další řešení, které nejsou skutečnými, proto je velmi důležité provést zkoušku. Rovněž bychom neměli přestat, jakmile najdeme jedno řešení, k úplnému pochopení problému dochází často až v momentě, kdy víme, že jsme našli kompletní sadu řešení (Small 2007). Následující podkapitoly blíže popisují nejznámější a nejčastěji se vyskytující typy funkcionálních rovnic v úlohách matematických olympiád.

2.1. Počátky studia funkcionálních rovnic

Historie funkcionálních rovnic v jedné proměnné sahá až do starověku k Archimédovi, ale prvním matematikem, který použil funkcionální rovnice více proměnných za účelem nepřímě definice lineární funkce, se zdá být Oresme (Aczél 2001). Nicole Oresme, duchovní a matematik 14. století, tak učinil ve svém díle *Tractatus de configuratiionibus qualitatum et motuum* (1352), kde stanovil definici funkčního vztahu mezi dvěma proměnnými a myšlenku, že tento vztah lze vyjádřit geometricky pomocí toho, co bychom dnes nazvali grafem (Small 2007). Oresme popsal kvadratickou funkci funkcionální rovnicí v současnosti zapisovanou jako

$$\frac{s\big((n+1)t\big)-s(nt)}{s(nt)-s\big((n-1)t\big)}=\frac{2n+1}{2n}$$

pro všechna kladná t a všechna přirozená čísla n. Totožná rovnice se shodnými řešeními (s téměř stejným popisem) se znovu objevuje téměř o tři století později s Galileem, ale ani jeden z nich nedokázali, že $s(t)=at^2$ je jediné řešení (Aczél 2001). Vlámský jezuita a matematik 17. století Grégoire de Saint-Vincent při práci s hyperbolou (konkrétně při výpočtech plochy pod křivkou) implicitně využíval funkcionální rovnici

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

a zároveň byl považován za průkopníka logaritmů (Aczél 2001; Small 2007).

Doposud zmiňovaní matematici funkcionální rovnice spíše používali bez hlubšího porozumění, ale jejich teorii a řešení se věnovali až francouzští matematikové Jean le Rond d'Alembert a Augistin Luis Cauchy. Poslední jmenovaný se více zabýval i propojením rovnic s logaritmy a přesněji definoval předmět funkcionálních rovnic (Small 2007). První metodu řešení funkcionálních rovnic spočívající v převedení na diferenciální rovnici uvedl v roce 1827 norský matematik Niels Henrik Abel, přičemž si povšiml pozoruhodné skutečnosti, že jedna funkcionální rovnice může určovat několik neznámých funkcí (Aczél 2001). Jedním z prvních českých matematiků, kteří se zabývali funkcionálními rovnicemi, byl Jan Vilém Pexider, jehož poznatky o funkcionálních rovnicích více rozvádí následující podkapitola.

2.2. Funkcionální rovnice základní

Pexider (1900) spatřuje jako prvotní problém nalezení takových funkcí $f(x)$ reálného argumentu x, které jsou v libovolných mezích proměnné x spojité a jednoznačné, aby pro všechny hodnoty x a y v oněch mezích vyhovovaly rovnici:

$$f(x) + f(y) = \varphi(x + y),$$

respektive

$$f(x)f(y) = \varphi(x + y),$$

$$f(x)f(y) = \varphi(xy),$$

$$f(x) + f(y) = \varphi(xy),$$

kde φ značí jakoukoliv funkci. Autor rovněž uvádí, že za jistých podmínek lze dané rovnice převést na jednodušší tvary

$$f(x) + f(y) = f(x + y), \tag{1}$$

respektive

$$f(x)f(y) = f(x + y), \tag{2}$$

$$f(x)f(y) = f(xy), \tag{3}$$

$$f(x) + f(y) = f(xy), \tag{4}$$

které studoval Cauchy a více se jim věnuje následující podkapitola. Tyto funkcionální rovnice, pravděpodobně pro jejich souvislost s elementárními funkcemi, označuje jako *základní funkcionální rovnice* ve své práci Petr (1923), který při jejich řešení dospěl ke stejným výsledkům jako Pexider (1900). Funkce $f(x) = ax$ (spojitá pro každé reálné x) vyhovuje funkcionální rovnici (1), resp. obecná exponenciální funkce $f(x) = aA^x$ (pro $A > 0$ a x reálné, spojitá a konečná v každém uzavřeném intervalu, v němž je definována) rovnici (2). Funkce obecná mocnina $f(x) = ax^m$ (spojitá pro každé $x > 0$ a konečná v každém uzavřeném intervalu, v němž je definována) splňuje rovnici (3) a funkce obecný logaritmus $f(x) = a\,log_A x$ (pro $A > 0$, kladná x, rovněž spojitá a konečná na uzavřených intervalech) odpovídá rovnici (4), kde a, m, A značí libovolné konstanty. Pexider (1900) navíc uvádí řešení analogického problému i v rovině komplexních čísel.

Mezi elementární funkce související s funkcionálními rovnicemi spadají také funkce goniometrické, hyperbolické a cyklometrické, jelikož většinu vztahů, které pro ně platí, můžeme chápat jako funkcionální rovnice. Např. funkce $F(x) = sin\,x$, $G(x) = cos\,x$ za určitých podmínek splňují funkcionální rovnice

$$F(x + y) = F(x)G(y) + F(y)G(x)$$

$$G(x + y) = G(x)G(y) - F(x)F(y)$$

(Hájek 1955). Funkce hyperbolický kosinus $Ch(x) = coshx$ vyhovuje funkcionální rovnici

$$2Ch(x)Ch(y) = Ch(x + y) + Ch(x - y)$$

známé z trigonometrie (Petr 1923).

2.3. Cauchyova funkcionální rovnice a její modifikace

Bezesporu nejznámější funkcionální rovnicí shledáváme Cauchyovu rovnici ve tvaru

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \tag{5}$$

(Kuczma 1964), přestože Cauchy nebyl první, kdo ji předestřel světu. Úloha spočívá v nalezení všech funkcí s reálnými hodnotami, které splňují danou rovnici. Jakákoliv funkce tvaru $f(x) = ax$, kde konstanta a je libovolné reálné číslo, vyhovuje rovnici (5). Zbývá vyřešit otázku, kdy jsou tyto funkce jediným řešením funkcionální rovnice (5), tudíž musíme klást na hledanou funkci nějaké požadavky (např. jediné řešení pro třídu funkcí omezených na nějakém intervalu $(-c, c)$ pro $c > 0$, nebo jediné řešení z třídy funkcí spojitých s reálnými hodnotami na reálné ose) (Small 2007). Podrobný postup řešení Cauchyovy rovnice obsahuje podkapitola *3.3 Cauchyova metoda, str. 24*.

Funkcionální rovnice

$$f(x)f(y) = f(x + y), \tag{6}$$

$$f(x)f(y) = f(xy), \tag{7}$$

$$f(x) + f(y) = f(xy), \tag{8}$$

rovněž nazývané jako Cauchyovy lze snadno převést na základní typ (5) a jejich obecná řešení jsou funkce:

$f(x) = e^{cx},\ f(x) = 0;$

$f(x) = |x|^c,\ f(x) = |x|^c sgnx,\ f(x) = 1,\ f(x) = 0;$

$f(x) = c\, log|x|\,,\ f(x) = 0;$

kde c značí libovolnou konstantu (Kuczma 1964). Dosazením lze výsledky snadno ověřit, např. pro rovnici (6) při dosazení $f(x) = 0$ máme $0 = 0$ a při $f(x) = e^{cx}$ dostaneme

$$L = e^{cx}e^{cy} = e^{cx+cy} = e^{c(x+y)} = P.$$

Pozorný čtenář si jistě povšimne podobnosti se *základními funkcionálními rovnicemi* v předchozí kapitole, zde se jedná o novější a podrobnější poznatky.

Speciálním případem Cauchyovy rovnice je tzv. Jensenova rovnice

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

s řešením $f(x) = ax + b$ (Small 2007). Zobecněním Cauchyových rovnic vznikají Pexiderovy rovnice:

$$\alpha(x + y) = \beta(x) + \gamma(y),$$

$$\alpha(x + y) = \beta(x)\gamma(y),$$

$$\alpha(xy) = \beta(x)\gamma(y),$$

$$\alpha(xy) = \beta(x) + \gamma(y)$$

s obecným řešením pro první a čtvrtou rovnici:

$$\alpha(x) = f(x) + a + b,\ \beta(x) = f(x) + a,\ \gamma(x) = f(x) + b;$$

pro druhou a třetí rovnici:

$$\alpha(x) = abf(x),\ \beta(x) = af(x),\ \gamma(x) = bf(x);$$

kde a, b jsou libovolné konstanty a $f(x)$ je řešení odpovídající příslušným Cauchyovým rovnicím (Kuczma 1964; Small 2007). Dalším zobecněním vznikají Vinczeho funkcionální rovnice

$$f(x + y) = g(x)k(y) + h(y)$$

pro neznámé funkce f, g, h, k.

2.4. d'Alembertova funkcionální rovnice

Jednou z nejstarších funkcionálních rovnic je rovnice tvaru

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \tag{9}$$

(Kuczma 1964). Jedná se o rovnici nesoucí jméno d'Alembertova po francouzském matematikovi, který k ní dospěl při zkoumání problémů z mechaniky (Davidov 1984; Small 2007). Historicky d'Alembert předchází Cauchymu, avšak v kontextu funkcionálních rovnic se jeví přirozenější zařadit jeho příspěvky až po Cauchym (Small 2007). Při hledání všech funkcí s reálnými hodnotami splňující danou rovnici (9), narážíme na větší obtížnost ve srovnání s Cauchyovou rovnicí, poněvadž funkce $f(x) = \cos x$ vyhovuje rovnici (9), ale $f(x) = \sin x$ nikoliv (Small 2007). Cauchy dokázal ukázat, že $cosx$ není jediné řešení, nýbrž úplná množina řešení d'Alembertovy funkcionální rovnice (9) se skládá z funkcí:

$$f(x) = 0, \qquad f(x) = cos\, ax\,, \qquad f(x) = \frac{b^x + b^{-x}}{2}$$

pro libovolné a a $b > 0$, přičemž poslední z nich lze pro $b = e$ interpretovat jako $cosh\, x$ (Kuczma 1964; Small 2007).

3. Metody řešení funkcionálních rovnic

Obecně známá a používaná metoda spočívá v převedení funkcionálních rovnic na rovnice diferenciální (Kuczma 1964). Tato metoda ale není příliš vhodná pro středoškolské studenty pro svoji náročnost. Při řešení téměř každé funkcionální rovnice se vyplatí nejdříve uhodnout alespoň některá její řešení, neboť jejich tvar může napovědět, jaké vlastnosti lze od jakéhokoliv řešení očekávat (Šatný 2016). K často používaným metodám řešení funkcionálních rovnic patří rozšíření funkce definované na dané číselné oblasti na množinu řešení dané rovnice, odvození tvaru řešení (obvykle splňujícího některé další podmínky) z tvaru rovnice a aplikace teorie o pevných bodech v prostorech funkcí (Kuczma 1964). Davidov (1984) uvádí, že neexistuje jedna univerzální metoda pro všechny funkcionální rovnice, ale za dvě základní považuje metodu substituční a Cauchyovu. Kromě těchto dvou metod se při vyšetřování funkcionálních rovnic v rámci úloh z matematických olympiád často objevuje také metoda využívající symetrii proměnných a metoda pevných bodů. Každé z nich se věnuje samostatná podkapitola, přičemž jako první je více popsána substituční metoda, protože ji částečně zahrnují i ostatní metody.

Než přejdeme ke konkrétním metodám, dokážeme 2 lemmata (pomocná tvrzení), která později využijeme při řešení některých příkladů týkajících se funkcionálních rovnic.

Lemma 1: Mějme funkci $f: A \to B$. Je-li funkce $(f \circ f)$ injektivní (prostá), pak je prostá i funkce f.

Důkaz: $(f \circ f)$ je prostá, čili $\forall z \in B\ \exists x \in A: (f \circ f)(x) = z$, tj.$f\big(f(x)\big) = z$. Dále $\exists y \in (B \cap A): y = f(x),\ z = f(y)$. Kdyby $z_1 = f(f(x_1)),\ z_2 = f(f(x_2)),\ z_1 = z_2$, pak by $\exists y_1$, $y_2 \in (B \cap A): z_1 = f(y_1),\ z_2 = f(y_2)$ a $\exists x_1, x_2 \in A: y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$. Z prostoty $(f \circ f)$ víme, že $x_1 = x_2$ a z toho, že f je zobrazení plyne $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, díky tomu navíc $z_1 = z_2$ pro libovolné y, a tedy f je prostá.

Lemma 2: Mějme funkci $f: A \to B$. Je-li funkce $(f \circ f)$ surjektivní (*na*), pak je *na* i funkce f.

Důkaz: $(f \circ f)$ je *na*, čili $\forall z \in B\ \exists x \in A: (f \circ f)(x) = z$, tj.$f\big(f(x)\big) = z$. Dále $\exists y \in (B \cap A): y = f(x),\ z = f(y)$. Čili všechna z mají při zobrazení f vzor y, tedy f je *na*.

Poznámka: Jeli-li funkce f prostá a zároveň *na*, pak je funkce f bijektivní.

3.1. Substituční metoda (metoda specifikace proměnných)

Při řešení funkcionální rovnic substituční metodou předpokládáme, že daná rovnice už nějaké řešení má, vhodnými záměnami proměnných a dosazováním konkrétních hodnot se snažíme najít explicitní tvar tohoto řešení, poté ověříme, zda získaná funkce skutečně vyhovuje zadané rovnici (Davidov 1984). Specifikujeme-li některé proměnné, tj. dosadíme-li speciální hodnoty v argumentech proměnné dané funkcionální rovnice, pak může dojít k rozšíření množiny přípustných řešení, proto má tato metoda charakter důsledkové úpravy a při jejím užití je zkouška nutnou součástí řešení (Calábek a Švrček 2013). Substituční metoda nelze aplikovat v případě rovnic s hodností $h = 1$ (hodnost funkcionální rovnice h definujeme jako počet nezávislých proměnných vyskytujících se v dané rovnici), ale obecně lze říci, že se nejčastěji používá při řešení funkcionálních rovnic s hodností $h \geq 2$ (Kuczma 1964). Ve většině případů se však proces specifikace proměnných musí několikrát důmyslně opakovat.

Zpravidla najdeme hodnoty funkce ve vhodně zvolených bodech definičního oboru, tím zjistíme vlastnosti a tvar hledané funkce. Následně určíme další potřebné hodnoty a vlastnosti, přičemž při vyšetřování funkcionálních rovnic můžeme specifikovat několik proměnných (parametrů) zároveň s cílem jejich počet snížit (Calábek a Švrček 2013). Vhodnými substitucemi můžeme danou funkcionální rovnici redukovat na soustavu jednodušších rovnic, ve kterých se v argumentu neznámé funkce vyskytují pouze jednotlivé proměnné (a nikoli výrazy sestavené z proměnných) (Kuczma 1964). Např. Cauchyova rovnice (5) lze zapsat jako

$$f(z) = f(x) + f(y), \qquad z = x + y$$

a d‘Alembertova rovnice (9) jako

$$f(u) + f(v) = 2f(x)f(y), \qquad u = x + y, \qquad v = x - y.$$

3.1.1. Příklady řešené substituční metodou

60. MO – 2010-2011 – kat. A, ústřední kolo, úloha 6

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440775/A60iii.pdf)

Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)f(y) = f(y)f\big(xf(y)\big) + \frac{1}{xy}. \tag{10}$$

Řešení: Ukážeme, že jediná funkce f, která splňuje podmínky úlohy, je $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

Ze zadání plyne, že $f(y) \neq 0$ pro libovolné $y > 0$, tudíž:

$$f(x) = f\big(xf(y)\big) + \frac{1}{xyf(y)}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

$$f\big(xf(y)\big) = f(x) - \frac{1}{xyf(y)}. \tag{11}$$

Označme $f(1) = a > 0$. Volbou $x = 1$, resp. $y = 1$ v rovnici (11) postupně dostaneme

$$f\big(f(y)\big) = f(1) - \frac{1}{yf(y)} = a - \frac{1}{yf(y)}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^+, \tag{12}$$

$$f(ax) = f(x) - \frac{1}{ax}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{13}$$

Volbou $x = 1$ v rovnici (13) obdržíme

$$f(a) = f(1) - \frac{1}{a} = a - \frac{1}{a}. \tag{14}$$

Volbou $x = a$ v rovnici (11) a užitím (14) dostaneme

$$f\big(af(y)\big) = f(a) - \frac{1}{ayf(y)} = a - \frac{1}{a} - \frac{1}{ayf(y)}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^+,$$

zatímco pomocí vztahů (13) a (12) můžeme první člen předchozí rovnice upravit na tvar

$$f\big(af(y)\big) = f\big(f(y)\big) - \frac{1}{af(y)} = a - \frac{1}{yf(y)} - \frac{1}{af(y)}.$$

Porovnáním pravých stran předchozích dvou rovnic vypočítáme

$$a - \frac{1}{a} - \frac{1}{ayf(y)} = a - \frac{1}{yf(y)} - \frac{1}{af(y)},$$

$$-\frac{1}{a} = \frac{1 - a - y}{ayf(y)},$$

$$-f(y) = \frac{1 - a - y}{y},$$

$$f(y) = 1 + \frac{a - 1}{y}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^+. \tag{15}$$

Pokud tedy existuje řešení zadané funkcionální rovnice (10), musí mít tvar (15). Nyní dosadíme do (10) a následnými úpravami zjistíme, že pro všechna kladná reálná x a y má platit $(a-1)^2 = 1$. Tedy:

$$\left(1 + \frac{a-1}{x}\right)\left(1 + \frac{a-1}{y}\right) = \left(1 + \frac{a-1}{y}\right)\left(1 + \frac{a-1}{x\left(1 + \frac{a-1}{y}\right)}\right) + \frac{1}{xy},$$

$$\frac{(x + a - 1)(y + a - 1)}{xy} = \left(1 + \frac{a-1}{y}\right)\frac{xy\left(1 + \frac{a-1}{y}\right) + y(a-1)}{xy\left(1 + \frac{a-1}{y}\right)} + \frac{1}{xy},$$

$$(x+a-1)(y+a-1)-x(y+a-1)-y(a-1)=1,$$
$$a^2-2a+1=1,$$
$$(a-1)^2=1.$$

Vzhledem k předpokladu $a>0$ je tato rovnice splněna, právě když $a=2$. Tímto krokem jsme zároveň provedli zkoušku správnosti nalezeného řešení, kterým je pro $\forall x \in \mathbb{R}^+$ funkce $f(x)=1+\frac{1}{x}$.

2. *MEMO – 2008, úloha T-1* *(https://kag.upol.cz/memo/texty/2sd_r_eng.pdf)*

Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takové, že

$$xf(x+xy)=xf(x)+f(x^2)f(y) \tag{16}$$

platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení: Položíme $x=y=0$ v zadané rovnici (16) a dostaneme $f(0)=0$. Stejně tak užitím $y=-1$ v rovnici (16) získáme

$$xf(x)+f(x^2)f(-1)=0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Rozlišme dva případy $f(-1)=0$ a $f(-1)\neq 0$.

Případ $f(-1)=0$: Z (17) vyplývá

$$xf(x)=0, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

tedy

$$f(x)=0, \qquad \forall x \neq 0.$$

Jak již víme, pro $x=0$ platí $f(0)=0$. Takto jsme obdrželi nulovou funkci

$$f(x)=0, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

která je zjevným řešením zadané rovnice (16).

Případ $f(-1)\neq 0$: Dosazením $x=-1$ do (17) dostaneme

$$-f(-1)+f(1)f(-1)=0,$$
$$f(1)=1,$$

a podobně pro $x=1$ v (17) plyne

$$f(-1)=-1.$$

Rovnici (17) lze pak transformovat na

$$xf(x)=f(x^2), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Nyní dosadíme $y=x-1$ do (16), čímž získáme

$$xf(x^2)=xf(x)+f(x^2)f(x-1). \tag{19}$$

Sečtením (18) a (19) dostaneme rovnosti

$$xf(x) + xf(x^2) = f(x^2) + xf(x) + f(x^2)f(x-1),$$
$$f(x^2) + f(x^2)f(x-1) - xf(x^2) = 0,$$
$$f(x^2)(f(x-1) - (x-1)) = 0. \tag{20}$$

Předpokládejme, že $f(a) = 0$ pro nějaké $a \neq 0$. Potom $f(a^2) = 0$ dle (18) a tedy (16) pro $x = a$ znamená, že

$$af(a + ay) = af(a) + f(a^2)f(y),$$
$$af(a + ay) = 0,$$
$$f(a + ay) = 0.$$

Protože y je zde libovolné, dostáváme $f(-1) = 0$, což je spor s předpokladem $f(-1) \neq 0$. Proto pro libovolné $x \neq 0$ je $f(x) \neq 0$ i $f(x^2) \neq 0$. Rovnice (20) pak podle (18) vede k závěru, že

$$f(x-1) = x - 1 \text{ pro libovolné } x \neq 0,$$

tj. $f(x) = x$ pro libovolné $x \neq -1$.

Protože víme, že $f(-1) = -1$, dostaneme identickou funkci $f(x) = x$ pro všechna reálná x, jejíž platnost snadno ověříme dosazením do původní rovnice (16):

$$x(x + xy) = x(x) + (x^2)(y).$$

Řešením zadané funkcionální rovnice (16) jsou tedy pro všechna reálná x funkce $f_1(x) = x$ a $f_2(x) = 0$.

15. MEMO – 2021, úloha T–1

(https://memo2021.math.hr/wp-content/uploads/2021/12/Problems-and-Solutions-Booklet.pdf)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že nerovnost

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)\big(x - f(y)\big) \tag{21}$$

platí pro všechna reálná čísla x a y.

Řešení: Snadno odhadneme, že řešením jsou funkce $f(x) = x,\ f(x) = -x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ověříme, že předpokládaná řešení splňují požadovanou nerovnost pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Nejprve ukážeme platnost pro případ $f(x) = x$:

$$x^2 - y^2 \leq (x + y)(x - y),$$

nyní pro $f(x) = -x$:

$$y^2 - x^2 \leq (y - x)(y + x),$$

obě nerovnosti zjevně platí pro všechna reálná čísla x a y.

Dosazením $x = y = 0$ do zadané nerovnice (21) dostaneme

$$0 \leqslant -(f(0))^2,$$
$$f(0) = 0.$$
Nyní položením $y = 0$ v nerovnici (21) obdržíme
$$f(x^2) \leqslant xf(x).$$
Na druhou stranu pro $x = 0$ v (21) získáme
$$-f(y^2) \leqslant -yf(y).$$
Pro všechna reálná x tedy platí
$$f(x^2) = xf(x). \tag{22}$$
Nahrazením x za $-x$ a porovnáním výrazů dostaneme
$$-xf(-x) = xf(x),$$
$$f(-x) = -f(x), \qquad x \neq 0.$$
Víme také, že to platí i pro $x = 0$, protože jsme ukázali $f(0) = 0$, takže f je lichá funkce. Dosazením $x = y$ a $y = -x$ v původní nerovnosti (21) obdržíme:
$$f(y^2) - f(x^2) \leqslant (f(y) - x)(y + f(x)).$$
To spolu s (21) implikuje
$$f(x^2) - f(y^2) = (f(x) + y)(x - f(y)), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Dále zjistíme (pomocí (22)), že
$$xf(x) - yf(y) = (f(x) + y)\big(x - f(y)\big),$$
$$xf(x) - yf(y) = xf(x) - f(x)f(y) + xy - yf(y),$$
$$0 = xy - f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Položením $y = 1$ získáme
$$x = f(x)f(1), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Volba $x = 1$ znamená $f(1) = \pm 1$.

Řešením zadané funkcionální nerovnice (21) jsou tedy pro všechna $x \in \mathbb{R}$ funkce $f_1(x) = -x$ a $f_2(x) = x$.

1. EGMO – 2012, úloha 3 *(https://www.egmo2012.org.uk/competition/solutions-day1.pdf)*

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že
$$f\big(yf(x + y) + f(x)\big) = 4x + 2yf(x + y) \tag{23}$$
pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení: Položme $y = 0$ a získáme
$$f(f(x)) = 4x, \tag{24}$$

z čehož odvodíme, že f je bijektivní funkce, protože pro každé reálné z můžeme jednoznačně vyřešit $z = 4x$, a tak získat právě jedno $x = z/4$. Vidíme že funkce $f(f(x))$ je prostá a zároveň *na*, tedy dle lemmat 1 a 2 na str. 9 je rovněž funkce f prostá a zároveň *na* čili bijektivní.

Podle (24) také platí

$$f(0) = f(4 \cdot 0) = f(f(f(0))) = 4f(0),$$

odkud $f(0) = 0$. Nyní dosadíme $x = 0$ a $y = 1$ do (23) a znovu použijeme (24):

$$f\big(f(1) + f(0)\big) = 4 \cdot 0 + 2f(1),$$
$$4 = f(f(1)) = 2f(1),$$

odkud $f(1) = 2$, a tedy také $f(2) = f(f(1)) = 4$, protože $f\big(f(1) + f(0)\big) = f(2 + 0)$.

Nakonec do (23) dosadíme $y = 1 - x$ a obdržíme

$$f\big((1-x)f(1) + f(x)\big) = 4x + 2(1-x)f(1), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$f(2(1-x) + f(x)) = 4x + 4(1-x) = 4 = f(2).$$

Z toho, že f je injektivní (prostá), vyplývá, že

$$2(1-x) + f(x) = 2,$$
$$f(x) = 2 - 2(1-x) = 2x.$$

Snadno nahlédneme, že nalezená funkce $f(x) = 2x$ splňuje původní rovnici (23), protože platí

$$2\big(y \cdot 2(x+y) + 2(x)\big) = 4x + 2y \cdot 2(x+y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Jediným řešením (23) je tedy funkce $f(x) = 2x$ definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

52. IMO – 2011 – (SL11-3) *(https://www.imo-official.org/problems/IMO2011SL.pdf)*

Určete všechny dvojice funkcí (f, g) z množiny reálných čísel do sebe, které splňují

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y) \tag{25}$$

pro všechna reálná čísla x a y.

Řešení: Dosazením $y = -2x$ v dané funkcionální rovnici (25) dostaneme

$$g(f(-x)) = f(x). \tag{26}$$

Pomocí této rovnice při dosazení $-x - y$ za x získáme

$$f(-x-y) = g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y). \tag{27}$$

Nyní pro libovolná dvě reálná čísla a a b, pokud $x = -b$ a $y = a + b$, obdržíme

$$f(-a) = f(-b) + (a-b)g(a+b).$$

Pokud c označuje další libovolné reálné číslo, máme podobně

$$f(-b) = f(-c) + (b-c)g(b+c)$$

stejně jako

$$f(-c) = f(-a) + (c-a)g(c+a).$$

Sečtením všech těchto tří rovnic dostaneme

$$0 = (a-b)g(a+b) + (b-c)g(b+c) + (c-a)g(c+a).$$

Získaný vztah upravíme na tvar

$$((a+c)-(b+c))g(a+b) + ((a+b)-(a+c))g(b+c) + ((b+c)-(a+b))g(a+c) = 0.$$

Nyní, když jsou zadaná jakákoli tři reálná čísla x, y a z, můžeme určit tři reálná čísla a, b a c taková, že $x = b + c$, $y = a + c$ a $z = a + b$, protože

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+1+1) - (0+0+0) = 2 - 0 = 2 \neq 0.$$

Pro takto zvolená čísla dostáváme

$$(y-x)g(z) + (z-y)g(x) + (x-z)g(y) = 0.$$

To znamená, že tři body $(x, g(x))$, $(y, g(y))$ a $(z, g(z))$ grafu funkce g jsou pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ kolineární (leží v jedné přímce). Tento graf je tedy přímka, tj. g je buď konstantní, nebo lineární funkce. Napišme $g(x) = Ax + B$, kde A a B jsou dvě reálná čísla. Dosazením $(0, -y)$ za (x, y) v (27) a označením $C = f(0)$ máme

$$f(y) = C + (-y)(A(-y) + B) = Ay^2 - By + C. \tag{28}$$

Dosaďme podobně za g do (26):

$$f(x) = g(f(-x)) = Af(-x) + B$$

a využijme vztahu (28) pro $y = -x$, ze kterého

$$f(-x) = Ax^2 + Bx + C,$$

a proto

$$f(x) = Af(-x) + B = A(Ax^2 + Bx + C) + B = A^2x^2 + ABx + B + AC.$$

Zároveň z (28) plyne $f(x) = Ax^2 - Bx + C$. Nyní srovnáme oba získané vztahy:

$$A^2x^2 + ABx + B + AC = Ax^2 - Bx + C. \tag{29}$$

Z porovnání koeficientů máme:

$$x^2\colon\ A^2 = A \ \Rightarrow\ A = 0 \text{ nebo } A = 1,$$

$$x^1\colon AB = -B,$$

$$x^0\colon B + AC = C.$$

Jestliže $A = 0$, pak z (29) plyne $B = -Bx + C$ pro všechna reálná x, a tedy $B = C = 0$, což poskytuje první řešení, kdy f i g jsou identicky rovny nule.

Pro $A = 1$ máme z (29):

$$x^2 + Bx + C + B = x^2 - Bx + C,$$

odtud $B = 0$. Tedy $g(x) = x$ a $f(x) = x^2 + C$, čímž jsme získali druhé řešení rovnice (25). Tedy buď jsou f i g identicky rovny nule, nebo $g(x) = x$ a $f(x) = x^2 + C$ pro všechna reálná čísla x a reálné číslo C.

3.2. Metoda využívající symetrii proměnných

Při řešení funkcionálních rovnic lze poměrně často efektivně využít symetrie některých dvou proměnných právě v jedné ze stran zadané rovnice (či některé její části), obvykle je zapotřebí předpokládat prostotu hledané funkce na daném definičním oboru (Calábek a Švrček 2013).

3.2.1. Příklady řešené metodou symetrie proměnných

51. MO – 2001-2002 – kat. A, ústřední kolo, příklad 6

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440643/A51iii.pdf)

Nechť $\mathbb{R}^+$ reprezentuje množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnost

$$f\big(xf(y)\big) = f(xy) + x. \tag{30}$$

Řešení: Dosadíme-li do (30) za x hodnotu $f(x)$, dostaneme rovnici

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f(f(x)y) + f(x),$$

ze které vyjádříme

$$f(f(x)y) = f\big(f(x)f(y)\big) - f(x).$$

Jiné vyjádření téhož výrazu $f(f(x)y)$ obdržíme, když v původní rovnici (30) zaměníme navzájem hodnoty x a y. Vyjde nám

$$f(f(x)y) = f(yx) + y.$$

Porovnáním obou vyjádření získáme rovnici

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f(yx) + y + f(x),$$

jejíž levá strana se nezmění, zaměníme-li navzájem hodnoty x a y. Stejnou vlastnost musí proto mít i pravá strana této rovnice, takže díky symetrii musí platit

$$f(yx) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y)$$

neboli

$$y + f(x) = x + f(y).$$

Další zřejmou úpravou dostáváme rovnici

$$f(x) - x = f(y) - y,$$

která musí být splněna pro libovolná x, $y \in \mathbb{R}^+$. Fixujeme-li y, vidíme, že $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) - x$ se rovná konstantě $f(y) - y$. Znamená to, že funkce $x \mapsto f(x) - x$ je na množině $\mathbb{R}^+$ konstantní, tedy hledaná funkce f musí být tvaru $f(x) = x + c$ pro vhodné reálné číslo c. Po dosazení tohoto předpisu do obou stran původní rovnice obdržíme

$$f\big(xf(y)\big) = xf(y) + c = x(y + c) + c = xy + cx + c$$

a

$$f(xy) + x = (xy + c) + x = xy + x + c, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Tomu vyhovuje jedině $c = 1$.

Hledaná funkce f je tudíž jediná a je určena předpisem $f(x) = x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$.

5. MEMO – 2011, úloha T-1

(https://memo2011.math.hr/documents/MEMO2011solutions.pdf)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x + y) + x^2 + y^2, \tag{31}$$

kde $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel.

Řešení: Nejprve dosazením $y = 0$ do (43) zjistíme, že $x^2 f(0) = x^2$ platí pro všechna reálná x, což implikuje $f(0) = 1$.

Nyní zavedeme novou funkci $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou vztahem $g(x) = f(x) - 1$. Původní rovnice (43) se tím pádem změní na tvar

$$y^2(g(x) + 1) + x^2(g(y) + 1) + xy = xy(g(x + y) + 1) + x^2 + y^2,$$

což po zjednodušení dá

$$y^2 g(x) + x^2 g(y) = xyg(x + y).$$

Volbou $y = 0$ obdržíme $g(0) = 0$, poté pro $x, y \neq 0$ máme

$$g(x + y) = \frac{y}{x} g(x) + \frac{x}{y} g(y). \tag{32}$$

Odtud dvojím užitím této rovnosti vidíme, že pro všechna nenulová x, y a z, kde navíc $z \neq -y$ platí

$$g(x + y + z) = \frac{y + z}{x} g(x) + \frac{x}{y + z} g(y + z) = \frac{y + z}{x} g(x) + \frac{xy}{z(y + z)} g(z) + \frac{xz}{y(y + z)} g(y).$$

V poslední rovnici je levá strana symetrická v x a z: $g(x + (y + z)) = g((x + y) + z)$. Tudíž pravou stranu lze vyjádřit dvojím způsobem:

$$\frac{y + z}{x} g(x) + \frac{xy}{z(y + z)} g(z) + \frac{xz}{y(y + z)} g(y) = \frac{y + x}{z} g(z) + \frac{zy}{x(y + x)} g(x) + \frac{xz}{y(y + x)} g(y)$$

pro všechna nenulová x, y, z taková, že $y \neq -x$ a $y \neq -z$. V poslední rovnici položíme $y = z = 1$ a obdržíme

$$\frac{2}{x}g(x) + xg(1) = \frac{1}{x(x+1)}g(x) + \left(x + 1 + \frac{x}{x+1}\right)g(1)$$

pro všechna $x \neq 0, -1$, tj. pro všechna $x \neq 0, -1$ platí

$$\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x(x+1)}\right)g(x) = \left(x + 1 + \frac{x}{x+1} - x\right)g(1),$$

$$\frac{2x+1}{x(x+1)}g(x) = \frac{2x+1}{x+1}g(1),$$

z toho $g(x) = g(1)x$ pro všechna $x \neq 0, -1, -1/2$. Je zřejmé, že výše uvedená rovnice platí i pro $x = 0$. Pokud položíme $x = 1$ a $y = -1$ v dříve získané rovnici (32) dostaneme $g(-1) = -g(1)$, a jestliže dosadíme $x = y = 1/2$, obdržíme

$$g(1) = g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$-g(-1) = -2g\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{g(1)}{2}.$$

Proto $g(x) = g(1)x$ pro všechna reálná x. Takže $g(1) = a$ může být libovolné, proto všechna řešení (43) jsou funkce $g(x) = ax$ nebo ekvivalentně $f(x) = ax + 1$ pro všechna reálná x a libovolná reálná a.

3. EGMO – 2014, úloha 6

(https://egmo2014.tubitak.gov.tr/sites/default/files/solutions-day2.pdf)

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující podmínku

$$f\big(y^2 + 2xf(y) + f^2(x)\big) = \big(y + f(x)\big)\big(x + f(y)\big) \qquad (33)$$

pro všechna reálná čísla x a y.

Řešení: Nejprve ověříme, že funkce

$$f(x) = x, \qquad f(x) = -x, \qquad f(x) = \frac{1}{2} - x$$

vyhovují zadané podmínce.

Pro $f(x) = x$: $L = y^2 + 2xy + x^2 = (y + x)^2 = (y + x)(x + y) = P$.

Pro $f(x) = -x$: $L = -(y^2 - 2xy + x^2) = -(y - x)^2 = (y - x)(x - y) = P$.

Pro $f(x) = \dfrac{1}{2} - x$:

$$L = \frac{1}{2} - \left(y^2 + 2x\left(\frac{1}{2} - y\right) + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right) = \frac{1}{2} - \left(y^2 - 2xy + \frac{1}{4} + x^2\right) = 2xy - y^2 - x^2 + \frac{1}{4}$$

$$P = \left(y + \left(\frac{1}{2} - x\right)\right)\left(x + \left(\frac{1}{2} - y\right)\right) = xy + \frac{1}{2}y - y^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}y - x^2 - \frac{1}{2}x + xy =$$

$$= 2xy - y^2 - x^2 + \frac{1}{4} = L.$$

Nyní ukážeme, že to jsou jediné funkce, které splňují zadanou funkcionální rovnici (33).

Nechť $y = -f(x)$ v původní rovnici (33), pak

$$f(f^2(x) + 2xf(-f(x)) + f^2(x)) = (-f(x) + f(x))(x + f(-f(x)))$$

$$f\left(2f^2(x) + 2xf\big(-f(x)\big)\right) = 0$$

pro všechna reálná x. Konkrétně, 0 patří do oboru hodnot funkce f.

Předpokládejme, že u a v jsou takové, že $f(u) = 0 = f(v)$. Položením $x = u$ nebo v a $y = u$ nebo v v rovnici (33) dostaneme

$$f(u^2) = u^2, \qquad f(u^2) = uv, \qquad f(v^2) = uv, \qquad f(v^2) = v^2.$$

Odvodili jsme, že $u^2 = uv = v^2$, tedy $u = v$. Tudíž $\exists!\, a \in \mathbb{R}$: $f(a) = 0$,

$a = y^2 + 2xf(y) + f^2(x)$ a buď $y = -f(x)$, nebo $x = -f(y)$. Bez újmy na obecnosti $y = -f(x)$, tedy

$$a = (-f(x))^2 + 2xf(-f(x)) + f^2(x) = 2f^2(x) + 2xf(-f(x)),$$

$$f^2(x) + xf\big(-f(x)\big) = \frac{a}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{34}$$

Předpokládejme, že $f(x_1) = f(x_2) \neq 0$ pro nějaké x_1 a x_2. Užitím vztahu (34) získáme

$$f^2(x_1) + x_1 f\big(-f(x_1)\big) = f^2(x_2) + x_2 f\big(-f(x_2)\big) = \frac{a}{2},$$

$$x_1 f(-f(x_1)) = x_2 f(-f(x_2) = x_2 f(-f(x_1)),$$

$$(x_1 - x_2) f(-f(x_1)) = 0,$$

tudíž buď $x_1 = x_2$, nebo $f(-f(x_1)) = 0$, tedy $-f(x_1) = a$, čili $-a = f(x_1) = f(x_2)$.

Ve druhém případě položíme $x = a$ a $y = x_1$v rovnici (33) a obdržíme

$$f(x_1^2 + 2af(x_1) + f^2(a)) = (x_1 + f(a))(a + f(x_1)),$$

$$f(x_1^2 + (-2a^2) + f^2(a)) = 0,$$

$$f(x_1^2 - 2a^2) = 0, \text{ proto } x_1^2 - 2a^2 = a.$$

Podobně $x_2^2 - 2a^2 = a$, $x_1^2 = x_2^2$, a tedy v tomto případě $x_1 = x_2$ nebo $x_1 = -x_2$.

Užitím symetrie pravé strany původní rovnice (33) získáme

$$f(f^2(x) + y^2 + 2xf(y)) = (y + f(x))(x + f(y)) = f(f^2(y) + x^2 + 2yf(x)) \tag{35}$$

pro všechna reálná x a y. Předpokládejme

$$f^2(x) + y^2 + 2xf(y) \neq f^2(y) + x^2 + 2yf(x)$$

pro nějaké x a y. Podle pozorování výše $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ((x_1 = x_2) \vee (x_1 = -x_2))$ platí

$$(x + f(y))(y + f(x)) \neq 0, \qquad f^2(x) + y^2 + 2xf(y) = -\left(f^2(y) + x^2 + 2yf(x)\right).$$

Ale tyto podmínky jsou protichůdné, druhá lze přepsat jako

$$(f(x) + y)^2 + (f(y) + x)^2 = 0,$$

tedy $f(x) + y = 0 = f(y) + x$, což je spor s $(x + f(y))(y + f(x)) \neq 0$.

Z (35) nyní vyplývá

$$f^2(x) + y^2 + 2xf(y) = f^2(y) + x^2 + 2yf(x), \tag{36}$$

$$(f(x) - y)^2 = (f(y) - x)^2$$

pro všechna reálná x a y.

Speciálně, položíme-li $y = 0$, obdržíme $f^2(x) = (f(0) - x)^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Nechť $f(x) = s(x)(f(0) - x)$, kde $s\colon \mathbb{R} \to \{1, -1\}$. Částečným dosazením do (36) získáme

$$(f(0) - x)^2 + y^2 + 2xs(y)(f(0) - y) = (f(0) - y)^2 + x^2 + 2ys(x)(f(0) - x).$$

Umocněním kvadrátů a zjednodušováním dostaneme

$$x(ys(y) + f(0)(1 - s(y)) = y(xs(x) + f(0)(1 - s(x))), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Konkrétně:

$$f(0)^2 - 2xf(0) + x^2 + y^2 + 2xs(y)f(0) - 2xs(y)y$$
$$= f(0)^2 - 2yf(0) + y^2 + x^2 + 2ys(x)f(0) - 2ys(x)x,$$

zjednodušením a vydělením 2:

$$-xf(0) + xs(y)f(0) - xs(y)y = -yf(0) + ys(x)f(0) - ys(x)x,$$
$$-xf(0) + xs(y)(f(0) - y) = -yf(0) + ys(x)(f(0) - x),$$
$$x(-f(0) + s(y)f(0) - s(y)y) = y(-f(0) + s(x)(f(0) - s(x)x),$$
$$x(f(0) - s(y)f(0) + s(y)y) = y(f(0) - s(x)(f(0) + s(x)x),$$
$$x(ys(y) + f(0)(1 - s(y)) = y(xs(x) + f(0)(1 - s(x))).$$

Vydělením xy je vidět, že funkce

$$s(x) + \frac{f(0)\big(1 - s(x)\big)}{x}$$

musí být konstantní pro $x \neq 0$. Jestliže $f(0) = 0$, pak $s(x)$ je konstantní pro $x \neq 0$, a proto buď $f(x) = x$, nebo $f(x) = -x$ pro všechna x. Tím jsme našli první dvě řešení.

Předpokládejme $f(0) \neq 0$. Pokud $s(x) = -1$ pro všechna $x \neq 0$, pak

$$-1 + \frac{2f(0)}{x}$$

musí být konstantní pro všechna $x \neq 0$, což není možné.

Na druhou stranu, pokud existují nenulová x a y taková, že $s(x) = -1$ a $s(y) = 1$, pak

$$-1+\frac{2f(0)}{x}=1,$$
$$2f(0)=2x,$$
$$f(0)=x.$$
To znamená, že může existovat jen jedno takové x, že $x=f(0)$. Tedy $f(x)=f(0)-x$ pro všechna x. Dosazením do původní rovnice (33) získáme $2f^2(0)=f(0)$ a tedy $f(0)=1/2$. Řešením zadané funkcionální rovnice (33) jsou pro všechna reálná x funkce:

$$f_1(x)=x, \qquad f_2(x)=-x, \qquad f_3(x)=\frac{1}{2}-x.$$

48. IMO – 2007 – (SL07-4) *(Djukić et al. 2011, str. 754)*

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že
$$f(x+f(y))=f(x+y)+f(y) \tag{37}$$
pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Řešení: Všimněme si, že $f(x)>x$ pro všechna x. Opravdu, protože $f(y)>0$, pak z (37):
$$f(x+f(y))\neq f(x+y),$$
a jestliže $f(y)<y$ pro nějaké y, položení $x=y-f(y)$ vede ke sporu, poněvadž z (37):
$$f(y-f(y)+f(y))=f(y-f(y)+y)+f(y),$$
$$f(y)=f(y-f(y)+y)+f(y),$$
$$f(y-f(y)+y)=0,$$
což je spor se zadáním $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Nyní dokážeme, že $f(x)-x$ je injektivní neboli prostá. Pokud předpokládáme, že
$$f(x)-x=f(y)-y$$
pro nějaké $x\neq y$, pak budeme mít
$$x+f(y)=y+f(x).$$
Aplikací f na obě strany a užitím zadané rovnice (37) obdržíme
$$f(x+y)+f(y)=f(x+y)+f(x),$$
z čehož vyplývá $f(x)=f(y)$, což není možné, protože jsme předpokládali $f(x)-x=f(y)-y$, z toho pro $f(x)=f(y)$ plyne $-x=-y$, čili $x=y$, což je spor s předpokladem $x\neq y$.

Z (37), ve které použijeme $f(x)$ místo x, dostaneme
$$f(f(x)+f(y))=f(f(x)+y)+f(y)=f(x+y)+f(x)+f(y), \tag{38}$$
proto usuzujeme, že
$$f(f(x)+f(y))-(f(x)+f(y))=f(x+y),$$

tedy $f(x) + f(y) = f(x') + f(y')$, pokud $x + y = x' + y'$. Speciálně pro $x' = y' = \dfrac{x+y}{2}$ máme

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{39}$$

Dalším cílem je dokázat, že f je injektivní. Jestliže $f(x) = f(x+h)$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}^+$ a $h > 0$, pak dosazením $y = x + 2h$ do (39) obdržíme

$$f(x) + f(x + 2h) = 2f(x + h) = 2f(x),$$

$$f(x) = f(x + 2h)$$

a indukcí $f(x + nh) = f(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Protože za předpokladu, že platí $f(x + nh) = f(x)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, dosazením $y = x + 2n$ do (39) získáme

$$f(x) + f(x + 2nh) = 2f\left(\frac{2x + 2nh}{2}\right) = 2f(x + nh) = 2f(x),$$

$$f(x + 2nh) = f(x).$$

Dále protože $f(x) > 0$ a $f(x) > x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$, pak

$$0 < f(x + nh) - (x + nh) = f(x) - x - nh, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

což není možné, a tedy f je injektivní (prostá).

Nyní z (38) a (39) máme

$$f\big(f(x) + f(y)\big) = f(f(x) + y) + f(y) = 2f\left(\frac{f(x)}{2} + y\right)$$

a ze symetrie

$$f\big(f(x) + f(y)\big) = 2f\left(\frac{f(x)}{2} + y\right) = 2f\left(\frac{f(y)}{2} + x\right).$$

Z prostoty f potom

$$\frac{f(x)}{2} + y = \frac{f(y)}{2} + x,$$

$$f(x) - 2x = f(y) - 2y,$$

a tedy $f(x) - 2x = c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Zadaná rovnice (37) si vynutí $c = 0$, poněvadž po dosazení $f(x) = 2x + c$ má platit

$$2(x + 2y + c) + c = 2x + 2y + c + 2y + c.$$

Snadno ověříme, že $f(x) = 2x$ vyhovuje (37), protože platí

$$2(x + 2y) = 2(x + y) + 2y.$$

Řešením zadané funkcionální rovnice (37) je tedy funkce $f(x) = 2x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$.

3.3. Cauchyova metoda

Mezi další možnosti, jak vyřešit nějakou funkcionální rovnici, patří tzv. Cauchyova metoda. Davidov (1984) uvádí schéma, kterým se můžeme při řešení rovnic touto metodou řídit. Nejprve vhodným postupem (např. metodou substituce) určíme řešení dané funkcionální rovnice na množině přirozených čísel. Poté odvodíme platnost nalezeného řešení i pro $x = 0$, celé záporné hodnoty proměnné x a pro všechny její racionální hodnoty. Následně využijeme hustoty racionálních čísel a spojitosti nalezené funkce, abychom ukázali platnost řešení i na množině reálných čísel. Cauchyovu metodu lze podle autora rozšířit i na rovnice, jejichž řešení jsou definovaná a spojitá na nějakém intervalu či sjednocení intervalů. (*Definice husté množiny:* Množina A reálných čísel se nazývá hustá, jestliže každý interval, který má nenulovou délku (tj. který nezdegeneruje v jeden jediný bod), obsahuje prvky množiny A (Davidov 1984).) Alternativní způsob řešení spočívá v dosazování různých hodnot za proměnné do zadání s cílem následnými úpravami dospět ke Cauchyově rovnici, jejíž řešení tkví právě v použití Cauchyovy metody a je všeobecně známo.

3.3.1. Příklady řešené Cauchyovou metodou

Řešení Cauchyovy rovnice *(Vodstrčil 2006, příklad 2)*

Najděte všechny spojité funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnici

$$f(x) + f(y) = f(x + y). \qquad (40)$$

Řešení: Předpokládejme, že f je nějaká funkce splňující zadanou rovnici. Volbou $x = y = 0$ obdržíme $f(0) = 0$. Matematickou indukcí snadno ukážeme, že

$$f(nx) = nf(x), \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (41)$$

Pro $n = 1$ je platnost vztahu triviální: $L = f(1 \cdot x) = f(x) = 1 \cdot f(x) = P$.

Dále předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $f(kx) = kf(x)$. Nyní odvodíme platnost vztahu pro $k + 1$: $f\big((k+1)x\big) = (k+1)f(x)$,

$$L = f\big((k+1)x\big) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x) = P.$$

Položíme-li $y = -x$ v rovnici (40), zjistíme, že $f(x) + f(-x) = 0$, čili $-f(x) = f(-x)$, tedy funkce f je lichá. Odtud již zjevně dostáváme, že vztah (41) platí pro všechna celá n a reálná x.

Z téhož vztahu rovněž získáme (pro libovolné přirozené m)

$$f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m} f(x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}. \qquad (42)$$

Nechť nyní q reprezentuje racionální číslo, tj.

$$q = \frac{n}{m}, \text{ kde } m \in N, n \in Z.$$

Ze vztahů (41) a (42) plyne

$$f(qx) = f\left(\frac{n}{m}x\right) = nf\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{n}{m}f(x) = qf(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Položíme-li $x = 1$ a $f(1) = c$, získáme

$$f(q) = cq, \qquad \forall q \in \mathbb{Q}.$$

Protože předpokládáme, že f je funkce spojitá, platí podle Cauchyovy věty

$$f(x) = cx, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že libovolná funkce tvaru $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$ splňuje zadanou funkcionální rovnici (40), tj. $cx + cy = c(x + y)$.

Cauchyova věta: Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce vyhovující vztahu $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$. Pak platí rovnost $f = g$, tj. $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Každá spojitá funkce je tedy určena funkčními hodnotami v racionálních bodech (v bodech nějaké husté podmnožiny).

10. EGMO – 2021, úloha 2 *(https://www.egmo.org/egmos/egmo10/solutions.pdf)*

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takové, že rovnice

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2 \tag{43}$$

platí pro všechna racionální čísla x a y.

Řešení: Ukážeme, že danou funkcionální rovnici splňují funkce $f(x) = x$ a $f(x) = -x$. Nechť $xf(x) = A$ a $x^2 = B$. Rovnice (43) se transformuje do formy

$$f(A + y) = f(y) + B.$$

A také, jestliže položíme $-A + y$ za y, dostaneme

$$f(A - A + y) = f(-A + y) + B,$$

tedy

$$f(-A + y) = f(y) - B.$$

Snadno se přesvědčíme, že pro nějaké celé číslo n dokonce platí

$$f(nA + y) = f(y) + nB. \tag{44}$$

Platnost vztahu (44) je triviální pro $n = 0$: $f(y) = f(y)$. Dále předpokládejme, že vztah platí pro nějaké celé číslo n, ověříme platnost pro $n + 1$ a $n - 1$:

$$f\big((n + 1)A + y\big) = f(A + y + nA) = f(nA + y) + B$$
$$= f(y) + nB + B = f(y) + (n + 1)B$$

a

$$f\big((n-1)A+y\big)=f(-A+nA+y)=f(nA+y)-B$$
$$=f(y)+nB-B=f(y)+(n-1)B.$$

Rovnice (44) tedy plyne z indukce pro n.

Nyní můžeme říci, že pro nějaké celé číslo n a libovolné $x, y \in \mathbb{Q}$ platí

$$f(nxf(x)+y)=f(y)+nx^2. \tag{45}$$

Pro dané y může být $f(y)+nx^2$ jakékoliv racionální číslo, protože nx^2 může být jakékoliv racionální číslo p/q. Víme totiž, že pokud $nx^2=p/q$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$ a $q \neq 0$, pak můžeme vzít $n=pq$ a $x=1/q$. Podle (45) je f na $\mathbb{Q}$ surjektivní (*na*).

Lze tedy najít nějaké racionální číslo c takové, že $f(c)=0$, které teď budeme hledat. Při dosazení $x=c$ do (43) obdržíme $f(y)=f(cf(c)+y)=f(y)+c^2$, tudíž $c=0$, tedy $f(0)=0$. Proto $f(x)=0$ tehdy a jen tehdy, když $x=0$.

Pro jakékoli celé číslo n a jakékoli racionální x, y na základě (45) pro n^2 a (43) pro nx platí

$$f(n^2xf(x)+y)=f(y)+n^2x^2=f(y)+(nx)^2=f(nxf(nx)+y). \tag{46}$$

Po dosazení $y=-nxf(nx)$ do rovnice (46) se pravá strana změní na 0, tedy

$$n^2xf(x)-nxf(nx)=0, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in \mathbb{R}.$$

To zjednodušíme na

$$nf(x)=f(nx) \text{ pro } x \neq 0,$$

ale vztah platí i pro $x=0$. Proto pro jakékoli racionální číslo $x=p/q$ máme:

$$f(x)=f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(p\cdot\frac{1}{q}\right)=p\cdot f\left(\frac{1}{q}\right)=p\cdot\frac{f\left(q\cdot\frac{1}{q}\right)}{q}=\frac{p}{q}\cdot f(1)=xf(1).$$

Takže $f(x)=kx$, pro nějaké racionální číslo k. Zjištění dosadíme do (43) a získáme

$$k(xkx+y)=ky+x^2,$$

tj.

$$k^2x^2+ky=ky+x^2,$$

čili $k^2=1$. Odtud $k=1$ nebo $k=-1$, a tedy řešením funkcionální rovnice (43) jsou pro všechna racionální čísla x funkce $f_1(x)=x$ a $f_2(x)=-x$.

43. IMO – 2002 – (IMO02-5) = (SL02-18) *(Djukić et al. 2011, str. 697)*

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y, z, t platí

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t))=f(xy-zt)+f(xt+yz). \tag{47}$$

Řešení: Dosazením $x=z=0$ a $t=y$ do zadané rovnice (47) dostaneme

$$2f(0)\cdot 2f(y)=f(0)+f(0), \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$
$$4f(0)f(y)=2f(0).$$

Je-li $f(0) \neq 0$, odvodíme $f(y) = 1/2$, tj. f je identicky rovno $1/2$, což je první řešení.

Nyní předpokládejme, že $f(0) = 0$. Položením $z = t = 0$ v rovnici (47) získáme

$$f(xy) = f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{48}$$

Pokud tedy $f(y) = 0$ pro nějaké $y \neq 0$, pak f je identicky rovno nule. Tím jsme obdrželi druhé řešení zadané rovnice.

Dále tedy předpokládejme, že $f(y) \neq 0$ vždy, když $y \neq 0$. Pozorujeme, že f na množině kladných reálných čísel striktně roste. Ve skutečnosti z (48) vyplývá

$$f(x^2) = f^2(x) \geq 0$$

$$f(x) = f^2\left(\sqrt{x}\right) \geq 0, \qquad \forall x \geq 0,$$

takže z dané rovnice (47) pro $t = x$ a $z = y$ dostaneme

$$(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2),$$

$$f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2 \geq f(x^2), \qquad \forall x, y \geq 0.$$

Volbou $y = 1$ v rovnici (48) máme

$$f(x) = f(x)f(1), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

tedy $f(1) = 1$.

Nyní do (47) dosadíme $t = y$ a obdržíme

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(y)) = f(xy - zy) + f(xy + yz)$$

$$2f(y)(f(x) + f(z)) = f(y)(f(x - z) + f(x + y))$$

$$2(f(x) + f(z)) = f(x - z) + f(x + z), \qquad \forall x, z \in \mathbb{R}. \tag{49}$$

Speciálně pro $x = 0$ a užitím $f(0) = 0$ máme

$$2\big(f(0) + f(z)\big) = f(-z) + f(z), \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Odtud pro všechna reálná z platí $f(z) = f(-z)$, tedy f je sudá funkce.

Dále pomocí indukce z (49) dostaneme

$$f(nx) = n^2 f(x), \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{50}$$

(a následně i pro všechna racionální čísla).

Nejprve zvolíme $z = x$ a získáme

$$2(2f(x)) = f(0) + f(2x),$$

$$4f(x) = f(2x).$$

Nyní $z = 2x$:

$$2\big(f(x) + f(2x)\big) = f(-x) + f(3x),$$

$$2\big(f(x) + 4f(x)\big) = f(x) + f(3x),$$

$$9f(x) = f(3x).$$

Pro $z = nx$:

$$2(f(x)+f(nx))=f(x-nx)+f(x+nx),$$
$$2(f(x)+n^2f(x))=f(x(n-1))+f(x(n+1)),$$
$$2(f(x)+n^2f(x))-f(x)(n-1)^2=f((n+1)x),$$
$$f(x)(2+2n^2-n^2+2n-1)=f((n+1)x),$$
$$(n+1)^2f(x)=f((n+1)x).$$

Pro racionální čísla: Chceme ukázat, že platí $f\left(\frac{p}{q}x\right)=\left(\frac{p}{q}\right)^2 f(x), \qquad \forall \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}.$

Položme $n=p/q,\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}$, podle (48) platí

$$f\left(\frac{p}{q}x\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)f(x).$$

Víme, že $f(1)=1$, a tedy $1=f(1)=\big(f(1)\big)^2$. Dále pomocí (48) a (50):

$$1=f(1)=f\left(\frac{1}{q}q\right)=f\left(\frac{1}{q}\right)f(q)=f\left(\frac{1}{q}\right)q^2, \qquad \forall q\in\mathbb{N},$$
$$\frac{1}{q^2}=f\left(\frac{1}{q}\right), \qquad \forall q\in\mathbb{N}.$$

Podle (48) platí:

$$f\left(\frac{p}{q}x\right)=f\left(\frac{1}{q}\right)f(px)=\frac{1}{q^2}f(p)f(x), \qquad \forall p\in\mathbb{Z}, \qquad \forall q\in\mathbb{N}.$$

Dále dle (50)

$$\frac{1}{q^2}f(p)f(x)=\frac{1}{q^2}p^2f(x)=\frac{p^2}{q^2}f(x), \qquad \forall p\in\mathbb{Z}, \qquad \forall q\in\mathbb{N}.$$

Máme tedy

$$f\left(\frac{p}{q}x\right)=\frac{1}{q^2}f(p)f(x)\ =\frac{p^2}{q^2}f(x)=\left(\frac{p}{q}\right)^2 f(x), \qquad \forall\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}.$$

Odtud $f(q)=q^2,\ \forall q\in\mathbb{Q}$, navíc jsme výše prokázali sudost $f(z)=f(-z),\ \forall z\in\mathbb{R}$.
Proto

$$f(q)=f(-q)=q^2, \qquad \forall q\in\mathbb{Q}.$$

Ale f je rostoucí pro $x>0$, takže musí platit $f(x)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Snadno ověříme, že funkce $f_1(x)=1/2,\ f_2(x)=\ 0$ a $f_3(x)=x^2$ jsou řešením zadané funkcionální rovnice (47).

Pro $f_1(x)=1/2$: $1=1/2+1/2$.

Pro $f_2(x)=0$: $0=0$.

Pro $f_3(x)=x^2$: $L=(x^2+z^2)(y^2+t^2)=x^2y^2+x^2t^2+z^2y^2+z^2t^2=$
$$=x^2y^2-2xyzt+z^2t^2+x^2t^2+2xtyz+z^2y^2=(xy-zt)^2+(xt+yz)^2=P.$$

19. IMO – 1977 – (LL77-24) *(Djukić et al. 2011, str. 426)*

Určete všechny reálné funkce $f(x)$, které jsou definované a spojité na intervalu $(-1{,}1)$ a splňují funkcionální rovnici

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)} \tag{51}$$

pro $x, y, x+y \in (-1{,}1)$.

Řešení *(převedení na Cauchyho rovnici):*

Do (51) dosadíme $x=y=0$ a obdržíme $f(0)=0$. Položme $g(x)=arc\tan f(x)$. Zadaná rovnice (51) se díky známému vzorci

$$\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

změní na

$$\tan g(x+y)=\tan(g(x)+g(y))\,;$$

proto

$$g(x+y)=g(x)+g(y)+k(x,y)\pi,$$

kde $k(x,y)$ je celočíselná funkce. Ale f je spojitá, tudíž i g a k jsou spojité, tedy $k(x,y)$ je spojitá a $k(0{,}0)=0$, proto $k(x,y)=0$. Získáme tak Cauchyovu funkcionální rovnici

$$g(x+y)=g(x)+g(y) \text{ na intervalu } (-1,1),$$

jejíž všechna spojitá řešení mají pro nějaké reálné a tvar $g(x)=ax$. Navíc $g(x)\in(-\pi,\pi)$ implikuje $|a|\le\pi/2$. Proto $f(x)=\tan ax$ pro nějaké $|a|\le\pi/2$, což je skutečným řešením zadané funkcionální rovnice (51).

31. IMO – 1990 – (IMO90-4) = (SL90-25) *(Djukić et al. 2011, str. 547)*

Nechť $\mathbb{Q}^+$ je množina kladných racionálních čísel. Zkonstruujte funkci $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ takovou, že

$$f\big(xf(y)\big)=\frac{f(x)}{y}, \qquad \forall x,y\in\mathbb{Q}^+. \tag{52}$$

Řešení *(převedení na Cauchyho rovnici):*

Dosazením $x=1$ do (52) získáme

$$f(f(y))=\frac{f(1)}{y}\,, \qquad \forall y\in\mathbb{Q}^+, \tag{53}$$

a proto $f(y_1)=f(y_2)$ implikuje $y_1=y_2$, tj. funkce f je injektivní (prostá). Ukážeme, že funkce f je také surjektivní (*na*), a tedy i bijektivní (vzájemné jednoznačná). $(f\circ f)$ je *na*, protože $f(1)/y$ je libovolné číslo z $\mathbb{Q}^+$ pro libovolné $y \in \mathbb{Q}^+$. Na základě lemmatu 2 ze str. 9 plyne, že f je *na*. Zároveň víme, že f je prostá, a proto je f bijektivní.

Položíme $y = 1$ v zadané rovnici (52) a obdržíme

$$f\big(xf(1)\big) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+,$$

z prostoty f:

$$xf(1) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+,$$
$$f(1) = 1.$$

Z (53) dosazením $f(1) = 1$ plyne

$$f(f(y)) = \frac{1}{y}, \qquad \forall y \in \mathbb{Q}^+ . \tag{54}$$

Dále položíme $y = f(z)$ a dostaneme

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{f(z)} = f\Big(f\big(f(z)\big)\Big) = f\left(\frac{1}{z}\right),$$
$$\frac{1}{f(z)} = f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Nyní dosadíme $y = f\left(\frac{1}{t}\right)$ do (54) a následně do původní rovnice (52), tím získáme

$$f(y) = f\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{1}{\frac{1}{t}} = t$$

a

$$f\big(xf(y)\big) = f(xt) = \frac{f(x)}{y} = \frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{f(x)}{\frac{1}{f(t)}} = f(x)f(t), \qquad \forall x, y, t \in \mathbb{Q}^+.$$

Naopak jakákoliv funkce na $\mathbb{Q}^+$ splňující pro všechna $x, t \in \mathbb{Q}^+$

(i) $f(xt) = f(x)f(t)$,

(ii) $f(f(x)) = 1/x$

také vyhovuje zadané funkcionální rovnici (52). Stačí tedy najít funkci splňující (i) a (ii).

Poznamenejme, že všechny prvky $q \in \mathbb{Q}^+$ jsou ve tvaru $q = \prod_{i=1}^{n} {p_i}^{a_i}$, kde p_i jsou prvočísla a $a_i \in \mathbb{Z}$. Podmínka (i) implikuje

$$f(q) = f\left(\prod_{i=1}^{n} {p_i}^{a_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} f(p_i)^{a_i}$$

Stačí tedy definovat funkci na všech prvočíslech. Aby funkce splnila podmínku (ii), je nutné a postačující, aby pro všechna prvočísla p platilo $f(f(p)) = 1/p$. Nechť q_i označuje i-té nejmenší prvočíslo. Hledanou funkci f definujeme následovně:

$$f(q_{2k-1}) = q_{2k}, \qquad f(q_{2k}) = \frac{1}{q_{2k-1}}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Taková funkce splňuje (ii) a spolu s doplňkovou podmínkou $f(xt) = f(x)f(t)$ je dobře definovaná pro všechny prvky $\mathbb{Q}^+$, tudíž řeší původní funkcionální rovnici (52).

3.4. Metoda využití pevných bodů

Příklady řešené metodou pevných bodů se v matematických olympiádách nevyskytují příliš často, ba dokonce z dostupných ročníků pouze v úlohách IMO, proto se jimi zabývá až poslední část této kapitoly.

Definice (Šatný 2016)*:* Pevným bodem funkce f nazýváme každé číslo x z definičního oboru $D(f)$ funkce f, pro které platí $f(x_0) = x_0$ a množinou pevných bodů budeme rozumět $P_f = \{x \in D(f); f(x) = x\}$.

3.4.1. Příklady řešené metodou pevných bodů

55. IMO – 2015 – úloha 5 (Šatný 2016)

Nechť $\mathbb{R}$ označuje množinu všech reálných čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnici

$$f\big(x + f(x+y) + f(xy)\big) = x + f(x+y) + yf(x) \tag{55}$$

pro všechna reálná čísla x a y.

Žádný z šestice českých reprezentantů nedovedl funkcionální rovnici (55) zcela vyřešit. Neobjevili žádné významné vlastnosti vyhovujících funkcí f, které by vedly k nalezení všech jejích možných předpisů. Některým se podařilo uhodnout obě její řešení, nedokázali však, že žádná jiná řešení neexistují. Tento neúspěch našich mladých matematiků Šatný připisuje jejich nedostatečné zkušenosti s úvahami o pevných bodech funkcí, bez kterých patrně nelze funkcionální rovnice (55) vyřešit.

Pozorování:

Pokud „odstraníme“ všechna f z obou stran rovnice (55), zůstane na nich po úpravě totožný výraz $2x + y + xy$, z toho plyne, že prvním řešením dané funkcionální rovnice bude funkce $f(x) = x$.

Dále hledáme všechny lineární funkce $f(x) = ax + b$ vyhovující dané funkcionální rovnici, tudíž obecnou lineární funkci dosadíme do obou stran rovnice a jejich hodnoty pak porovnáme rozdílem:

$$L = f(x + a(x + y) + b) + axy + b = a(x + ax + ay + b) + b + axy + b$$
$$= axy + (a^2 + a)x + a^2y + ab + 2b$$
$$P = x + a(x + y) + b + y(ax + b) = axy + (a + 1)x + (a + b)y + b$$
$$L - P = (a^2 - 1)x + (a^2 - a - b)y + b(a + 1).$$
Rovnost $L - P = 0$ platí pro všechna reálná x, y, právě když se všechny tři koeficienty z posledního odvozeného výrazu rovnají nule tj.
$$a^2 - 1 = a^2 - a - b = b(a + 1) = 0.$$
Tuto podmínku zřejmě splňují dvě dvojice čísel (a, b) rovné $(-1,2)$ a $(1,0)$. Tím jsme ověřili, že funkcionální rovnici (55) vyhovují právě dvě lineární funkce $f_1(x) = -x + 2$ a $f_2(x) = x$, jejichž množiny pevných bodů jsou: $P_{f_1} = \{1\}$ a $P_{f_2} = \{\mathbb{R}\}$.

Řešení: Předpokládejme, že f je libovolná funkce, která splňuje danou funkcionální rovnici pro všechna reálná x, y. Volbou $y = 1$ v původní rovnici (55) dostaneme
$$f\big(x + f(x + 1)\big) + f(x) = x + f(x + 1) + f(x),$$
$$f\big(x + f(x + 1)\big) = x + f(x + 1).$$
Z poslední rovnosti vyčteme, že hodnota $x + f(x + 1)$ je pevným bodem funkce f pro jakékoliv reálné x. Záměnou x za $x - 1$ získáme poznatek o množině pevných bodů funkce f: $x - 1 + f(x) \in P_f$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Víme tak, že množina P_f je neprázdná.

Nalezení všech pevných bodů: Vezmeme libovolný prvek $y_0 \in P_f$, tedy libovolné číslo $y_0 \in \mathbb{R}$ s vlastností $f(y_0) = y_0$, pak volbou $x = 0$ a $y = y_0$ v zadané rovnici (55) získáme:
$$f\big(f(y_0)\big) + f(0) = f(y_0) + y_0 f(0),$$
$$y_0 + f(0) = y_0 + y_0 f(0),$$
$$f(0)(1 - y_0) = 0.$$
Za podmínky $f(0) \neq 0$, kdy z poslední rovnosti vychází $1 - y_0 = 0$, má funkce f jediný pevný bod $y_0 = 1$, neboli $P_f = \{1\}$. Z poznatku $x - 1 + f(x) \in P_f$ musí platit $x - 1 + f(x) = 1$, čili $f(x) = 2 - x$ pro každé reálné x. Tím jsme odhalili předpis pro jedno z obou řešení funkce f, které jsme objevili již v sekci pozorování, a tak jsme jej ověřili.

Dále budeme řešit případ pro $f(0) = 0$. Volbou $y = -x$ v rovnici (55) díky rovnosti $f(0) = 0$ obdržíme
$$f(x) + f(-x^2) = x - xf(x). \tag{56}$$
Pro $x = -1$ tak zjistíme, že platí
$$f(-1) + f(-1) = -1 + f(-1), \text{ neboli } f(-1) = -1$$

a pro $x = 1$ máme

$$f(1) + f(-1) = 1 - f(1), \text{ neboli } f(1) = 1.$$

Zjistili jsme tak, že pevnými body funkce f jsou (kromě předpokládané nuly) i čísla -1 a 1. Druhý významný důsledek předpokladu $f(0) = 0$ získáme volbou $y = 0$ v rovnici (55). Dostaneme vztah

$$f\big(x + f(x)\big) = x + f(x),$$

podle kterého rovněž hodnoty $x + f(x)$ patří k pevným bodům funkce f: $x + f(x) \in P_f$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pevný bod $x + f(x)$ funkce f je o 1 větší než její pevný bod $x - 1 + f(x)$. Ukažme, že platí závěr: je-li pro nějaké $y_0 \in P_f$ rovněž $y_0 + 1 \in P_f$, pak také $y_0 + 2 \in P_f$. Skutečně, z rovnosti $f(y_0) = y_0$ a $f(y_0 + 1) = y_0 + 1$ při volbě $x = 1$ a $y = y_0$ v původním zadání (55) obdržíme (s ohledem na předchozí výsledek $f(1) = 1$):

$$f\big(1 + f(1 + y_0)\big) + f(y_0) = 1 + f(1 + y_0) + y_0 f(1),$$

$$f(1 + 1 + y_0) + y_0 = 1 + (1 + y_0) + y_0,$$

$$f(y_0 + 2) = y_0 + 2,$$

jak jsme chtěli ukázat. Právě dokázaná vlastnost vede k závěru, že mezi pevné body funkce f patří hodnota $x + 1 + f(x)$, protože jsme dříve zjistili, že platí $x - 1 + f(x) \in P_f$ pro všechna reálná x a $x + f(x) \in P_f$ pro všechna reálná x.

Po dosazení $x - 1$ za x do $x + 1 + f(x)$ obdržíme další pevný bod $x + f(x - 1) \in P_f$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Získaný poznatek uplatníme tak, že odpovídající rovnost

$$f\big(x + f(x - 1)\big) = x + f(x - 1)$$

využijeme při úpravách v následujícím kroku.

V původní funkcionální rovnici položíme $y = -1$. Tedy

$$f\big(x + f(x - 1)\big) + f(-x) = x + f(x - 1) - f(x),$$

$$x + f(x - 1) + f(-x) = x + f(x - 1) - f(x),$$

$$f(-x) = -f(x).$$

Protože poslední rovnost platí pro všechna reálná x, odvodili jsme (cestou úvah o množině pevných bodů) rozhodující vlastnost hledané funkce f, kterou je lichost. Nyní snadno zjistíme její předpis.

Nahrazením x opačnou hodnotou $-x$ ve vztahu (56) získáme s ohledem na lichost

$$f(-x) + f(-x^2) = -x + xf(-x),$$

$$-f(x) + f(-x^2) = -x - xf(x)$$

a odečtením obdržené rovnosti od rovnosti (56): $f(x) + f(-x^2) = x - xf(x)$

dostaneme

$$2f(x) = 2x$$

$$f(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

To je druhé řešení zadané funkcionální rovnice, které se stejně jako to první $f(x) = 2 - x$, shoduje s poznatky z pozorování. Protože podle uvedeného postupu žádná jiná vyhovující funkce f neexistuje, je tím celé řešení úlohy u konce.

15. IMO – 1973 – (IMO73-5) = (SL73-17) *(Djukić et al. 2011, str. 405)*

Nechť G je množina funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve tvaru $f(x) = ax + b$, kde a, b jsou reálná čísla a $a \neq 0$. Předpokládejme, že G splňuje následující podmínky:

(1) Jestliže $f, g \in G$, pak $(g \circ f) \in G$, kde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(2) Jestliže $f \in G$, pak inverzní funkce f^{-1} k funkci f náleží do G, pro $f(x) = ax + b$ je inverzní funkce $f^{-1}(x) = (x - b)/a$.

(3) Pro každé $f \in G$ existuje číslo $x_f \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x_f) = x_f$.

Dokažte, že existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že $f(k) = k$ pro všechny funkce $f \in G$.

Řešení: Nechť $f_1(x) = ax + b$ a $f_2(x) = cx + d$ jsou dvě funkce z množiny G. Definujeme

$$g(x) = (f_1 \circ f_2)(x) = acx + (ad + b),$$

$$h(x) = (f_2 \circ f_1)(x) = acx + (bc + d).$$

Podle podmínky pro G patří jak $g(x)$ tak $h(x)$ do G. Navíc existuje

$$h^{-1}(x) = \frac{x - (bc + d)}{ac}$$

a také

$$(h^{-1} \circ g)(x) = \frac{acx + (ad + b) - (bc + d)}{ac} = x + \frac{(ad + b) - (bc + d)}{ac}$$

patřící do množiny G. Pak podle podmínky (3) existuje nějaké $x \in \mathbb{R}$ takové, že platí $(h^{-1} \circ g)(x) = x$, a proto

$$\frac{(ad + b) - (bc + d)}{ac} = 0.$$

Nyní z toho plyne $ad + b = bc + d$ pro každé $f_1, f_2 \in G$, což je ekvivalentní s

$$\frac{b}{1 - a} = \frac{d}{1 - c} = \textit{konstanta} = k.$$

Ale tyto vzorce přesně popisují pevné body funkcí f_1 a f_2:

$$x = f_1(x) = ax + b, \qquad x = f_2(x) = cx + d$$

$$x = \frac{b}{1 - a} = k, \qquad x = \frac{d}{1 - c} = k.$$

Protože platí $f(k) = k$, je nalezené k jediným společným pevným bodem všech funkcí f z G.

37. IMO – 1996 – (IMO96-3) = (SL96-8) *(Djukić et al. 2011, str. 608)*

Nechť $\mathbb{N}_0$ reprezentuje množinu všech nezáporných celých čísel (všech přirozených čísel včetně nuly). Najděte všechny funkce $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takové, že

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}_0. \tag{57}$$

Řešení: Položením $m = n = 0$ obdržíme

$$f(f(0)) = f(f(0)) + f(0),$$
$$f(0) = 0$$

a

$$f(f(n)) = f(n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{58}$$

Získané poznatky aplikujeme na zadanou rovnici a dostaneme:

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) = f(m) + f(n), \qquad f(0) = 0.$$

Nyní lze snadno odhadnout a ověřit, že prvním řešením zadané rovnice (57) je funkce

$$f(n) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

protože platí:

$$L = f\big(m + f(n)\big) = f(m) = 0,$$
$$P = f\big(f(m)\big) + f(n) = f(0) = 0,$$
$$L = P.$$

Dále předpokládejme, že f není nulová funkce. Z (58) plyne, že funkce f má nenulové pevné body.

Nechť a značí nejmenší nenulový pevný bod f. Indukcí je pevným bodem také každé ka, $k \in \mathbb{N}$, tj. $f(ka) = ka$. Pro $a = 1$ je platnost tvrzení triviální. Ukážeme, že jestliže je pevným bodem ka, pak je jím i $(k + 1)a$:

$$f((k + 1)a) = f(ka + a) = f(f(ka) + f(a)) = f(ka) + f(a) = ka + a = (k + 1)a.$$

Tvrdíme, že všechny pevné body f mají tvar $ka,\ k \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme, že $b = ka + i$ je pevný bod, kde $i < a$. Pak

$$b = f(b) = f(ka + i) = f(i + f(ka)) = f(i) + f(ka) = f(i) + ka = ka + i,$$
$$f(i) = i.$$

Proto $i = 0$.

Protože obor hodnot funkce f se shoduje s množinou jejích pevných bodů ($H(f) = P_f$), vyplývá z toho, že pro $i = 0, 1, \dots, a - 1$ platí

$$f(i) = an_i$$

pro nějaká celá čísla $n_i \geq 0,\ n_0 = 0$.

Konkrétně $P_f = \{ka,\ k \in \mathbb{N}_0\} = H(f)$, a je nejmenší pevný bod, $a > 0$. Množina vzorů $\{0,1,2,3,\dots, a-1\}$ se zobrazí na pevné body, tj. $0 \mapsto 0a,\ 1 \mapsto 1a,\ 2 \mapsto 2a, \dots$.

Nechť $n = ka + i$ je libovolné přirozené číslo, $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq i < a$. Zadaná funkcionální rovnice (57) nám za použití poznatku, že ka je pevným bodem, dává vztah

$$f(n) = f(ka + i) = f(i) + ka = an_i + ka = (n_i + k)a.$$

Kromě nulové funkce se jedná o obecné řešení dané funkcionální rovnice. Abychom to ověřili, dosadíme $m = ka + i, n = la + j$ do (57) a získáme

$$L = f\big(m + f(n)\big) = f\big(ka + i + f(la + j)\big) = f\big(ka + i + an_j + la\big)$$

$$= f\left(\big(k + l + n_j\big)a + i\right) = \big(n_i + k + l + n_j\big)a$$

$$P = f(f(m)) + f(n) = f(m) + f(n) = f(ka + i) + f(la + j) = ka + an_i + la + an_j$$

$$P = L$$

Řešením zadané funkcionální rovnice (57) jsou funkce $f_1(x) = 0$ a $f_2(x) = (x_i + k)a$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{N}_0$.

54. IMO – 2013 – (SL13-3) *(https://www.imo-official.org/problems/IMO2013SL.pdf)*

Nechť $\mathbb{Q}^+$ je množina kladných racionálních čísel. Nechť $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$ je funkce splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$ následující podmínky:

$$f(x)f(y) \geq f(xy) \tag{59}$$

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y). \tag{60}$$

Dále pro zadanou funkci f existuje pevný bod $a \in \mathbb{Q}^+$, tj. $f(a) = a,\ a > 1$.

Dokažte, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}^+$.

Řešení: Označme $\mathbb{N}$ množinu přirozených čísel. Dosazením $x = 1, y = a$ do (59) dostaneme $f(1) \geq 1$. Dále snadno pomocí indukce pro n dostaneme z (60), že

$$f(nx) \geq nf(x) \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in \mathbb{Q}^+. \tag{61}$$

Pro $n = 1$ jasně platí: $f(x) \geq f(x)$. Dále předpokládejme, že platí $f(nx) \geq nf(x)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, na základě toho ukážeme, že vztah platí i pro $n + 1$, protože

$$f((n + 1)x) = f(nx + x) \geq f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n + 1)f(x).$$

Speciálně z (61) máme

$$f(nx) \geq nf(x) \geq nf(1) \geq n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+. \tag{62}$$

Z (59) opět máme

$$f(m/n)f(n) \geq f(m),$$

takže

$$f(q) > 0, \qquad \forall q \in \mathbb{Q}^+.$$

Nyní (60) implikuje, že f je striktně rostoucí; tato skutečnost spolu s (62) dává

$$f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor) \geq \lfloor x \rfloor > x - 1, \qquad \forall x \geq 1. \tag{63}$$

(Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí funkci dolní celá část čísla x, která číslu x přiřazuje jeho nejbližší menší celé číslo.)

Indukcí z (59) dostaneme

$$f^n(x) \geq f(x^n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

Pro $n = 1$: $f(x) \geq f(x)$.

Dále předpokládejme, že platí $f^n(x) \geq f(x^n)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, na základě toho ukážeme, že vztah platí i pro $n + 1$, protože

$$f^{n+1}(x) = f^n(x)f(x) \geq f(x^n)f(x) \geq f(x^n \cdot x) = f(x^{n+1}).$$

Tedy díky (63)

$$f^n(x) \geq f(x^n) > x^n - 1,$$

$$f(x) \geq \sqrt[n]{x^n - 1}, \qquad \forall n \in N, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+, \qquad x > 1. \tag{64}$$

To dává

$$f(x) \geq x, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+, \qquad x > 1. \tag{65}$$

Vskutku, pro $x > y > 1$ a $n \in \mathbb{N}$ je

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}) > n(x - y),$$

rozdíly $x^n - y^n$ rostou s rostoucím n, takže pro dostatečně velké n přerostou 1, čili máme $x^n - 1 > y^n$ a tedy podle (64) $f(x) > y$. Jelikož $y \in (1, x)$ bylo libovolné racionální číslo, plyne z předchozího platnost (65): $f(x) \geq x,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+,\ x > 1$.

Nyní (59) a (65) dávají pro $x = a$:

$$a^n = f^n(a) \geq f(a^n) \geq a^n,$$

$$f(a^n) = a^n.$$

Protože podle předpokladu je $a > 1$, najdeme pro každé $x > 1$ vhodné $n \in \mathbb{N}$ tak, že $a^n - x > 1$. Potom pomocí (60) a (65) dostaneme

$$a^n = f^n(a) \geq f(x) + f(a^n - x) \geq x + (a^n - x) = a^n, \qquad x > 1, \tag{66}$$

z čehož plyne

$$f(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+, \qquad x > 1.$$

V rovnici (66) jsou všude rovnosti protože $a^n = \ldots = a^n$ a z (65) víme, že

$$f(x) \geq x, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+, \qquad x > 1,$$

čili

$$f(x) + f(a^n - x) = x + a^n - x > 0,$$
$$f(x) \geq x, \qquad f(a^n - x) \geq a^n - x.$$

Víme

$$f(x) \geq x > 1, \quad f(a^n - x) \geq a^n - x > 1,$$
$$f(x) + f(a^n - x) = x + a^n - x > 1,$$
$$\Rightarrow f(x) = x, \qquad f(a^n - x) = a^n - x,$$
$$\Rightarrow f(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+, \qquad x > 1.$$

Nakonec pro každé $x \in \mathbb{Q}^+$ a každé $n \in \mathbb{N}$ z (59) a (62) dostaneme

$$nf(x) = f(n)f(x) \geq f(nx) \geq nf(x),$$
$$f(nx) = nf(x).$$

Proto

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{f(m)}{n} = \frac{m}{n}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$f(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+,$$

což jsme měli dokázat.

Komentář. Podmínka $f(a) = a > 1$ je zásadní. Pro $b \geq 1$ totiž funkce $f(x) = bx^2$ splňuje (59) a (60) pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$ a má jediný pevný bod $1/b \leq 1$.

4. Sbírka řešených úloh z české Matematické olympiády

- příklady včetně řešení jsou převzaty z internetových stránek Matematické olympiády (MO)

50. MO – 2000-2001 – kat. A, domácí kolo, příklad 5

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440630/A50i.pdf)

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí

$$x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x+y) \cdot \big(f(x) + f(y)\big).$$

Řešení: Metodou substituce podrobně příklad řeší Pešková (2012, str. 14), řešením je funkce $f(x) = x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

50. MO – 2000-2001 – kat. A, krajské kolo, příklad 4

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440631/A50ii.pdf)

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = (x-y)^2 \cdot f(x+y). \qquad (67)$$

Řešení: Předpokládejme, že f je libovolná z hledaných funkcí. Všimněme si, že levá strana zadané rovnice (67) je sudá funkce proměnné x. Při záměně čísla x opačným číslem $-x$ se proto nezmění ani hodnota pravé strany rovnice:

$$(x-y)^2 \cdot f(x+y) = (-x-y)^2 \cdot f(-x+y),$$
$$(x-y)^2 \cdot f(x+y) = (x+y)^2 \cdot f(y-x).$$

Dosaďme sem při libovolném $t \in \mathbb{R}$ hodnoty $x = (t-1)/2$ a $y = (t+1)/2$, které jsou zvoleny tak, aby platilo $x + y = t$ a $y - x = 1$. Dostaneme vztah

$$f(t) = t^2 \cdot f(1), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Funkce f je tedy nutně tvaru $f(x) = cx^2$, přitom neznámý koeficient c zjistíme tak, že dosadíme do (67) (a tak vlastně současně provedeme i zkoušku):

$$c(x^2 + cy^2)^2 = (x-y)^2 \ \cdot \ c(x+y)^2,$$
$$c(x^4 + 2cx^2y^2 + c^2y^4) - c(x^2 - 2xy + y^2)(x^2 + 2xy + y^2) = 0,$$
$$c(x^4 + 2cx^2y^2 + c^2y^4 - x^4 - 2x^3y - x^2y^2 + 2x^3y + 4x^2y^2 + 2xy^3 - x^2y^2 - 2xy^3 - y^4) = 0,$$
$$c\big(2cx^2y^2 + 2x^2y^2 + y^4(c^2-1)\big) = 0,$$
$$cy^2\big(2cx^2 + 2x^2 + y^2(c^2-1)\big) = 0,$$
$$cy^2\big(2x^2(c+1) + y^2(c+1)(c-1)\big) = 0,$$
$$c(c+1)y^2(2x^2 + (c-1)y^2) = 0.$$

Poslední odvozená rovnice je splněna pro libovolná x a y, právě když $c = 0$ nebo $c = -1$.

(Např. dosazení $x = y = 1$ vede k podmínce $c(c+1)^2 = 0$, takže nutně $c \in \{0, -1\}$.)

Úloha má právě dvě řešení: nulovou funkci $f_1(x) = 0$ a funkci $f_2(x) = -x^2$.

51. MO – 2001-2002 – kat. A, ústřední kolo, příklad 6

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440643/A51iii.pdf)

Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnost

$$f\big(xf(y)\big) = f(xy) + x.$$

Řešení: v rámci kapitoly *3.2.1 Příklady řešené metodou symetrie proměnných, str. 17.*

53. MO – 2003-2004 – kat. A, ústřední kolo, příklad 6

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440670/A53iii.pdf)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro libovolná kladná čísla x, y splňují rovnost:

$$x^2\big(f(x) + f(y)\big) = (x+y)f\big(f(x)y\big). \tag{68}$$

Řešení: Nechť f je libovolná z hledaných funkcí. Označme $f(1) = p$, vzhledem k podmínkám úlohy platí $p > 0$. V zadané rovnici (68) položme $x = 1$, $y = 1$. Po úpravě

$$\big(f(1) + f(1)\big) = 2f\big(f(1)\big)$$

dostaneme $p = f(p)$. Do (68) dále dosaďme $x = p$, $y = 1$. Potom

$$p^2(f(p) + p) = (p+1)f\big(f(p)\big),$$

dle $p = f(p)$ vyjde

$$2p^3 = (p+1)p.$$

Ukážeme, že získaná algebraická rovnice má tři reálné kořeny $\{-1/2, 0, 1\}$.

$$2p^3 - (p+1)p = 0$$

$$p(2p^2 - p - 1) = 0 \implies p_1 = 0$$

$$p_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \implies p_2 = 1, \qquad p_3 = -\frac{1}{2}$$

Jediný kořen vyhovující podmínce $p > 0$ je $p = 1$, tedy $f(1) = 1$.

Nechť t je libovolné kladné reálné číslo. Položme v (68) $x = 1$, $y = t$, takže vzhledem k $f(1) = 1$ dostaneme

$$1 + f(t) = (1+t)f(t)$$

$$1 = (1+t)f(t) - f(t) = f(t)(1 + t - 1) = f(t)t$$

$$f(t) = 1/t.$$

Dosazením snadno ověříme, že funkce $f(t) = 1/t$ vyhovuje rovnici (68), protože platí

$$x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = (x + y) \cdot \frac{1}{\frac{1}{x} \cdot y}$$

$$\frac{x^2 \cdot (x + y)}{xy} = (x + y) \cdot \frac{x}{y}$$

Funkce určená vztahem $f(x) = 1/x,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$ je řešením dané funkcionální rovnice (68).

54. MO – 2004-2005 – kat. A, domácí kolo, příklad 6

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440681/A54i.pdf)

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, které vyhovují současně třem podmínkám:

a) pro libovolná nezáporná čísla x, y taková, že $x + y > 0$, platí rovnost

$$f\big(xf(y)\big)f(y) = f\left(\frac{xy}{x + y}\right); \tag{69}$$

b) $f(1) = 0$;

c) $f(x) > 0$ pro libovolné $x > 1$.

Řešení:

Do (69) dosadíme $y = 1$ a dostaneme

$$f\big(xf(1)\big)f(1) = f\left(\frac{x}{x + 1}\right), \qquad \forall x \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že $f(1) = 0$ podle podmínky b), poslední rovnost znamená, že

$$f\left(\frac{x}{x + 1}\right) = 0, \qquad \forall x \geq 0. \tag{70}$$

Vidíme, že funkce f nabývá hodnoty nula ve všech bodech definičního oboru, které můžeme vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{x}{x+1}$ s vhodným $x \geq 0$. Každý takový zlomek leží v intervalu $\langle 0,1)$, naopak pro každé reálné číslo $t \in \langle 0,1)$ má rovnice

$$t = \frac{x}{x + 1} \text{ nezáporné řešení } x = \frac{t}{1 - t}.$$

Zjištěný poznatek spolu s podmínkou c) ze zadání úlohy vede k závěru, že rovnost $f(t) = 0$ platí, právě když $t \in \langle 0, 1\rangle$. Abychom určili (kladnou) hodnotu $f(t)$ pro pevné $t > 1$, uvážíme na základě rovnic (69) a (70) dvě rovnice s takovým parametrem t a neznámou x, totiž rovnice

$$f\big(xf(t)\big)f(t) = 0, \qquad f\left(\frac{xt}{x + t}\right) = 0.$$

Protože ze zadání (69) se levé strany obou rovnic rovnají a $f(t) > 0$, musí mít obě rovnice stejné množiny řešení. Pro první z nich je tato množina určena soustavou nerovnic

$$0 \leq xf(t) \leq 1,$$

takže tvoří interval $\langle 0,1/f(t)\rangle$.

Druhá rovnice je ekvivalentní se soustavou nerovnic

$$0 \leq \frac{xt}{x+t} \leq 1,$$

jejíž řešení (s ohledem na $x + t > 0$) tvoří interval $\langle 0, \frac{t}{t-1}\rangle$.

Z totožnosti obou intervalů plyne rovnost

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{t}{t-1},$$

$$f(t) = \frac{t-1}{t}.$$

Našli jsme hodnotu $f(t)$ pro každé $t > 1$. Můžeme tedy shrnout, že hledaná funkce f musí mít tvar

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ \dfrac{t-1}{t}, & t > 1. \end{cases}$$

V druhé části řešení ukážeme, že funkce f určená posledním předpisem má skutečně vlastnost a) ze zadání úlohy (vlastnosti b) a c) jsou zřejmé). Rovnosti obou stran rovnice (69)

$$L = f\big(xf(y)\big)f(y), \qquad P = f\left(\frac{xy}{x+y}\right)$$

dokážeme v každém ze čtyř případů rozlišených podle možných hodnot proměnné y a zlomku $\dfrac{xy}{x+y}$:

$$\text{(i) } y = 0,\ \ x > 0, \qquad \text{(ii) } 0 < y \leq 1,$$

$$\text{(iii) } y > 1,\ \ \frac{xy}{x+y} \leq 1, \qquad \text{(iv) } y > 1,\ \ \frac{xy}{x+y} > 1.$$

Případ (i): Z $y = 0$ plyne $f(y) = 0$ a

$$L = f\big(xf(y)\big)f(y) = 0, \qquad P = f\left(\frac{xy}{x+y}\right) = f(0) = 0$$

$$L = 0 = P.$$

Případ (ii): Z $0 < y \leq 1$ plyne $\dfrac{xy}{x+y} < 1$, takže

$$L = f\big(xf(y)\big)f(y) = 0, \qquad P = f\left(\frac{xy}{x+y}\right) = 0$$

$$L = 0 = P.$$

Případ(iii): Z $y > 1, \dfrac{xy}{x+y} \leq 1$ plyne $x \leq \dfrac{y}{y-1}$, takže s ohledem na hodnotu $f(y) = \dfrac{y-1}{y}$ platí nerovnost $xf(y) \leq 1$, tudíž opět $L = 0 = P$.

Případ (iv): Z $y > 1, \dfrac{xy}{x+y} > 1$ plyne $x > \dfrac{y}{y-1}$, takže s ohledem na hodnotu $f(y) = \dfrac{y-1}{y}$ platí nerovnost $xf(y) > 1$, tudíž

$$L = f\big(xf(y)\big)f(y) = \frac{x\frac{y-1}{y} - 1}{x\frac{y-1}{y}} \cdot \frac{y-1}{y} = \frac{xy-x-y}{xy}$$

$$P = f\left(\frac{xy}{x+y}\right) = \frac{\frac{xy}{x+y} - 1}{\frac{xy}{x+y}} = \frac{xy-x-y}{x+y} \cdot \frac{x+y}{xy} = \frac{xy-x-y}{xy} = P$$

Rovnost $L = P$ je tak dokázána ve všech případech.

Řešením zadané funkcionální rovnice (72) je tedy funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{x-1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

56. MO – 2006-2007 – kat. A, domácí kolo, příklad 6

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440709/A56i.pdf)

Určete všechny funkce $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna celá čísla x, y platí

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2006). \tag{71}$$

Řešení: Nechť f je libovolná funkce požadovaných vlastností.

Dosadíme-li do zadání postupně $y = 0$ a $y = 1$, dostaneme

$$f\big(f(x)\big) = x + f(2006), \qquad \forall x \in \mathbb{Z},$$
$$f(f(x) + 1) = x + f(2007), \qquad \forall x \in \mathbb{Z} \tag{72}$$

a jejich vzájemným odečtením

$$f(f(x) + 1) - f\big(f(x)\big) = f(2007) - f(2006).$$

Poslední vztah lze zjednodušeně zapsat pro $f(x) = z$ jako

$$f(z + 1) - f(z) = f(2007) - f(2006) \tag{73}$$

pro každé takové $z \in \mathbb{Z}$, které patří do oboru hodnot funkce f. Tímto oborem je ovšem množina $\mathbb{Z}$, jak lze odvodit z kterékoli z rovností (72). Z (72) vidíme, že $(f \circ f)$ je surjektivní (*na*) na $\mathbb{Z}$ a tedy dle lemmatu 2 na str. 9 je i f *na* $\mathbb{Z}$.

Rovnost (73) platná pro každé $z \in \mathbb{Z}$ znamená, že funkce f na $\mathbb{Z}$ je (oboustranně nekonečná) aritmetická posloupnost, takže její předpis musí být tvaru

$$f(z) = az + b,$$

kde a, b jsou vhodné konstanty ze $\mathbb{Z}$.

Jejich možné hodnoty zjistíme dosazením do obou stran zadané rovnice (71) (čímž zároveň provedeme i zkoušku):

$$f(f(x)+y) = a(f(x)+y)+b = a^2x + ay + ab + b,$$
$$x + f(y+2006) = x + a(y+2006) + b = x + ay + 2006a + b.$$

Takové dva výrazy mají tutéž hodnotu pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$, právě když zároveň platí

$$a^2 = 1, \qquad 2006a = ab,$$

čili

$$a = \pm 1, \qquad b = 2006.$$

Řešením úlohy jsou tedy pro všechna $x \in \mathbb{Z}$ dvě funkce určené předpisy

$$f_1(x) = x + 2006, \qquad f_2(x) = -x + 2006.$$

56. MO – 2006-2007 – kat. A, ústřední kolo, příklad 3

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440711/A56iii.pdf)

Označme $\mathbb{N}$ množinu všech přirozených čísel a uvažujme všechny funkce $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f\big(xf(y)\big) = yf(x). \tag{74}$$

Určete nejmenší možnou hodnotu $f(2007)$.

Řešení: Uvažujme libovolnou funkci f požadovaných vlastností. Nejprve ukážeme, že je prostá. Jestliže $f(y_1) = f(y_2)$, pak platí

$$y_1 f(x) = f\big(xf(y_1)\big) = f\big(xf(y_2)\big) = y_2 f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Poněvadž $f(x)$ je přirozené číslo, plyne odtud $y_1 = y_2$, což znamená, že funkce f je prostá. Volbou $x = 1$ v dané rovnici (74) dostaneme

$$f\big(f(y)\big) = yf(1), \qquad \forall y \in \mathbb{N},$$

což pro $y = 1$ představuje vztah

$$f\big(f(1)\big) = f(1).$$

Protože f je prostá, plyne odtud $f(1) = 1$, takže pro všechna přirozená čísla y navíc platí

$$f\big(f(y)\big) = y. \tag{75}$$

Z právě odvozeného vztahu zároveň plyne, že oborem hodnot funkce f je celá množina $\mathbb{N}$, protože z (75) plyne $(f \circ f)$ je surjektivní (*na*) $\mathbb{N}$, tj. obor hodnot $H(f \circ f) = \mathbb{N}$, a tedy i $H(f) = \mathbb{N}$, protože f je podle lemmatu 2 na str. 9 také *na* $\mathbb{N}$.

Můžeme tedy pro libovolné přirozené číslo z najít y, pro něž $y = f(z)$ a zároveň $f(y) = z$, takže podle vztahu ze zadání pak platí

$$f(xz) = f(x(f(y)) = yf(x) = f(z)f(x), \qquad \forall x, z \in \mathbb{N}.$$

Odtud odvodíme matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla $n, x_1, x_2, , \dots, x_n$ platí

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n). \tag{76}$$

Pro $n = 1$: $f(x_1) = f(x_1)$. Dále předpokládejme, že pro nějaké $n \in N$ platí

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n),$$

ukážeme, že vztah platí i pro $n + 1$:

$$f(x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}) = f((x_1 x_2 \dots x_n) x_{n+1}) = f(x_1 x_2 \dots x_n) f(x_{n+1}) =$$
$$= f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) f(x_{n+1}).$$

Ukážeme, že obraz $f(p)$ libovolného prvočísla p je také prvočíslo. Pro důkaz sporem předpokládejme, že

$$f(p) = ab, \qquad \forall a, b \in \mathbb{N}, \qquad a, b > 1.$$

Podle (75) a (76) platí

$$f(p) = f\big(f(p)\big) = f(ab) = f(a) f(b).$$

Protože funkce f je prostá a $f(1) = 1$, platí $f(a) > 1$, $f(b) > 1$, což je spor s předpokladem, že p je prvočíslo, proto $f(p)$ musí být prvočíslem.

Jelikož $2007 = 3^2 \cdot 223$ je rozklad čísla 2007 na prvočinitele, dostaneme podle (76)

$$f(2007) = f^2(3) f(223),$$

kde obě čísla $f(3)$ a $f(223)$ jsou prvočísla.

Jestliže $f(3) = 2$, pak dle (75) platí $f(2) = 3$ a nejmenší možná hodnota $f(223)$ je 5, takže

$$f(2007) \geq 20.$$

Pokud $f(3) = 3$, pak nejmenší hodnota $f(223)$ je 2 a platí

$$f(2007) \geq 18.$$

Pro každou jinou volbu hodnot $f(3)$ a $f(223)$ platí

$$f(2007) \geq 18.$$

Ukážeme, že existuje funkce vyhovující zadání, pro kterou platí $f(2007) = 18$. Definujme funkci f následujícím způsobem:

Pro libovolné přirozené číslo x, které lze zapsat jako $x = 2^k 223^m q$, kde k a m jsou celá nezáporná čísla a q je přirozené číslo nesoudělné s čísly 2 a 223, zadáme hodnotu $f(x)$ vztahem

$$f(2^k 223^m q) = 2^m 223^k q.$$

Pak platí

$$f(2007) = f(223 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

Ověříme, že tato nalezená funkce f má požadovanou vlastnost.

Nechť

$$x = 2^{k_1} 223^{m_1} q_1, \qquad y = 2^{k_2} 223^{m_2} q_2$$

jsou libovolná přirozená čísla zapsaná výše uvedeným způsobem. Potom

$$f(xf(y)) = f(2^{k_1} 223^{m_1} q_1 f(2^{k_2} 223^{m_2} q_2)) = f(2^{k_1} 223^{m_1} q_1 2^{m_2} 223^{k_2} q_2) =$$
$$= f(2^{k_1+m_2} 223^{m_1+k_2} q_1 q_2) = 2^{k_2+m_1} 223^{m_2+k_1} q_1 q_2$$

a současně

$$yf(x) = 2^{k_2} 223^{m_2} q_2 f(2^{k_1} 223^{m_1} q_1) = 2^{k_2} 223^{m_2} q_2 2^{m_1} 223^{k_1} q_1 =$$
$$= 2^{k_2+m_1} 223^{m_2+k_1} q_1 q_2.$$

Proto funkce f splňuje (74) a nejmenší možná hodnota čísla $f(2007)$ je 18.

60. MO – 2010-2011 – kat. A, ústřední kolo, příklad 6

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440775/A60iii.pdf)

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)f(y) = f(y)f\big(xf(y)\big) + \frac{1}{xy}.$$

Řešení: v rámci kapitoly *3.1.1 Příklady řešené substituční metodou, str. 10.*

62. MO – 2012-2013 – kat. A, domácí kolo, příklad 4

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/440808/A62i.pdf)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna nenulová čísla x, y platí

$$xf(xy) + f(-y) = xf(x). \tag{77}$$

Řešení: Dosazením $x = 1$ dostaneme

$$f(y) + f(-y) = f(1), \qquad \forall y \neq 0.$$

Označíme-li $f(1) = a$, máme

$$f(-y) = a - f(y), \qquad \forall y \neq 0.$$

Dosaďme do (77) ještě $y = -1$, takže

$$xf(-x) + f(1) = xf(x),$$
$$x\big(a - f(x)\big) + a = xf(x),$$
$$xa - xf(x) + a = xf(x),$$
$$a(x+1) = 2xf(x),$$
$$f(x) = \frac{a(x+1)}{2x} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right), \qquad \forall x \neq 0.$$

Zkouškou ověříme, že pro libovolné reálné c vyhovuje zadané rovnici (77) každá funkce $f(x) = c(1 + 1/x)$:

$$L = xf(xy) + f(-y) = xc\left(1 + \frac{1}{xy}\right) + c\left(1 + \frac{1}{-y}\right) = c\left(x + \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y}\right) =$$

$$= c(x+1) = cx\left(1 + \frac{1}{x}\right) = xf(x) = P.$$

Řešením zadané funkcionální rovnice (77) je tedy pro všechna nenulová čísla x funkce tvaru $f(x) = c\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $c \in \mathbb{R}$.

66. MO – 2016-2017 – kat. A, ústřední kolo, příklad 3

(http://www.matematickaolympiada.cz/media/3494940/a66iii.pdf)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí

$$f(y - xy) = f(x)y + (x-1)^2 f(y). \qquad (78)$$

Řešení: Dosazením $x = 1$ dostaneme

$$f(0) = f(1)y, \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$

tedy nutně

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Dosazením $y = 1$ do zadané rovnice (78) pak pro každé x dostaneme

$$f(1-x) = f(x).$$

Nechť t je libovolné reálné číslo, dosazením $x = 1 - t$ do (78) dostaneme

$$f(ty) = f(1-t)y + t^2 f(y) = f(t)y + t^2 f(y), \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Záměnou proměnných t a y dále získáme

$$f(y)t + y^2 f(t) = f(yt) = f(ty) = f(t)y + t^2 f(y), \qquad \forall y, t \in \mathbb{R},$$

$$f(t)(y^2 - y) = f(y)(t^2 - t),$$

což pro $y = 2$ dává

$$f(t) = \frac{1}{2} f(2)(t^2 - t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Konstantu $f(2)/2$ označme a, $a \in \mathbb{R}$.

Nyní ověříme, že získaný předpis $f(x) = ax(x-1)$ vyhovuje zadané rovnici (78):

$$f(x)y + (x-1)^2 f(y) = ax(x-1)y + (x-1)^2 ay(y-1) =$$

$$= a(x-1)y\big(x + (x-1)(y-1)\big) = a(x-1)y(x + xy - x - y + 1) =$$

$$= a(x-1)y\big((x-1)y + 1\big) = a(1-x)y\big((1-x)y - 1\big) = f\big((1-x)y\big) = f(y - xy).$$

Řešením zadané funkcionální rovnice je tedy funkce $f(x) = ax(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, kde a je libovolné reálné číslo.

5. Úspěšnost českých reprezentantů a četnost úloh

- data pro jednotlivé olympiády jsou čerpána z příslušných internetových stránek

Úspěšnost českých reprezentantů v úlohách IMO obsahujících funkcionální rovnice:

- data jsou uvedena od r. 1983, protože dříve nebyl konstantní počet soutěžících v týmu
- data ze starších ročníků mohou být nepřesná z důvodu nedochování veškerých informací
- maximální bodový zisk týmu je 42 bodů

rok konání IMO	1983	1986	1990	1992
úloha	P1	P5	P4	P2
bodový zisk československého týmu	**28**	**35**	**31**	**19**
průměrný bodový zisk	19	24	17	16
nejvyšší bodový zisk	28	42	42	42

rok konání IMO	1993	1994	1996	1998	1999
úloha	P5	P5	P3	P6	P6
bodový zisk českého týmu	**27**	**19**	**26**	**4**	**6**
bodový zisk slovenského týmu	33	33	30	0	7
průměrný bodový zisk	19	18	13	4	6
nejvyšší bodový zisk	42	42	37	36	29

rok konání IMO	2002	2008	2011	2012	2015	2017	2019
úloha	P5	P4	P3	P4	P5	P2	P1
bodový zisk českého týmu	**15**	**29**	**7**	**17**	**7**	**26**	**35**
bodový zisk slovenského týmu	13	33	0	31	5	4	36
průměrný bodový zisk	13	24	6	21	8	13	28
nejvyšší bodový zisk	37	42	36	42	28	39	42

Úspěšnost českých reprezentantů v úlohách MEMO obsahujících funkcionální rovnice:

- maximální bodový zisk týmu je 8 bodů a v kategorii jednotlivců 48 (6x8) bodů

rok konání MEMO	2008	2011	2013	2015	2016	2021
úloha	T1	T1	T1	T2	T2	T1
bodový zisk českého týmu	**8**	**2**	**2**	**0**	**3**	**8**
průměrný bodový zisk	6	4	4	4	3	8
nejvyšší bodový zisk	8	8	8	8	8	8

rok konání MEMO	2009	2010	2018	2019
úloha	I1	I1	I2	I1
bodový zisk českého týmu	**5**	**6**	**7**	**12**
průměrný bodový zisk	12	6	25	18
nejvyšší bodový zisk	20	15	38	33

Úspěšnost českých reprezentantů v úlohách EGMO obsahujících funkcionální rovnice:

- Česká republika se EGMO účastní až od roku 2016
- maximální bodový zisk je 28 (4x7) bodů

rok konání EGMO	2017	2021
úloha	P2	P2
bodový zisk českého týmu	2	1
průměrný bodový zisk	6	7
nejvyšší bodový zisk	28	28

Četnost úloh obsahujících funkcionální rovnice v jednotlivých typech olympiád:

olympiáda	MEMO	EGMO	IMO	MO
počet ročníků	15	10	62	posledních 22
počet úloh	10	4	23	10
procentuální zastoupení	66,67 %	40 %	37,10 %	45,45 %
poslední výskyt	2021	2021	2019	2016-2017

Četnost úloh obsahujících funkcionální rovnice v jednotlivých kolech MO za posledních 22 ročníků (50.-71. ročník):

kolo MO	domácí kolo	krajské kolo	ústřední kolo
počet úloh	4	1	5
procentuální zastoupení	18,18 %	4,55 %	22,73 %
poslední výskyt	2012-2013	2000-2001	2016-2017

6. Diskuse

Při vyšetřování funkcionálních rovnic se nejvíce uplatňuje substituční metoda, protože ji částečně zahrnují i metody ostatní, a tak ji lze využít alespoň na počátku řešení každého příkladu. Úlohy obsahující funkcionální rovnice řešené metodou specifikace proměnných se vyskytují ve všech typech zahrnutých matematických olympiád. Rovněž příklady, při jejichž řešení se používá metoda symetrie proměnných, se objevují ve všech olympiádách.

Naopak příklady řešené Cauchyovou metodou se v dostupných ročnících české MO a MEMO nevyskytují. Pouze (Pešková 2012) uvádí jeden příklad z 30. ročníku MO (1980-1981), kde vyšetřuje Cauchyovou metodou soustavu dvou funkcionálních rovnic. Tato práce představuje v rámci úloh z EGMO jediný případ z 10. ročníku (2021). Další úlohy jsou čerpány z IMO, kde se vyskytují funkcionální rovnice řešené Cauchyovou metodou častěji. Nejméně frekventovaná se zdá být metoda pevných bodů, poněvadž funkcionální rovnice řešené touto metodou se objevují pouze v IMO. Právě malá zkušenost s úvahami o pevných bodech pravděpodobně způsobuje českým reprezentantům v mezinárodní konkurenci značné obtíže při řešení funkcionálních rovnic vyžadujících metodu pevných bodů (Šatný 2016).

Téměř nulová četnost funkcionálních rovnic řešených Cauchyovou metodou a metodou pevných bodů v české MO a MEMO může mít více příčin. Úlohy mohly být přítomny ve starších ročnících MO, které nejsou dostupné. Oficiální stránky MO počínají u kategorie A domácím kolem 43. ročníku (1993-1994), dále chybí ročníky 44-46, kompletní sady zadání jsou dostupné až od 47. ročníku (1997-1998). Další potenciální příčina spočívá v lidském faktoru, tj. v neodhalení daných metod v dostupných úlohách. Případně se úlohy řešené Cauchyovou metodou a metodou pevných bodů opravdu nemusí v MO a MEMO vyskytovat.

Tato práce uvádí pouze metody nejznámější a nejčastěji užívané v úlohách matematických olympiád. V rámci každé metody je uvedeno několik úloh s podrobně rozepsaným postupem řešení, stejně tak jsou vyřešeny i příklady ve sbírce z české MO. Některé úlohy z přiložených sbírek tkví ve využití dalších vlastností funkcí a číselných oborů. Existují i další metody řešení funkcionálních rovnic, při jejichž aplikaci je však zapotřebí znalost polynomů či teorie grup.

Z výše uvedených tabulek vyplývá, že na mezinárodní úrovni jsou čeští středoškolští studenti v příkladech obsahujících funkcionální rovnice spíše průměrní až podprůměrní s výjimkou některých ročníků IMO a jednoho ročníku MEMO. Minimální schopnost našich reprezentantů vyrovnat se nejlepším může pramenit z malé četnosti úloh na funkcionální rovnice v jednotlivých kolech české MO. Zároveň se příklad s touto problematikou v MO vyskytl naposledy v 66. ročníku (2016-2017), přičemž v ostatních olympiádách se vyskytují úlohy na funkcionální rovnice i v mladších ročnících (60. IMO – 2019, 15. MEMO – 2021 a 10. EGMO – 2021). Tato práce by tedy mohla pomoci českým středoškolským studentům a jejich učitelům při přípravě na další ročníky matematických olympiád, jelikož v rámci každé metody řešení funkcionálních rovnic poskytuje několik podrobně vyřešených úloh, stejně tak činí i ve sbírce příkladů z české MO.

7. Závěr

Teorie řešení funkcionálních rovnic se řadí mezi nejstarší odvětví matematické analýzy. Největší rozvoj však zaznamenala v posledních staletích a k jejímu rozpracování podstatně přispěli známí matematici jako Euler, d'Alembert, Cauchy, Gauss, Abel a další (Kuczma 1964). Přestože uvedená problematika výrazně překračuje rámec vzdělávacích programů pro výuku matematiky na středních školách, čeští studenti se spolu s jejich učiteli setkávají s řešením funkcionálních rovnic nejen v české Matematické olympiádě, ale i v dalších matematických soutěžích a v olympiádách na mezinárodní úrovni.

Diplomová práce se zaměřuje především na funkcionální rovnice, které se vyskytly v úlohách matematických olympiád, jichž se účastnili čeští středoškolští studenti. Přínosem této diplomové práce jsou dvě souhrnné sbírky nalezených úloh týkajících se funkcionálních rovnic z dostupných ročníků jak české Matematické olympiády (MO), tak Středoevropské matematické olympiády (MEMO), Evropské dívčí matematické olympiády (EGMO) a Mezinárodní matematické olympiády (IMO). Sbírka příkladů z MO navíc u všech poskytuje podrobně rozepsaný postup jejich řešení, stejně tak je v rámci každé metody řešení funkcionálních rovnic podrobně vyřešeno několik úloh.

Diplomová práce uvádí pouze nejznámější a nejčastěji užívané metody v úlohách matematických olympiád. Nejvíce frekventovanou metodou se jeví substituční metoda a metoda využívající symetrii proměnných, poněvadž úlohy jimi řešené se vyskytují ve všech typech zahrnutých matematických olympiád. Naopak příklady řešené Cauchyovou metodou se v dostupných ročnících české MO a MEMO neobjevují a úlohy vyšetřované metodou pevných bodů lze nalézt pouze v rámci IMO. Některé příklady z přiložených sbírek, spočívají ve využití dalších vlastností funkcí a číselných oborů.

V příkladech obsahujících funkcionální rovnice jsou čeští středoškolští studenti na mezinárodní úrovni spíše průměrní až podprůměrní, což vyplývá z výše uvedených tabulek. Tato práce by jim a jejich vyučujícím mohla pomoci při přípravě na další ročníky matematických olympiád díky podrobně řešeným příkladům, případně může posloužit zvídavým a talentovaným studentům jako nadstavba běžného učiva matematiky středních škol.

8. Sbírka neřešených úloh

8.1. Úlohy na funkcionální rovnice ze Středoevropské matematické olympiády

- zadání i výsledky úloh jsou převzaty z internetových stránek MEMO

(*https://www.memo-official.org/MEMO/contests/previous/*)

2. MEMO – 2008, úloha T-1:

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y).$$

3. MEMO – 2009, úloha I-1.

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f\big(xf(y)\big) + f\big(f(x) + f(y)\big) = yf(x) + f\big(x + f(y)\big)$$

pro libovolná reálná x, y.

4. MEMO – 2010, úloha I-1.

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y + 1)f(x) + (x + 1)f(y).$$

5. MEMO – 2011, úloha T-1.

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x + y) + x^2 + y^2.$$

7. MEMO – 2013, úloha T-1.

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1.$$

9. MEMO – 2015, úloha T–2

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takové, že

$$f\big(x^2 y f(x)\big) + f(1) = x^2 f(x) + f(y)$$

platí pro všechna nenulová reálná čísla x a y.

10. MEMO – 2016, úloha T–2

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f(x)f(y) = xf\big(f(y-x)\big) + xf(2x) + f(x^2).$$

12. MEMO – 2018, úloha I–1:

Označme $\mathbb{Q}^+$ množinu všech kladných racionálních čísel a uvažujme $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Určete všechny funkce $f: \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha}.$$

13. MEMO – 2019, úloha I–1

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že rovnost

$$f(xf(y) + 2y) = f(xy) + xf(y) + f\big(f(y)\big)$$

platí pro všechna reálná čísla x a y.

15. MEMO – 2021, úloha T–1

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že nerovnost

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)\big(x - f(y)\big)$$

platí pro všechna reálná čísla x a y.

8.1.1. Výsledky

2. MEMO – 2008, úloha T-1: $f(x) = 0,\ f(x) = x$

3. MEMO – 2009, úloha I-1: bez výsledků

4. MEMO – 2010, úloha I-1: $f(x) = 0,\ f(x) = x^2 + x,\ f(x) = 3x$

5. MEMO – 2011, úloha T-1: $f(x) = cx + 1,\ c \in \mathbb{R}$

7. MEMO – 2013, úloha T-1: $f(x) = x + 1$

9. MEMO – 2015, úloha T–2: $f(x) = 1/x^2,\ f(x) = -1/x^2$

10. MEMO – 2016, úloha T–2: $f(x) = 0,\ f(x) = 3x$

12. MEMO – 2018, úloha I–1: pro $\alpha \neq 2$ řešení neexistuje, pro $\alpha = 2$

$f(x) = Ax + B$, kde $A > 0$ a $B \geq 2$ nebo $A = 0$ a $B > 2$

13. MEMO – 2019, úloha I–1: $f(x) = 0,\ f(x) = 2x$

15. MEMO – 2021, úloha T–1: $f(x) = x,\ f(x) = -x$

8.2. Úlohy na funkcionální rovnice z Evropské dívčí matematické olympiády

- zadání i výsledky úloh jsou převzata z internetových stránek EGMO (https://www.egmo.org/)

1. EGMO – 2012, úloha 3

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f\big(yf(x+y) + f(x)\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

3. EGMO – 2014, úloha 6

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující podmínku

$$f\big(y^2 + 2xf(y) + f^2(x)\big) = \big(y + f(x)\big)\big(x + f(y)\big)$$

pro všechna reálná čísla x a y.

6. EGMO – 2017, úloha 2

Určete nejmenší přirozené číslo k, pro které existuje obarvení přirozených čísel $\mathbb{N}$ pomocí k barev, a funkci $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) Pro všechna přirozená čísla m, n stejné barvy platí $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Existují přirozená čísla m, n taková, že $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Při obarvování množiny $\mathbb{N}$ pomocí k barev je každé číslo obarveno právě jednou z těchto barev. V obou případech (i) a (ii) přirozená čísla m, n nejsou nutně různá.

10. EGMO – 2021, úloha 2

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takové, že rovnice

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

platí pro všechna racionální čísla x a y. Symbol $\mathbb{Q}$ značí množinu všech racionálních čísel.

8.2.1. Výsledky

1. EGMO – 2012, úloha 3: $f(x) = x,\ f(x) = -x$

3. EGMO – 2014, úloha 6: $f(x) = x,\ f(x) = -x,\ f(x) = 1/2 - x$

6. EGMO – 2017, úloha 2: $k = 3$

10. EGMO – 2021, úloha 2: $f(x) = x,\ f(x) = -x$

8.3. Úlohy na funkcionální rovnice z Mezinárodní matematické olympiády

- níže uvedené příklady jsou převzaty od Djukić et al. (2011)

9. IMO – 1967 - (LL67-50)

Funkce $\varphi(x, y, z)$, definovaná pro všechny trojice (x, y, z) reálných čísel je taková, že pro všechny dvojice reálných čísel jsou definované 2 funkce f a g tak, že

$$\varphi(x, y, z) = f(x + y, z) = g(x, y + z)$$

pro všechna reálná $x, y,$ a z.

Ukažte, že existuje funkce h jedné reálné proměnné tak, že platí

$$\varphi(x, y, z) = h(x + y + z)$$

pro všechna reálná $x, y,$ a z.

10. IMO – 1968 – (IMO68-5) = (SL68-26)

Nechť $a > 0$ je reálné číslo a $f(x)$ reálná funkce definovaná na $\mathbb{R}$, která splňuje pro všechna $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

(a) Dokažte, že funkce f je periodická, tj. existuje $b > 0$ takové, že pro všechna x,

$$f(x + b) = f(x).$$

(b) Uveďte příklad takové nekonstantní funkce pro $a = 1$.

11. IMO – 1969 – (LL69-8)

Najděte všechny funkce f definované pro všechna x tak, že splňují podmínku

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y),$$

pro všechna x a y. Dokažte, že právě 2 z nich jsou spojité.

14. IMO – 1972 – (IMO72-5) = (SL72-1)

Nechť f a φ jsou reálné funkce definované na intervalu $(-\infty, +\infty)$ vyhovující funkcionální rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) = 2\phi(y)f(x),$$

pro libovolné reálné x, y (uveďte příklady takových funkcí). Dokažte, že pokud $f(x)$ není identicky rovná 0 a $|f(x)| \leq 1$ pro všechna x, pak $|\varphi(x)| \leq 1$ pro všechna x.

15. IMO – 1973 – (IMO73-5) = (SL73-17)

Nechť G je množina funkcí $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve tvaru $f(x) = ax + b$, kde a, b jsou reálná čísla a $a \neq 0$. Předpokládejme, že G splňuje následující podmínky:

(1) Jestliže $f, g \in G$, pak $g \circ f \in G$, kde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(2) Jestliže $f \in G$, pak inverzní funkce f^{-1} k funkci f náleží do G, pro $f(x) = ax + b$ je inverzní funkce $f^{-1}(x) = (x - b)/a$.

(3) Pro každé $f \in G$ existuje číslo $x_f \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x_f) = x_f$.

Dokažte, že existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že $f(k) = k$ pro všechny $f \in G$.

17. IMO – 1975 (IMO75-6) = (SL75-10)

Funkce $f(x, y)$ je homogenní polynom n-tého stupně v x a y. Pokud $f(1,0) = 1$ a pro všechna a, b, c,

$$f(a + b, c) + f(b + c, a) + f(c + a, b) = 0,$$

dokažte, že

$$f(x, y) = (x - 2y)(x + y)^{n-1}.$$

18. IMO – 1976 – (LL76-50)

Najděte funkci $f(x)$ definovanou pro všechny reálné hodnoty x tak, že pro všechna x,

$$f(x + 2) - f(x) = x^2 + 2x + 4,$$

a pokud $x \in \langle 0,2)$, pak $f(x) = x^2$.

19. IMO – 1977 – (IMO77-6)

Nechť $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je funkce, která pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňuje nerovnost

$$f(n + 1) > f(f(n)).$$

Dokažte, že $f(n) = n$ pro všechna přirozená čísla n.

19. IMO – 1977 – (LL77-24)

Určete všechny reálné funkce $f(x)$, které jsou definované a spojité na intervalu $(-1,1)$ a splňují funkcionální rovnici

$$f(x + y) = \frac{\left(f(x) + f(y)\right)}{1 - f(x)f(y)}$$

pro $x, y, x + y \in (-1,1)$.

19. IMO – 1977 – (LL77-31)

Nechť f je funkce definovaná na množině dvojic nenulových racionálních čísel, jejichž hodnotami jsou kladná reálná čísla. Předpokládejme, že f splňuje následující podmínky:

(1) $f(ab, c) = f(a, c)f(b, c), f(c, ab) = f(c, a)f(c, b)$,

(2) $f(a, 1 - a) = 1$.

Dokažte, že $f(a, a) = f(a, -a) = 1, f(a, b)f(b, a) = 1$.

20. IMO – 1978 – (LL78-28)

Nechť c, s jsou reálné funkce definované na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, které nejsou konstantní na žádném intervalu a splňují

$$c\left(\frac{x}{y}\right) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

pro jakékoliv $x \neq 0, y \neq 0$.

Dokažte, že:

(a) pro jakékoliv $x \neq 0$

$$c\left(\frac{1}{x}\right) = c(x), s\left(\frac{1}{x}\right) = -s(x);$$

a také $c(1) = 1$, $s(1) = s(-1) = 0$;

(b) c a s jsou buď obě sudé nebo obě liché funkce (funkce f je sudá, jestliže $f(x) = f(-x)$ pro všechna x, a lichá pokud $f(x) = -f(-x)$ pro všechna x). Najděte funkce c, s, které také splňují $c(x) + s(x) = x^n$ pro všechna x, kde n je dané přirozené číslo.

20. IMO – 1978 – (LL78-29)

Je dána nekonstantní funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ taková, že

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ pro libovolné } x, y > 0,$$

najděte funkce $c, s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$c\left(\frac{x}{y}\right) = c(x)c(y) - s(x)s(y) \text{ pro všechna } x, y > 0;$$

$$c(x) + s(x) = f(x) \text{ pro všechna } x > 0.$$

21. IMO – 1979 – (LL79-65)

Je dáno $f(x) \leq x$ pro všechna reálná x a

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

pro všechna reálná x, y. Dokažte, že $f(x) = x$ pro všechna x.

21. IMO – 1979 – (SL79-26)

Dokažte, že pro všechna reálná x a y jsou následující funkcionální rovnice ekvivalentní:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$f(x+y+xy) = f(x) + f(y) + f(xy).$$

22. IMO – 1981 – (IMO81-6) = (SL81-7)

Předpokládejme, že funkce $f(x,y)$ jsou definovány pro všechna přirozená čísla x a y, a že jsou splněny následující rovnice:

$$f(0,y) \;=\; y+1,$$

$$f(x+1,0) \;=\; f(x,1),$$

$$f(x+1,y+1) \;=\; f(x,f(x+1,y)).$$

Určete $f(4{,}1981)$.

23. IMO – 1982 – (IMO82-1) = (SL82-1)

Funkce $f(n)$ je definována pro všechna přirozená čísla n a nabývá nezáporných celočíselných hodnot. Také pro všechna m, n,

$$f(m+n) - f(m) - f(n) \;=\; 0 \text{ nebo } 1;$$

$$f(2) = 0, f(3) > 0, \text{ a } f(9999) = 3333.$$

Určete $f(1982)$.

23. IMO – 1982 – (LL82-34)

Nechť M je množina všech funkcí f s následujícími vlastnostmi:

(i) Funkce f je definovaná pro všechna reálná čísla a nabývá jen reálných hodnot.

(ii) Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí následující rovnice:

$$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

(iii) $f(0) \neq 0$.

Určete všechny funkce $f \in M$ takové, že

(a) $f(1) = 5/2$;

(b) $f(1) = \sqrt{3}$.

24. IMO – 1983 – (IMO83-1) = (SL83-12)

Najděte všechny funkce f definované na kladných reálných číslech, které nabývají kladných reálných hodnot a splňují následující podmínky:

(i) $f(xf(y)) = yf(x)$ pro všechna kladná reálná x, y;

(ii) $f(x) \to 0$ když $x \to +\infty$.

25. IMO – 1984 – (LL84-38)

Určete všechny spojité funkce f takové, že $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2.$$

26. IMO – 1985 – (LL85-96)

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující následující 2 podmínky:

(a) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = 0$.

27. IMO – 1986 – (IMO86-5) = (SL86-1)

Najděte, s důkazem, všechny funkce f definované na nezáporných reálných číslech a nabývající nezáporné reálné hodnoty takové, že

(i) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$,

(ii) $f(2) = 0$ ale $f(x) \neq 0$ pro $0 \leq x < 2$.

27. IMO – 1986 – (LL86-19)

Nechť $f: [0,1] \to [0,1]$ splňuje $f(0) = 0, f(1) = 1$ a

$$f(x+y) - f(x) = f(x) - f(x-y)$$

pro všechna $x, y \geq 0$ s $x - y, x + y \in [0,1]$. Dokažte, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in [0,1]$.

28. IMO – 1987 – (SL87-1)

Nechť f je funkce splňující následující podmínky:

(i) Jestliže $x > y$ a $f(y) - y \geq v \geq f(x) - x$, pak $f(z) = v + z$, pro nějaké číslo z mezi x a y.

(ii) Rovnice $f(x) = 0$ má alespoň 1 řešení a mezi řešeními této rovnice je jedno, které není menší než všechna ostatní řešení.

(iii) $f(0) = 1$.

(iv) $f(1987) \leq 1988$.

(v) $f(x)f(y) = f(xf(y) + yf(x) - xy)$.

Najděte $f(1987)$.

29. IMO – 1988 – (SL88-19)

Nechť $f(n)$ je funkce definovaná na množině všech přirozených čísel a nabývá hodnot na stejné množině. Předpokládejme, že

$$f(f(m) + f(n)) = m + n$$

pro všechna přirozená čísla n, m. Najděte všechny možné kladné hodnoty pro $f(1988)$.

30. IMO – 1989 – (LL89-17)

Nechť $a,\ 0 < a < 1$, je reálné číslo a f spojitá funkce na $[0,1]$ splňující

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad f\big((x+y)/2\big) = (1-a)f(x) + af(y)$$

pro všechna $x, y \in [0,1]$ s $x \leq y$. Určete $f(1/7)$.

30. IMO – 1989 – (LL89-54)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že

$$f(1) = 1, \qquad f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ pro všechna } a, b;$$

$$f(x)f(1/x) = 1 \text{ pro všechna } x \neq 0.$$

Dokažte, že $f(x) = x$ pro všechna reálná čísla x.

30. IMO – 1989 – (LL89-60)

Funkce reálných hodnot f na $\mathbb{Q}$ splňuje následující podmínky pro libovolné $a, b \in \mathbb{Q}$:

(i) $f\ (0) = 0$,

(ii) $f(a) > 0$ když $a \neq 0$,

(iii) $f(ab) = f(a)f(b)$,

(iv) $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$,

(v) $f(m) \leq 1989$ pro všechna $m \in \mathbb{Z}$.

Dokažte, že $f(a+b) = max\{f(a), f(b)\}$ pro $f(a) \neq f(b)$.

30. IMO – 1989 – (LL89-98)

Nechť $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je taková funkce, že

(i) f je striktně rostoucí;

(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$ pro $\forall m, n \in \mathbb{N}$;

(iii) jestliže $m \neq n$ a $m^n = n^m$, pak $f(m) = n$ nebo $f(n) = m$.

Určete $f(30)$.

30. IMO – 1989 – (SL89-10)

Nechť $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $w^3 = 1$ $(w \neq 1)$. Ukažte, že existuje jediná funkce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taková, že

$$f(z) + f(wz + a) = g(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Najděte funkci f. ($\mathbb{C}$ značí množinu komplexních čísel.)

31. IMO – 1990 – (IMO90-4) = (SL90-25)

Nechť $\mathbb{Q}^+$ je množina kladných racionálních čísel. Zkonstruujte funkci $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ takovou, že pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí

$$f\big(xf(y)\big) = \frac{f(x)}{y}.$$

31. IMO – 1990 – (LL90-6)

Předpokládejme, že funkce $f: (\mathbb{Z}^+)^3 \to \mathbb{N}$ splňuje následující podmínky:

(i) $f(0,0,0) = 1$;

(ii) $f(x, y, z) = f(x - 1, y, z) + f(x, y - 1, z) + f(x, y, z - 1)$;

(iii) Při opakovaném použití výše uvedeného vztahu, je-li některá z $x; y; z$ záporná, pak

$$f(x; y; z) = 0.$$

Dokažte, že pokud x, y, z jsou délky stran trojúhelníka, pak

$$\frac{(f(x, y, z)^k}{f(mx, my. mz)}$$

není celočíselná pro libovolné celé číslo $k, m > 1$.

31. IMO – 1990 – (LL90-66)

Najděte všechny spojité omezené funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$(f(x))^2 - (f(y))^2 = f(x + y)f(x - y).$$

31. IMO – 1990 – (LL90-73)

Funkce $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňuje následující podmínky:

(i) $f(0) = 0$ a pro všechna nenulová $a \in \mathbb{Q}$, $f(a) > 0$;

(ii) $f(a + b) = f(a)f(b)$;

(iii) $f(a + b) \leq max\{f(a), f(b)\}$.

Nechť x je celé číslo, pro které $f(x) \neq 1$.

Dokažte, že $f(1 + x + \cdots + x_n) = 1$ pro každé přirozené číslo n.

31. IMO – 1990 – (LL90-80)

Funkce $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ splňující následující podmínky:

(i) $f(1,1) = 1$;

(ii) $f(p+1,q) + f(p,q+1) = f(p,q)$ pro všechna $p,q \in \mathbb{N}$;

(iii) $qf(p+1,q) = pf(p,q+1)$ pro všechna $p,q \in \mathbb{N}$.

Najděte $f(1990,31)$.

32. IMO – 1991 – (SL91-23)

Nechť f a g jsou 2 funkce celočíselných hodnot definované na množině všech celých čísel takové, že

(i) $f(m + f(f(n))) = -f(f(m+1) - n$ pro všechna celá čísla m a n;

(ii) g je polynomická funkce s celočíselnými koeficienty a $g(n) = g(f(n))$ pro všechna celá čísla n. Určete $f(1991)$ a nejobecnější tvar g.

33. IMO – 1992 – (IMO92-2) = (SL92-6)

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2\,.$$

33. IMO – 1992 – (LL92-24)

Nechť $\mathbb{Q}_0^+$ reprezentuje množinu nezáporných racionálních čísel. Ukažte, že existuje právě jedna funkce $f\colon \mathbb{Q}_0^+ \to \mathbb{Q}_0^+$ splňující následující podmínky:

(i) jestliže $0 < q < \frac{1}{2}$, pak $f(q) = 1 + f\left(\frac{q}{1-2q}\right)$;

(ii) jestliže $1 < q \leq 2$, pak $f(q) = 1 + f(q+1)$;

(iii) $f(q)f\left(\frac{1}{q}\right) = 1$ pro všechna $q \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Najděte nejmenší racionální číslo $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ takové, že $f(q) = 19/92$.

33. IMO – 1992 – (LL92-48)

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ splňující identitu

$$f(x)f(y) = y^\alpha \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) + x^\beta \cdot f\left(\frac{y}{2}\right), \qquad x,y \in \mathbb{R}^+,$$

kde α, β jsou daná reálná čísla.

33. IMO – 1992 – (SL92-2)

Nechť $\mathbb{R}_0^+$ je množina všech nezáporných reálných čísel a jsou dána dvě kladná reálná čísla a a b. Předpokládejme, že zobrazení $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ splňuje funkcionální rovnici

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x.$$

Dokažte, že existuje jediné řešení této rovnice.

34. IMO – 1993 (IMO93-5) = (SL93-6)

Nechť $\mathbb{N} = (1, 2, 3, \dots)$. Určete, zda existuje striktně rostoucí funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s následujícími vlastnostmi:

(1) $f(1) = 2$;

(2) $f(f(n)) = f(n) + n,\ n \in \mathbb{N}$.

35. IMO – 1994 – (IMO94-5) = (SL94-3)

Nechť S je množina reálných čísel větších než -1. Najděte všechny funkce $f\colon S \to S$ takové, že

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$$

pro všechna x a y z S, a $f(x)/x$ je striktně rostoucí pro $-1 < x < 0$ a pro $0 < x$.

35. IMO – 1994 – (SL94-4)

Nechť $\mathbb{R}$ reprezentuje množinu všech reálných čísel a $\mathbb{R}^+$ podmnožinu všech kladných z nich. Nechť jsou dány prvky a a b z $\mathbb{R}$, ne nutně různé.

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x)f(y) = y^a f\left(\frac{x}{2}\right) + x^b f\left(\frac{y}{2}\right)$$

pro všechna x a y z $\mathbb{R}^+$.

36. IMO – 1995 – (SL95-5)

Nechť $\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel. Existuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která současně splňuje následující 3 podmínky?

(a) Existuje kladné číslo M takové, že $-M \le f(x) \le M$ pro všechna x.

(b) $f(1) = 1$.

(c) Jestliže $x \neq 0$, pak $f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$.

36. IMO – 1995 – (SL95-28)

Nechť $\mathbb{N}$ reprezentuje množinu všech přirozených čísel. Dokažte, že existuje jediná funkce $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(m + f(n)) = n + f(m + 95)$$

pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$. Jaká je hodnota $\sum_{k=1}^{19} f(k)$?

37. IMO – 1996 – (IMO96-3) = (SL96-8)

Nechť $\mathbb{N}_0$ reprezentuje množinu všech nezáporných celých čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takové, že

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}_0.$$

37. IMO – 1996 – (SL96-7)

Nechť je funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$, platí $|f(x)| \leq 1$ a

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right).$$

Dokažte, že f je periodická funkce (tj. existuje nenulové reálné číslo c takové, že

$f(x + c) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$).

37. IMO – 1996 – (SL96-23)

Nechť $\mathbb{N}_0$ reprezentuje množinu nezáporných celých čísel. Najděte bijektivní funkci $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takovou, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f(3mn + m + n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n).$$

39. IMO – 1998 – (IMO98-6) = (SL98-13)

Určete nejmenší možnou hodnotu $f(1998)$, kde f je funkce $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ splňuje

$$f(n^2 f(m)) = m(f(n))^2.$$

40. IMO – 1999 – (IMO99-6) = (SL99-19)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

41. IMO – 2000 – (SL00-9)

Najděte všechny dvojice funkcí $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

42. IMO – 2001 – (SL01-4)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y rovnici

$$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y).$$

43. IMO – 2002 – (IMO02-5) = (SL02-18)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y, z, t platí

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

43. IMO – 2002 – (SL02-15)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y platí

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

44. IMO – 2003 – (SL03-2)

Najděte všechny neklesající funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

(i) $f(0) = 0,\ f(1) = 1$;

(ii) $f(a) + f(b) = f(a)f(b) + f(a + b - ab)$

pro všechna reálná čísla a, b taková, že $a < 1 < b$.

44. IMO – 2003 – (SL03-5)

Nechť $\mathbb{R}^+$ je množina všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které splňují následující podmínky:

(i) $f(xyz) + f(x) + f(y) + f(z) = f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx})$ pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

(ii) $f(x) < f(y)$ pro všechna $1 \leq x < y$.

46. IMO – 2005 – (SL05-2)

Nechť $\mathbb{R}^+$reprezentuje množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$takové, že pro všechna kladná reálná čísla x a y platí:

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)).$$

46. IMO – 2005 – (SL05-4)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x a y rovnici

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1.$$

48. IMO – 2007 – (SL07-2)

Uvažujte funkce $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňují podmínku

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1,$$

pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$. Najděte všechny možné hodnoty $f(2007)$.

48. IMO – 2007 – (SL07-4)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x + f(y)) = f(x+y) + f(y).$$

49. IMO – 2008 – (IMO08-4) = (SL08-1)

Najděte všechny funkce $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ takové, že

$$\frac{\left(f(w)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pro všechna kladná reálná čísla w, x, y, z splňující rovnost $wx = yz$.

49. IMO – 2008 – (SL08-6)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ je funkce splňující

$$f\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) = f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že existuje přirozené číslo, které není hodnotou f.

50. IMO – 2009 – (SL09-5)

Nechť f je nějaká funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokažte, že existují reálná čísla x a y taková, že

$$f(x - f(y)) > yf(x) + x.$$

50. IMO – 2009 – (SL09-7)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují pro všechna reálná čísla x, y identitu

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

Následující příklady jsou čerpány ze stránek Mezinárodní matematické olympiády (IMO).

51. IMO – 2010 – (SL10-A1)

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že rovnice

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, kde $[x]$ označuje největší celé číslo menší nebo rovno x.

51. IMO – 2010 – (SL10-A5)

Označme $\mathbb{Q}^+$ jako množinu všech kladných racionálních čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, které splňují následující rovnici pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$:

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$

52. IMO – 2011 – (SL11-A3)

Určete všechny dvojice funkcí $(f, g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují pro všechna reálná čísla x a y

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y).$$

52. IMO – 2011 – (IMO11-3) = (SL11-A6)

Nechť f je funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x a y rovnici

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

Dokažte, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \leq 0$.

53. IMO – 2012 – (IMO12-4) = (SL12-A1)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, pro které platí rovnost

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

pro libovolná celá a, b, c splňující $a + b + c = 0$. ($\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel.)

53. IMO – 2012 – (SL12-A5)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a $f(-1) \neq 0$ podmínku

$$f(1+xy) - f(x+y) = f(x)f(y).$$

54. IMO – 2013 – (SL13-A3)

Nechť $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$ je funkce splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$ následující podmínky

$$f(x)f(y) \geq f(xy), \qquad f(x+y) \geq f(x) + f(y).$$

Vzhledem k $f(a) = a$ pro nějaké racionální $a > 1$, dokažte, že $f(x) = x$ pro $\forall x \in \mathbb{Q}^+$.

54. IMO – 2013 – (SL13-A5)

Nechť $\mathbb{N}_0$ je množina všech nezáporných celých čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ vyhovující pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ vztahu

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1.$$

54. IMO – 2013 – (SL13-N6)

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$f\left(\frac{f(x)+a}{b}\right) = f\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

pro všechna $x \in \mathbb{Q},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}$. ($\mathbb{N}$ značí množinu přirozených čísel.)

55. IMO – 2014 – (SL14-A4)

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující pro všechna celá čísla m a n

$$f(f(m)+n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014.$$

55. IMO – 2014 – (SL14-A6)

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2.$$

56. IMO – 2015 – (IMO15-5) = (SL15-A4)

Nechť $\mathbb{R}$ označuje množinu všech reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jež splňují pro všechna reálná x a y rovnici

$$f(x + f(x+y)) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x).$$

56. IMO – 2015 – (SL15-A2)

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ s takovou vlastností, že pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(x - f(y)) = f(f(x) - f(y) - 1.$$

56. IMO – 2015 – (SL15-A5)

Nechť $2\mathbb{Z}+1$ značí množinu lichých celých čísel.

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}+1$ splňující pro každé $x, y \in \mathbb{Z}$ rovnici

$$f(x + f(x) + y) + f(x - f(x) - y) = f(x+y) + f(x-y).$$

57. IMO – 2016 – (SL16-A4)

Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna kladná reálná čísla x a y platí

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))).$$

57. IMO – 2016 – (SL16-A7)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(0) \neq 0, \qquad f(x+y)^2 = 2f(x)f(y) + max\{f(x^2) + f(y^2), f(x^2+y^2)\}$$

pro všechna reálná čísla x a y.

58. IMO – 2017 – (IMO17-2) = (SL17-A6)

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

58. IMO – 2017 – (SL17-A8)

Předpokládejme, že funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje následující podmínku:

Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ taková, že $(f(x) + y)(f(y) + x) > 0$ platí $f(x) + y = f(y) + x$.

Dokažte, že $f(x) + y \leq f(y) + x$ pro všechna $x > y$.

59. IMO – 2018 – (SL18-A1)

Nechť $\mathbb{Q}^+$ značí množinu všech kladných racionálních čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, které splňují

$$f(x^2 2f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

59. IMO – 2018 – (SL18-A5)

Určete všechna funkce $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y > 0$ rovnici

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right).$$

60. IMO – 2019 – (IMO19-1) – (SL19-A1)

Nechť $\mathbb{Z}$ je množina všech celých čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna celá čísla a a b platí

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

60. IMO – 2019 – (SL19-A7)

Nechť $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel. Uvažujeme funkci $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$f(f(x+y)+y) = f(f(x)+y)$$

pro všechna celá x a y. Pro takové funkce říkáme, že celé číslo v je $f - vzácné$, pokud je množina $X_v = \{x \in \mathbb{Z}: f(x) = v\}$ konečná a neprázdná.

(a) Dokažte, že existuje taková funkce f, pro kterou existuje nějaké $f - vzácné$ celé číslo.

(b) Dokažte, že žádná taková funkce f nemůže mít více než jedno $f - vzácné$ celé číslo.

61. IMO – 2020 – (SL20-A6)

Určete všechny funkce $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro každé $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$f^{a^2+b^2}(a+b) = af(a) + bf(b).$$

f^n reprezentuje n-tou iteraci f, tj. $f^0(x) = x$ a $f^{n+1}(x) = f\big(f^n(x)\big)$ pro všechna $n \geq 0$.

61. IMO – 2020 – (SL20-A8)

Nechť $\mathbb{R}^+$ je množina všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna kladná reálná čísla x a y platí

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1.$$

61. IMO – 2020 – (SL20-N5)

Určete všechny funkce f definované na množině všech přirozených čísel, které nabývají nezáporných celočíselných hodnot a splňují 3 podmínky:

(i) $f(n) \neq 0$ pro alespoň jedno n;

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$ pro každé kladné celé číslo x a y;

(iii) existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel n takových, že $f(k) = f(n-k)$ pro všechna $k < n$.

8.3.1. Výsledky

- úlohy do roku 2009 jsou převzaty včetně nápověd od Djukić et al. (2011), další jsou čerpány ze stránek IMO (*https://www.imo-official.org/problems.aspx*), kde lze snadno nalézt i jejich řešení, proto jsou zde uvedeny pouze jejich výsledky

9. IMO – 1967 - (LL67-50): Protože

$$\varphi(x,y,z) = f(x+y,z) = \varphi(0,x+y,z) = g(0,x+y+z),$$

stačí položit $h(t) = g(0,t)$.

10. IMO – 1968 – (IMO68-5) = (SL68-26): a) perioda f je $2a$, $f(x+2a) = f(x)$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 2n \leq x < 2n+1 \\ 1, & 2n+1 \leq x < 2n+2 \end{cases} \quad pro\ n = 0,1,2,\dots\ .$$

11. IMO – 1969 – (LL69-8): bez výsledků

14. IMO – 1972 – (IMO72-5) = (SL72-1): nápověda: $M = sup|f(x)| \leq 1$, x_k posloupnost, $|f(xk)| \to M, k \to \infty$.

15. IMO – 1973 – (IMO73-5) = (SL73-17): $g(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$, $h(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$, $(h^{-1} \circ g)(x) = x$, pevné body funkce f

17. IMO – 1975 (IMO75-6) = (SL75-10): pro všechna $x, y, x+y = 1$, $f(x,y) = x - 2y$; $f(x,y) = f(x, 1-x) = F(z)$ je polynom v $z = x - 2y = 3x - 2$;

pro $a = b = x/2$, $c = 1 - x$: $F(z) + 2F(-z/2) = 0$, dále $F(1) = 1$ a $F(z) = z$;

pro všechna $x, y, x+y \neq 0$: $f(x,y) = (x+y)^{n-1}(x-2y)$, totéž pro $x + y = 0$.

18. IMO – 1976 – (LL76-50): bez výsledků

19. IMO – 1977 – (IMO77-6): bez výsledků

19. IMO – 1977 – (LL77-24): $g(x) = arc\tan f(x)$, převedení na Cauchyovu rovnici, $f(x) = \tan(ax), |a| \leq \pi/2$

19. IMO – 1977 – (LL77-31): z (1) $f(1,c) = 1, f(-1,c) = 1, f(1,1) = 1$, $a \neq 1$: $f(x^{-1}, y) = f^{-1}(x,y)$, díky (1) a (2): $1 = f(a, -a)$

20. IMO – 1978 – (LL78-28), (LL78-29): bez výsledků

21. IMO – 1979 – (LL79-65): bez výsledků

21. IMO – 1979 – (SL79-26): dosazení $(x,-y)$ do 2. rovnice, sečtení s jejím původním tvarem, $t = y(x+1)$: $f(x-t)+f(x+t)=2f(t)$; sečtení variant pro $x \neq -1$ a $x \neq -1$ včetně použití $f(y) = -f(-y)$: $f(x)+f(t)=f(x+t),\ x,t \neq -1$

22. IMO – 1981 – (IMO81-6) = (SL81-7): $f(1{,}0) = f(0{,}1) = 2, f(1,y) = y+2, y \geq 0;$
$f(2{,}0) = 3; f(2,y+1) = f(2,y)+2 \Rightarrow f(2{,}2) = 7;\ f(3{,}0) = 5,$
$f(3,y+1) = 2f(3,y)+3, f(3,y) = 2^{y+3} - 3$, pro $y = 3$: $f(3{,}3) = 61$
$f(4{,}0) = f(3{,}1) = 13, f(4,y+1) = 2^{f(4,y)+3} - 3,\ f(4,y) = 2^{2^{\cdots 2}} - 3$, ($y+3$ dvojky).

23. IMO – 1982 – (IMO82-1) = (SL82-1): $f(1) = 0,\ f(3) = 1,\ f(3n) \geq n$
$\Rightarrow f(3n+3) \geq n+1 \Rightarrow \mathrm{f(3n)} \geq \mathrm{n}$, $f(9999) = 3333 \Rightarrow f(3n) = n,$
$3f(n) \leq 3f(n)+2 \Rightarrow f(n) = [f(3n)/3] = [n/3]$, $f(1982) = [1982/3] = 660$

23. IMO – 1982 – (LL82-34): bez výsledků

24. IMO – 1983 – (IMO83-1) = (SL83-12): metodou pevných bodů; $f(z) = z, z = xf(x)$;
$z = a$: $f(a^2) = f\big(af(a)\big) = a^2 \Rightarrow f(a^n) = a^n$, $a > 1$ spor s (ii);
$a = f(a) = af(1) \Rightarrow f(1) = 1; af(a^{-1}) = f\big(a^{-1}f(a)\big) = f(1) = 1 \Rightarrow f(a^{-n}) = a^{-n}$
$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow xf(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1/x$

25. IMO – 1984 – (LL84-38): bez výsledků

26. IMO – 1985 – (LL85-96): bez výsledků

27. IMO – 1986 – (IMO86-5) = (SL86-1): $w > 2$ v (i) $x = w-2, y = 2 \Rightarrow f(w) = 0$
$\Rightarrow f(x) = 0$ pro $x \geq 2$; $0 \leq y < 2, x \geq 0 \Rightarrow f(x+y) = 0$ jen pro $xf(y) \geq 2$
a $f(xf(y))f(y) = 0$ jen pro $x+y \geq 2$; $x \geq 2/f(y)$ jen pro $x \geq 2-y$

$$\Rightarrow f(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-y}, & 0 \leq y < 2 \\ 0, & y \geq 2 \end{cases}$$

27. IMO – 1986 – (LL86-19): bez výsledků

28. IMO – 1987 – (SL87-1): z (ii) $f(x) = 0$ má řešení, x_0 největší z nich, z (v) $0 = f(x)f(x_0) = f(x_0(f(x) - x)) \Rightarrow x_0 \geq x_0(f(x) - x)$; pro $x_0 > 0$ podle (i) a (iii) $f(x_0) - x_0 < 0 < f(0) - 0 \Rightarrow \exists z$ mezi 0 a x_0, že $f(z) = z$;
podle (i) $0 = f(x0(f(z) - z)) = f(0) = 1 \Rightarrow x_0 < 0$,
$x_0 \geq x_0(f(x) - x) \Rightarrow f(x) - x \geq 1 \Rightarrow f(1987) \geq 1988 \Rightarrow f(1987) = 1988$

29. IMO – 1988 – (SL88-19): $f(n) + f(m)$ je funkcí $n + m$, protože
$f(f(1) + n + m) = f(f(1) + f(f(n) + f(m))) = 1 + f(n) + f(m)$;
$\Rightarrow f(n+1) + f(1) = f(n) + f(2)$ a $f(n+1) - f(n) = f(2) - f(1)$
$\Rightarrow f(n) = An + B$, jediná možnost je $A = 1$ a $B = 0 \Rightarrow f(n) = n \Rightarrow f(1988) = 1988$

30. IMO – 1989 – (LL89-17), (LL89-54), (LL89-60), (LL89-98): bez výsledků

30. IMO – 1989 – (SL89-10): dosazení $wz + a$ za z
$\Rightarrow f(wz + a) + f(w^2z + wa + a) = g(wz + a)$; znovu $wz + a$ za z
$\Rightarrow f(w^2z + wa + a) + f(z) = g(w^2z + wa + a)$;
řešením soustavy získaných rovnic a zadané rovnice je funkce

$$f(z) = \frac{g(z) + g(w^2z + wa + a) - g(wz + a)}{2}$$

31. IMO – 1990 – (IMO90-4) = (SL90-25): dosazení $x = 1 \Rightarrow f$ je bijektivní, dosazení $y = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f\big(f(y)\big) = 1/y$, dosazení $y = f(z) \Rightarrow 1/f(z) = f(1/z)$, dosazení $y = f(1/t)$ do zadání => Cauchyova rovnice $f(xt) = f(x)f(t)$, stačí najít funkci splňující (i) Cauchyovu rovnici a (ii) $f\big(f(x)\big) = 1/x$
prvky $q \in \mathbb{Q}^+$ tvaru $q = \prod_{i=1}^{n} {p_i}^{a_i}$, kde p_i jsou prvočísla a $a_i \in \mathbb{Z}$; z (i) $\Rightarrow f(q) = f(\prod_{i=1}^{n} {p_i}^{a_i}) = \prod_{i=1}^{n} f(p_i)^{a_i}$, f na všech prvočíslech; pro (ii) $f(f(p)) = 1/p$, p – prvočíslo; q_i – i-té nejmenší prvočíslo, definice f:

$$f(q_{2k-1}) = q_{2k}, \qquad f(q_{2k}) = \frac{1}{q_{2k-1}}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

31. IMO – 1990 – (LL90-6), (LL90-66), (LL90-73), (LL90-80): bez výsledků

32. IMO – 1991 – (SL91-23): z (i) dosazením $f(f(m))$ za $m \Rightarrow f(f(f(m)) + f(f(n))) = -f(f(f(f(m)) + 1)) - n$, analogicky $f(f(f(n)) + f(f(m))) = -f(f(f(f(n)) + 1)) - m$; $\Rightarrow f(f(f(f(m)) + 1)) - f(f(f(f(n)) + 1)) = m - n$, opět z (i) $f(f(f(f(m)) + 1)) = f(-m - f(f(2)))$, $f(f(f(f(n)) + 1)) = f(-n - f(f(2)))$; pro $f(f(2)) = k \Rightarrow f(-m - k) - f(-n - k) = m - n \Rightarrow f(m) = f(0) - m$, $f(f(m)) = m$, použitím v (i) $\Rightarrow f(n) = -n - 1 \Rightarrow f(1991) = -1992$;
z (ii) $g(n) = g(-n - 1)$, g – polynomická $\Rightarrow g(x) = g(-x - 1)$, g jako polynom pro $x + 1/2$: $g(x) = h(x + 1/2)$, $h(x + 1/2) = h(-x - 1/2) \Rightarrow h(y) = h(-y)$, polynom v y^2, $\Rightarrow$ g – polynom v $(x + 1/2)^2 \Rightarrow$ nejobecnější tvar g: $g(n) = p(n^2 + n)$, (p – polynom)

33. IMO – 1992 – (IMO92-2) = (SL92-6): f – injektivní a surjektivní, $f(x^2 + f(y)) = f((-x)^2 + f(y)) \Rightarrow f^2(x) = f^2(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ z prostoty f; $\exists z \in \mathbb{R}: f(z) = 0$, z $f(-z) = -f(z) = 0 \Rightarrow z = 0$; $f(x^2) = f\left(x^2 + f(0)\right) = 0 + f^2(x) = f^2(x) \Rightarrow f(x) = f^2\left(\sqrt{x}\right) > 0$ pro všechna $x > 0 \Rightarrow f(x) < 0$ pro $x < 0$ (f zachovává znaménko);
dosazení $x > 0, y = -f(x)$ do zadání $\Rightarrow$ $f\left(x - f(x)\right) = f\left(\sqrt{x}^2 + f(-x)\right) = -x + f^2\left(\sqrt{x}\right) = -\left(x - f(x)\right)$, ale f zachovává znaménko $\Rightarrow$ $f(x) = x$ pro $x > 0$, navíc $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = x$ pro všechna x

33. IMO – 1992 – (LL92-24), (LL92-48): bez výsledků

33. IMO – 1992 – (SL92-2): ze zadání pro pevné reálné $x_n = f(x_n - 1)$ s $x_0 \geq 0$: $x_{n+2} = -ax_{n+1} + b(a + b)x_n$, obecné řešení rovnice ve tvaru $x_n = \lambda_1 b^n + \lambda_2(-a - b)^n$ pro reálná λ_1, λ_2 splňující $x_0 = \lambda_1 + \lambda_2$ a $x_1 = \lambda_1 b - \lambda_2(a + b)$; $x_n \geq 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow x_0 = \lambda_1$ a $f(x_0) = x_1 = \lambda_1 b = bx_0$; x_0 – libovolné $\Rightarrow f(x) = bx$

34. IMO – 1993 (IMO93-5) = (SL93-6): pro $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\alpha^2 n = \alpha n + n$; f striktně rostoucí a $f(1) = 2$, z definice f: $|f(n) - \alpha n| \leq 1/2$ a $f(f(n)) - f(n) - n$ je celé číslo;
$|f(f(n)) - f(n) - n| = |f(f(n)) - f(n) - \alpha 2n + \alpha n| = |f(f(n)) - \alpha f(n) + \alpha f(n) - \alpha 2n - f(n) + \alpha n| = |(\alpha - 1)(f(n) - \alpha n) + (f(f(n)) - \alpha f(n))| \leq (\alpha - 1)|f(n) - \alpha n| + |f(f(n)) - \alpha f(n)| \leq (\alpha - 1)/2 + 1/2 = \alpha/2 < 1 \quad \Rightarrow \quad f(f(n)) - f(n) - n = 0$;
$\Rightarrow f(n) = [\alpha n + 1/2]$ (nejbližší celé číslo k αn)

35. IMO – 1994 – (IMO94-5) = (SL94-3): metodou pevných bodů, $f(x) = x$ má nejvýše jedno řešení v $(-1,0)$ a v $(0, \infty)$; předpoklad: pro $u \in (-1,0)$, $f(u) = u$, položení $x = y = u$ v zadání $\Rightarrow$ $f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u$; $u \in (-1,0)$ $\Rightarrow$ $u^2 + 2u \in (-1,0)$ $\Rightarrow$ $u^2 + 2u = u$ $\Rightarrow u = -1$ nebo $u = 0 \Rightarrow$ spor; podobně když $f(v) = v$ pro $v \in (0, \infty) \Rightarrow$ analogický spor; pro všechna $x \in S$: $f(x + (1+x)f(x)) = x + (1+x)f(x)$ $\Rightarrow$ $x + (1+x)f(x) = 0$ $\Rightarrow f(x) = \frac{-x}{1+x}$ pro všechna $x \in S$

35. IMO – 1994 – (SL94-4): předpoklad $a = b$, dosazení $y = x \Rightarrow f(x/2) = x^{-a} f^2(x)/2$;

$$\Rightarrow f(x)f(y) = \frac{1}{2} x^a y^{-a} f^2(y) + \frac{1}{2} y^a x^{-a} f^2(x)$$

$$\Rightarrow \left((x/y)^{a/2} f(y) - (y/x)^{a/2} f(x) \right)^2 = 0$$

$\Rightarrow f(x)/x^a = f(y)/y^a$ pro všechna kladná reálná $x, y \Rightarrow f(x) = \lambda x a$, dosazení do zadání $\Rightarrow \lambda = 2^{1-a}$ nebo $\lambda = 0 \Rightarrow f(x) = 2^{1-a} x^a$ nebo $f(x) = 0$

$a \neq b$, záměna x a y v zadané rovnici a jejich odečtení $\Rightarrow$ $(x^a - x^b) f(y/2) = (y^a - y^b) f(x/2)$ $\Rightarrow$ pro $\lambda \geq 0$ a $x \neq 1$: $f(x/2) = \lambda(x^a - x^b)$, dosazení do zadání $\Rightarrow$ $\lambda = 0$ $\Rightarrow f(x) = 0$

36. IMO – 1995 – (SL95-5): předpoklad f existuje a n je nejmenší celé číslo $\Rightarrow f(x) \leq n/4$ pro všechna x; $f(2) = 2 \Rightarrow n \geq 8$; dál $f(x) > \frac{n-1}{4} \Rightarrow f(1/x) = f(x + 1/x^2) - f(x) < 1/4$ $\Rightarrow$ $f(1/x) > -1/2$, ale $\Rightarrow$ $\left(\frac{n-1}{4}\right)^2 < f^2(x) = f(1/x + x^2) - f(1/x) < n/4 + 1/2$, nemožné pro $n \geq 8 \Rightarrow f$ neexistuje

36. IMO – 1995 – (SL95-28): volba $F(x) = f(x) - 95$ pro $x \geq 1$, zápis k pro $m + 95$ $\Rightarrow F(k + F(n)) = F(k) + n$ pro $k \geq 96, n \geq 1 \Rightarrow$ pro $x, z \geq 96$ a libovolné y: $F(x+y) + z = F(x + y + F(z)) = F(x + F(F(y) + z)) = F(x) + F(y) + z$ $\Rightarrow$ $F(x+y) = F(x) + F(y)$ pro $x \geq 96$; z $F(x+y) + F(96) = F(x + y + 96) = F(x) + F(y + 96) = F(x) + F(y) + F(96)$ pro libovolná $x, y \Rightarrow F(x+y) = F(x) + F(y)$ pro všechna přirozená x, y, z indukce $\Rightarrow$ $F(n) = nc$ pro všechna n, kde $F(1) = c$; z $F(k + F(n)) = F(k) + n$ pro $k \geq 96, n \geq 1 \Rightarrow ck + c^2 n = ck + n \Rightarrow c = 1 \Rightarrow F(n) = n$ a $f(n) = n + 95$ pro všechna n $\Rightarrow \sum_{k=1}^{19} f(k) = 96 + 97 + \cdots + 114 = 1995$

37. IMO – 1996 – (IMO96-3) = (SL96-8): metodou pevných bodů; pro $m = n = 0$: $f(0) = 0 \Rightarrow f(f(n)) = f(n)$ pro všechna $n \Rightarrow$ zadaná rovnice ekvivalentní s rovnicí $f\big(m + f(n)\big) = f(m) + f(n), f(0) = 0 \Rightarrow$ jedno řešení $f(x) = 0$ pro všechna x;

dál f nenulová funkce, f má nenulové pevné body, a nejmenší nenulový pevný bod f, indukcí každé ka ($k \in \mathbb{N}$) také pevný bod, všechny pevné body f mají tento tvar; předpoklad $b = ka + i$ pevným bodem, kde $i < a \Rightarrow b = f(b) = f(i + f(ka)) = f(i) + f(ka) = f(i) + ka \Rightarrow f(i) = i \Rightarrow i = 0$;

$H(f) = P_f \Rightarrow$ pro $i = 0,1, \dots, a - 1$: $f(i) = an_i$, pro celá n_i≥0 s $n_0 = 0$; pro libovolné přirozené $n = ka + i$, $0 \leq i < a$, ze zadání $\Rightarrow f(n) = (ni + k)a$

37. IMO – 1996 – (SL96-7): dáno $f(x + a + b) - f(x + a) = f(x + b) - f(x)$, kde $a = 1/6$ a $b = 1/7$; součet těchto rovnic pro $x, x + b, \dots, x + 6b \Rightarrow f(x + a + 1) - f(x + a) = f(x + 1) - f(x)$; součet analogických rovnic pro $x, x + a, \dots, x + 5a \Rightarrow f(x + 2) - f(x + 1) = f(x + 1) - f(x)$; indukcí $f(x + n) - f(x) = n(f(x + 1) - f(x))$; pro $f(x + 1)f(x) \Rightarrow f(x + n) - f(x)$ překročí v absolutní hodnotě libovolně velké číslo pro dostatečně velké $n \Rightarrow$ spor s předpokladem: $f$je omezená $\Rightarrow f(x + 1) = f(x)$ pro všechna x

37. IMO – 1996 – (SL96-23): zadaná rovnice je ekvivalentní s

$$4f\left(\frac{(3m + 1)(3n + 1) - 1}{3}\right) + 1 = (4f(m) + 1)(4f(n) + 1);$$

zavedení funkce $g: 3\mathbb{N}_0 + 1 \to 4\mathbb{N}_0 + 1$ jako $g(x) = 4f\left(\frac{x-1}{3}\right) + 1$, g multiplikativní: $g(xy) = g(x)g(y)$ pro všechna $x, y \in 3\mathbb{N}_0 + 1$; multiplikativní bijekce $g: 3\mathbb{N}_0 + 1 \to 4\mathbb{N}_0 + 1$ dává f s požadovanou vlastností: $f(x) = \frac{g(3x+1)-1}{4}$;

příklad funkce g: $g(1) = 1$ a pro $n = p_1 p_2 \dots p_m$ (p_i se nemusí lišit) $g(n) = h(p_1)h(p_2) \dots h(p_m)$

39. IMO – 1998 – (IMO98-6) = (SL98-13): F – množina uvažovaných funkcí, předpoklad $f \in F$, $f(1) = a$, pro $n = 1$ a $m = 1 \Rightarrow f(f(z)) = a^2 z$ a $f(az^2) = f^2(z)$ pro všechna přirozená $z \Rightarrow f^2(x)f^2(y) = f^2(x)f(ay^2) = f(x^2 f(f(ay^2))) = f(x^2 a^3 y^2) = f(a(axy)^2) = f^2(axy) \Rightarrow f(axy) = f(x)f(y)$ pro všechna přirozená $x, y \Rightarrow f(ax) = af(x) \Rightarrow af(xy) = f(x)f(y)$ pro všechna přirozená x, y;

$f(x)$ je dělitelná a pro každé přirozené x, uvážení funkce $g(x) = f(x)/a$ na přirozených číslech $\Rightarrow$ $g(1) = 1$, $g(xy) = g(x)g(y)$, $g(g(x)) = x$ pro všechna přirozená x, y; $g \in F$ a $g(x) \leq f(x)$ pro všechna $x \Rightarrow$ zaměření jen na funkce g; g – bijektivní a zobrazuje prvočíslo na prvočíslo; obrácený předpoklad $g(p) = uv$ pro $u, v > 1$ $\Rightarrow$ $g(uv) = p$ $\Rightarrow$ $g(u) = 1$ nebo $g(v) = 1 \Rightarrow g(1) = u$ nebo $g(1) = v \Rightarrow$ spor;

nejmenší možná hodnota $g(1998)$: $g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2) \cdot g(3)^3 \cdot g(37)$ a $g(2), g(3), g(37)$ jsou odlišná prvočísla $\Rightarrow$ $g(1998) \nless 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$; ale g nabývá hodnoty 120 $\Rightarrow$ $g(1998) = 120$

40. IMO – 1999 – (IMO99-6) = (SL99-19): $A = \{f(x);\ x \in \mathbb{R}\}$ a $f(0) = c$, dosazení $x = y = 0$ $\Rightarrow$ $f(-c) = f(c) + c - 1$ $\Rightarrow$ $c \neq 0$; pro $x \in A$ $\Rightarrow$ $x = f(y)$ a zadání $\Rightarrow f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}$ pro všechna $x \in A$;

$A - A = \{x_1 - x_2;\ x_1, x_2 \in A\} = \mathbb{R}$, protože z dosazení $y = 0$ do zadání $\Rightarrow$ $f(x - c) - f(x) = cx + f(c) - 1$, tedy výraz zahrnující všechny reálná čísla $\Rightarrow$ každé x lze reprezentovat jako $x = x_1 - x_2$, kde $x_1, x_2 \in A$; dosazení $x = x_1$ a $f(y) = x_2$ do zadání

$$\Rightarrow f(x) = f(x_1 - x_2) = f(x_1) + x_1x_2 + f(x_2) - 1 = c - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_1x_2 = c - \frac{x^2}{2}$$

$\Rightarrow c = c + 1/2 \Rightarrow c = 1$ $\Rightarrow f(x) = 1 -\ x^2/2$ pro všechna reálná x

41. IMO – 2000 – (SL00-9): předpoklad $g(\alpha) = 0$ pro nějaké α, dosazení $y = \alpha \Rightarrow g(x) = (\alpha + 1)f(x) - xf(\alpha)$, zadání $\Rightarrow$ $f(x + g(y)) = (\alpha + 1 - y)f(x) + (f(y) - f(\alpha))x$, dosazení $y = \alpha + 1$ $\Rightarrow$ $f(x + n) = mx$, kde $n = g(\alpha + 1)$ a $m = f(\alpha + 1) - f(\alpha)$ $\Rightarrow f$ i g jsou lineární funkce;

dosazení $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$ do zadání, porovnání koeficientů

$$\Rightarrow f(x) = \frac{cx - c^2}{1 + c}, \qquad \mathrm{g(x) = cx - c^2}, \qquad \mathrm{c} \in \mathbb{R}\backslash\{-1\};$$

důkaz existence takového α, že $g(\alpha) = 0$; pro $f(0) = 0$: dosazení $y = 0$ do zadání $\Rightarrow$ $f(x + g(0)) = g(x)$ $\Rightarrow$ $\alpha = -g(0)$; pro $f(0) \neq 0$: dosazení x za $g(x)$ do zadání $\Rightarrow$ $f(g(x) + g(y)) = g(x)f(y) - yf(g(x)) + g(g(x))$ a analogicky $f(g(x) + g(y)) = g(y)f(x) - xf(g(y)) + g(g(y))$; zadaná rovnice pro $x = 0$ $\Rightarrow$ $f(g(y)) = a - by$, kde $a = g(0)$; $\Rightarrow g$ – injektivní a f – surjektivní $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: f(c) = 0$;

$g(x)f(y) - ay + g(g(x)) = g(y)f(x) - ax + g(g(y))$, dosazení $y = c \Rightarrow g(g(x)) = kf(x) - ax + d \Rightarrow g(x)f(y) + kf(x) = g(y)f(x) + kf(y)$; pro $y = 0 \Rightarrow g(x)b + kf(x) = af(x) + kb \Rightarrow g(x) = a - kbf(x) + k$;

$g(0) = a \neq k = g(c)$ z prostoty g, ze surjektivity $f \Rightarrow g$ surjektivní $\Rightarrow$ nabývá hodnoty 0

42. IMO – 2001 – (SL01-4): pro $y = 1 \Rightarrow f^2(x) = xf(x)f(1)$, pro $f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$; předpoklad $f(1) = C \neq 0$, $G = \{y \in \mathbb{R}; f(y) \neq 0\} \Rightarrow f(x) = Cx$ pro $x \in G$, jinak $f(x) = 0$; určení struktury G: (i) $1 \in G$, protože $f(1) \neq 0$

(ii) pro $x \in G,\ y \notin G$: ze zadání $\Rightarrow f(xy)f(x) = 0 \Rightarrow xy \notin G$

(iii) pro $x, y \in G$: $x/y \in G$ (jinak pomocí (ii): $y(x/y) = x \notin G$)

(iv) pro $x, y \in G$: podle (iii) $x^{-1} \in G \Rightarrow xy = y/x^{-1} \in G$

$\Rightarrow$ každá taková množina G obsahuje funkce splňující zadání

43. IMO – 2002 – (IMO02-5) = (SL02-18): Cauchyova metoda; dosazení $x = z = 0$ a $t = y$ $\Rightarrow 4f(0)f(y) = 2f(0)$, pro $f(0) \neq 0 \Rightarrow f(y) = 1/2$ pro všechna reálná y;

dále pro $f(0) = 0$: dosazení $z = t = 0 \Rightarrow f(xy) = f(x)f(y)$ pro všechna reálná x, y $\Rightarrow f(y) = 0$ pro všechna $y \neq 0$;

dále $f(y) \neq 0$ pro $y \neq 0$; f – striktně rostoucí, $f(x) = f^2(\sqrt{x}) \geq 0$ pro všechna $x \geq 0$ $\Rightarrow$ zadání pro $t = x$ a $z = y \Rightarrow f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2 \geq f(x^2)$ pro $x, y \geq 0$ $\Rightarrow f(1) = 1$; dosazení $t = y$ do zadání $\Rightarrow 2(f(x) + f(z)) = f(x - z) + f(x + z)$ pro všechna $x, z \Rightarrow f(z) = f(-z)$ a indukcí: $f(nx) = n^2 f(x)$ pro všechna celá n (i pro všechna racionální čísla) $\Rightarrow f(q) = f(-q) = q^2$ pro všechna racionální q, ale f – rostoucí pro $x > 0$ $\Rightarrow f(x) = x^2$ pro všechna x

43. IMO – 2002 – (SL02-15): f – surjektivní, položení $y = -f(x) \Rightarrow f(f(-f(x)) - x) = f(0) - 2x$, kde PS může nabývat jakékoliv reálné hodnoty; $\exists x_0: f(x_0) = 0$, dosazení $x = x_0$ do zadání $\Rightarrow f(y) = 2x_0 + f(f(y) - x_0) \Rightarrow f(z) = z - x_0$ pro $z = f(y) - x_0$;

ze surjektivity $f \Rightarrow z$ nabývá všech reálných hodnot $\Rightarrow$ pro všechna z: $f(z) = z + c$ pro nějakou konstantu c

44. IMO – 2003 – (SL03-2): (ii) jako $-(f(a) - 1)(f(b) - 1) = f(-(a - 1)(b - 1) + 1) - 1$, položení $g(x) = f(x + 1) - 1 \Rightarrow -g(a - 1)g(b - 1) = g(-(a - 1)(b - 1))$ pro

$a < 1 < b \Rightarrow -g(x)g(y) = g(-xy)$ pro $x < 0 < y$, g – neklesající a $g(-1) = -1$, $g(0) = 0$, pro takové g je f řešením zadání;

dosazení $y = 1$ do podmínek $g \Rightarrow -g(-x)g(1) = g(x)$ pro $x > 0 \Rightarrow g(1)g(yz) = g(y)g(z)$ pro $y, z > 0 \Rightarrow$ 2 případy:

1) $g(1) = 0 \Rightarrow g(z) = 0$ pro $z > 0 \Rightarrow$ libovolná neklesající $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $g(-1) = -1$ a $g(z) = 0$ pro $z \geq 0$ dává řešení: f – neklesající, $f(0) = 0$ a $f(x) = 1$ pro $x \geq 1$;

2) $g(1) \neq 0 \Rightarrow h(x) = g(x)/g(1)$ – neklesající a $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ a $h(xy) = h(x)h(y)$;

pro pevné $a > 0$ a $h(a) = b = a^k$ pro reálné $k \Rightarrow$ indukcí: $h(a^q) = h^q(a) = (a^q)^k$ pro racionální q, ale h – neklesající $\Rightarrow k \geq 0$; množina $\{a^q, q \in \mathbb{Q}\}$ – hustá v $\mathbb{R}^+ \Rightarrow h(x) = x^k$ pro $x > 0$; položení $g(1) = c \Rightarrow g(x) = cx^k$ pro $x > 0 \Rightarrow g(-x) = -x^k$ pro $x > 0$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} c(x-1)^k, \ x > 1; \\ 1, \ x = 1; \\ 1-(1-x)^k, \ x < 1, \end{cases} \quad \text{kde } c > 0 \text{ a } k \geq 0$$

44. IMO – 2003 – (SL03-5): dosazení $x = y = z = 1$ do (i) $\Rightarrow 4f(1) = f(1)^3 \Rightarrow$ z $f(1) > 0$: $f(1) = 2$; dosazení $x = y = t, z = 1/t \Rightarrow f(t) = f(1/t) \Rightarrow f(t) \geq f(1) = 2$ pro každé $t \Rightarrow f(t) = c + c^{-1}$ pro $c = c(t) \geq 1$; položení $(x, y, z) = (ts, t/s, s/t)$ v (i) $\Rightarrow f(t)f(s) = f(ts) + f(t/s)$; pro $s = t$: $f(t^2) = f^2(t) - 2 \Rightarrow$ pro $f(t) = c + c^{-1}$: $f(t^2) = c^2 + c^{-2}$; z indukce: $f(t^n) = c^n + c^{-n}$ pro přirozená $n \Rightarrow f(t^{n/m}) = c^{n/m} + c^{-n/m}$; pro pevné $t > 1$ a reálné λ: $c = t\lambda \Rightarrow f(t^q) = t^{\lambda q} + t^{-\lambda q} \Rightarrow f(x) = x^{\lambda} + x^{-\lambda}$ pro $x \in T = \{t^q; q \in \mathbb{Q}\}$; ale T – hustá v $\mathbb{R}^+$ a f – monotónní na $(0,1]$ a $[1, \infty) \Rightarrow f(x) = x^{\lambda} + x^{-\lambda}$ pro všechna $x > 0$ splňuje (i) i (ii)

46. IMO – 2005 – (SL05-2): pro dané $y > 0$: $\varphi(x) = x + yf(x), x > 0$, $\varphi(x)$ – injektivní: $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow f(x_1)f(y) = f(\varphi(x_1)) = f(\varphi(x_2)) = f(x_2)f(y) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow x_1 = x_2$ z definice φ; pro $x_1 > x_2$ a $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ pro $y = \frac{x_1 - x_2}{f(x_2) - f(x_1)} > 0 \Rightarrow$ spor $\Rightarrow f$ – neklesající; zadání $\Rightarrow f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) \geq 2f(x) \Rightarrow f(y) \geq 2$ pro $y > 0 \Rightarrow f(x + yf(x)) = f(xy) = f(y + xf(y)) \geq f(2x)$ pro libovolně malé $y > 0 \Rightarrow f$ – konstantní na intervalu $(x, 2x]$ pro každé $x > 0 \Rightarrow$ konstantní na $\mathbb{R}^+$; zadání $\Rightarrow f(x) = 2$ pro všechna x

46. IMO – 2005 – (SL05-4): položení $y = 0 \Rightarrow (f(0)+1)(f(x)-1) = 0$, $f(x) = 1$ pro všechna x nemožné $\Rightarrow f(0) = -1$; dosazení $x = 1$ a $y = -1 \Rightarrow f(1) = 1$ nebo $f(-1) = 0$; dosazení $x = 1$ do zadání $\Rightarrow f(y+1) = 2y+1 \;\Rightarrow\; f(x) = 2x-1$;

dál $f(1) = a \neq 1$ a $f(-1) = 0$, dosazení $(x,y) = (z,1)$ a $(x,y) = (-z,-1)$ do zadání $\Rightarrow$ $f(z+1) = (1-a)f(z)+2z+1$ a $f(-z-1) = f(z)+2z+1 \;\Rightarrow\; f(z+1) = (1-a)f(-z-1)+a(2z+1) \;\Rightarrow\; f(x) = (1-a)f(-x)+a(2x-1)$, analogicky $f(-x) = (1-a)f(x)+a(-2x-1) \Rightarrow (a^2-2a)f(x) = -2a^2x-(a^2-2a)$;

$a = 2$ nemožné, pro $a \notin \{0,2\}$: $f(x) = \frac{-2ax}{a-2} - 1$, tato funkce splňuje požadavky jen pro $a = -2 \Rightarrow f(x) = -x-1$;

pro a=0: $f(x) = f(-x)$, dosazení $y = z$ a $y = -z$ do zadání a odečtení $\Rightarrow f(2z) = 4z^2 - 1$ $\Rightarrow f(x) = x^2 - 1$

48. IMO – 2007 – (SL07-2): dosazení n=1 $\Rightarrow f(m+1) \geq f(m) \;\Rightarrow\; f$ – neklesající; předpoklad: n_0 – nejmenší celé číslo s $f(n_0) > 1$ a $f(n) = n+k$ pro $k, n \geq 1 \Rightarrow$ z dosazení $m = 1$: $f(k) = 1 \;\Rightarrow\; k < n_0$; volba maximální k_0, aby $\exists n \in \mathbb{N}: f(n) = n + k_0 \;\Rightarrow 2n + k_0 \geq f(2n) \geq 2n + (2k_0 - 1) \;\Rightarrow\; 2k_0 - 1 \leq k_0$ nebo $k_0 \leq 1 \;\Rightarrow\; f(n) \leq n+1$ a $f(2007) \leq 2008$; $f(2007)$ může být libovolné z čísel 1,2,…,2008:

$f_j(n) = 1$ pro $n \leq 2007 - j$, jinak $f_j(n) = n + j - 2007$ pro $j \leq 2007$ a $f_{2008}(n) = n$ pokud $2007 \nmid n$ a $f_{2008}(n) = n+1$ pokud $2007|n$

48. IMO – 2007 – (SL07-4): metodou symetrie; $f(x) > x$, důkaz $f(x) - x$ je injektivní; ze zadání: $f\big(f(x)+f(y)\big) - \big(f(x)+f(y)\big) = f(x+y) \Rightarrow f(x)+f(y) = f(x')+f(y')$ $\Rightarrow f(x)+f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$; důkaz f – injektivní;

$\Rightarrow f(f(x)+f(y)) = f(f(x)+y)+f(y) = 2f(f(x)/2+y) \;\Rightarrow$ ze symetrie: $f(f(x)+f(y)) = 2f(f(y)/2+x) \Rightarrow f(x)/2+y = f(y)/2+x \Rightarrow f(x)-2x = c$ pro reálné c, ze zadání $\Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = 2x$

49. IMO – 2008 – (IMO08-4) = (SL08-1): položení $x = y = z = w$ v zadání $\Rightarrow f^2(x) = f(x^2)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$, $f(1) = 1$; položení $\sqrt{w}, \sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ v zadání $\Rightarrow \frac{f(w)+f(x)}{f(y)+f(z)} = \frac{w+x}{y+z}$, kdykoliv $wx = yz$; volba $z = 1 \Rightarrow w = y/x$ a $f(y/x)+f(x) = (y/x+x)\frac{f(y)+1}{y+1}$, dosazení $y = x^2 \Rightarrow f(x) = x\frac{f^2(x)+1}{x^2+1} \Rightarrow (f(x)-x)(f(x)-1/x) = 0$; předpoklad: $\exists x, w \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$:

$f(x) = x$ a $f(w) = 1/w$, dosazení $y = z = \sqrt{wx} \Rightarrow 1/w + x = (w + x) \cdot f(\sqrt{wx})/\sqrt{wx}$; pokud $f(\sqrt{wx}) = \sqrt{wx} \Rightarrow w = 1$, a pokud $f(\sqrt{wx}) = 1/\sqrt{wx} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ spor s předpokladem $\Rightarrow$ buď $f(x) = x$ nebo $f(x) = 1/x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$

49. IMO – 2008 – (SL08-6): opačný předpoklad: f – surjektivní, existuje posloupnost čísel a_n: $f(a_n) = n$; pokud $f(u) = f(v) \Rightarrow f(u + 1/n) = f(v + 1/n)$ pro všechna přirozená n, indukcí: $f(u + m/n) = f(v + m/n)$ pro všechna přirozená m, n; aplikace na $u = a_1$, $v = a_1 + 1/f(a_1 - 1)$ a $n = f(a_1 - 1) \Rightarrow 1 = f(a_1) = f(a_1 + 1/n) = f(a_1 + 2/n) = \cdots = f(a_1 + 1) \Rightarrow f(a_1 + q + 1) = f(a_1 + q)$ pro všechna racionální čísla q; pro pevné y:
$\Gamma(y) = \{f(y + 1/n) : n \in \mathbb{N}\} = \{f(y + 1/f(x)) : x \in \mathbb{R}\} = \{f(x + 1/f(y)) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{N}$
$\Rightarrow \Gamma(a_1) = \mathbb{N} \Rightarrow$ předpoklad: $a_2, a_3, \ldots$ vybrány z $\Gamma(a_1) \Rightarrow$ pro každé $n \geq 2$ existuje $k_n \in \mathbb{N}$: $a_n = a_1 + 1/k_n \Rightarrow f(a_1 + 1/n) = f(a_1 + 1/f(a_n)) = f(a_n + 1) = f(a_1 + 1/k_n + 1) = f(a_1 + 1/k_n) = f(a_n) = n$; protože $\Gamma(a_1 + 1/3) = \mathbb{N} \Rightarrow$ existuje d: $f(a1 + 1/3 + 1/d) = 1$; předpoklad: $1/3 + 1/d = p/q$ pro relativní prvočísla p a q, protože $1/3 + 1/d \neq 1 \Rightarrow q > 1$; volba celé k: $kp \equiv 1(\mathrm{mod} q) \Rightarrow 1 = f(a_1 + p/q) = f(a_1 + kp/q) = f(a_1 + 1/q) = q \Rightarrow$ spor

50. IMO – 2009 – (SL09-5): opačný předpoklad: $f(x - f(y)) \leq yf(x) + x$ pro všechna reálná x, y; dosazení $y = 0$ a $x = z + f(0) \Rightarrow f(z) \leq z + f(0)$, pro $x = f(y)$ $\Rightarrow f(0) \leq yf(f(y)) + f(y) \leq yf(f(y)) + y + f(0) \Rightarrow y(f(f(y)) + 1) \geq 0 \Rightarrow$ pro $y > 0$: $f(f(y)) \geq -1$ a pro $y < 0$: $f(f(y)) \leq -1$;
pokud $f(x) > 0 \Rightarrow$ pro $y < x - f(0)$: $f(y) - f(0) \leq y < x - f(0) \Rightarrow f(y) < x$ $\Rightarrow -1 \leq f(f(x - f(y))) \leq f(x - f(y)) + f(0) \leq yf(x) + x + f(0)$ a $y \geq \frac{-1-x-f(0)}{f(x)}$
$\Rightarrow$ každé $y < x - f(0)$ musí být větší nebo rovno $\frac{-1-x-f(0)}{f(x)} \Rightarrow$ spor
$\Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq x + f(0) \leq x \Rightarrow$ pro libovolné $z > 0$: $f(-1) = f[(f(z) - 1) - f(z)] \leq zf(f(z) - 1) + f(z) - 1 \leq z(f(z) - 1) + f(z) - 1 = (z + 1)(f(z) - 1) \leq -z - 1 \Rightarrow$ pro všechna $z > 0$: $z \leq -f(-1) - 1 \Rightarrow$ spor

50. IMO – 2009 – (SL09-7): dosazení $x = 0 \Rightarrow f(0) = f(yf(0))$ pro všechna $y \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(xf(x)) = f(xf(x + 0)) = f(0f(x)) + x^2 = x^2$ a $0 = f(xf(x - x)) = f(-xf(x)) + x^2 \Rightarrow f(-xf(x)) = -x^2 \Rightarrow f$ – surjektivní;
pokud $f(z) = 0$ pro nějaké $z \neq 0 \Rightarrow 0 = f(zf(z)) = z^2 \Rightarrow$ spor;

předpoklad: $f(x) = f(y)$ pro nějaké $x, y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $x^2 = f(xf(x)) = f(xf(y)) = f((y - x)f(x)) + x^2 \Rightarrow f((y - x)f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ nebo $x - y = 0 \Rightarrow$ x = y $\Rightarrow$ f – prostá; důkaz $f(-x) = -f(x)$ pro všechna reálná x: pro $x = 0$ triviální, dále $x \neq 0$, pokud $f(x) > 0$ $\Rightarrow$ existuje z: $f(x) = z^2$, f – prostá a $f(zf(z)) = z^2$ $\Rightarrow$ $x = zf(z)$ $\Rightarrow$ $f(-x) = f(-zf(z)) = -z^2 = -f(x)$; podobně případ $f(x) < 0$;
$f(yf(x)) = -x^2 + f(xf(x + y)) = -x^2 + (x + y)^2 - [(x + y)^2 + f(-xf(x + y))] = y^2 + 2xy - f((x + y)f(y)) = 2xy + [(-y)^2 + f((x + y)f(-y))] = 2xy + f(-yf(x))$ $\Rightarrow f(xf(y)) = xy$; analogicky: $f(yf(x)) = xy \Rightarrow xf(y) = yf(x) \Rightarrow f(x) = cx$ pro nějaké reálné c; z rovnice $f(xf(x)) = x^2 \Rightarrow c \in \{-1,1\} \Rightarrow f(x) = x$ nebo $f(x) = -x$

51. IMO – 2010 – (SL10-A1): $f(x) = konst. = C$, kde $C = 0$ nebo $1 \leq C < 2$

51. IMO – 2010 – (SL10-A5): $f(x) = 1/x$

52. IMO – 2011 – (SL11-A3): f i g identicky rovny nule, nebo $g(x) = x$ a $f(x) = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$

52. IMO – 2011 – (IMO11-3) = (SL11-A6): důkaz

53. IMO – 2012 – (IMO12-4) = (SL12-A1): $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = kx^2,$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ sudé} \\ k, & x \text{ liché} \end{cases}, \qquad f_4(x) = \begin{cases} 0, & x \equiv 0 \pmod 4, \\ k, & x \equiv 1 \pmod 2, \\ 4k, & x \equiv 2 \pmod 4, \end{cases} \quad k \text{ - nenulové celé číslo}$$

53. IMO – 2012 – (SL12-A5): $f(x) = x - 1$

54. IMO – 2013 – (SL13-A3): důkaz, metoda pevných bodů

54. IMO – 2013 – (SL13-A5): $f_1(n) = n + 1$

$$f_2(n) = \begin{cases} n + 1, & n \equiv 0 \pmod 4 \textit{ nebo } n \equiv 2 \pmod 4, \\ n + 5, & n \equiv 1 \pmod 4, \\ n - 3, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

54. IMO – 2013 – (SL13-N6): všechny konstantní funkce a funkce dolní a horní celá část

55. IMO – 2014 – (SL14-A4): $f(n) = 2n + 1007$

55. IMO – 2014 – (SL14-A6): $f_1(n) = n + 1$

$$f_2(n) = \begin{cases} n + 1, & n > -a, \\ -n + 1, & n \leq -a, \end{cases} \ a \geq 1, \qquad f_3(n) = \begin{cases} n + 1, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -n + 1, & n < 0 \end{cases}$$

56. IMO – 2015 – (IMO15-5) = (SL15-A4): $f_1(x) = x,\ f_2(x) = 2 - x$

56. IMO – 2015 – (SL15-A2): $f_1(x) = -1,\ f_2(x) = x + 1$

56. IMO – 2015 – (SL15-A5): $f(md + i) = 2kmd + \ell_i d,\ m \in \mathbb{Z},\ i = 0,1,\dots,d - 1,$ d – pevné přirozené, k – celé, ℓ_i – sudá celá

57. IMO – 2016 – (SL16-A4): $f(x) = 1/x$

57. IMO – 2016 – (SL16-A7): $f_1(x) = -1,\ f_2(x) = x - 1$

58. IMO – 2017 – (IMO17-2) = (SL17-A6): $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = x - 1,\ f_3(x) = 1 - x$

58. IMO – 2017 – (SL17-A8): důkaz

59. IMO – 2018 – (SL18-A1): $f(x) = 1$

59. IMO – 2018 – (SL18-A5): $f(x) = C_1 x + C_2/x$, C_1 a C_2 – libovolné konstanty

60. IMO – 2019 – (IMO19-1) – (SL19-A1): $f_1(n) = 0,\ f_2(n) = 2n + K$, K – celá konstanta

60. IMO – 2019 – (SL19-A7): důkaz

61. IMO – 2020 – (SL20-A6): $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = x + 1$

61. IMO – 2020 – (SL20-A8): $f(x) = x + 1$

61. IMO – 2020 – (SL20-N5): $f(n) = cv_p(n)$, c – celé nezáporné, p – prvočíslo, $v_p(n)$ – exponent prvočísla p v prvočíselném rozkladu čísla n

9. Seznam použité literatury

Aczél, J. 2001. *Functional Equations: History, Applications and Theory*. Springer Science & Business Media.

Calábek, Pavel, a Jaroslav Švrček. 2013. *Abeceda řešení funkcionálních rovnic*, 9.

Davidov, Ljubomir. 1984. *Funkcionální rovnice*. Praha: Škola mladých matematiků. https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/404099.

Djukić, Dušan, Vladimir Janković, Ivan Matić, a Nikola Petrović. 2011. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009 Second Edition*. Problem Books in Mathematics. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9854-5.

Hájek, Otomar. 1955. *Funkcionální rovnice trigonometrických funkcí*. Časopis pro pěstování matematiky 80 (4): 481–85.

Kuczma, Marek. 1964. *A Survey of the Theory of Functional Equations*. Elektrotechničkog Fakulteta Univerziteta U Beogradu, č. 130.

Kuczma, Marek, Bogdan Choczewski, a Roman Ger. 1990. *Iterative Functional Equations*. Cambridge University Press.

Pešková, Lenka. 2012. *Funkcionální rovnice v příkladech z matematických olympiád*. Diplomová práce, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci. https://theses.cz/id/uojhle/DP_Funkcionln_rovnice_Pekov.pdf.

Petr, Karel. 1923. *Přehled o funkcích elementárních. Funkcionální rovnice*. Počet diferenciální, 114–33. Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků. http://dml.cz/dmlcz/402693.

Pexider, Jan Vilém. 1900. *Studie o funkcionálních rovnicích*. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 29 (3): 153–95.

Small, Christopher G. 2007. *Functional Equations and How to Solve Them*. Problem Books in Mathematics. New York: Springer.

Šatný, Petr. 2016. *Funkcionální rovnice z MMO 2015*. Rozhledy matematicko-fyzikální 91 (4): 7.

Vodstrčil, Petr. 2006. *Funkcionální rovnice*. Škomam, 2.:2. Ostrava: Katedra aplikované matematiky, VŠB-TU, Ostrava. http://skomam.vsb.cz/archiv/2006/files/prednasky/P_Vodstrcil.pdf.

Seznam internetových zdrojů:

EGMO. European Girls' Mathematical Olympiad. https://www.egmo.org/.

IMO. International Mathematical Olympiad. https://www.imo-official.org/.

MEMO. Middle European Mathematical Olympiad.

https://www.memo-official.org/MEMO/contests/previous/.

MO. Matematická Olympiáda. http://www.matematickaolympiada.cz/.