UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

## Testování znalostí studentů - příprava ke zkoušce z předmětu Matematika 2: Limita a spojitost funkce dvou proměnných

Vedoucí bakalářské práce:
**Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.**
Rok odevzdání: 2014

Vypracoval:
**Kateřina Zelinková**
MATEKO, III. ročník

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci

**Poděkování**

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především své vedoucí bakalářské práce paní Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D. za dostatek trpělivosti a enormní spoustu času, kterou mi při konzultačních hodinách i mimo ně věnovala. Ráda bych zde také poděkovala své rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali.

# Obsah

# Úvod

Předmětem této bakalářské práce je problematika limity a spojitosti funkce dvou proměnných a testování její znalosti u studentů předmětu KMA/M2 pomocí e-learningové platformy LMS Moodle.

Čtenář se seznámí s otázkami, které byly vytvořeny na základě dané teorie a zároveň mu bude názorně ilustrován postup výpočtů a odvozování správných odpovědí. Tyto postupy dokreslují testovanou teorii, a proto jsou uvedeny přímo s uvedenou látkou.

Text je rozdělen do 4 hlavních kapitol, které jsou děleny dle tématu na další podkapitoly.

V první kapitole jsou zmíněny základní definice pojmů, které jsou potřebné k pochopení problematiky limity a spojitosti funkce dvou proměnných. Jedná se hlavně o metrický prostor, okolí bodu, vztahy mezi bodem a danou množinou a funkci dvou proměnných.

Druhá kapitola se zabývá teorií limity funkce dvou proměnných. V první sekci druhé kapitoly je vysvětlena důležitost a nezbytnost pojmu limita funkce dvou proměnných. Definice tohoto pojmu je uvedena v podkapitole druhé. Ve třetí podkapitole jsou zmíněny a následně vysvětleny typy limit. Navíc je zde uvedena definice pro případ vlastní limity ve vlastním bodě. Ve čtvrté části jsou uvedeny věty, týkající se vlastností limit funkcí. O tyto věty se následně opírá pátá podkapitola, která se zabývá výpočtem limity funkce dvou proměnných. Zmíněny jsou zde tři metody výpočtu limity. Šestá podkapitola se týká postupů, které se používají k důkazu neexistence limity.

Třetí kapitola je věnována spojitosti funkce dvou proměnných. Tato část bakalářské práce uvádí definici spojitosti funkce a dále jsou zde popsány vlastnosti spojité funkce.

Čtvrtá kapitola je již zaměřena na testování studentů. Jsou zde popisovány způsob a principy tvoření otázek a také jsou uvedeny všechny otázky včetně jejich správných odpovědí. V neposlední řadě je zde uveden rozbor již realizovaného testu, vytvořeného ze zmíněných otázek, přičemž analyzujeme výsledky na základě hodnocení, času a generování jednotlivých otázek.

Autorka předpokládá v celém textu znalost látky probrané v předmětu KMA/M1 a zároveň především vychází z přednášek a materiálů navazujícího předmětu KMA/M2.

# Seznam použitého značení

$\mathbb{N}$ ........ množina přirozených čísel

$\mathbb{R}$ ........ množina reálných čísel

$\mathbb{R}^*$ ........ množina reálných čísel rozšířená o $-\infty$ a $\infty$

$\mathbb{R}^+$ ........ množina kladných reálných čísel

$\mathbb{R}^2$ ........ kartézský součin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^{*2}$ ........ kartézský součin $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$\mathbb{R}^n$ ........ kartézský součin $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \mathbb{R}}_{n}$

$\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ ........ kartézský součin dvou intervalů, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$(a, b) \times (c, d)$ . kartézský součin dvou otevřených intervalů, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\mathcal{U}_\delta(x_0, y_0)$ ........ $\delta$-okolí bodu $(x_0, y_0)$

$\mathcal{U}_\delta{}^*(x_0, y_0)$ ........ redukované $\delta$-okolí bodu $(x_0, y_0)$

$(M, \rho)$ ........ metrický prostor s metrikou $\rho$

$hA$ ........ množina všech hraničních bodů množiny $A$

$A^\circ$ ........ množina všech vnitřních bodů množiny $A$

$A'$ ........ množina všech hromadných bodů množiny $A$

$D_f$ ........ definiční obor funkce $f$

$D'_f$ ........ množina všech hromadných bodů definičního oboru funkce $f$

$D^\circ_f$ ........ množina všech vnitřních bodů definičního oboru funkce $f$

$X = (x_1, x_2 \cdots, x_n)$ .. libovolný bod z množiny $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, kde $x_1, x_2 \cdots, x_n$ jsou souřadnice tohoto bodu

# 1. Základní pojmy

Nejprve si zmíníme základní pojmy, ze kterých vycházíme při určování definice limity a spojitosti funkce dvou proměnných. Pro přehlednější značení budeme v následujícím textu body z obecného metrického prostoru $(M, \rho)$ a z $\mathbb{R}^2$ značit velkými písmeny a body ležící na reálné ose, tj. body z $\mathbb{R}$, písmeny malými.

Tato část bakalářské práce převážně čerpá informace ze zdrojů [1], [8], [10] a [11].

**Definice 1.** Nechť $A$ je neprázdná množina a nechť $\rho$ je zobrazení $A \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Platí – li pro $X, Y, Z \in A$ :

$$\rho(X, Y) \geq 0 \tag{1}$$

$$X = Y \Leftrightarrow \rho(X, Y) = 0 \tag{2}$$

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X) \tag{3}$$

$$\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) + \rho(Z, Y), \tag{4}$$

uspořádaná dvojice $(M, \rho)$ se nazývá **metrickým prostorem**.

Zobrazení $\rho : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **metrika** a číslo $\rho(X, Y)$ se označujeme jako **vzdálenost prvků** $X$ a $Y$ v metrickém prostoru $(M, \rho)$.

**Poznámka 1.** V dalším textu bude v rovině uvažována pouze eukleidovská metrika, ve které je vzdálenost mezi body $X, Y \in \mathbb{R}^2$ , $X = (x_1, x_2)$ a $Y = (y_1, y_2)$ dána vztahem:

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Pro vzdálenost $\rho(a, b)$ dvou bodů $a$ a $b$ na reálné ose pak platí:

$$\rho(a, b) = \sqrt{(b - a)^2} = |b - a|.$$

**Definice 2.** Nechť $X_0$ je bod z metrického prostoru $(M, \rho)$ a $\delta > 0$. $\delta$-**okolím bodu $\mathbf{X_0}$** v prostoru $(M, \rho)$ je nazývána taková množina bodů $\mathcal{U}(X_0, \delta)$, pro kterou platí:

$$\mathcal{U}(X_0, \delta) = \{X \in (M, \rho); \rho(X, X_0) < \delta\}.$$

**Definice 3.** Nechť $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$, potom

$$\mathcal{U}(a) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \delta\}$$

se nazývá **okolím bodu a v** $\mathbb{R}$.

**Poznámka 2.** Existuje také tzv. **ryzí (redukované) okolí bodu $\mathbf{X_0}$** v metrickém prostoru $(M, \rho)$. Tím se nazývá následující množina bodů:

$$\mathcal{U}^*(X_0, \delta) = \{X \in (M, \rho); 0 < \rho(X, X_0) < \delta\}.$$

**Definice 4.** Nechť je dán metrický prostor $(M, \rho)$ a nechť $A \subset (M, \rho)$.

**Hraničním bodem množiny** $A$ je nazýván bod $X \in M$, v jehož libovolném okolí $\mathcal{U}(X)$ se nachází bod $Y \in A$ a zároveň bod $Z \notin A$.

Množina všech hraničních bodů množiny $A$ se nazývá hranice množiny $A$ a značí se $hA, bdA$.

**Definice 5.** Nechť je dán metrický prostor $(M, \rho)$ a nechť $A \subset (M, \rho)$.

**Vnitřním bodem množiny** $A$ je nazýván bod $X \in A$, existuje-li takové okolí $\mathcal{U}(X)$ pro něž platí $\mathcal{U}(X) \subset A$.

Množina všech vnitřních bodů množiny $A$ se nazývá vnitřek množiny $A$ a značí se $A^\circ$ nebo $intA$.

**Definice 6.** Nechť je dán metrický prostor $(M, \rho)$ a nechť $A \subset (M, \rho)$.

**Hromadný bod množiny** $A$ se nazývá takový bod $X \in M$, v jehož každém okolí $\mathcal{U}(X)$ lze nalézt nekonečně mnoho bodů z množiny $A$.

Množina všech hromadných bodů množiny $A$ se nazývá derivace množiny $A$ a značí se $A'$.

**Definice 7.** Nechť je dán metrický prostor $(M, \rho)$ a nechť $A \subset (M, \rho)$.

**Izolovaný bod množiny** $A$ se nazývá takový bod $X \in A$, který není hromadným bodem.

**Definice 8.** Nechť je dán metrický prostor $(M, \rho)$ a nechť $A \subset (M, \rho)$.

Množina $A = A^{\circ} \cup hA$ je nazvána **uzávěrem množiny** a je značena $\overline{A}$.

Množina $A$ se nazývá uzavřená, jestliže $A = \overline{A}$.

**Definice 9.** Nechť $(M, \rho)$ je metrický prostor s metrikou $\rho$, a nechť $A \subset M$.

Množina $A$ se nazývá **otevřená**, právě tehdy, když $A \cap hA = \emptyset$.

**Definice 10.** Nechť je dán metrický prostor $(M, \rho)$ a nechť $A \subset (M, \rho)$.

Množina $A \subset M$ se nazývá **souvislá**, jestliže každé její dva body lze spojit lomenou čarou, která celá leží v $A$.

**Definice 11.** Nechť je dán metrický prostor $(M, \rho)$ a nechť $A \subset (M, \rho)$.

Otevřená, souvislá množina $A \subset M$, se nazývá **oblast**.

**Definice 12.** Nechť je dán metrický prostor $(M, \rho)$ a nechť $A \subset (M, \rho)$.

Množina $A$, pro kterou platí:

$$A = A^{\circ} \cup hA$$

se nazývá **kompaktem** právě tehdy, pokud $\exists\ X \in A\ \ \exists\, \mathcal{U}(X) : A\ \ \subset \mathcal{U}(X)$.

**Definice 13.** Mějme v rovině $\mathbb{R}^2$ dánu množinu bodů $(x, y)$, kterou označíme $A$. Říkáme, že na této množině je definována **reálná funkce** $f$ **dvou reálných proměnných** $x, y$ je-li dán předpis, podle kterého je každému bodu $(x, y) \in A$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $z$. Značíme $z = f(x, y)$.

Množině $A$ říkáme **definiční obor** této funkce a značíme ji $D_f$.

**Definice 14. Grafem funkce** $f$ **dvou proměnných** $x, y$ nazýváme množinu:

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D_f\} \subset \mathbb{R}^3.$$

# 2. Limita funkce dvou proměnných

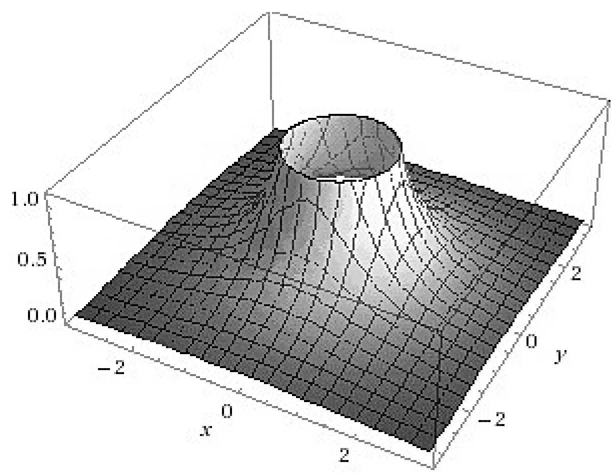
V celé této kapitole jsme vycházeli především z následujících zdrojů [1], [2], [3], [4], [6], [8], [9] a [11].

## 2.1. Motivace

Pro pochopení problematiky limity funkce dvou proměnných znázorníme nezbytnost jejího hledání při popisu vlastností funkce dvou proměnných.

Mějme dánu funkci $f(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)}$ (viz Obrázek 1), jež je definována na množině $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Tato funkce tudíž není definována na celém kartézském součinu $\mathbb{R}^2$.

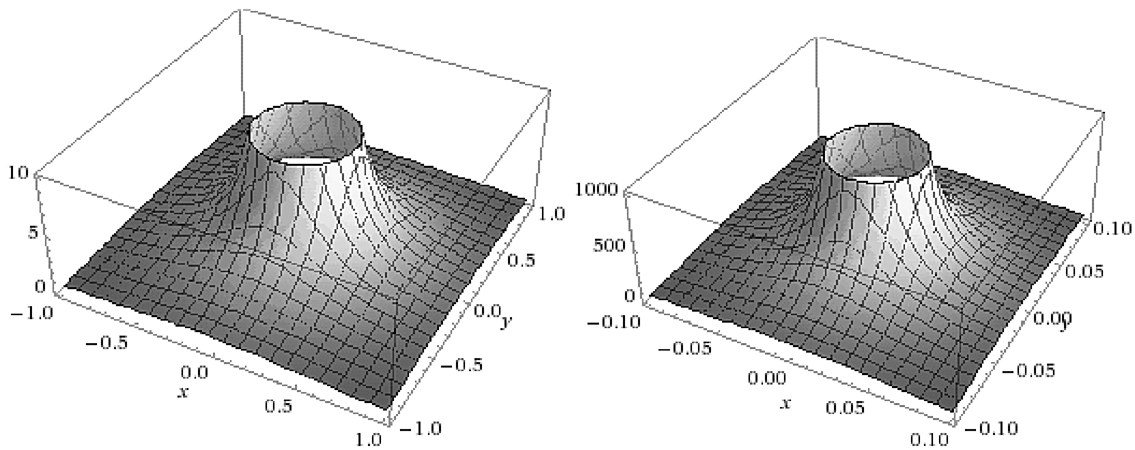
Položme si proto nyní otázku, jak lze určit chování funkce $f$ v ryzím okolí bodu $(0, 0)$, který jediný nenáleží do $D_f$, na základě funkčních hodnot v okolních (dosti blízkých) bodech. Odpověď nalezneme názornou vizualizací funkce, tj. vykreslením grafu funkce $f$.




Obrázek 1: Funkce $f(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)}$

Poloměr ryzího okolí bodu $(0, 0)$ zmenšujeme a následně zkoumáme hodnoty funkce v bodech z tohoto okolí.

Na základě grafů, uvedených na Obrázku 2, lze předpokládat, že funkční hodnoty v okolí bodu $(0, 0)$ neomezeně rostou a blíží se hodnotě $\infty$. Toto číslo nazýváme limitou funkce v bodě $(0, 0)$.




Obrázek 2: Grafy funkce $f(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)}$ na ryzím okolí bodu $(0, 0)$

Uvedli jsme si zde jeden z jednoduchých případů, ve kterém můžeme odhadnout limitu funkce pomocí jeho grafu. V praxi však z grafického znázornění funkce nejsme vždy schopni určit limitu, a tudíž využíváme matematických výpočtů a definic, kterými se budeme v této bakalářské práci zabývat.

## 2.2. Definice limity funkce dvou proměnných

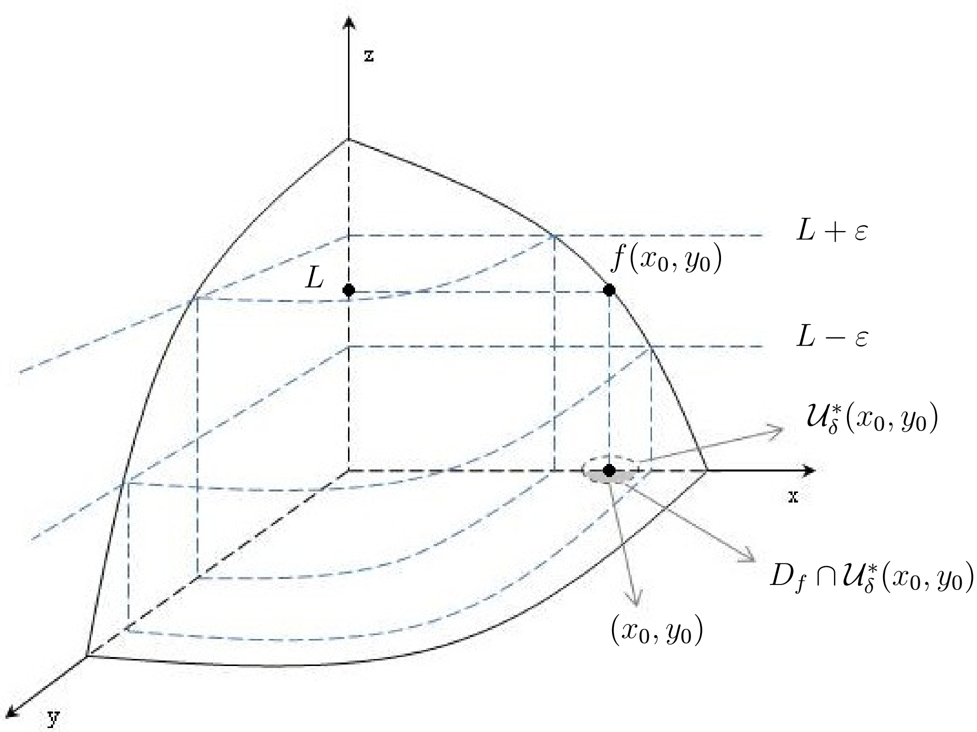
V následující podkapitole se budeme zabývat otázkou přesného vymezení pojmu limita funkce dvou proměnných.

**Definice 15.** (Cauchyovo pojetí)

Nechť $f(x,y)$ je funkce dvou proměnných $x$ a $y$. Nechť bod $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^{*2}$ je hromadným bodem $D_f$. Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $(x_0,y_0)$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall\, \mathcal{U}_\varepsilon(L)\ \exists\, \mathcal{U}^*_\delta(x_0,y_0) : \forall\ (x,y) \in D_f \cap \mathcal{U}^*_\delta(x_0,y_0) : f(x,y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L).$$

Zapisujeme: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ nebo také $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L$.




Obrázek 3: Grafické znázornění definice limity funkce dvou proměnných

Uveďme, že takto definovaná limita funkce dvou proměnných se nazývá dvojnou limitou.

Dle Definice 15 můžeme hledat limitu funkce pouze v takovém bodě $X$, v jehož okolí se nachází nekonečně mnoho bodů, patřících do $D_f$. U studentů jsme testovali znalost, ve kterých situacích (v závislosti na vztahu bodu $X_0$ a množiny) limitu funkce lze uvažovat, a ve kterých nikoliv.

**Příklad 1.** Vyberte situace, kdy bychom mohli hledat limitu funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$.

Mějme dány následující možnosti:

1. Bod $(x_0, y_0)$ je vnitřním bodem definičního oboru funkce $f(x, y)$.
2. Bod $(x_0, y_0)$ je izolovaným bodem definičního oboru funkce $f(x, y)$.
3. Funkce je definována na prostoru $\mathbb{R}^2$, do kterého nepatří pouze bod $(x_0, y_0)$.

**Řešení**

Budeme vycházet z Definice 15. Zde je stanovena podmínka, že bod, ve kterém hledáme limitu (v našem případě bod $(x_0, y_0)$), je hromadným bodem definičního oboru $D_f$ dané funkce $f$. Ke zjištění správných odpovědí tedy využijeme vztahy mezi body množiny (viz Kapitola 1).

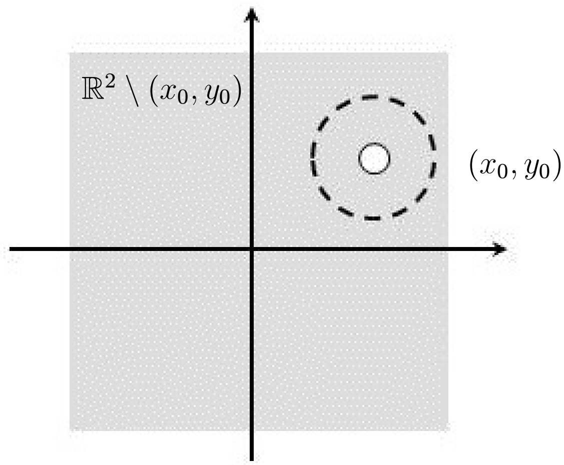
$$\text{Platí } A^\circ \subset A'.$$

Pokud je tedy bod $(x_0, y_0)$ vnitřním bodem $D_f$, pak je i bodem hromadným.

Dále lze dokázat, že nemůžeme zkoumat limitu funkce v izolovanému bodě, neboť samotná definice izolovaného bodu (viz strana 8) praví, že je-li bod izolovaný, pak není bodem hromadným.

Ke zjištění pravdivosti či nepravdivosti Odpovědi č. 3 tuto situaci znázorníme na Obrázku 4.

V okolí bodu $(x_0, y_0)$ nalezneme nekonečně mnoho bodů definičního oboru. Je tedy zřejmé, že $(x_0, y_0)$ je hromadným bodem (viz strana 8).




Obrázek 4: $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (x_0, y_0)$

Možnost existence limity vzhledem k povaze vztahu bodu a definičního oboru funkce $f$ lze zkoumat také následujícím způsobem.

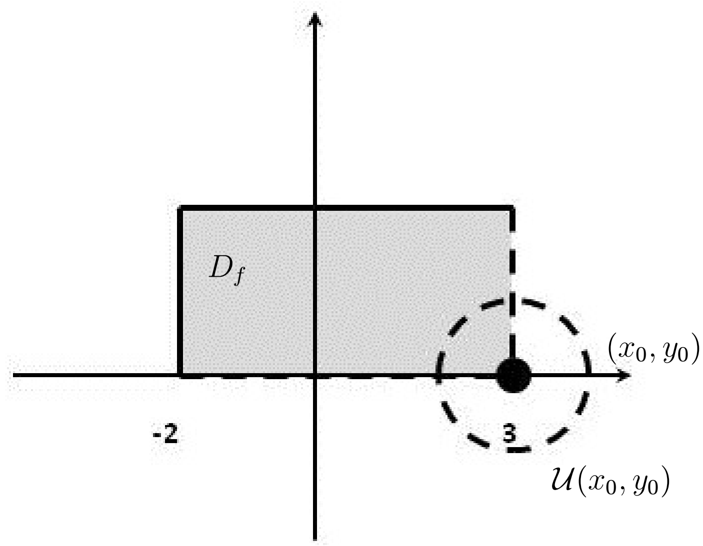
**Příklad 2.** Nechť $f$ je funkce dvou proměnných a $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \langle -2, 3), y \in (0, 1\rangle\}$, pak

1. nemá smysl zkoumat limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} f(x, y)$.
2. má smysl zkoumat limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} f(x, y)$.
3. limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} f(x, y)$ nazýváme nevlastní.

**Řešení**

Nejprve potřebujeme charakterizovat bod $(3, 0)$ v závislosti na jeho vztahu vůči definičnímu oboru. Poté budeme určovat, stejně jako v předchozím případě, zda se jedná o hromadný bod či nikoliv.

Celou situaci znázorníme. Z Obrázku 5 vyplývá, že se jedná o hraniční bod definičního oboru, v jehož okolí $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ se nachází nekonečně mnoho bodů. Bod $(x_0, y_0)$ je tedy hromadným bodem, a tudíž má smysl zkoumat limitu funkce v bodě $(3, 0)$. Proto je Odpověď č. 2 pravdivá. Odpověď č. 1 má opačný význam a je tedy nepravdivá.




Obrázek 5: Znázornění definičního oboru $D_f$ a okolí bodu $\mathcal{U}(x_0, y_0)$

K určení pravdivosti či nepravdivosti Odpovědi č. 3 potřebujeme znát pojem nevlastní limita, který si charakterizujeme v následující podkapitole.

## 2.3. Typy limit

Obdobně jako u limity funkce jedné proměnné lze rozlišovat jednotlivé typy limit dle bodu, ve kterém funkci vyšetřujeme a hodnoty limity, jež je dána chováním funkce v daném okolí. Tato znalost se nám bude hodit především při metodách výpočtu limit, potažmo při určování chování funkce v bodě, neboť některé metody lze použít pouze v případě výskytu určitého typu limity.

Jednotlivé typy dvojné limity lze dělit následovně:

- Vlastní limita funkce ve vlastním bodě
- Nevlastní limita funkce ve vlastním bodě
- Vlastní limita funkce v nevlastním bodě
- Nevlastní limita funkce v nevlastním bodě

Položme si nejprve otázku, co přesně znamená pojem nevlastní bod definičního oboru funkce dvou proměnných. V následujícím textu ho budeme vnímat jako bod z $\mathbb{R}^{*2}$, jehož alespoň jedna souřadnice je rovna $\infty$ nebo $-\infty$.

Například nevlastním bodem roviny nazveme každý bod, jenž má podobu $(a, \infty), (\infty, b), (\infty, \infty)$ apod.

Bodem vlastním chápeme takový bod, jehož souřadnice jsou pouze reálná čísla.

Analogicky vlastní limitou je nazývána limita $L \in \mathbb{R}$. O limitě $L$ hovoříme jako o limitě nevlastní, pokud $L = \infty$ (resp. $-\infty$).

**Definice 16.** Řekneme, že funkce $f$ proměnných $x, y$ má v bodě $(x_0, y_0)$ nevlastní limitu $\infty$ (resp. $-\infty$), jestliže ke každému reálnému číslu $K$ existuje takové kladné číslo $\delta$, že nerovnost $f(x, y) > K$ (resp. $f(x, y) < K$) je splněna pro všechny body $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ z $\delta$-okolí bodu $(x_0, y_0)$ (viz [6]).

### 2.3.1. Vlastní limita funkce ve vlastním bodě

Pokud bod $(x_0, y_0)$ je bodem vlastním a číslo $L \neq \pm\infty$, lze Definici 15 přepsat do speciálního tvaru:

**Definice 17.** Nechť $f(x, y)$ je funkce dvou proměnných $x$ a $y$. Nechť bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ je hromadným bodem $D_f$. Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $(x_0, y_0)$ limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x, y) \in D_f \cap \mathcal{U}_\delta{}^*(x_0, y_0) : |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Zapisujeme: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L, L \in \mathbb{R}$.

V Definici 17 se vyskytuje nový zápis faktu, že body $f(x, y)$ patří do epsilonového okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$. Následující příklad proto testuje schopnost přiřadit podobnému matematickému výrazu správný význam.

**Příklad 3.** Nechť $L \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a $f$ je funkce dvou proměnných. Zápis $|f(x, y) - L| \leq \varepsilon$ můžeme číst jako:

1. vzdálenost čísla $L$ a funkční hodnoty funkce $f$ v bodě $(x, y)$ je menší nebo rovna než $|f(x, y) - \varepsilon|$;

2. funkční hodnota funkce $f$ v bodě $(x, y)$ je menší nebo rovna než $|L - \varepsilon|$;

3. vzdálenost funkční hodnoty funkce $f$ v bodě $(x, y)$ od $\varepsilon$ je větší nebo rovna než $|L - \varepsilon|$;

4. vzdálenost funkční hodnoty $f$ v bodě $(x, y)$ od pevně stanoveného $L$ je menší nebo rovna číslu $\varepsilon$;

5. jinak.

**Řešení**

Při odvozování správné odpovědi vycházíme z platných matematických zákonů a základních pojmů, uvedených v Kapitole 1 (především v Poznámce 1).

Správná odpověď je tudíž právě jedna a to Odpověď č. 4.

Dále uvedeme příklady testování typů jednotlivých limit.

**Příklad 4.** Vraťme se nejdříve k Příkladu 2, kde bylo vyřčeno tvrzení:

Nechť $f$ je funkce dvou proměnných a $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \langle -2, 3), y \in (0, 1\rangle\}$, pak limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} f(x, y)$ nazýváme nevlastní.

**Řešení**

Nepravdivost tohoto tvrzení ukážeme na příkladu. Předpokládejme, že $f(x, y) = 0$ je konstantní funkce rovna 0 v každém bodě svého $D_f$. Potom limita v bodě $(3, 0)$ je rovna 0. Jelikož $0 \neq \pm\infty$ můžeme říci, že je toto tvrzení nepravdivé.

V testu bylo využito také přiřazovacího typu otázky, testujícího znalost typů limit.

**Příklad 5.** Mějme dány následující případy:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a, a \in \mathbb{R}^*$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}^*$;

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$.

Přiřaďte:

**a** limita vlastní ve vlastním bodě;

**b** limita vlastní v nevlastním bodě;

**c** limita nevlastní ve vlastním bodě;

**d** limita nevlastní v nevlastním bodě.

**Řešení**

Při řešení tohoto příkladu budeme vycházet ze znalostí jednotlivých typů limit. Limita je v zadání otázky značena písmenem $a$ a $(x_0, y_0)$ je bodem, ve kterém hledáme tuto limitu.

Limita vlastní ve vlastním bodě značí takový případ, kde $a$ je reálným číslem a $(x_0, y_0)$ je vlastním bodem roviny $\mathbb{R}^2$. Porovnáním s možnostmi č. 1, 2, 3, 4 zjistíme, že této podmínce vyhovuje Odpověď č. 2.

Obdobně určíme, že pro limitu vlastní v nevlastním bodě platí, že $a$ je reálnou hodnotou, zatímco bod $(x_0, y_0)$ má alespoň jednu souřadnici $\infty$ nebo $-\infty$. Správně přiřazená odpověď je tedy Odpověď č. 4.

Podobnými úvahami určíme, že Odpověď č. 3 je zápisem nevlastní funkce v nevlastním bodě a Odpověď č. 1 je nevlastní limitou ve vlastním bodě.

## 2.4. Vlastnosti limity funkce dvou proměnných

Limity funkce dvou proměnných mají, podobně jako limita funkce jedné proměnné, určité vlastnosti, jež uvedeme v následující kapitole.

**Věta 1.** *Funkce $f$ má v daném bodě $(x_0, y_0)$ nejvýše jednu limitu.*

**Důkaz:** viz [9]

**Věta 2.** *Funkce $f$ má v bodě $(x_0, y_0)$ vlastní limitu $A$, právě když je splněna Bolzanova – Cauchyova podmínka:*

*K libovolnému kladnému číslu $\varepsilon$ existuje takové kladné číslo $\delta$, že nerovnost*

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

*platí pro každou dvojici bodů $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ z $\delta$-okolí bodu $(x_0, y_0)$ od tohoto bodu různých.*

**Věta 3.** *Má – li funkce v bodě $(x_0, y_0)$ vlastní limitu, pak existuje redukované okolí bodu $(x_0, y_0)$ takové, že funkce $f$ je na tomto redukovaném okolí omezená.*

**Věta 4.** *(Pravidlo „nulová $\times$ omezená“) Nechť $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0$ a nechť funkce $g$ je omezená na nějakém redukovaném okolí bodu $(x_0, y_0)$.*
*Potom platí*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \cdot g(x, y) = 0.$$

**Věta 5.** *(O limitě tří funkcí, „O dvou policajtech“) Nechť existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(x_0, y_0)$ bodu $(x_0, y_0)$ takové, že*

$$g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$$

*pro všechna $(x, y) \in \mathcal{U}^*(x_0, y_0)$. Navíc nechť*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x, y) = L.$$

*Potom existuje také limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ a platí $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$.*

**Věta 6.** *Nechť $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = L_2$ a nechť $c$, $c_1$ a $c_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Potom*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(c\cdot f(x,y)) = c\cdot L_1$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(c_1\cdot f(x,y)+c_2\cdot g(x,y)) = c_1\cdot L_1 + c_2\cdot L_2$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)\cdot g(x,y,)) = L_1\cdot L_2$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \tfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \tfrac{L_1}{L_2} \text{ } pro \ L_2 \neq 0,$$

*pokud mají výrazy na pravé straně smysl v* $\mathbb{R}^*$*.*

Do teď jsme se zabývali obecným chováním limit funkcí dvou proměnných. Uveďme si nyní specifické vlastnosti nevlastních limit.

**Věta 7.** *Má-li funkce* $f$ *v bodě* $(x_0, y_0)$ *nevlastní limitu* $\infty$ *nebo nevlastní limitu* $-\infty$*, pak funkce* $|f|$ *má v témže bodě nevlastní limitu* $\infty$*.*

**Věta 8.** *Je – li* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty$ *nebo* $-\infty$*, pak je*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(\tfrac{1}{f(x,y)}\right) = 0.$$

**Věta 9.** *Je – li* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ *a existuje – li takové kladné číslo* $\delta$*, že pro všechny body* $(x_0, y_0) \neq (x, y)$ *z* $\delta$*-okolí bodu* $(x_0, y_0)$ *je* $f(x,y) > 0$ *(resp.* $f(x,y) < 0$*), pak je*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(\tfrac{1}{f(x,y)}\right) = \infty \ (resp.\ -\infty).$$

**Věta 10.** *Je – li* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty$ *a existuje – li takové kladné číslo* $\delta$*, že pro všechny body* $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ *z* $\delta$*-okolí bodu* $(x_0, y_0)$ *je* $g(x,y) \geq f(x,y)$*, pak je*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \infty.$$

**Poznámka 3.** Obdobné tvrzení platí i pro limitu $-\infty$.

## 2.5. Výpočet limity funkce dvou proměnných

Při výpočtu limity funkce dvou proměnných v bodě budeme vycházet z již naučených postupů výpočtu limity funkce jedné proměnné (viz [10]), ze známých vzorců (viz Příloha) a následně i z výše zmíněných vlastností limit (viz Podkapitola 2.4).

Nejprve si uvedeme jednotlivé způsoby výpočtu, jež by měly prokázat existenci limity a zároveň vyčíslit její hodnotu.

### 2.5.1. Dosazení do předpisu

Počáteční krok při výpočtu limity je samotné dosazení souřadnic limitního bodu do předpisu funkce.

Tím zjistíme, zda jsme schopni určit limitu funkce v bodě přímo (tj. hodnota limity funkce je rovna funkční hodnotě) nebo zda zjistíme přítomnost tzv. neurčitého výrazu [1]. V tomto případě se pokoušíme nalézt limitu funkce jinými způsoby.

Dosazení do předpisu použijeme v následujícím příkladu.

**Příklad 6.** Určete, která tvrzení jsou pravdivá o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y+e^x}{x+1}$:

1. limita neexistuje;
2. limita existuje;
3. limita je 1.

**Řešení**

Bod $(0,0)$ dosadíme do funkčního předpisu.

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y+e^x}{x+1} = \frac{0^3-0+e^0}{0+1} = \frac{0-0+1}{1} = 1$$

Limita tedy existuje a je rovna 1.

[1] limity typu „$\frac{0}{0}$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“,„$\infty - \infty$“ apod.

Dále ukážeme postup výpočtu limity funkce v nevlastním bodě.

**Příklad 7.** Vyberte správný výsledek $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)}(-e^x+e^y)$.

1. $\infty$;
2. $-\infty$;
3. neexistuje;
4. 0;
5. 1.

**Řešení**

Ze zadání vyplývá $D_f=\mathbb{R}^2$, lze tedy řešit limitu funkce v bodě $(-\infty,-\infty)$. Dle daného postupu dosadíme nejprve souřadnicové hodnoty daného bodu do zadání funkce. Využijeme známých hodnot jednotlivých limit funkce $e^x$ (viz Příloha).

$$\lim_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)}(-e^x+e^y)=\lim_{x\to-\infty}-e^x+\lim_{y\to-\infty}e^y=0+0=0$$

Výsledek nasvědčuje tomu, že limita existuje a je rovna 0. Všechny ostatní odpovědi jsou tedy nepravdivé.

Vztah mezi funkční hodnotou a limitou funkce uvádíme v následujícím příkladu.

**Příklad 8.** Čemu se rovná $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y)$, pokud máme zadáno, že

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x^2+y^2}, & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0),(2,0)\}\\ 0, & (x,y)=(2,0)\end{cases}$$

1. $L=0$;
2. limita neexistuje;

3. $L = 1$;

4. $L = \frac{1}{2}$;

5. jiné.

**Řešení**

Ze zadání vyplývá $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, a tudíž bod $(2,0)$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f$. Můžeme tedy zkoumat limitu funkce dvou proměnných v tomto bodě (viz Definice 15).

V případě limity funkce neřešíme skutečnou funkční hodnotu bodu $(2,0)$, ale takovou funkční hodnotu, kterou předpokládáme na základě chování funkce v jeho dosti blízkém okolí.

Dále budeme vycházet z postupu popsaného v Příkladu 6. Dosadíme tedy souřadnice limitního bodu $(2,0)$ do funkčního předpisu, platícího pro body v dostatečné blízkosti bodu $(2,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \tfrac{x-y}{x^2+y^2} = \tfrac{2-0}{2^2+0^2} = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

Správnou odpovědí je tedy Odpověď č. 4.

### 2.5.2. Úprava výrazu

Upravit výraz do přijatelného tvaru tak, aby neurčitý výraz nevznikl, můžeme několika způsoby. Využíváme převážně základních algebraických operací a známých limit. Zde uvedeme pouze převod na známé limity.

Některé známé limity funkce jedné proměnné (viz Příloha) lze transformovat přímo pro limitu funkce dvou proměnných.

*Například*

Nechť $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$. Potom platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \tfrac{\sin(f(x,y))}{f(x,y)} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (1+f(x,y))^{\frac{1}{f(x,y)}} = e$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\ln(1+f(x,y))}{f(x,y)} = 1$$

Následující příklad znázorňuje situaci, kdy rozhodujeme, zda je vhodné použít vzorec pro výpočet známé limity.

**Příklad 9.** Určete výsledek $\lim\limits_{(c,d)\to(\infty,\infty)} \frac{\sin(h(c,d))}{h(c,d)} + 1$:

1. 0;
2. 1;
3. limita neexistuje;
4. poskytnuté informace nestačí k určení této limity.

**Řešení**

Při řešení této úlohy se budeme zaměřovat na vzorec známé limity, který nalezneme v bodě C). Zanedbejme nyní fakt, že je k limitě přičtena konstanta 1. Ačkoliv je zde uvedena podobná limita, není splněna podmínka

$$\lim_{(c,d)\to(c_0,d_0)} h(c,d) = 0.$$

K dalším výpočtům nemáme dostatečné informace a nelze určit hodnotu této limity ani její existenci.

### 2.5.3. Výpočet limity pomocí polárních souřadnic

Posledním způsobem výpočtu limit, který si zde uvedeme, je metoda převedení kartézských souřadnic do polárních souřadnic. V této části zmíníme speciální případ, kdy lze určit hodnotu limity funkce. Většinou se však polární souřadnice užívají k důkazu neexistence limity, a proto více informací nalezneme v Podkapitole 2.6.2. V této části jsme převážně vycházeli z informací z [3].

**Věta 11.** *Funkce f má v bodě $(x_0, y_0)$ limitu $L$, jestliže existuje nezáporná funkce $g : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$ splňující $\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0$ taková, že*

$$|f(x_0 + \rho \cos\varphi, y_0 + \rho \sin\varphi) - L| < g(\rho),$$

*pro každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ a $\rho > 0$ dostatečně malá.*

*Speciálně platí-li po transformaci do polárních souřadnic*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{\rho\to 0^+} h(\varphi)g(\rho),$$

*kde $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$ a funkce $h(\varphi)$ je ohraničená pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, pak $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0$.*

**Důkaz:** viz [3]

Otázka, která se zaměřuje na výpočet limity pomocí polárních souřadnic, avšak nebyla použita v testu, by mohla vypadat následovně.

**Příklad 10.** Nechť je dána limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$, jíž jsme transformovali pomocí polárních souřadnic do tvaru $\lim_{\rho\to 0^+} \rho^4 \ \cos^3\varphi \ \sin^3\varphi$. Rozhodněte, které tvrzení je pravdivé:

1. Limita neexistuje.
2. Limita existuje.
3. Nejsme schopni určit, zda limita existuje či nikoliv.

**Řešení**

Při zjišťování správné odpovědi budeme používat především metodu transformace do polárních souřadnic (viz strana 24).

Je řečeno, že limita je rovna 0, pokud lze po transformaci do polárních souřadnic rozdělit limitní výraz tak, aby funkce obsahující proměnnou $\rho$ konvergovala k 0 a funkce proměnné $\varphi$ byla omezená.

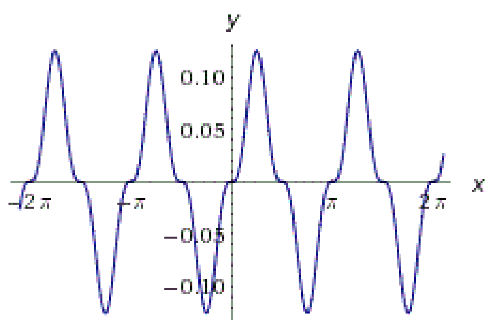
Limita ve tvaru $\lim_{\rho \to 0^+} \rho^4 \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi$ je složena z funkce $\rho^4$ a složené funkce $\cos^3 \varphi \sin^3 \varphi$.

Platí

$$\lim_{\rho \to 0^+} \rho^4 = 0^4 = 0$$

První podmínka, aby funkce proměnné $\rho$ limitně směřovala k nule je tedy splněna.

Podívejme se na průběh funkce $\cos^3 \varphi \sin^3 \varphi$. Úvahou určíme, že funkce $\cos^3 \varphi$ a $\sin^3 \varphi$ jsou omezené na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Funkce vzniklá jejich součinem je tedy na tomto intervalu také omezená. Ověřme tuto úvahu znázorněním grafu funkce $\cos^3 \varphi \sin^3 \varphi$.




Obrázek 6: $\cos^3 \varphi \sin^3 \varphi$

Z Obrázku 6 se lze domnívat, že tato funkce je ohraničená hodnotami $-0,15$ a $0,15$. Druhá podmínka je také splněna.

Limita tedy existuje a je rovna 0.

## 2.6. Důkazy neexistence limity funkce dvou proměnných

V některých případech není naším cílem limitu spočítat, ale naopak dokázat, že uvažovaná limita neexistuje. Způsobů jak dokázat, že limita neexistuje, je několik. Uvedeme zde základní z nich.

Při důkazu neexistence limity funkce jedné proměnné se často využívá tzv. „jednostranných limit“, které určují „limitu zprava“ nebo „limitu zleva“. Zkoumáme tedy oba směry (blížíme se po ose), ze kterých se k danému bodu limitně blížíme. V případě, že se jednostranné limity nerovnají, lze říci, že limita neexistuje.

Stejný postup použijeme při důkazu neexistence limity funkce dvou proměnných. V tomto případě je způsobů, jakými se ke zkoumanému bodu můžeme blížit, nekonečně mnoho.

Stejně jako u limity funkce jedné proměnné dokážeme vyslovit tvrzení, že pokud limita funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$ závisí na směru, po kterém se k bodu $(x_0, y_0)$ blížíme, neexistuje. Cestu, po níž se budeme k bodu $(x_0, y_0)$ přibližovat, popíšeme nejdříve obecně pomocí křivky $y = \varphi(x)$ procházející bodem $(x_0, y_0)$. Limitu si převedeme do následujícího tvaru:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{x\to x_0} f(x, \varphi(x)).$$

Limita neexistuje právě tehdy, když je výsledná limita funkcí neznámé proměnné.

*Například*

Přibližujeme-li se limitně pouze po přímkách, platí $y = y_0 + k(x - x_0)$, kde $k$ je směrnicí přímky:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x - x_0)).$$

Přibližujeme-li se limitně po parabolách, platí $y = y_0 + k(x - x_0)^2$, kde $k$ určuje „tvar paraboly“:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x - x_0)^2).$$

Pokud tedy bude hodnota limity funkce v bodě $(x_0, y_0)$ závislá na parametru $k$, lze říci, že funkce v tomto bodě nemá limitu. To znázorňujeme v následujícím příkladu.

**Příklad 11.** Nechť $f$ je funkce dvou proměnných a $(0, 0) \in D'_f$. Počítejme $L = \lim_{x\to 0} f(x, y)$ pro $y = kx, k \in \mathbb{R}$. Co usoudíme z výsledku $L = \frac{k}{1+k^4}$?

1. Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se rovná 0.

2. Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se rovná 1.

3. Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

4. Všechny předchozí odpovědi jsou nepravdivé.

**Řešení**

Řešení plyne z předchozího tvrzení. Pokud limita závisí na směru, který je zde reprezentován směrnicí $k$, je zřejmá její neexistence. Pravdivá odpověď je tedy Odpověď č. 3.

### 2.6.1. Dvojnásobné limity

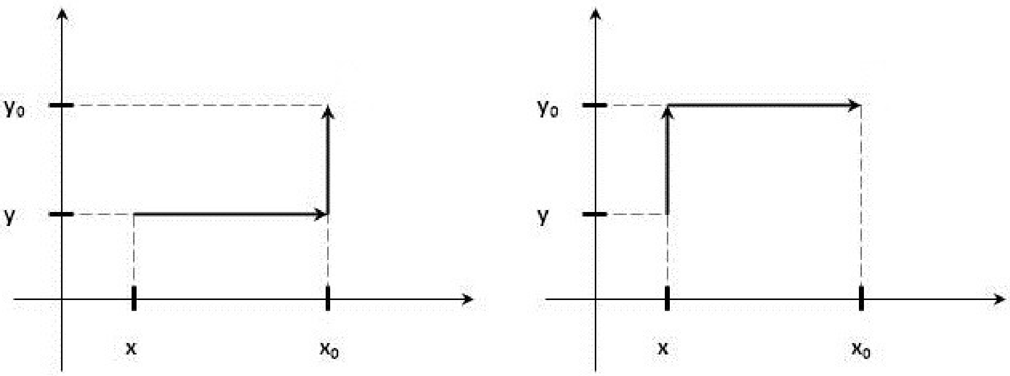
Pro zjednodušení předchozího postupu můžeme využít předpokladu, že k důkazu neexistence limity funkce v bodě stačí určení pouze dvou odlišných hodnot. Testujeme tedy hodnotu limity v bodě, pokud se k ní budeme přibližovat pouze po dvou lomených čarách. První lomená čára vznikne tak, že se budeme nejdříve přibližovat po směru osy $x$ a poté po směru osy $y$. Druhá vznikne obdobným způsobem, avšak nejdříve se budeme blížit po směru osy $y$ a poté po směru osy $x$ (viz Obrázek 7). Takové limity nazýváme dvojnásobnými limitami. Určujeme,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) = L_1$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = L_2.$$

Pokud platí $L_1 \neq L_2$, dokázali jsme neexistenci limity funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$.

**Poznámka 4.** Pokud $L_1 = L_2$, nejsme schopni říci, zda limita $L$ existuje či nikoliv. Pokud však víme, že limita existuje (nezávisle na předchozím tvrzení), můžeme její hodnotu určit tímto typem limit a platí, že $L = L_1 = L_2$.

Teorii, kterou jsme nyní uvedli, využijeme při řešení následujícího příkladu.




Obrázek 7: Lomené čáry, blížíme-li se nejprve po směru $y$ a poté po směru $x$ (vlevo) a blížíme-li se nejprve po směru $x$ a poté po směru $y$ (vpravo)

**Příklad 12.** Je-li $\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) = 0$, platí také $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$.

1. Tvrzení je vždy pravdivé.
2. Tvrzení je vždy nepravdivé.
3. Tvrzení je pravdivé, pokud platí navíc také $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = 0$.
4. Pravdivé je pouze obrácené tvrzení.

**Řešení**

Při řešení budeme využívat hlavně metody dvojnásobných limit (viz strana 28).

První možnost není pravdivá, neboť z jediného směru nelze usuzovat, jak se bude funkce chovat ve všech dalších směrech.

Druhou možnost také nelze označit za správnou, neboť se může stát, že obě limity budou nulové.

Třetí variantu nelze vybrat, protože dva směry také nevypovídají o chování funkce v ostatních směrech, ve kterých se k bodu $(a,b)$ lze přiblížit.

Pokud však vytvoříme obrácené tvrzení, zadání nabude následujícího významu: „Je-li $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$, potom platí, že $\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) = 0$. “ Dle Poznámky 4 je toto tvrzení pravdivé. Odpověď č. 4 je tedy správná.

### 2.6.2. Polární souřadnice

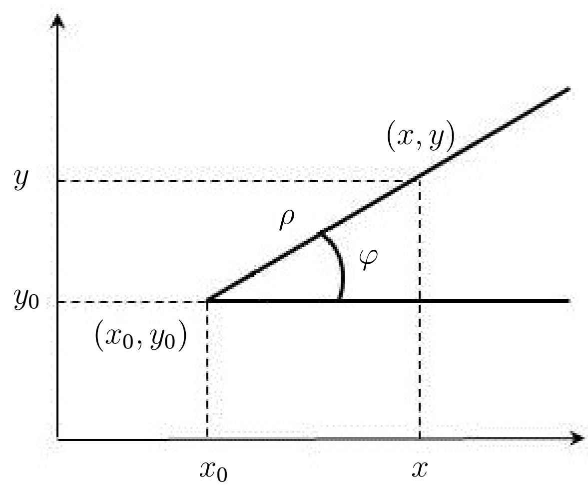
Dále lze prokázat neexistenci limity funkce dvou proměnných ve vlastním bodě $(x_0, y_0)$ zavedením polárních souřadnic $\rho, \varphi$, které jsou definované vztahy:

$$x - x_0 = \rho \ \cos\varphi, \ \ y - y_0 = \rho \ \sin\varphi$$
$$\text{po úpravě } x = x_0 + \rho \ \cos\varphi, \ \ y = y_0 + \rho \ \sin\varphi,$$

kde $\rho \geq 0$ udává vzdálenost mezi body $(x_0, y_0)$ $a$ $(x, y)$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je úhel, který svírá spojnice těchto bodů s kladným směrem osy $x$ (viz Obrázek 8).

Limitu dvojnou tak převedeme na limitu funkce jedné proměnné s proměnnou $\rho$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} f(x_0 + \rho \ \cos\varphi, \ y_0 + \rho \ \sin\varphi).$$




Obrázek 8: Polární souřadnice $\varphi, \rho$

Stejně jako u předchozího postupu lze říci, že pokud takto vypočítaná limita obsahuje $\varphi$ (tedy hodnota limity funkce závisí na úhlu $\varphi$), limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje.

**Poznámka 5.** Pokud není vypočítaná limita závislá na $\varphi$ (je rovna číslu $a \in \mathbb{R}$), nemůžeme určit, zda limita existuje, či nikoliv.

**Poznámka 6.** Nutno uvést, že metodu transformace do polárních souřadnic nelze přímo užít při výpočtu limity v nevlastním bodě (viz [3]). V takovém případě používáme ostatních metod nebo využijeme vhodné substituce k získání výrazu, jenž bude obsahovat limitu ve vlastním bodě.

# 3. Spojitost funkce dvou proměnných

Se spojitostí funkce se setkáváme především při určování vlastností a průběhu funkcí (popřípadě při určování výskytu bodů nespojitosti). Zjišťování její existence úzce souvisí s výpočtem limity funkce v bodě (viz Podkapitola 2.5). Tato kapitola vychází z informací publikovaných mimo jiné v literatuře [3] a [11].

## 3.1. Definice spojitosti funkce dvou proměnných

**Definice 18.** Spojitost funkce dvou proměnných v bodě $(x_0, y_0)$
Říkáme, že funkce $f$ dvou proměnných $x$ a $y$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0)$, je – li v tomto bodě definována a jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$, existuje takové $\delta > 0$, že pro všechny body $(x, y)$ z $\mathcal{U}_\delta(x_0, y_0) \cap D_f$, platí

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Spojitost funkce lze také vyjádřit pomocí již zmíněné limity funkce (viz Kapitola 2).

**Věta 12.** *Je-li $(x_0, y_0) \in D_f$ hromadným bodem $D_f$, platí:*

$$f \text{ je spojitá v bodě } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

**Poznámka 7.** Bod $(x, y) \notin D_f$ tedy při určování spojitosti funkce nikdy neuvažujeme.

**Poznámka 8.** Definici 18 zkoumáme pro případ izolovaného bodu $(x_0, y_0)$ definičního oboru $D_f$. Platí $(x_0, y_0) \in D_f$.

Zvolíme-li dostatečně malé $\varepsilon > 0$, existuje takové $\delta > 0$, že pro všechny body $(x, y)$ z $\mathcal{U}_\delta(x_0, y_0) \cap D_f$ (tj. pro bod $(x_0, y_0)$) platí

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| = 0$$
$$\text{a tedy } |f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Můžeme tedy říci, že je funkce v izolovaném bodě $(x_0, y_0)$ vždy spojitá.

Situace, kdy nelze rozhodovat, zda je funkce v bodě spojitá, opět znázorníme na příkladu.

**Příklad 13.** Ve kterém z následujících bodů nemůže být funkce $f(x, y)$ spojitá?

1. v izolovaném bodě $D_f$;

2. v bodě $(x_0, y_0) \in D_f \cap hD_f$;

3. ve vnitřním bodě $D_f$;

4. v bodě $(x_0, y_0) \in D'_f \setminus D_f$.

**Řešení**

Budeme vycházet z Definice 18, která říká, že můžeme vyšetřovat spojitost pouze v bodech definičního oboru funkce $f$. Projdeme si postupně všechny nabízené možnosti.

První možnost je již řešena v Poznámce 8. Student, který označil tuto možnost, neměl pravdu.

Množina $D_f \cap hD_f$ je podmnožinou $D_f$, tudíž každý bod, který patří do této množiny, patří také do definičního oboru. Tato odpověď byla tedy také nesprávná.

Dle definice vnitřního bodu (viz Definice 5) platí $(x_0, y_0) \in D_f$. To znamená, že lze spojitost v tomto bodě vyšetřovat.

Vyšetřeme nyní případ, který je popsán v Odpovědi č. 4. Pokud od derivace množiny odečteme všechny body z $D_f$, logicky nezbude žádný bod $(x_0, y_0) \in D_f$. Funkce tedy v tomto případě nemůže být nikdy spojitá, což znamená, že tato odpověď měla být jako jediná označena za správnou.

Otázka, týkající se vztahu spojitosti a limity funkce v bodě, měla v testu následující podobu.

**Příklad 14.** $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$. V jaké relaci můžou být hodnoty $f(x_0, y_0)$ a $L$, je-li funkce $f$ spojitá v bodě $(x_0, y_0)$?

1. $f(x_0, y_0) \in L$;

2. $f(x_0, y_0) - L = 0$;

3. $f(x_0, y_0) - L > 0$;

4. $f(x_0, y_0) - L < 0$.

**Řešení**

Řešení této úlohy přímo vyplývá z Věty 12. Funkce $f(x, y)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0)$ právě tehdy, když se limita $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ rovná $f(x_0, y_0)$.

Správné tvrzení je tedy pouze jedno a platí $f(x_0, y_0) - L = 0$.

Druhý způsob, jímž byla v testu položena otázka, týkající se vztahu limity a spojitosti funkce, uvádíme v dalším příkladu.

**Příklad 15.** Doplňte tvrzení tak, aby bylo nepravdivé. Limita funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$ je číslo, které:

1. se vždy rovná funkční hodnotě funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$;

2. pomáhá určit, zda je funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$ spojitá;

3. se může rovnat funkční hodnotě funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$;

4. závisí na funkční hodnotě funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$.

**Řešení**

Dle Věty 12 platí

$$\text{funkce } f \text{ je nespojitá v bodě } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \neq f(x_0, y_0).$$

Odpověď č. 1 tedy měla být označena jako správná odpověď na danou otázku.

Z Věty 12 vyplývá, že tvrzení Odpovědi č. 2 je pravdivé. Vzhledem k položené otázce tedy měla být tato odpověď označena za nesprávnou.

Stejným postupem jsme určili, že tvrzení v Odpovědi č. 3 platí. Tato možnost tedy neměla být označena.

Pravdivost či nepravdivost Odpovědi č. 4 určíme dle definice limity funkce v bodě (viz Definice 15). Limita není odvozována od hodnoty funkce v bodě (pouze od funkčních hodnot v jejím okolí). Tato možnost je tedy nepravdivá a měla být také označena jako správná odpověď.

Další příklad ukazuje postup jak určit, zda je funkce spojitá v bodě (za použití limity funkce).

**Příklad 16.** Mějme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \sin(x+y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Označme $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Která tvrzení jsou pravdivá?

1. Limita $L$ existuje a je rovna číslu 0.
2. Limita $L$ je rovna funkční hodnotě funkce $f$ v bodě $(0,0)$.
3. Limita $L$ se nerovná funkční hodnotě funkce $f$ v bodě $(0,0)$.
4. Funkce $f$ je nespojitá v bodě $(0,0)$.

**Řešení**

Nejprve vypočítáme limitu funkce $f(x,y)$ v bodě $(0,0)$.

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(x+y) = \sin(0+0) = \sin(0) = 0$$

Limita existuje a je rovna 0. V bodě $(0,0)$ je však funkční hodnota rovna 1, což odporuje chování funkce v ryzím okolí bodu $(0,0)$. Z tohoto faktu vyplývá, že je funkce $f(x,y)$ nespojitá v bodě $(0,0)$.

Správné odpovědi jsou tedy Odpovědi č. 1, 3, 4.

Nyní si uvedeme definici spojitosti funkce dvou proměnných na množině.

**Definice 19.** Spojitost funkce dvou proměnných na množině
Řekneme, že funkce $f$ je spojitá na množině $M \subset D_f \subset \mathbb{R}^2$, je-li spojitá v každém bodě množiny $M$.

**Poznámka 9.** Jestliže je funkce $f$ spojitá v každém bodě $(x,y) \in D_f$, říkáme, že je spojitá.

Určování množin, na kterých je funkce spojitá, předvedeme na příkladu.

**Příklad 17.** Na jaké množině je funkce $\operatorname{sgn}(xy)$ spojitá?

1. $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$;

2. $(0,1\rangle \times (0,1\rangle$;

3. $\langle 0,1) \times \langle 0,1)$;

4. $(0,1) \times (0,1)$;

5. na žádné z uvedených.

**Řešení**

Při řešení tohoto příkladu budeme vycházet převážně z Definice 19.

$D_f = \mathbb{R}^2$

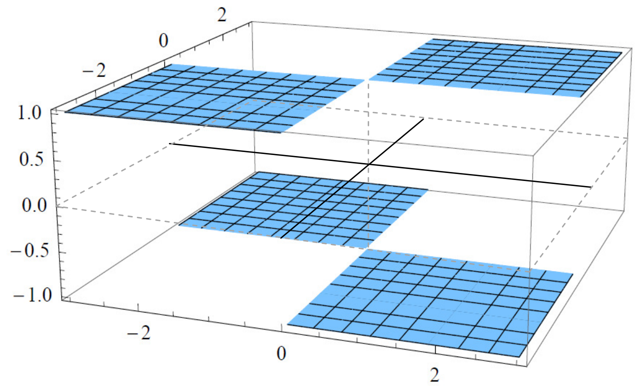
Vyjádřeme si nyní funkci $\operatorname{sgn}(xy)$:

$$\operatorname{sgn}(xy) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x,y) \in [(-\infty,0) \times (-\infty,0)] \cup [(0,\infty) \times (0,\infty)] \\ -1 & \text{pro } (x,y) \in [(-\infty,0) \times (0,\infty)] \cup [(0,\infty) \times (-\infty,0)] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Graf této funkce je znázorněn na Obrázku 9.

Platí $(0,1\rangle \times (0,1\rangle \subset (0,\infty) \times (0,\infty)$ a $(0,1) \times (0,1) \subset (0,\infty) \times (0,\infty)$. Funkce je na těchto množinách konstantní s funkční hodnotou rovné 1, a tudíž je na nich spojitá. Odpovědi č. 2 a 4 jsou tedy správné.

Množiny bodů $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ a $\langle 0,1) \times \langle 0,1)$ obsahují bod $(0,0)$, v němž dle Definice 18 není funkce spojitá. Proto jsou tyto možnosti nesprávné.




Obrázek 9: $\operatorname{sgn}(xy)$

## 3.2. Vlastnosti spojité funkce dvou proměnných

V této části si uvedeme několik základních tvrzení, týkajících se spojitosti funkce dvou proměnných.

**Věta 13.** *Nechť jsou dány funkce $f$ a $g$ spojité v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, a, b \in \mathbb{R}$. Potom jsou v tomto bodě spojité i funkce dané následujícími vztahy:*

1. $af + bg$
2. $af - bg$
3. $af \cdot bg$
4. $\frac{af}{bg}$, *kde* $g(x_0, y_0) \neq 0, b \neq 0$

**Věta 14.** *Elementární funkce v $\mathbb{R}^2$ jsou spojité na svých definičních oborech.*

Vztahy, uvedené ve Větě 13 využijeme při řešení následující úlohy.

**Příklad 18.** Mějme funkci $f(x,y) = \frac{2x+3y-1}{x^4-y}$. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

1. Funkce je spojitá na $\mathbb{R}^2$.
2. Funkce je spojitá na svém definičním oboru.

3. V $\mathbb{R}^2$ existuje bod, v němž funkce $f$ není spojitá.

4. Ani jedna z uvedených možností.

**Řešení**

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y^4\}$

Při řešení Odpovědi č. 1 budeme vycházet z Definice 3. Tuto odpověď zamítáme, neboť $D_f \neq \mathbb{R}^2$. V $\mathbb{R}^2$ tedy existuje alespoň jeden bod, který nepatří do definičního oboru funkce.

Dle Věty 13 tvrdíme, že funkce $f$ je spojitá na $D_f$, pokud jsou funkce $h(x, y) = 2x + 3y - 1$ a $g(x, y) = x^4 - y$ spojité na svých definičních oborech a $g(x, y) \neq 0$ pro každé $(x, y) \in D_f$. To v tomto případě platí, a tudíž je Odpověď č. 2 pravdivá.

Na základě Definice 3 potvrzujeme Odpověď č. 3, neboť funkce $f$ nemůže být spojitá v takovém bodě z $\mathbb{R}^2$, ve kterém není definována.

**Věta 15.** *Nechť jsou dány funkce $f$ a $g$ spojité v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dále nechť je dána funkce $h$ spojitá v bodě $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$. Potom je v bodě $(x_0, y_0)$ spojitá složená funkce $F(x, y) = h(f(x, y), g(x, y))$.*

Díky těmto větám můžeme jednoduše určit spojitost funkce v bodě u velkého počtu složených funkcí.

Na toto tvrzení sice nebyli studenti testováni, ale uvedeme si zde, jak by mohl příklad vypadat.

**Příklad 19.** Nechť je dána funkce $f(x, y) = \sqrt{\frac{xy}{(x+y)^2}}$. Vyberte pravdivá tvrzení.

1. Funkce $f$ není spojitá v bodě $(-1, 0)$.

2. Funkce $f$ má v bodě $(-1, 0)$ bod nespojitosti.

3. Funkce $f$ je spojitá v bodě $(-1, 0)$.

**Řešení**

Pro zjištění správné odpovědi budeme vycházet z Věty 12 a Věty 15.

Funkce $h(x,y) = xy$ a $g(x,y) = (x+y)^2$ jsou spojité na svých definičních oborech. V obou případech jde o celou rovinu, tudíž obě budou spojité i v bodě $(-1,0)$. Platí:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-1,0)} xy = -1 \cdot 0 = 0 = h(-1,0)$$
$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-1,0)} (x+y)^2 = (-1)^2 = 1 = g(-1,0).$$

Dále zjistíme, zda je funkce $z(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$ spojitá v bodě $(0,1)$.

$$D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \tfrac{x}{y} \geq 0, y \neq 0\} \Rightarrow (0,1) \in D_z$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{0}{1}} = 0 = z(0,1)$$

Funkce $z$ je spojitá v bodě $(0,1)$.

Složená funkce $f(x,y) = z(h(x,y), g(x,y))$ je tedy spojitá v bodě $(-1,0)$. Správně je Odpověď č. 3.

**Věta 16.** *(První Bolzanova věta) Nechť je funkce $f(x,y)$ spojitá na oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$ a nechť existují body $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in M$ takové, že $f(x_1,y_1) > 0$ a $f(x_2,y_2) < 0$. Potom existuje $(x_3,y_3) \in M$, pro které platí $f(x_3,y_3) = 0$.*

**Věta 17.** *Bolzanova věta (Druhá Bolzanova věta)*
*Je – li funkce $f(x,y)$ spojitá na oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$ a jsou – li $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ libovolné body této oblasti takové, že $f(x_1,y_1) \neq f(x_2,y_2)$, pak $f(x,y)$ nabývá na $M$ všech hodnot mezi $f(x_1,y_1)$ a $f(x_2,y_2)$.*

**Důkaz:** viz [3]

**Věta 18.** *Weierstrassova věta*
*Nechť je funkce $f$ spojitá na kompaktu $M \subset \mathbb{R}^2$. Potom zde nabývá aspoň v jednom bodě $(x_0,y_0) \in M$ hodnoty maximální, tj. $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ pro všechny body $(x,y) \in M$, a aspoň v jednom bodě $(x_1,y_1)$ hodnoty minimální, tj. $f(x_1,y_1) \leq f(x,y)$ pro všechny body $(x,y) \in M$.*

**Důkaz:** viz [3]

**Důsledek 1.** *Z této věty také vyplývá ohraničenost spojité funkce $f$ na kompaktu $M$.*

**Poznámka 10.** Lze se setkat s označením první a druhá Weierstrassova věta, které zahrnují Větu 18 a Důsledek 1.

# 4. Testování uvedené teorie

## 4.1. Charakteristika testování

Na základě uvedené problematiky bylo vytvořeno sto otázek, zaměřujících se převážně na pochopení teorie a prověření schopnosti danou látku použít v praktických výpočtech.

Tyto otázky měly různý charakter. K získání správné odpovědi musel být student schopen vypočítat jednotlivé limity, činit logické závěry vycházející z definic a vět, porovnávat situace znázorněné na obrázcích, přiřazovat správné odpovědi k uvedeným situacím apod. Každá úloha byla navíc ztížena možností více správných odpovědí.

Otázky byly následně uloženy do Banky úloh, vytvořené v e-learningovém prostředí LMS Moodle. Tato internetová platforma může sloužit jako online úložiště dat a materiálů a navíc umožňuje přístup k vytvořeným testům prověřujícím různé znalosti.

Vzhledem k tomu, že správných a špatných odpovědí mohlo být více (student mohl zaškrtnout několik odpovědí), bylo nezbytné přiřadit váhu každé odpovědi.

Váhy byly mezi odpovědi rozděleny rovnoměrně. To znamená, že všechny správné odpovědi měly stejnou váhu a všechny špatné odpovědi měly stejnou váhu. Toho bylo dosaženo následujícím způsobem:

Nejprve bylo 100 % (znázorňující úplnou úspěšnost) vyděleno počtem správných odpovědí. Vzniklé procento bylo potom přiřazeno ke každé správné odpovědi. Následně bylo -100 % rozděleno stejným způsobem mezi všechny nesprávné odpovědi. Tím bylo docíleno odečítání procenta nesprávných odpovědí od celkového hodnocení.

Student mohl za zodpovězenou otázku získat až 5 bodů. Pokud však nevybral všechny správné odpovědi nebo vybral odpovědi špatné, systém vypočítal, kolik procent z celkového hodnocení měl student obdržet. V případě, kdy bylo dosaženo záporného procentuálního výsledku, se body neodečítaly. Minimální hranice byla tedy 0 bodů. Student mohl dosáhnout výsledku z intervalu $\langle 0\%, 100\% \rangle$.

V LMS Moodle byl vytvořen test, který byl složen z dvaceti náhodně vybraných otázek uložených v Bance úloh. Aby jím student úspěšně prošel, musel dosáhnout alespoň 80% úspěšnosti (tj. alespoň osmdesáti bodů). V opačném případě musel opakovat test s jinými generovanými otázkami. Tento test nebyl časově omezen.

V následujících podkapitolách uvádíme úlohy (viz Podkapitola 4.2) a jejich odpovědi (viz Podkapitola 4.3). Několik z nich uvádíme spolu s postupem řešení v jednotlivých částech této bakalářské práce (viz Příklady 1 - 19).

## 4.2. Úlohy

**Příklad 20** (Př. 1)**.** Přiřaďte označení k jednotlivým typům limit:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{x-y}, \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \frac{y}{x-y}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$;

**a** dvojná limita funkce dvou proměnných v bodě;

**b** dvojnásobná limita funkce dvou proměnných v bodě;

**c** limita funkce jedné proměnné v bodě.

**Příklad 21** (Př. 2)**.** Mějme dány následující případy:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = -\infty$;

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$.

Přiřaďte:

**a** limita vlastní ve vlastním bodě;

**b** limita vlastní v nevlastním bodě;

**c** limita nevlastní ve vlastním bodě;

**d** limita nevlastní v nevlastním bodě.

**Příklad 22** (Př. 3)**.** Je-li $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)) = 0$, platí také $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$.

1. Tvrzení je vždy pravdivé.

2. Tvrzení je vždy nepravdivé.

3. Tvrzení je pravdivé, pokud platí navíc také $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)) = 0$.

4. Pravdivé je pouze obrácené tvrzení.

**Příklad 23** (Př. 4)**.** Najděte nepravdivé odpovědi k tvrzení: Je-li $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)) = 0$, platí také $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$.

1. Tvrzení je vždy pravdivé.

2. Tvrzení je vždy nepravdivé.

3. Tvrzení je pravdivé pokud platí také $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = 0$.

4. Pravdivé je pouze obrácené tvrzení.

**Příklad 24** (Př. 5)**.** Nechť $f$ je funkce, $(a,b)$ je vnitřní bod $D_f$ a nechť platí: $\forall\alpha < 0\ \exists\beta < 0 : \forall\ (a,b) \in \mathcal{U}_\beta{}^*(a_0,b_0) \cap D_f : |f(a,b) - L| > \alpha$. Rozhodněte, co vyjadřuje $\alpha$:

1. bod, ve kterém hledáme limitu;

2. limita;

3. okolí bodu $a$;

4. okolí bodu $(a, b)$;

5. okolí bodu $L$;

6. ani jedna varianta není pravdivá.

**Příklad 25** (Př. 6)**.** Nechť $f$ je funkce, $(a_0, b_0)$ je vnitřní bod $D_f$ a nechť platí: $\forall \alpha > 0\ \exists \beta > 0 : \forall (a, b) \in \mathcal{U}_\beta{}^*(a_0, b_0) \cap D_f : |f(a, b) - L| < \alpha$. Rozhodněte, co vyjadřuje $\alpha$:

1. bod, ve kterém hledáme limitu;

2. limita;

3. okolí bodu $a$;

4. okolí bodu $(a, b)$;

5. poloměr okolí bodu $L$;

6. ani jedna varianta není pravdivá.

**Příklad 26** (Př. 7)**.** Nechť $f$ je funkce, $(a, b)$ je vnitřní bod $D_f$ a nechť platí: $\forall \alpha < 0\ \exists\ \beta < 0 : \forall (a, b) \in \mathcal{U}_\beta{}^*(a_0, b_0) \cap D_f : |f(a, b) - L| > \alpha$. Rozhodněte, co nevyjadřuje $\alpha$:

1. bod, ve kterém hledáme limitu;

2. limita;

3. okolí bodu $a$;

4. okolí bodu $(a, b)$;

5. okolí bodu $L$;

6. poloměr okolí bodu $L$.

**Příklad 27** (Př. 8)**.** Vyberte správné dokončení definice limity funkce $f$ v bodě $(a_0, b_0) \in D_f^\circ$ $\forall \alpha < 0$ $\exists \beta < 0 : \forall (a, b) \in \mathcal{U}_\beta{}^*(a_0, b_0) \cap D_f :$

1. $|f(a, b) - L| \leq \varepsilon$;
2. $|f(a, b)| = \varepsilon$;
3. $|\varepsilon - L| > f(a, b)$;
4. $|\alpha - \beta| < \varepsilon$;
5. jiné.

**Příklad 28** (Př. 9)**.** Vyberte variantu nesprávného dokončení definice limity funkce $f$ v bodě $(a_0, b_0) \in D_f^\circ$ $\forall \alpha < 0$ $\exists \beta < 0 : \forall (a, b) \in \mathcal{U}_\beta{}^*(a_0, b_0) \cap D_f :$

1. $|f(a, b) - L| \leq \varepsilon$;
2. $|f(a, b)| = \varepsilon$;
3. $|\varepsilon - L| > f(a, b)$;
4. $|\alpha - \beta| < \varepsilon$.

**Příklad 29** (Př. 10)**.** Vyberte správný výsledek $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} (-e^x + e^y)$.

1. $\infty$;
2. $-\infty$;
3. neexistuje;
4. 0;
5. 1.

**Příklad 30** (Př. 11)**.** Vyberte nesprávný výsledek $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} (-e^x \cdot e^y)$.

1. $\infty$;

2. $-\infty$;

3. neexistuje;

4. 0;

5. $-1$.

**Příklad 31** (Př. 12)**.** Co vyplývá z následujícího výroku: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = B, B \in \mathbb{R}^*$?

1. $B$ je vždy $\infty$ nebo $-\infty$.

2. $B$ je bod, který nalezneme na ose $x$.

3. $B$ je bod, který nalezneme na ose $y$.

4. Funkce dosáhne hodnoty $B$ v určitém bodě.

5. $B$ může být přirozené číslo.

**Příklad 32** (Př. 13)**.** Co nevyplývá z následujícího výroku: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = B, B \in \mathbb{R}^*$?

1. $B$ je vždy $\infty$ nebo $-\infty$.

2. $B$ je bod, který nalezneme na $x$ ose.

3. $B$ je bod, který nalezneme na $y$ ose.

4. Funkce dosáhne hodnoty $B$ v určitém bodě.

5. $B$ může být přirozené číslo.

**Příklad 33** (Př. 14)**.** Je stanovena $\lim\limits_{(a,b)\to(-\infty,\infty)} f(a,b) = C, C \in \mathbb{R}^*$. Pro $C$ platí:

1. $C$ je reálné číslo.

2. $C$ je přirozené číslo.

3. $C$ je komplexní číslo.

4. $C$ může být záporné číslo.

5. $C$ může být racionální.

**Příklad 34** (Př. 15)**.** Nechť $\lim\limits_{(a,b)\to(-\infty,\infty)} f(a,b) = C, C \in \mathbb{R}^*$. Které z následujících tvrzení nevyplývá z tohoto předpokladu?

1. $C$ je reálné číslo.

2. $C$ je přirozené číslo.

3. $C$ je komplexní číslo.

4. $C$ může být záporné číslo.

5. $C$ může být racionální.

**Příklad 35** (Př. 16)**.** Limita funkce 2 proměnných v bodě je:

1. číslo;

2. přímka;

3. úsečka;

4. kruh.

**Příklad 36** (Př. 17)**.** Limita funkce 2 proměnných v bodě není:

1. číslo;

2. přímka;

3. úsečka;

4. kruh.

**Příklad 37** (Př. 18)**.** $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. V jaké relaci můžou být hodnoty $f(x_0, y_0)$ a $L$, je-li funkce $f$ spojitá v bodě $(x_0, y_0)$?

1. $f(x_0, y_0) \in L$;
2. $f(x_0, y_0) - L = 0$;
3. $f(x_0, y_0) - L > 0$;
4. $f(x_0, y_0) - L < 0$.

**Příklad 38.** [Př. 19] Nechť $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a funkce $f$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0)$. Které z následujících tvrzení není pravdivé:

1. $f(x_0, y_0) \in L$;
2. $f(x_0, y_0) - L = 0$;
3. $f(x_0, y_0) - L < 0$;
4. $f(x_0, y_0) - L > 0$.

**Příklad 39** (Př. 20)**.** Nechť $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a funkce $f$ není spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in D_f$. Který z následujících případů může nastat?

1. $f(x_0, y_0) \in L$;
2. $f(x_0, y_0) - L = 0$;
3. $f(x_0, y_0) - L < 0$;
4. $f(x_0, y_0) - L > 0$.

**Příklad 40** (Př. 21)**.** Nechť $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a funkce $f$ není spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in D_f$. Které z následujících případů nemohou nastat?

1. $f(x_0, y_0) \in L$;
2. $f(x_0, y_0) - L = 0$;
3. $f(x_0, y_0) - L < 0$;
4. $f(x_0, y_0) - L > 0$.

**Příklad 41** (Př. 22)**.** Nechť $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ a $(x_0, y_0) \in D_f$. Které z následujících případů mohou nastat?

1. $f(x_0, y_0) \in L$;
2. $f(x_0, y_0) - L = 0$;
3. $f(x_0, y_0) - L < 0$;
4. $f(x_0, y_0) - L > 0$.

**Příklad 42** (Př. 23)**.** Nechť $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ a $(x_0, y_0) \in D_f$. Které z následujících případů nemohou nastat?

1. $f(x_0, y_0) \in L$;
2. $f(x_0, y_0) - L = 0$;
3. $f(x_0, y_0) - L < 0$;
4. $f(x_0, y_0) - L > 0$;

**Příklad 43** (Př. 24)**.** Na jaké množině je funkce sgn(xy) spojitá?

1. $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$;
2. $(0, 1\rangle \times (0, 1\rangle$;
3. $\langle 0, 1) \times \langle 0, 1)$;
4. $(0, 1) \times (0, 1)$;

5. na žádné z uvedených.

**Příklad 44** (Př. 25)**.** Na jaké množině je funkce sgn(xy) spojitá?

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$;
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y < 0\}$;
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \leq 0\}$;
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y \geq 0\}$;
5. na žádné z uvedených.

**Příklad 45** (Př. 26)**.** Na jaké množině není funkce sgn(xy) spojitá?

1. $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$;
2. $(0, 1\rangle \times (0, 1\rangle$;
3. $\langle 0, 1) \times \langle 0, 1)$;
4. $(0, 1) \times (0, 1)$.

**Příklad 46** (Př. 27)**.** Na jaké množině není funkce sgn(xy) spojitá?

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$;
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y < 0\}$;
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \leq 0\}$;
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y \geq 0\}$.

**Příklad 47** (Př. 28)**.** Určete výsledek $\lim\limits_{(c,d)\to(\infty,\infty)} \frac{\sin(h(c,d))}{h(c,d)} + 1$:

1. 0;
2. 1;

3. limita neexistuje;

4. poskytnuté informace nestačí k určení této limity.

**Příklad 48** (Př. 29)**.** Určete $\lim\limits_{(c,d)\to(\infty,\infty)} \frac{\sin(h(c,d))}{h(c,d)} + 1$. Které z následujících odpovědí nejsou správné?

1. limita neexistuje;

2. 0;

3. 1;

4. poskytnuté informace nestačí k určení této limity.

**Příklad 49** (Př. 30)**.** Nechť $L \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a $f$ je funkce dvou proměnných. Zápis $|f(x,y) - L| \leq \varepsilon$ můžeme číst jako:

1. Vzdálenost čísla $L$ a funkční hodnoty funkce $f$ v bodě $(x, y)$ je menší nebo rovna než $|f(x, y) - \varepsilon|$.

2. Funkční hodnota funkce $f$ v bodě $(x, y)$ je menší nebo rovna než $|L - \varepsilon|$.

3. Vzdálenost funkční hodnoty funkce $f$ v bodě $(x, y)$ od $\varepsilon$ je větší nebo rovna než $|L - \varepsilon|$.

4. Vzdálenost funkční hodnoty $f$ v bodě $(x, y)$ od pevně stanoveného $L$ je menší nebo rovna číslu $\varepsilon$.

5. jinak

**Příklad 50** (Př. 31)**.** Nechť $L \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a $f$ je funkce dvou proměnných. Zápis $|f(x,y) - L| \leq \varepsilon$ nemůžeme číst jako:

1. Vzdálenost čísla $L$ a funkční hodnoty funkce $f$ bodě $(x, y)$ je menší nebo rovna než $|f(x, y) - \varepsilon|$.

2. Funkční hodnota funkce $f$ bodě $(x, y)$ je menší nebo rovna než $|L - \varepsilon|$.

3. Vzdálenost funkční hodnoty funkce $f$ bodě $(x, y)$ od $\varepsilon$ je větší nebo rovna než $|L - \varepsilon|$.

4. Vzdálenost funkční hodnoty funkce $f$ bodě $(x, y)$ od pevně stanoveného $L$ je menší nebo rovna než $\varepsilon$.

**Příklad 51** (Př. 32)**.** Čemu se rovná $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} f(x, y)$, pokud máme zadáno, že

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (2, 0)\} \\ 0, & (x, y) = (2, 0) \end{cases}$$

1. 0;

2. limita neexistuje;

3. 1;

4. $\frac{1}{2}$;

5. jiné.

**Příklad 52** (Př. 33)**.** Mějme funkci $f(x, y) = \begin{cases} \sin(x + y) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Označme $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Která tvrzení jsou pravdivá?

1. Limita $L$ existuje a je rovna číslu 0.

2. Limita $L$ je rovna funkční hodnotě funkce $f$ v bodě $(0, 0)$.

3. Limita $L$ se nerovná funkční hodnotě funkce $f$ v bodě $(0, 0)$.

4. Funkce $f$ je nespojitá v bodě $(0, 0)$.

**Příklad 53** (Př. 34)**.** Doplňte tvrzení tak, aby bylo nepravdivé. Limita funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$ je číslo, které:

1. Pomáhá určit, jestli funkce $f$ má v bodě $(x_0, y_0)$ bod nespojitosti.

2. Je pro každý bod $(x_0, y_0) \in D'_f$ různé.

3. Je vždy totožné s funkční hodnotou funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$.

4. Může být pro každý bod $(x_0, y_0) \in D'_f$ různé.

**Příklad 54** (Př. 35)**.** Doplňte tvrzení tak, aby bylo nepravdivé. Limita funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$ je číslo, které:

1. se vždy rovná funkční hodnotě funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$;

2. pomáhá určit, zda je funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$ spojitá;

3. se může rovnat funkční hodnotě funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$;

4. závisí na funkční hodnotě funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$.

**Příklad 55** (Př. 36)**.** Ve kterém z následujících bodů nemůže být funkce $f(x, y)$ spojitá?

1. v izolovaném bodě $D_f$;

2. v bodě $(x_0, y_0) \in D_f \cap hD_f$;

3. ve vnitřním bodě $D_f$;

4. v bodě $(x_0, y_0) \in D'_f \setminus D_f$.

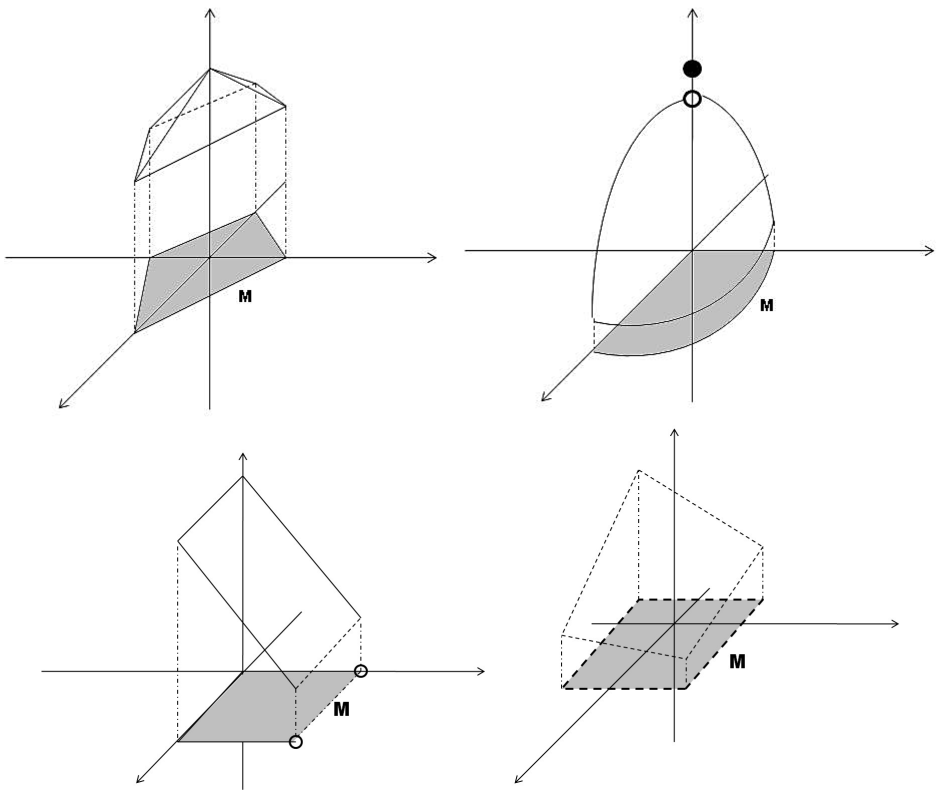
**Příklad 56** (Př. 37)**.** Ve kterém z následujících bodů může být funkce $f(x, y)$ spojitá?

1. v izolovaném bodě $D_f$;

2. v bodě $(x_0, y_0) \in hD_f \setminus D_f$;

3. ve vnitřním bodě $D_f$;

4. v bodě $(x_0, y_0) \in D'_f \setminus D_f$.




Obrázek 10: Obrázky Obr. 1 (vlevo nahoře), Obr. 2 (vpravo nahoře), Obr.3 (vlevo dole) a Obr.4 (vlevo dole), které byly použity v příkladech 57 - 60

**Příklad 57** (Př. 38)**.** Na Obrázku 10 jsou grafy funkcí a množina $M$, na níž jsou funkce definovány. Které z obrázků zachycují funkci spojitou na kompaktní množině $M$?

**Příklad 58** (Př. 39)**.** Na Obrázku 10 jsou grafy funkcí a množina $M$, na níž jsou funkce definovány. Které z obrázků zachycují funkci nespojitou na kompaktní množině $M$?

**Příklad 59** (Př. 40)**.** Na Obrázku 10 jsou grafy funkcí a množina $M$, na níž jsou funkce definovány. Které z obrázků zachycují funkci spojitou na oblasti $M$?

**Příklad 60** (Př. 41)**.** Na Obrázku 10 jsou grafy funkcí a množina $M$, na níž jsou funkce definovány. Které z obrázků zachycují funkci spojitou na množině $M$?

**Příklad 61** (Př. 42)**.** Určete, která tvrzení jsou pravdivá o $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12})} \frac{\sin(x+y)\cos(x-y)}{\sin(x+y)-\cos(x+y)}$:

1. limita neexistuje;
2. limita existuje;
3. limita je 1;
4. limita je nekonečno.

**Příklad 62** (Př. 43)**.** Určete, která tvrzení jsou pravdivá o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y+e^x}{x+1}$:

1. limita neexistuje;
2. limita existuje;
3. limita je 1.

**Příklad 63** (Př. 44)**.** Určete, která tvrzení jsou pravdivá o $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,6)} \frac{2x+3y-1}{x^4-y}$:

1. limita neexistuje;
2. limita je 0;
3. limita je 1;
4. ani jedna z uvedených možností.

**Příklad 64** (Př. 45)**.** Určete, která tvrzení nejsou pravdivá o $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12})} \frac{\sin(x+y)\cos(x-y)}{\sin(x+y)-\cos(x+y)}$:

1. limita neexistuje;
2. limita existuje;
3. limita je 1;
4. limita není nekonečno.

**Příklad 65** (Př. 46)**.** Určete, která tvrzení nejsou pravdivá o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y}{x+1}$:

1. limita neexistuje;

2. limita existuje;

3. limita je 1;

4. limita je 0.

**Příklad 66** (Př. 47)**.** Určete, která tvrzení nejsou pravdivá o $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,6)} \frac{2x+3y-1}{x^4-y}$:

1. limita neexistuje;

2. limita je 0;

3. limita je 1;

4. limita není nekonečno.

**Příklad 67** (Př. 48)**.** Nechť $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = a \wedge \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$. Co z toho plyne pro $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$?

1. Rovná se také $a$.

2. Nerovná se $a$.

3. Na základě tohoto nelze určit, zda se limita rovná $a$.

4. Pokud limita existuje, pak se rovná taky $a$.

**Příklad 68** (Př. 49)**.** Nechť $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = a \wedge \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$. Co z toho neplyne pro $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$?

1. Rovná se taky $a$.

2. Nerovná se $a$.

3. Na základě tohoto nelze určit, zda se limita rovná taky $a$.

4. Pokud limita existuje, pak se rovná taky $a$.

**Příklad 69** (Př. 50)**.** Které tvrzení je pravdivé?

1. Jestliže $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = a \ \wedge\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$, potom $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existuje.
2. Jestliže $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = a \ \wedge\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$, potom $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje.
3. Jestliže $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = a \wedge \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$, potom pokud $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existuje, rovná se číslu $a$.
4. Jestliže $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = a \ \wedge\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$, potom $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existuje a rovná se číslu $a$.

**Příklad 70** (Př. 51)**.** Které tvrzení není pravdivé?

1. Jestliže $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = a \ \wedge\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$, potom $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existuje.
2. Jestliže $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = a \ \wedge\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$, potom $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje.
3. Jestliže $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = a \wedge \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$, potom pokud $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existuje, rovná se číslu $a$.
4. Jestliže $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = a \ \wedge\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = a, a \in \mathbb{R}$, potom $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existuje a rovná se číslu $a$.

**Příklad 71** (Př. 52)**.** Vyberte situace, kdy bychom mohli hledat limitu funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$.

Mějme dány následující možnosti:

1. Bod $(x_0, y_0)$ je vnitřním bodem definičního oboru funkce $f(x, y)$.

2. Bod $(x_0, y_0)$ je izolovaným bodem definičního oboru funkce $f(x, y)$.

3. Funkce je definována na prostoru $\mathbb{R}^2$, do kterého nepatří pouze bod $(x_0, y_0)$.

**Příklad 72** (Př. 53)**.** Vyberte situace, kdy bychom nemohli hledat limitu funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$.

1. Bod $(x_0, y_0)$ je vnitřním bodem definičního oboru funkce $f(x, y)$.

2. Bod $(x_0, y_0)$ je izolovaným bodem definičního oboru funkce $f(x, y)$.

3. Funkce je definována na prostoru $\mathbb{R}^2$, do kterého nepatří pouze bod $(x_0, y_0)$.

**Příklad 73** (Př. 54)**.** Bod $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ je jediným bodem roviny, který nepatří do definičního oboru funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je za tohoto předpokladu pravdivé?

1. Nikdy nenajdeme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.

2. Vždy najdeme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.

3. Můžeme vyšetřovat $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.

**Příklad 74** (Př. 55)**.** Bod $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ patří do definičního oboru funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je za tohoto předpokladu pravdivé?

1. Nikdy nenajdeme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.

2. Vždy najdeme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.

3. Můžeme vyšetřovat $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.

**Příklad 75** (Př. 56)**.** Bod $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ je jediným bodem roviny, který nepatří do definičního oboru funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je za tohoto předpokladu nepravdivé?

1. Nikdy nenajdeme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

2. Vždy najdeme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

3. Můžeme vyšetřovat $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

**Příklad 76** (Př. 57)**.** Bod $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ patří do definičního oboru funkce $f(x,y)$. Které tvrzení je za tohoto předpokladu nepravdivé?

1. Nikdy nenajdeme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

2. Vždy najdeme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

3. Bod $(a,b)$ může být bodem, ve kterém můžeme vyšetřovat $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

4. Bod $(a,b)$ může být bodem, ve kterém nemůžeme vyšetřovat $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

**Příklad 77** (Př. 58)**.** Je zadána limita $\lim\limits_{(h,g)\to(3,-\infty)} h^2+g^2$. Co můžeme říci o této limitě?

1. Jedná se o limitu vlastní ve vlastním bodě.

2. Jedná se o limitu vlastní v nevlastním bodě.

3. Jedná se o limitu nevlastní ve vlastním bodě.

4. Jedná se o limitu nevlastní v nevlastním bodě.

5. Limita neexistuje.

**Příklad 78** (Př. 59)**.** Je zadána limita $\lim\limits_{(c,d)\to(\infty,-\infty)} c^2+d^2$. Které z následujících tvrzení je nepravdivé?

1. Jedná se o limitu vlastní ve vlastním bodě.

2. Jedná se o limitu vlastní v nevlastním bodě.

3. Jedná se o limitu nevlastní ve vlastním bodě.

4. Jedná se o limitu nevlastní v nevlastním bodě.

5. Limita neexistuje.

**Příklad 79** (Př. 60)**.** Je zadána limita $\lim\limits_{(a,b)\to(-\infty,-3)} e^a - e^b$. Co můžeme říci o této limitě?

1. Jedná se o limitu vlastní ve vlastním bodě.

2. Jedná se o limitu vlastní v nevlastním bodě.

3. Jedná se o limitu nevlastní ve vlastním bodě.

4. Jedná se o limitu nevlastní v nevlastním bodě.

5. Limita neexistuje.

**Příklad 80** (Př. 61)**.** Je zadána limita $\lim\limits_{(a,b)\to(-\infty,-\infty)} e^a - e^b$. Které z následujících tvrzení je nepravdivé?

1. Jedná se o limitu vlastní ve vlastním bodě.

2. Jedná se o limitu vlastní v nevlastním bodě.

3. Jedná se o limitu nevlastní ve vlastním bodě.

4. Jedná se o limitu nevlastní v nevlastním bodě.

5. Limita neexistuje.

**Příklad 81** (Př. 62)**.** Je zadána limita $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \mathrm{tg}(x+y)$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

1. Jedná se o limitu vlastní ve vlastním bodě.

2. Jedná se o limitu vlastní v nevlastním bodě.

3. Jedná se o limitu nevlastní ve vlastním bodě.

4. Jedná se o limitu nevlastní v nevlastním bodě.

5. Limita neexistuje.

**Příklad 82** (Př. 63)**.** Je zadána limita $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \operatorname{tg}(x+y)$. Která z následujících tvrzení nejsou pravdivá.

1. Jedná se o limitu vlastní ve vlastním bodě.

2. Jedná se o limitu vlastní v nevlastním bodě.

3. Jedná se o limitu nevlastní ve vlastním bodě.

4. Jedná se o limitu nevlastní v nevlastním bodě.

5. Limita neexistuje.

**Příklad 83** (Př. 64)**.** Je zadána funkce $z = (4 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$. Budeme-li vyšetřovat limitu této funkce v bodě $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, zjistíme, že:

1. se jedná o limitu vlastní ve vlastním bodě;

2. se jedná o limitu vlastní v nevlastním bodě;

3. se jedná o limitu nevlastní ve vlastním bodě;

4. se jedná o limitu nevlastní v nevlastním bodě;

5. limita neexistuje.

**Příklad 84** (Př. 65)**.** Je zadána funkce $z = (4 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$. Budeme-li vyšetřovat limitu této funkce v bodě $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, zjistíme, že:

1. se nejedná o limitu vlastní ve vlastním bodě;

2. se nejedná o limitu vlastní v nevlastním bodě;

3. se nejedná o limitu nevlastní ve vlastním bodě;
4. se nejedná o limitu nevlastní v nevlastním bodě;
5. limita neexistuje.

**Příklad 85** (Př. 66)**.** Nechť existuje $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L, L \in \mathbb{R}$. Pak odtud plyne, že:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ existuje.
2. $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ neexistuje.
3. Jednotlivé dvojnásobné limity neexistují.
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ je vlastní.

**Příklad 86** (Př. 67)**.** Víme-li, že existuje $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L, L \in \mathbb{R}$, pak nemůžeme říci, že:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ existuje.
2. $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ neexistuje.
3. Jednotlivé dvojnásobné limity neexistují.
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ je vlastní.

**Příklad 87** (Př. 68)**.** Nechť $f$ je funkce dvou proměnných a $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in \langle -2,3), y \in (0,1\rangle\}$, pak:

1. Nemá smysl zkoumat limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} f(x,y)$.
2. Má smysl zkoumat limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} f(x,y)$.
3. Limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} f(x,y)$ nazýváme nevlastní.

**Příklad 88** (Př. 69)**.** Nechť $f$ je funkce dvou proměnných a $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2>9\}$, pak:

1. Lze zkoumat limitu funkce $f$ v bodě $(3,0)$.

2. Nelze zkoumat limitu funkce $f$ v bodě $(3,0)$.

3. Lze zkoumat pouze jednostrannou limitu funkce $f$ v bodě $(3,0)$.

**Příklad 89** (Př. 70)**.** Nechť $f$ je funkce dvou proměnných a $(0,0) \in D'_f$. Počítejme $L = \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ pro $y = kx, k \in \mathbb{R}$. Co usoudíme z výsledku $L = \frac{k}{1+k^4}$?

1. Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se rovná 0.

2. Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se rovná 1.

3. Limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

4. Všechny předchozí odpovědi jsou nepravdivé.

**Příklad 90** (Př. 71)**.** Nechť $f$ je funkce dvou proměnných a $(0,0) \in D'_f$. Počítejme $L = \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ pro $y = kx, k \in \mathbb{R}$. Které z následujících tvrzení neodpovídají výsledku $L = \frac{k}{1+k^4}$?

1. Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se rovná 0.

2. Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se rovná 1.

3. Limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nemůžeme určit.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$.

**Příklad 91** (Př. 72)**.** Mějme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{10}-y^2x^8}{x^2-y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

1. Funkce $f$ je spojitá v bodě $(0,0)$.

2. Funkce $f$ je nespojitá v bodě $(0,0)$.

3. Funkce $f$ je spojitá na svém $D_f$.

4. Funkce $f$ má pouze jediný bod nespojitosti.

**Příklad 92** (Př. 73)**.** Mějme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{10}-y^2x^8}{x^2-y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Která z následujících tvrzení jsou nepravdivá?

1. Funkce $f$ je spojitá v bodě $(0,0)$.

2. Funkce $f$ je nespojitá v bodě $(0,0)$.

3. Funkce $f$ je spojitá na svém $D_f$.

4. Funkce $f$ má pouze jediný bod nespojitosti.

**Příklad 93** (Př. 74)**.** Máme bod $(a,b)$, o kterém víme, že v něm existuje limita funkce $z(x,y)$. Co o tomto bodě potom můžeme říci?

1. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;

2. bod $(a,b)$ musí ležet v $D_z$;

3. bod $(a,b)$ nemusí být vnitřním bodem $D_z$;

4. bod $(a,b)$ nemůže být vnitřním bodem $D_z$.

**Příklad 94** (Př. 75)**.** Máme bod $(a,b)$, o kterém víme, že v něm existuje limita funkce $z(x,y)$. Které z následujících tvrzení je nepravdivé?

1. Bod $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2. Bod $(a,b)$ musí ležet v $D_z$.

3. Bod $(a,b)$ nemusí být vnitřním bodem $D_z$.

4. Bod $(a, b)$ nemůže být vnitřním bodem $D_z$.

**Příklad 95** (Př. 76)**.** Nechť $\lim\limits_{a \to a_0} \lim\limits_{b \to b_0} f(a, b) = A_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{b \to b_0} \lim\limits_{a \to a_0} f(a, b) = A_2 \in \mathbb{R}$, $A_1 \neq A_2$. Potom platí:

1. Funkce $f(a, b)$ má 2 limity v bodě $(a_0, b_0)$.

2. Funkce $f(a, b)$ má limitu v bodě $(a_0, b_0)$.

3. Funkce $f(a, b)$ nemá limitu v bodě $(a_0, b_0)$.

4. Funkce $f(a, b)$ může mít limitu v bodě $(a_0, b_0)$.

**Příklad 96** (Př. 77)**.** Nechť $\lim\limits_{a \to a_0} \lim\limits_{b \to b_0} f(a, b) = A_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{b \to b_0} \lim\limits_{a \to a_0} f(a, b) = A_2 \in \mathbb{R}$, $A_1 \neq A_2$. Která z následujících tvrzení jsou za tohoto předpokladu nesprávná?

1. Funkce $f$ má 2 limity v bodě $(a_0, b_0)$.

2. Funkce $f$ má limitu v bodě $(a_0, b_0)$.

3. Funkce $f$ nemá limitu v bodě $(a_0, b_0)$.

4. Funkce $f$ může mít limitu v bodě $(a_0, b_0)$.

**Příklad 97** (Př. 78)**.** Nechť $\lim\limits_{a \to a_0} \lim\limits_{b \to b_0} f(a, b) = A_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{b \to b_0} \lim\limits_{a \to a_0} f(a, b) = A_2 \in \mathbb{R}$, $A_1 = A_2$. Která z následujících tvrzení jsou za tohoto předpokladu platná?

1. Funkce $f$ má limitu v bodě $(a_0, b_0)$ a ta je rovna číslu $A_1$.

2. Funkce $f$ má limitu v bodě $(a_0, b_0)$.

3. Funkce $f$ nemá limitu v bodě $(a_0, b_0)$.

4. Nelze s jistotou určit, zda má funkce $f$ limitu v bodě $(a_0, b_0)$.

**Příklad 98** (Př. 79)**.** Pokud se při výpočtu limity $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ přibližujeme k bodu $(x_0, y_0)$ po přímkách:

1. Vždy dokážeme určit, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje.

2. Vždy dokážeme určit, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existuje.

3. Neuvažujeme všechny způsoby přiblížení.

4. Ani jedna z uvedených možností není pravdivá.

**Příklad 99** (Př. 80)**.** Doplňte tvrzení tak, aby bylo nepravdivé: Pokud se při výpočtu limity $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ přibližujeme k bodu $(x_0, y_0)$ po přímkách:

1. Vždy dokážeme určit, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje.

2. Vždy dokážeme určit, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existuje.

3. Někdy můžeme určit, zda limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje.

4. Někdy můžeme určit, zda limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existuje.

**Příklad 100** (Př. 81)**.** Označme $L_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a $L_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x - x_0)), k \in \mathbb{R}$. Vyberte pravdivá tvrzení:

1. Vždy můžeme určit, zda $L_2$ existuje.

2. Jestliže $L_2$ existuje, pak $L_1$ také existuje.

3. Jestliže $L_2$ neexistuje, pak $L_1$ také neexistuje.

4. Jestliže hodnota $L_2$ závisí na hodnotě proměnné $k$, pak $L_1$ může existovat.

**Příklad 101** (Př. 82)**.** Označme $L_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a $L_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x - x_0)), k \in \mathbb{R}$. Vyberte pravdivá tvrzení:

1. Limita $L_2$ vždy bude záviset na hodnotě $k$.

2. Pokud limita $L_2$ nezávisí na hodnotě $k$, pak limita $L_1$ existuje.

3. Výpočtem limity $L_2$ můžeme zjistit, jestli limita $L_1$ závisí na směru, ze kterého se přibližujeme k bodu $(x_0, y_0)$.

4. Výpočtem limity $L_2$ vždy zjistíme, jestli limita $L_1$ závisí na směru, ze kterého se přibližujeme k bodu $(x_0, y_0)$.

**Příklad 102** (Př. 83)**.** Označme $L_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a $L_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x-x_0)), k \ \in \mathbb{R}$. Vyberte pravdivá tvrzení:

1. Vypočtením limity $L_2$ nemůžeme určit, zda limita $L_1$ existuje.

2. Limita $L_1$ může existovat, i když limita $L_2$ neexistuje.

3. Na základě limity $L_2$ nemůžeme zjistit, jestli $L_1$ závisí na směru, po kterém se přibližujeme k bodu $(x_0, y_0)$.

4. Jestliže limita $L_1$ existuje, pak limita $L_2$ nezávisí na hodnotě $k$.

**Příklad 103** (Př. 84)**.** Označme $L_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a $L_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x-x_0)), k \ \in \mathbb{R}$. Vyberte pravdivá tvrzení:

1. Jestliže limita $L_2$ neexistuje, pak limita $L_1$ může existovat.

2. Vypočtením limity $L_2$ nemůžeme určit, zda $L_1$ neexistuje.

3. Číslo $k$ vyjadřuje směr, ve kterém se přibližujeme k bodu $(x_0, y_0)$.

4. Vypočtením limity $L_2$ můžeme určit, zda $L_1$ neexistuje.

**Příklad 104** (Př. 85)**.** Označme $L_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a $L_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x-x_0)), k \ \in \mathbb{R}$. Vyberte nepravdivá tvrzení:

1. Jestliže limita $L_2$ neexistuje, pak limita $L_1$ může existovat.

2. Jestliže limita $L_2$ existuje a nezávisí na číslu $k$, pak limita $L_1$ také existuje a platí $L_1 = L_2$.

3. Limita $L_1$ nemůže existovat, pokud limita $L_2$ neexistuje.

4. Limita $L_1$ existuje právě tehdy, když existuje limita $L_2$.

**Příklad 105** (Př. 86)**.** Označme $L_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a $L_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x-x_0)), k \in \mathbb{R}$. Vyberte nepravdivá tvrzení:

1. Jestliže limita $L_1$ existuje, pak limita $L_2$ nezávisí na číslu $k$.

2. Vypočítáním limity $L_2$ můžeme vždy určit, zda limita $L_1$ existuje.

3. Vypočítáním limity $L_2$ můžeme zjistit, jestli $L_1$ závisí na směru, ze kterého se přibližujeme k bodu $(x_0, y_0)$.

4. Limita $L_1$ existuje právě tehdy, když existuje limita $L_2$.

**Příklad 106** (Př. 87)**.** Označme $L_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a $L_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x-x_0)), k \in \mathbb{R}$. Vyberte nepravdivá tvrzení:

1. Jestliže $L_2 = 0$, pak $L_1$ nemusí existovat.

2. Jestliže $L_2 = 0$, pak $L_1 = 0$.

3. Jestliže $L_2 = 0$, pak $L_1$ musí existovat.

4. Jestliže $L_2 = 0$, pak $L_1$ může být také rovna nule.

**Příklad 107** (Př. 88)**.** Označme $L_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a $L_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x-x_0)), k \in \mathbb{R}$. Vyberte pravdivá tvrzení:

1. Jestliže $L_2 = 0$ a $L_1$ existuje, pak $L_1 = 0$.

2. Jestliže $L_2 = 0$, pak nemůžeme rozhodnout o existenci limity $L_1$.

3. Jestliže $L_1 = 0$, pak $L_2$ nemůže záviset na hodnotě $k$.

4. Jestliže $L_2 = 0$, pak $L_1 = 0$.

**Příklad 108** (Př. 89)**.** Mějme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \sin(x+y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Označme $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Která tvrzení jsou pravdivá?

1. Limita $L$ existuje.
2. Limita $L$ neexistuje, protože dvojnásobné limity se nerovnají.
3. Limita $L$ existuje a je rovna číslu 1.
4. Funkce $f$ je spojitá v bodě $(0, 0)$.

**Příklad 109** (Př. 90)**.** Limita funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$ je číslo, které:

1. se vždy rovná funkční hodnotě funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$;
2. pomáhá určit, zda je funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$ spojitá;
3. se může rovnat funkční hodnotě funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$;
4. závisí na funkční hodnotě funkce $f$ v daném bodě $(x_0, y_0)$.

**Příklad 110** (Př. 91)**.** Limita funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$ je číslo, které:

1. pomáhá určit, jestli funkce $f$ má v bodě $(x_0, y_0)$ bod nespojitosti;
2. je pro každý bod $(x_0, y_0) \in D'_f$ různé;
3. je vždy totožné s funkční hodnotou funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0)$;
4. může být pro každý bod $(x_0, y_0) \in D'_f$ různé.

**Příklad 111** (Př. 92)**.** Mějme funkci $f(x, y) = \frac{2x+3y-1}{x^4-y}$. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

1. Funkce je spojitá na $\mathbb{R}^2$.
2. Funkce je spojitá na svém definičním oboru.
3. V $\mathbb{R}^2$ existuje bod, v němž funkce $f$ není spojitá.
4. Ani jedna z uvedených možností.

**Příklad 112** (Př. 93)**.** Mějme funkci $\frac{2x+3y-1}{x^4-y}$. Které z následujících tvrzení není pravdivé?

1. Funkce $f$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$.

2. Funkce $f$ je spojitá na $D_f$.

3. V $\mathbb{R}^2$ existuje bod, v němž funkce $f$ není spojitá.

4. $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R} : \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

**Příklad 113** (Př. 94)**.** Ve kterém z následujících bodů může být funkce $f(x,y)$ spojitá?

1. v izolovaném bodě $D_f$;

2. v bodě $(x_0, y_0) \in D_f \cap hD_f$;

3. ve vnitřním bodě $D_f$;

4. v bodě $(x_0, y_0) \in D'_f \setminus D_f$.

**Příklad 114** (Př. 95)**.** Ve kterém z následujících bodů nemůže být funkce $f(x,y)$ spojitá?

1. v izolovaném bodě $D_f$;

2. v bodě $(x_0, y_0) \in hD_f \setminus D_f$;

3. ve vnitřním bodě $D_f$;

4. v bodě $(x_0, y_0) \in D'_f \setminus D_f$.

**Příklad 115** (Př. 96)**.** Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

1. Funkce $f(x,y)$ je spojitá, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

2. Jestliže je funkce $f(x,y)$ spojitá v každém bodě svého definičního oboru, pak je spojitá.

3. Definiční obor spojité funkce je konvexní množina.

4. Definiční obor spojité funkce je souvislá množina.

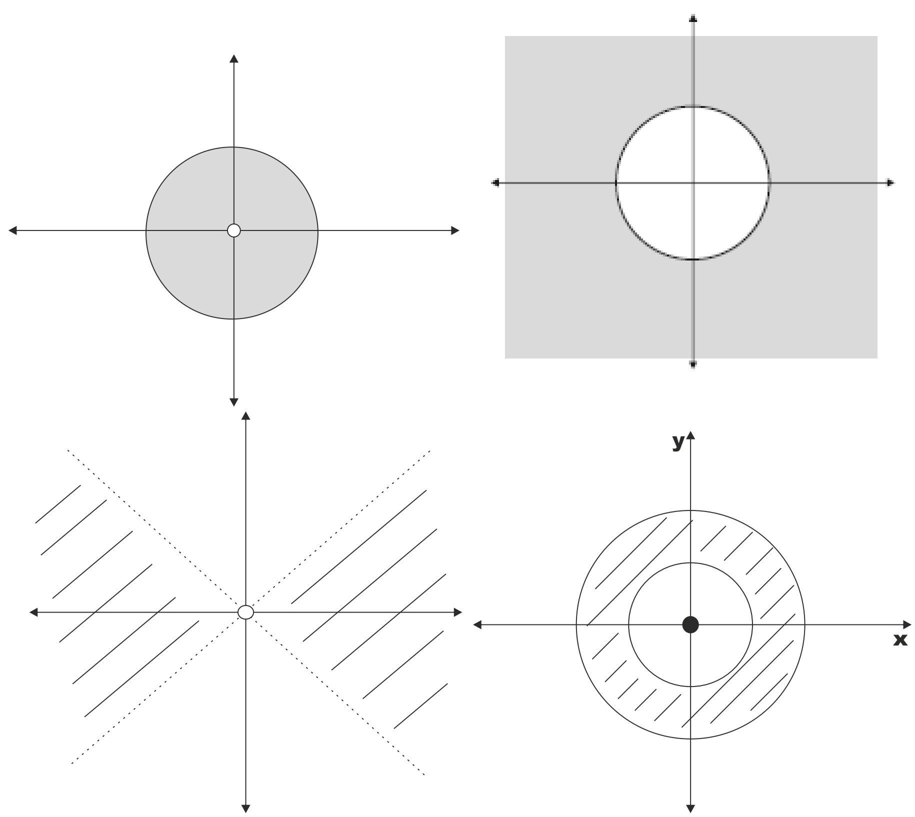
**Příklad 116** (Př. 97)**.** Která z následujících tvrzení jsou nepravdivá?

1. Funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

2. Jestliže je funkce spojitá v každém bodě svého definičního oboru, pak je spojitá.

3. Definiční obor spojité funkce je konvexní množina.

4. Funkce může být spojitá pouze v bodech svého definičního oboru.




Obrázek 11: Obrázky Obr. 5 (vlevo nahoře), Obr. 6 (vpravo nahoře), Obr. 7 (vlevo dole) a Obr. 8 (vpravo dole) byly použity v příkladech 117 a 118

**Příklad 117** (Př. 98)**.** Na Obrázku 11 jsou znázorněny možné definiční obory funkce $f(x, y)$. Ve kterém případě lze hledat limitu funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$?

**Příklad 118** (Př. 99)**.** Na Obrázku 11 jsou znázorněny možné definiční obory funkce $f(x, y)$. Ve kterém případě nelze hledat limitu funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$?

**Příklad 119** (Př. 100)**.** Mějme funkci $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (2,0)\} \\ 0, & (x, y) = (2, 0) \end{cases}$

Označme $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

1. $L = 0$;
2. limita neexistuje;
3. $L = 1$;
4. $L = \frac{1}{2}$.

## 4.3. Klíč k úlohám

**20** {1 a, 2 b, 3 c}; **21** {1 c, 2 a, 3 d, 4 b }; **22** {4}; **23** {1, 2, 3}; **24** {6}; **25** {5}; **26** {1, 2, 3, 4, 5}; **27** {5}; **28** {1, 2, 3, 4}; **29** {4}; **30** {1, 2, 3, 5}; **31** {5}; **32** {1, 2, 3, 4}; **33** {4, 5}; **34** {1, 2, 3}; **35** {1}; **36** {2, 3, 4}; **37** {2}; **38** {1, 3, 4}; **39** {3, 4}; **40** {1, 2}; **41** {2, 3, 4}; **42** {1}; **43** {2, 4}; **44** {2}; **45** {1, 3}; **46** {1, 3, 4}; **47** {4}; **48** {1, 2, 3}; **49** {4}; **50** {1, 2, 3}; **51** {4}; **52** {1, 3, 4}; **53** {2, 3}; **54** {1, 4}; **55** {4}; **56** {1, 3}; **57** {obr. 1}; **58** {obr. 2}; **59** {obr. 3}; **60** {obr. 1, obr. 3, obr. 4}; **61** {2}; **62** {2, 3}; **63** {4}; **64** {1, 3}; **65** {1, 3}; **66** {1, 2, 3}; **67** {3, 4}; **68** {1, 2}; **69** {3}; **70** {1, 2, 4}; **71** {1, 3}; **72** {2}; **73** {3}; **74** {3}; **75** {1, 2}; **76** {1, 2}; **77** {4}; **78** {1, 2, 3, 5}; **79** {2}; **80** {1, 3, 4, 5}; **81** {5}; **82** {1, 2, 3, 4}; **83** {1}; **84** {2, 3, 4}; **85** {1, 4}; **86** {2, 3}; **87** {2}; **88** {1}; **89** {3}; **90** {1, 2, 4}; **91** {1, 3}; **92** {2, 4}; **93** {3}; **94** {1, 2, 4}; **95** {3}; **96** {1, 2, 4}; **97** {4}; **98** {3}; **99** {1, 2, 4}; **100** {1, 3}; **101** {3}; **102** {1, 4}; **103** {3, 4}; **104** {1, 2, 4}; **105** {2, 4}; **106** {2, 3}; **107** {1, 2, 3}; **108** {1}; **109** {2, 3}; **110** {1, 4}; **111** {2, 3}; **112** {1, 4}; **113** {1, 2, 3}; **114** {2, 4}; **115** {1, 2}; **116** {3}; **117** {obr. 5, obr. 7}; **118** {obr. 6, obr. 8}; **119** {2}

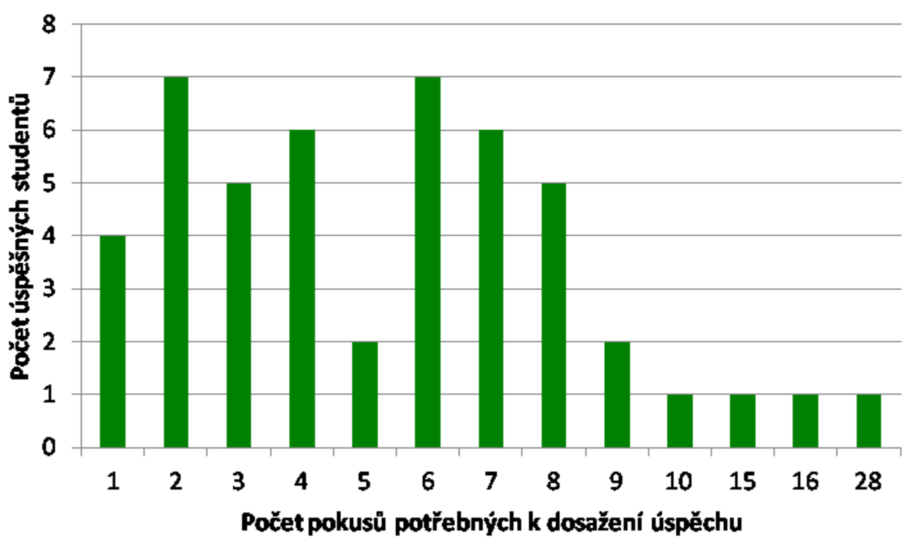
## 4.4. Zhodnocení testování

Zhodnoťme nyní výsledky testování limity a spojitosti funkce dvou proměnných, kterých bylo dosaženo padesáti studenty během letního semestru akademického roku 2012/2013.

Předpokládáme, že jediným cílem testovaných studentů bylo dosažení 80% hranice, která značila úspěšné složení testu. Po překonání této hranice student pokus dále neopakoval. Další podmínkou je ukončenost testu (testy, které nebyly uzavřeny, nejsou předmětem našeho zkoumání).

Na základě těchto předpokladů uvedeme základní charakteristiky, jimiž lze popsat získaný soubor odpovědí a testů (viz Přílohy na CD č. 1, č. 2 a č. 3). Uvedeme především výsledky testů vzhledem k jejich úspěšnému a neúspěšnému složení a časovému trvání. Dále zde uvedeme úspěšnosti některých otázek, které budeme charakterizovat počtem jejich generování a procentuálním ohodnocením.

Systém LMS Moodle zaznamenal za dané období 283 ukončených pokusů. V každém z nich bylo dvacet otázek, což znamená, že vygenerováno bylo 5660 otázek. Z testů bylo dokončeno 48 úspěšně a 235 neúspěšně.



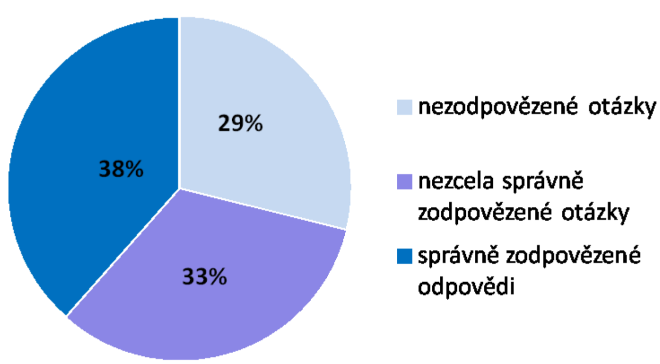

Obrázek 12: Počet pokusů, jež studenti potřebovali k úspěšnému složení testu

Z grafu na Obrázku 12 vidíme, že v prvním pokusu byli úspěšní pouze 4 studenti, což je zhruba 8 %. Pokusů potřebných k úspěšnému složení testu bylo průměrně 6.

Tato skutečnost se projevila na 45% průměrném hodnocení celkového souboru pokusů, což je neočekávaný výsledek, neboť předpokládaná byla alespoň 50% úspěšnost. Na výsledcích jednotlivých pokusů je samozřejmě znát zlepšování výsledků v závislosti na jejich počtu, neboť průměrné hodnocení prvních pokusů tj. 36 % se postupně zlepšilo až na 83 % dosažených pouze při posledních pokusech.

Pokud bychom zkoumali úspěch testu v závislosti na jeho časovém trvání zjistíme, že testy z časového intervalu $\langle 3, 600 \rangle$ minut měly 25% úspěšnost (testy, které trvaly méně jak 10 minut a více jak 10 hodin jsme zanedbali). Průměrným časem očištěného souboru testů bylo 28 minut (na rozdíl od neočištěného, který byl roven 2 hodinám a 45 minutám). Průměrný čas všech úspěšných pokusů byl 2 hodiny 19 minut. Tento výsledek byl velmi ovlivněn dvěma pokusy, jejichž doba trvání přesáhla hranici 10 hodin (konkrétně trvaly 14 hodin 17 minut a 2 dny 23 hodin). Úspěšné pokusy, jejichž doba trvání spadá do intervalu $\langle 3, 600 \rangle$ minut, průměrně trvaly přibližně 34 minut.

Rozeberme úspěšnost jednotlivých otázek. Na Obrázku 13 je znázorněn podíl správně zodpovězených, nezcela správně zodpovězených a nezodpovězených otázek na celkovém počtu.




Obrázek 13: Podíl správně zodpovězených, nezcela správně zodpovězených a nezodpovězených otázek na celkovém počtu

Kromě relativně nízkého procenta odpovědí, které byly zodpovězeny zcela správně (tj. 33 %), si můžeme všimnout faktu, že na 29 % otázek nebylo vůbec odpovězeno. Toto se odrazilo v hodnocení obtížnosti jednotlivých otázek.

Dle Tabulky 1, v které jsou uvedeny celkové procentuální ohodnocení jednotlivých otázek (tzv. Facility indexy), mělo pouze 28 % otázek úspěšnost vyšší než 50 %.

Nejtěžším dotazem byla Otázka č. 112 s 22% úspěšností splnění. Její znění bylo následující:

Mějme funkci $\frac{2x+3y-1}{x^4-y}$. Které z následujících tvrzení není pravdivé?

1. Funkce $f$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$.
2. Funkce $f$ je spojitá na $D_f$.
3. V $\mathbb{R}^2$ existuje bod, v němž funkce $f$ není spojitá.
4. $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R} : \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Z 59 generovaných pokusů byla devětkrát zodpovězena zcela správně, osmkrát s 50% úspěšností, 21 nezodpovězena a v ostatních případech bylo její hodnocení rovno číslu z intervalu $\langle -100\%, 0\% \rangle$.

Počet, kolikrát studenti zvolili jednotlivé odpovědi, je uveden v Tabulce 2. Z ní vyplývá, že správnou odpovědí, kterou neoznačilo nejvíce studentů, byla Odpověď č. 4. Naopak nejčastěji se vyskytující nesprávná odpověď (vyskytla se až patnáctkrát) byla Odpověď č. 3.

| Příklad | Facility index | Příklad | Facility index | Příklad | Facility index |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 73.17% | 60 | 48.63% | 70 | 40.00% |
| 95 | 72.00% | 28 | 48.61% | 97 | 40.00% |
| 74 | 70.54% | 42 | 48.43% | 65 | 39.68% |
| 83 | 68.52% | 87 | 47.62% | 52 | 39.66% |
| 69 | 66.67% | 56 | 47.41% | 106 | 39.09% |
| 63 | 66.15% | 50 | 47.40% | 29 | 38.64% |
| 61 | 64.58% | 55 | 47.37% | 33 | 38.18% |
| 109 | 63.33% | 101 | 47.37% | 64 | 37.93% |
| 62 | 60.53% | 41 | 47.22% | 114 | 37.04% |
| 21 | 60.34% | 71 | 46.43% | 79 | 37.00% |
| 91 | 58.87% | 27 | 46.15% | 30 | 36.98% |
| 84 | 57.18% | 111 | 46.15% | 53 | 36.51% |
| 73 | 56.82% | 40 | 46.09% | 96 | 36.36% |
| 57 | 56.50% | 75 | 45.83% | 43 | 36.11% |
| 85 | 55.93% | 116 | 45.75% | 23 | 35.98% |
| 36 | 55.15% | 89 | 45.33% | 25 | 35.19% |
| 35 | 54.94% | 58 | 44.64% | 24 | 34.55% |
| 66 | 54.80% | 39 | 44.17% | 105 | 34.48% |
| 78 | 54.63% | 45 | 44.17% | 26 | 34.35% |
| 118 | 54.17% | 51 | 44.14% | 68 | 34.26% |
| 98 | 52.54% | 22 | 44.07% | 103 | 33.65% |
| 113 | 52.05% | 93 | 43.54% | 48 | 33.33% |
| 88 | 52.04% | 46 | 43.14% | 107 | 33.33% |
| 37 | 51.67% | 81 | 42.98% | 94 | 32.75% |
| 47 | 51.61% | 117 | 42.55% | 102 | 32.64% |
| 31 | 51.42% | 99 | 42.37% | 92 | 32.41% |
| 77 | 50.89% | 38 | 42.33% | 67 | 32.14% |
| 49 | 50.45% | 44 | 41.98% | 104 | 31.43% |
| 108 | 50.00% | 32 | 41.85% | 82 | 29.63% |
| 110 | 50.00% | 76 | 41.80% | 100 | 28.70% |
| 115 | 49.19% | 90 | 41.55% | 80 | 24.22% |
| 86 | 49.09% | 119 | 41.50% | 112 | 22.03% |
| 34 | 48.96% | 59 | 41.03% | | |
| 54 | 48.94% | 72 | 40.52% | | |

Tabulka 1: Facility indexy (indexy obtížnosti) jednotlivých příkladů (viz Příloha na CD č. 2)

| Odpověď č. | správně | Počet označení |
|---|---|---|
| 1 | ano | 21 |
| 2 | ne | 8 |
| 3 | ne | 15 |
| 4 | ano | 16 |

Tabulka 2: Počet označení jednotlivých odpovědí Otázky č. 112 v testu

Nejlehčí úlohou byla naopak přiřazovací Otázka č. 20:

Přiřaďte označení k jednotlivým typům limit:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{x-y}, \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \frac{y}{x-y}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$;

**a** dvojná limita funkce dvou proměnných v bodě;

**b** dvojnásobná limita funkce dvou proměnných v bodě;

**c** limita funkce jedné proměnné v bodě.

Její úspěšnost se vyšplhala až na 73 %. Největší část jejího nesprávného zodpovězení je dána deseti nevyplněnými odpověďmi z celkového počtu 41 vygenerování.

# Závěr

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo vytvoření otázek, které byly použity při testování studentů KMA/M2 Univerzity Palackého v Olomouci pomocí počítače během letního semestru akademického roku 2012/2013.

Tohoto cíle bylo dosaženo v rozsahu sta otázek, které byly zaměřeny na limitu a spojitost funkce dvou proměnných. Následně byly vloženy do e-learningového prostředí LMS Moodle, kde z nich byly skládány testy.

Tato bakalářská práce byla zpracována v typografickém systému TEX. Strukturována byla do 4 hlavních kapitol.

V první kapitole byly uvedeny základní definice pojmů. Především byly zmíněny vztahy mezi bodem a danou množinou, metrický prostor, okolí bodu a funkce dvou proměnných.

Druhá kapitola se zabývala limitou funkce dvou proměnných. V prvních čtyřech podkapitolách byly jednotlivě popsány motivace ke zkoumání problematiky limity funkce dvou proměnných, definice tohoto pojmu, typy limit (konkrétně pro případ vlastní limity ve vlastním bodě) a vlastnosti limit funkcí. Pátá podkapitola byla věnována výpočtům limity funkce dvou proměnných. Poslední část druhé kapitoly se týkala postupů, které se používají k důkazu neexistence limity.

Ve třetí kapitole byla rozebrána problematika spojitosti funkce dvou proměnných. První část uváděla definici spojitosti funkce v bodě a vztah limity a spojitosti funkce na množině. Dále zde byly popsány vlastnosti spojité funkce.

Ve čtvrté kapitole jsme se zabývali testováním studentů. Popisovali jsme způsob a principy tvoření otázek a dále jsme uvedli všechny otázky včetně jejich správných odpovědí. Také byl uveden rozbor již realizovaného testu, vytvořeného ze zmíněných otázek, přičemž jsme analyzovali výsledky na základě procentuálního hodnocení, času a generování jednotlivých otázek. Tento rozbor ukázal, že studenti průměrně potřebovali šest pokusů k úspěšnému složení zkoušky a procento jejich úspěšnosti bylo rovno 45 % (testy byly obtížné). Zjistili jsme, že studentům stačilo průměrně 28 minut k vyplnění testu.

Tato práce je určena především studentům, kteří si chtějí procvičit své znalosti a pochopit postupy odvozování správných odpovědí. Dále může sloužit jako indikátor úprav, které by měly být provedeny, pokud by testy měly sloužit jako plnohodnotná část zkoušky předmětu KMA/M2.

V tomto případě bych doporučovala celou Banku úloh zanalyzovat a otázky, které jsou buď velmi lehké (tzn. jejich Facility index je vyšší než 70 %) nebo velmi obtížné (tzn. měly nižší úspěšnost jak 50 %) upravit do přijatelné formy.

# Literatura

[1] Rektorys, K.: Přehled užité matematiky I., 6. vydání, Praha: Prometheus, 1995.

[2] Škrášek, J., Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I., 1. vydání, Praha: SNTL, 1983.

[3] Došlá, Z., Došlý, O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, 3. vydání, Brno: Masarykova univerzita, 2006.

[4] Rachůnek, L., Rachůnková, I.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, 1. vydání, Olomouc: Univerzita Palackého, 2004.

[5] Štěpánek, J.: Matematika pro přírodovědce. II, Funkce více proměnných, 2. vydání, Praha: Karolinum, 1997.

[6] Nečas, J. a kol.: Aplikovaná matematika. I, A až L, 1. vydání, Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1977.

[7] Nečas, J. a kol.: Aplikovaná matematika. II, M až Ž, 1. vydání, Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978.

[8] Navrátil, M.: Matematika - Diferenciální a integrální počet funkcí dvou a více proměnných, 2. vydání, Brno: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita, 2005.

[9] Jarník, V.: Diferenciální počet 1., 6. vydání, Praha: Academia, 1974.

[10] Studijní opory předmětu KMA/M1 [online], dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/course/view.php?id=88,[citováno 3. 3. 2014].

[11] Studijní opory předmětu KMA/M2 [online], dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/course/view.php?id=107,[citováno 3. 3. 2014].

# Příloha

## Přehled limit elementárních funkcí jedné proměnné

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = x^2$ | $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 = \infty$ | $\lim\limits_{x \to c} x^2 = c^2$ |
| $f(x) = x^3$ | $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$ | $\lim\limits_{x \to c} x^3 = c^3$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ |
| $f(x) = e^x$ | $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ |
| $f(x) = e^{-x}$ | $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = 0$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$ |

## Známé odvozené limity funkce jedné proměnné

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ | $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ |
| $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ |
| $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{l}{x}\right)^x = e^l$ | $\lim\limits_{x \to 0} (1 + lx)^x = e^l$ |
| $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$, kde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ | speciálně $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ |