

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Hierarchické báze v metodě konečných prvků



Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Horymír Netuka, Ph.D.
Rok odevzdání: 2014

Vypracovala:
Bc. Adriana Smělá
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení RNDr. Horymíra Netuky, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 7. dubna 2014

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu mé diplomové práce RNDr. Horymíru Netukovi, Ph.D. za jeho trpělivost a čas, který věnoval našim konzultacím. Dále všem, kteří mě při psaní této práce podporovali, zejména rodině a příteli za jejich toleranci a lásku.

Obsah

Úvod	4
Použité značení	6
1 Přípravná kapitola	7
1.1 Základní pojmy	7
1.2 Lebesgueovy prostory	7
1.3 Sobolevovy prostory	8
1.4 Greenova formule	9
1.5 Řídká matice	9
1.6 Jacobián, věta o substituci	10
1.7 Interpolace	11
2 Úvod do eliptických úloh a metody konečných prvků	12
2.1 Galerkinova metoda	12
2.2 Eliptická diferenciální rovnice 2. řádu	15
2.3 Modelový příklad	16
2.4 Myšlenka metody konečných prvků, základní pojmy	18
3 P-verze metody konečných prvků v 1D	26
3.1 Uzlové bázové funkce v MKP	29
3.2 Hierarchické bázové funkce v MKP	31
3.3 Numerická integrace v 1D	38
3.4 Interpolace na prvku	39
3.5 Příkladová část	41
4 P-verze metody konečných prvků ve 2D	79
4.1 Příklady základních prvků, báze prostoru V_h , transformace	81
4.2 Uzlové bázové funkce v MKP, prvky vyšších řádů	86
4.3 Hierarchické bázové funkce v MKP	93
4.4 Numerická integrace ve 2D	98
4.5 Interpolace na prvku	99
4.6 Příkladová část	100
Závěr	110
Literatura	112

Úvod

Cílem této práce je seznámit se s hierarchickými bázemi v metodě konečných prvků. Metoda konečných prvků (dále MKP) je numerická metoda vycházející z metod Galerkinova typu a stala se jednou z nejpoužívanějších v inženýrství. Setkáme se s ní např. ve stavebním, leteckém či automobilovém průmyslu, ale také nalézá uplatnění například v biomechanice. Používá se k řešení fyzikálních úloh, přesněji situací, které lze popsat diferenciálními a integrálními rovnicemi. Zmínit můžeme modelování deformace těles, proudění tekutin, šíření tepla nebo také simulace průběhu napětí a stanovení nejnamáhanějšího místa konstrukce.

Vznik této metody je spojen se dvěma událostmi. Počátkem 40. let 20. století byla publikována práce, ve které se *A. Hrennikoff* zabýval variační úlohou na dvoudimenzionální oblasti rozdělené pomocí mřížky. O rok později, dne 16. června 1942 byl v časopise „Bulletin of American Mathematical Society“ vytištěn článek profesora *Richarda Couranta*, kde se mimo jiné věnuje popisu a řešení variačního problému na síti ve 2D pokryté trojúhelníky. Toto řešení hledá ve tvaru po částech lineární funkce. Díky početní náročnosti nebyla metoda přijata, k jejímu rozvoji došlo později na univerzitách ve Stuttgartu (50. léta) a v Berkley (60. léta). Prvně byla použita na konci 60. let při pevnostních výpočtech v leteckém průmyslu. O rozvoj této metody se zasloužil také profesor *Miloš Zlámal*, který v roce 1968 v časopise „Numerische Mathematik“ publikoval článek „On The Finite Element Method“.

Existuje několik verzí MKP, v té klasické h -verzi pracujeme na konečnědimenzionálních prostorech s po částech lineárními bázemi. Hierarchické báze řadíme k teorii tzv. p -verze, kdy báze volíme také po částech polynomiální, ale vyššího řádu.

S MKP jsem se setkala poprvé při výběru tématu této diplomové práce a zaujala mě díky jejímu širokému využití. Nejedná se pouze o teoretickou matematiku, všude kolem nás lze najít místo pro její uplatnění. V rámci studijních kurzů jsme se postupně seznámili s pojmy jako variační úloha či v závěru studia také s matematickým pohledem na h -verzi zmíněné metody.

V práci se budu věnovat převážně p -verzi MKP pro řešení úloh s eliptickou diferenciální rovnicí (tj. úlohami nezávislými na čase) v 1D a 2D. Zaměříme se pouze na rovnice 2. řádu. Seznámíme se se dvěma druhy bázevých funkcí,

kromě hierarchických bází také s Lagrangeovými tvarovými bázemi. Práci rozdělím do několika kapitol. Na úvod se podíváme na matematické pojmy, které budou na dalších stránkách potřebné. Dále ve 2. kapitole nahlédneme na Galerkinovu metodu, která převádí klasickou formulaci úlohy na slabou formulaci a krátce na samotnou myšlenku MKP. Řekneme si zde něco o konečných prvcích či bázových funkcích. Poté se můžeme pustit do konečných prvků vyšších řádů.

Ve třetí kapitole věnované 1D úlohám se zavedením pojmu Lagrangeových bází dostaneme k hierarchickým bázím a seznámíme se s Lobattovými funkcemi, které nás budou provázet po zbytek práce. Celá kapitola bude zakončena příklady, které řeší konkrétní úlohy pomocí programu MATLAB. Pracovala jsem s verzí 7.0.0.19920 (R14) a všechny mnou naprogramované m-fily, které jsem v práci využila, příkládám také na CD nosiči. Jedná se o soubory odpovídající daným okrajovým úlohám, přesněji homogenním Dirichletovým či Neumannovým, a několik souborů pro obecný případ. V poslední kapitole probereme tytéž pojmy, tj. Lagrangeovy a hierarchické báze, jen pro prostor 2D, který si rozdělíme na čtyřúhelníky či trojúhelníky a na závěr uvedu pár příkladů.

Použité značení

Značení	Význam
\mathbb{N}, \mathbb{R}	obor přirozených čísel, resp. obor reálných čísel
\mathbb{R}^n	vektorový prostor nad \mathbb{R} dimenze n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	prostor matic typu $n \times m$ nad \mathbb{R}
$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$	čtvercová matice řádu n
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$	uspořádaná n -tice reálných čísel, vektor
\boldsymbol{x}^T	transponovaný vektor k vektoru \boldsymbol{x}
V^*	duální prostor k prostoru V
$\dim V$	dimenze prostoru V
$\Omega, \partial\Omega$	oblast Ω , resp. hranice oblasti Ω
$C^k(\Omega)$	třída funkcí se spojitými parciálními derivacemi na množině Ω až do řádu $k \in \mathbb{N}$
$C^{0,1}(\Omega)$	třída funkcí, které jsou spojité na oblasti Ω a mají lipschitzovskou hranici
$C_0^\infty(\Omega)$	prostor distribucí, funkcí s nekonečně kompaktním nosičem
$W^{k,p}(\Omega)$	Sobolevův prostor, $k \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	uzávěr množiny $C_0^\infty(\Omega)$ v prostoru $W^{k,p}(\Omega)$
$L^p(\Omega)$	Lebesgueův prostor, $p \in \langle 1, \infty \rangle$
$\overline{M}, \text{diam} M$	uzávěr množiny M , resp. průměr množiny M
$\text{supp}(v)$	nosič funkce v
$a(u, v)$	bilineární forma
$l(v)$	spojitý lineární funkcionál
Δ, ∇	Laplaceův operátor, resp. gradient
\mathcal{P}^p	prostor polynomů stupně nejvýše p
$(f \circ g)(x)$	složené zobrazení $f(g(x))$
$f _T$	restrikce funkce f na množinu $T \in \mathbb{R}^n$
$\text{dist}(A, B)$	vzdálenost bodu A od bodu B

1 Přípravná kapitola

V této kapitole se seznámíme s matematickým aparátem, který budeme potřebovat pro další práci.

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1. Nechť V je Hilbertův prostor, $U \subset V$ je neprázdná, konvexní, uzavřená podmnožina ve V . Dále nechť $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineární forma na V . Řekneme, že a je

- a) **omezená** na U , jestliže $\exists \alpha > 0$ takové, že $|a(u, v)| \leq \alpha \|u\| \cdot \|v\|$, $\forall u, v \in U$,
- b) **V-eliptická** na U , jestliže $\exists \beta > 0$ takové, že $a(v, v) \geq \beta \|v\|^2$, $\forall v \in U$,
- c) **symetrická** na U , jestliže $a(u, v) = a(v, u)$, $\forall u, v \in U$.

Definice 1.2. Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, je **pozitivně definitní**, jestliže platí

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

1.2 Lebesgueovy prostory

Tyto prostory budeme potřebovat pro zavedení Sobolevových prostorů.

Definice 1.3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$ určuje dimenzi. Uvažujme lineární prostor V obsahující měřitelné funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pro $1 \leq p \leq \infty$ definujeme L^p **normu** v prostoru V následovně

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pro } 1 \leq p < \infty,$$
$$\|f\|_{\infty} = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{ \alpha ; |f(\mathbf{x})| \leq \alpha \text{ s.v. na } \Omega \},$$

kde \int je Lebesgueův integrál. **Lebesgueův prostor** $L^p(\Omega)$ pak definujeme jako

$$L^p(\Omega) = \{ f \in V ; \|f\|_p < \infty \} \quad \text{pro } 1 \leq p \leq \infty.$$

Poznámka 1.1. Prostor $L^p(\Omega)$ pro $0 \leq p < \infty$ spolu s výše definovanou normou tvoří Banachův prostor a speciálně pro $p = 2$ se jedná o Hilbertův prostor se skalárním součinem $(f, g)_2 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

1.3 Sobolevovy prostory

Nejdříve se seznámíme s tzv. multiindexy a slabými derivacemi.

Definice 1.4. Nechť $n \in \mathbb{N}$ určuje dimenzi prostoru \mathbb{R}^n . Uspořádanou n -tici $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, kde $\alpha_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$, nazveme **multiindexem** α . Jako **délku multiindexu** označujeme číslo

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Nechť navíc funkce $\phi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pak **slabou derivací funkce ϕ řádu α** rozumíme

$$D^\alpha \phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Poznámka 1.2. Ekvivalentně lze definici slabé derivace funkce ϕ napsat: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, je otevřená množina. Dále nechť funkce $\phi, \phi_\alpha \in L^1(\Omega)$ a α je multiindex takový, že $|\alpha| \leq k, k \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$\int_{\Omega} \phi_\alpha(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) D^\alpha v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

a ϕ_α nazveme slabou derivací funkce ϕ řádu α a pro prostor $C_0^\infty(\Omega)$ platí

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty; \text{supp}(v) \subset \Omega \text{ je kompaktní}\}.$$

Nyní můžeme nadefinovat Sobolevův prostor.

Definice 1.5. Nechť $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{N}$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. **Sobolevův prostor** $W^{k,p}(\Omega)$ definujeme jako

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); \forall |\alpha| \leq k : D^\alpha v \in L^p(\Omega)\}.$$

Poznámka 1.3. Konkrétně pro úlohy s eliptickou rovnicí 2. řádu budeme potřebovat prostor $W^{1,2}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \forall |\alpha| \leq 1 : D^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$.

Poznámka 1.4. Mezi nejčastěji užívanou **normu** v prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ patří

$$\|v\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pro } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_\infty.$$

Prostor $W^{k,p}(\Omega)$ s touto normou tvoří Banachův prostor. Pro $p = 2$ se dokonce jedná o prostor Hilbertův se skalárním součinem $(u, v)_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_2$.

Definujme navíc prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Definice 1.6. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, je otevřená množina. Dále nechť $k \in \mathbb{N}$ a $1 \leq p < \infty$. Sobolevův prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$ definujeme jako

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}},$$

tj. uzávěr množiny $C_0^\infty(\Omega)$ v prostoru $W^{k,p}(\Omega)$.

1.4 Greenova formule

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a označme si *vektor vnější normály* $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (n_1, \dots, n_n)^T(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Nyní si uvedeme **Greenovu formuli** pro dva případy.

1. $\forall u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u v n_i ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

2. $\forall u \in W^{1,2}(\Omega)$, $v \in W^{2,2}(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

kde $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x})$ pro \mathbf{x} z hranice oblasti Ω .

1.5 Řídká matice

Pojem řídké matice není přesně stanoven, proto si neuvеdeme přesnou definici. Můžeme ale říci následující.

Nechť $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m}$ je matice typu $n \times m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Jestliže naprostá většina prvků a_{ij} je rovna nule, $\forall i, j$, pak matici \mathbf{A} nazýváme **řídkou maticí**. V opačném případě se matice \mathbf{A} nazývá **hustá**.

Poznámka 1.5. Většinou se uvádí, že počet nenulových prvků v řídké matici je přibližně do 5ti či 10ti procent všech prvků.

Výhod řídkých matic je hned několik. Při řešení soustav s těmito maticemi, existuje-li jejich řešení, dochází ke vzniku menších výpočetních chyb, což je spojeno s menším počtem operací ve srovnání s hustými maticemi.

Řešíme-li rozsáhlejší úlohu prostřednictvím počítače, stačí nám v jeho paměti uchovávat jen nenulové prvky a jejich pozice. Čímž se sníží zatížení na paměť.

1.6 Jacobián, věta o substituci

Ve 3. kapitole této práce použijeme pojem *Jacobián*. Jedná se o determinant čtvercové Jacobiho matice. Více informací naleznete např. v literatuře [16].

Nechť je dána vektorová funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, která je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. **Jacobiho matice funkce f v bodě \mathbf{x}** je matice

$$D_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x}).$$

Jacobiánem funkce f v bodě \mathbf{x} nazveme determinant z $D_f(\mathbf{x})$, tj.

$$J_f(\mathbf{x}) = \det D_f(\mathbf{x}).$$

Věta o substituci

S pojmem Jacobián nepřímo souvisí také *substituční věta*. Předpokládejme existenci zobrazení $\phi : N \rightarrow M$, $N, M \subset \mathbb{R}^n$ uzavřené, které je jednoznačné, tj. $M = \phi(N)$. Navíc existují parciální derivace ϕ 1. řádu a $J_\phi \neq 0$. Dále nechtě máme spojitou ohraničenou funkci f na M , poté

$$\int_M f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_N (f \circ \phi)(\boldsymbol{\xi}) |J_\phi(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi}.$$

1.7 Interpolace

Při řešení úloh použijeme kromě metody konečných prvků i interpolaci. Proto si ji stručně charakterizujeme. Podrobněji např. v literatuře [4], kapitole 1.1.

Nechť je dáno $n + 1$ navzájem různých bodů $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Tyto body tvoří tzv. **síť uzlů**. Dále nechť jsou v těchto bodech známy funkční hodnoty $f(x_i)$, krátce f_i . Úkolem je najít funkci $\mu(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$ proměnné x závislé na parametrech a_0, a_1, \dots, a_n tak, aby platily tzv. **interpolační podmínky**

$$\mu(x_i, a_0, a_1, \dots, a_n) = f_i, \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (1.3)$$

Poznámka 1.6. Ekvidistantní síť uzlů x_0, x_1, \dots, x_n rozumíme takovou síť, kdy lze každý její bod x_i vyjádřit ve tvaru $x_i = x_0 + ih$, kde $h \in \mathbb{R}$ je kladné číslo a nazýváme jej **krokem**.

Poznámka 1.7. Je-li hledanou funkcí μ polynom stupně nejvýše n , mluvíme o **polynomiální interpolaci**. Pro dané uzly x_i a jejich funkční hodnoty f_i , $i = 0, 1, \dots, n$, existuje polynom

$$P_n(x) = \mu(x, a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

splňující interpolační podmínky (1.3) jednoznačně. Tento polynom lze najít např. přes formule Lagrangeova interpolačního polynomu.

Definice 1.7. Nechť je dána síť uzlů x_i a funkční hodnoty f_i , $i = 0, 1, \dots, n$. **Lagrangeův interpolační polynom stupně nejvýše n** je dán předpisem

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f_i \quad (1.4)$$

a splňuje interpolační podmínky (1.3), tj. $P_n(x_i) = f_i, \forall i$.

Funkce $l_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$, jsou tzv. *fundamentální polynomy* a platí

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Navíc mají tzv. *delta vlastnost*, tj. $l_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Poznámka 1.8. Hodnotu δ_{ij} nazveme **Kroneckerovým delta** a platí

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

2 Úvod do eliptických úloh a metody konečných prvků

V této části práce si uvedeme podstatu metody konečných prvků pro časově nezávislé eliptické úlohy 2. řádu.

Metoda konečných prvků (dále také jen MKP) je numerická metoda Galerkinova typu se speciální volbou báze, proto se nejdříve seznámíme s myšlenkou Galerkinovy metody.

2.1 Galerkinova metoda

Galerkinova metoda je postup, který se používá při řešení obyčejných či parciálních diferenciálních rovnic. Základem je převod původní, tzv. *klasické formulace* řešené úlohy na slabou formulaci a její následné zdiskretizování, tj. nahrazení nekonečně dimenzionálního prostoru prostorem konečné dimenze. Uvedeme si pouze myšlenku této metody, podrobnější popis naleznete v literatuře [1], kapitole 3.

Nechť V je Hilbertův prostor, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineární forma a $l \in V^*$ je spojitý lineární funkcionál. Dále předpokládejme, že bilineární forma a je omezená a V -eliptická. Úkolem je najít funkci $u \in V$ takovou, která řeší rovnici

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.1)$$

kde v jsou tzv. **testovací funkce** z prostoru V .

Poznámka 2.1. Úloha (2.1) se nazývá **slabá formulace úlohy**. Bilineární forma a i lineární funkcionál l jsou integrály z výrazů, které odpovídají konkrétní okrajové úloze s parciální diferenciální rovnicí.

Odpověď na existenci a jednoznačnost řešení úlohy (2.1) nám dává následující věta.

Věta 2.1 (Lax-Milgram theorem). *Nechť V je Hilbertův prostor a bilineární forma $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená a V -eliptická. Potom pro libovolnou pravou stranu $l \in V^*$ existuje právě jedno řešení úlohy (2.1).*

Důkaz: viz literatura [6], str. 18

Galerkinova metoda převádí formulaci úlohy (2.1) na diskrétní formulaci. Zavedeme posloupnost podprostorů $\{V_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ takovou, že $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n} = V$, $V_n \subset V_{n+1}$ a $\dim V_n = N_n < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nyní na těchto prostorech hledáme funkce $u_n \in V_n$, které splňují

$$a(u_n, v_n) = l(v_n), \quad \forall v_n \in V_n. \quad (2.2)$$

Řešení této úlohy existuje a je jediné, viz literatura [6], str. 46, Lemma 2.1.

Jak takovou funkci u_n najít? Díky konečnosti prostoru V_n zde existuje konečná báze $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N_n}$ a tedy hledanou funkci můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci prvků této báze, tedy

$$u_n = \sum_{j=1}^{N_n} y_j \varphi_j, \quad (2.3)$$

kde y_j jsou neznámé koeficienty.

Dosazením (2.3) do rovnice (2.2) dostaneme

$$a\left(\sum_{j=1}^{N_n} y_j \varphi_j, v_n\right) = l(v_n), \quad \forall v_n \in V_n$$

a díky linearitě a a substituci báze funkcí φ_i za v_n máme

$$\sum_{j=1}^{N_n} a(\varphi_j, \varphi_i) y_j = l(\varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_n. \quad (2.4)$$

Dostali jsme systém lineárních N_n algebraických rovnic, který maticově zapíšeme

$$\mathbf{A}_n \mathbf{y}_n = \mathbf{b}_n, \quad (2.5)$$

kde - \mathbf{A}_n se nazývá **matice tuhosti** s prvky $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $i, j = 1, 2, \dots, N_n$,

- \mathbf{b}_n je sloupcový **vektor zatížení** o složkách $b_i = l(\varphi_i)$, $i = 1, 2, \dots, N_n$,

- \mathbf{y}_n je sloupcový N_n rozměrný vektor neznámých koeficientů y_i .

Matice \mathbf{A} ze soustavy (2.5) je za uvažovaných předpokladů ze strany 12 pozitivně definitní (viz literatura [6], str. 48, Lemma 2.2) a regulární, tedy řešení \mathbf{y}_n dané soustavy existuje jediné.

Poznámka 2.2. Pokud je bilineární forma a symetrická, pak je i matice \mathbf{A} symetrická. V tomto případě můžeme místo Galerkinovy metody použít **Ritzovu metodu**, která hledá funkci $u_h \in V_h$ jako minimum funkcionálu

$$J(v_h) = \frac{1}{2}a(v_h, v_h) - l(v_h)$$

přes všechny funkce $v_h \in V_h$. Tj.

$$J(u_h) = \min_{v_h \in V_h} J(v_h).$$

Výsledky obou metod, v případě symetrické bilineární formy, budou srovnatelné.

Dosazením nalezeného vektoru \mathbf{y}_n do výrazu (2.3) dostaneme funkci $u_n \in V_n$, jakožto řešení diskrétní úlohy (2.2). Toto řešení nazýváme **Galerkinovou aproximací řešení** u úlohy (2.1).

Konvergence Galerkinovy metody

Podívejme se nyní stručně na konvergenci Galerkinovy metody.

Věta 2.2. *Nechť V je Hilbertův prostor, $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost konečných podprostorů V taková, že $V_n \subset V_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = V$. Dále nechť $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená a V -eliptická a $l \in V^*$. Potom je Galerkinova metoda konvergentní, tj.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| = 0,$$

kde u je přesné řešení úlohy (2.1) a u_n je jeho Galerkinova aproximace.

Důkaz: viz literatura [6], str. 50 - 51

Speciální volba báze v Galerkinově metodě nám dá metodu konečných prvků. Dle následujícího lemmatu totiž chyba aproximace, tj. rozdíl přesného řešení u a přibližného řešení u_n , nezávisí na volbě báze, nýbrž pouze na volbě prostoru $V_n \subset V$.

Lemma 2.1 (Cea's lemma). *Nechť V je Hilbertův prostor, bilineární forma $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená a V -eliptická a $l \in V^*$ je spojitý lineární funkcionál. Dále nechť funkce $u \in V$ je řešení úlohy (2.1), tj.*

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V$$

a $u_n \in V_n$ je řešení dané Galerkinovou aproximací na prostoru konečné dimenze $V_n \subset V$. Pak $\exists \gamma > 0$ taková, že pro odhad chyby řešení platí

$$\|u - u_n\| \leq \gamma \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|,$$

kde navíc $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$.

Důkaz: viz literatura [6], str. 49 - 50

2.2 Eliptická diferenciální rovnice 2. řádu

Obecně lze zapsat **eliptickou diferenciální rovnici 2. řádu** ve tvaru

$$\mathcal{A}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{na } \Omega, \quad (2.6)$$

kde

$$\mathcal{A}u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) + c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 u \quad (2.7)$$

je lineární operátor. Dále $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $f \in C(\Omega)$, $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $b_i \in C^1(\Omega)$, $c_i \in C(\Omega)$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, a $a_0 \in C(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$ je hledaná funkce. Rovnici řešíme na nějaké oblasti $\Omega \subset V$, $\dim V = n$.

Nejpoužívanější jsou následující dva typy eliptických rovnic

- a) **Laplaceova rovnice** $-\Delta u(\mathbf{x}) = 0$,
- b) **Poissonova rovnice** $-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$,

kde $\mathcal{A} = \Delta = \nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Aby řešení této rovnice bylo jednoznačné, musíme uvažovat na hranici oblasti či na jejich částech nějaké okrajové podmínky

- a) **Dirichletovy okr. podmínky** $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ na $\partial\Omega$,
- b) **Neumannovy okr. podmínky** $\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = g(\mathbf{x})$ na $\partial\Omega$,
- c) **Newtonovy okr. podmínky** $\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} + h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ na $\partial\Omega$,

kde funkce $g \in C(\partial\Omega)$, $h \in C(\partial\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ je normálová derivace funkce u na hranici oblasti Ω . Je-li funkce g na pravé straně podmínky nulová, pak hovoříme o **homogenní okrajové podmínce**.

2.3 Modelový příklad

Nyní si ukážeme, jak získáme slabou formulaci okrajové úlohy. Pro jednoduchost zvolme rovnici

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u = f \quad \text{na } \Omega \quad (2.8)$$

a homogenní Dirichletovu okrajovou podmínku

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (2.9)$$

Poznámka 2.3. Samozřejmě nemusíme uvažovat pouze jednu okrajovou podmínku pro celou hranici oblasti, tu si můžeme rozdělit na části a zde předepsat různé okrajové podmínky. Výpočty se liší pouze tím, že počítáme s každou částí hranice zvlášť.

Klasickým řešením úlohy (2.8), (2.9) je funkce $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Pro aplikaci Galerkinovy metody musíme najít slabou formulaci úlohy. K té se dostaneme následujícím postupem.

1. Rovnici (2.8) vynásobíme testovacími funkcemi v , tyto funkce jsou nekonečně diferencovatelné na oblasti a na její hranici jsou rovny nule, tj. $v \in C_0^\infty(\Omega)$.
2. Vynásobenou rovnicí zintegrujeme přes celou oblast Ω ,

$$-\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}.$$

3. Použijeme Greenovu formuli (1.1) a tím přesuneme parciální derivaci podle x_i na testovací funkci.
4. Vezmeme v úvahu fakt, že testovací funkce jsme zvolili tak, aby na $\partial\Omega$ byly rovny nule, tím integrály přes hranici oblasti budou taktéž nulové.

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}. \quad (2.10)$$

Nyní se podívejme na podmínky pro jednotlivé funkce z této formulace. Funkce u, v a jejich první parciální derivace i funkce f musí být z prostoru $L^2(\Omega)$. Navíc víme, že $v \in C_0^\infty(\Omega)$, tedy

$$u, v \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega).$$

Pro koeficienty musí platit

$$a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Poznámka 2.4. Okrajová Dirichletova podmínka je *stabilní podmínka*. Tento typ podmínek se projeví v úloze u funkce u , zde jsme volili homogenní variantu, proto vliv není patrný na první pohled. Druhým typem podmínek jsou *nestabilní podmínky*, např. Neumannova. Tato podmínka se většinou projeví přímo v rovnici členem navíc.

Vezmeme-li nyní $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ a označíme-li

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v d\mathbf{x},$$

kde $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineární forma. A

$$l(v) = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x},$$

kde $l(v) \in V^*$ je lineární funkcionál, tak rovnici (2.10) můžeme ekvivalentně zapsat, jako

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \quad (2.11)$$

Najít řešení $u \in V$ rovnice (2.10), resp. (2.11), je hledanou **slabou formulací** úlohy (2.8), (2.9).

Lemma 2.2. *Nechť $\exists C_{min} > 0$ takové, že $a_{ij}(\mathbf{x}) \geq C_{min} > 0$ a $a_0(\mathbf{x}) \geq 0$ skoro všude na Ω . Pak slabá formulace úlohy (2.11) má jediné řešení $u \in V$.*

Důkaz: viz literatura [6], str. 19

Platí-li Lemma 2.2, pak se pomocí Věty 2.1 dokáže existence a jednoznačnost řešení úlohy (2.11).

Poznámka 2.5. Odvození slabé formulace úlohy pro ostatní okrajové podmínky pro rovnici (2.8) naleznete např. v literatuře [6], kapitole 1.2.

Poznámka 2.6. Integrály, vyskytující se v bilineární formě $a(\cdot, \cdot)$ a funkcionálu $l(\cdot)$, se v drtivé většině případů nepočítají přesně, ale pouze přibližně pomocí formulí numerické integrace.

2.4 Myšlenka metody konečných prvků, základní pojmy

Nyní, po nalezení slabé formulace úlohy, můžeme dle postupu v Galerkinově metodě prostor V diskretizovat, tj. zkonstruovat podprostor $V_n \subset V$ a určit na něm bázi. Tím dostaneme soustavu lineárních rovnic, kterou umíme vyřešit a následně určíme aproximované řešení.

Poznámka 2.7. Podle Galerkinovy metody, konstruujeme nekonečnou posloupnost podprostorů V_n , $\dim V_n = N_n < \infty$. V praxi je tato posloupnost samozřejmě konečná. Dle analýzy konvergence řešení, které provádíme většinou porovnáváním nalezených funkcí $u_n \in V_n$, rozhodujeme zda získané výsledky již „postačují“.

Poznámka 2.8. Provedme nyní přeznačení. Diskretizovaný prostor V_n budeme dále označovat jako V_h . Změna indexu $n \rightarrow h$, krom ustáleného používání v literatuře, je dána tím, že později si nadefinujeme *diskretizační parametr* h . S tímto přeznačením souvisí např. i přechod u označování dimenzí, přesněji od $N_n \rightarrow N_h$.

MKP nám dává návod na to, jak prostor V_h a jeho bázi $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ volit. Cílem je dosáhnout toho, aby matice tuhosti vzniklé soustavy byla řídká. Tento požadavek vychází nejen z rozsáhlosti úloh a tedy i početní náročnosti s hustými maticemi, ale i složitosti výpočtu prvků matice. Prvky $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, viz str. 13, a počítají se z integrálů, což je obecně časově náročné.

Řídkosti matice dosáhneme pomocí:

1. Rozklad oblasti Ω na $s_h < \infty$ jednodušších podoblastí, tzv. **prvků**. V případě, kdy jsou těmito podoblastmi trojúhelníky, nazývá se rozklad **triangulací** \mathcal{T}_h , jednotlivé podoblasti (trojúhelníky) značíme T_i , $i = 1, 2, \dots, s_h$.
2. Zvolíme **prostor konečných prvků** V_h tak, aby na každé podoblasti T_i byly funkce $v_h \in V_h$ co nejjednodušší, většinou polynomiální.

3. Na prostoru V_h dimenze N_h zvolíme **bázi** $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ tak, aby měly funkce φ_i na prostoru V_h malý nosič. Tzn. většina z dvojic těchto funkcí je disjunktní a tedy příslušné vstupy do matice tuhosti jsou nulové.

Poznámka 2.9. Rozklad oblasti Ω budeme pro jednoduchost nazývat triangulací, i když prvky T_i nebudou trojúhelníky.

Poznámka 2.10. Při diskretizaci se používají tzv. **uzly triangulace**. Jedná se o významné body, které na prvcích volíme, většinou to jsou vrcholy prvků nebo např. i středy stran či těžiště. Navíc zde zadáváme jisté **uzlové parametry**, což jsou hodnoty koeficientů rovnice, počátečních podmínek apod.

Jaká triangulace je ta správná?

V předchozím odstavci jsme si řekli, že triangulace je speciální případ rozkladu oblasti Ω na podoblasti T_i .

Budeme předpokládat, že oblast Ω má po částech polynomiální hranici. Není-li tomu tak a oblast Ω má tzv. *křivočarou hranici*, najdeme vhodnou aproximaci oblasti, aby byl tento předpoklad splněn. Viz např. literatura [1], kapitola 4.7.

Definice 2.1. Nechť je dána oblast $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dále nechť je zde triangulace $\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, \dots, T_{s_h}\}$. Jestli-že jsou splněny následující podmínky

1. $\bigcup_{i=1}^{s_h} T_i = \overline{\Omega}$,
2. $\forall T_i, T_j \in \mathcal{T}_h$ takové, že $T_i \neq T_j$, $i, j = 1, 2, \dots, s_h$, je průnik jejich vnitřků prázdná množina,
3. $\forall T_i \in \mathcal{T}_h$, $i = 1, 2, \dots, s_h$, platí, že každá jeho strana je buď částí hranice oblasti Ω nebo stranou jiného prvku T_j , $i \neq j$,

pak triangulaci nazveme **přípustnou triangulací** na oblasti Ω .

Poznámka 2.11. Další podmínky pro přípustnou triangulaci mohou být

- a) $\forall T_i \in \mathcal{T}_h$ je $\partial T_i \in C^{0,1}(\Omega)$,
- b) jsou-li na hranici $\partial\Omega$ předepsány různé okrajové podmínky, pak bod na hranici, kde dochází ke změně podmínky, musí být vrcholem některého prvku z triangulace \mathcal{T}_h .

Kromě podmínek v Definicí 2.1, je vhodné při sestavování triangulace pamatovat na to, že vnitřní úhly v prvcích by neměly být příliš malé, obvykle je dolní hranice velikosti úhlu $20^\circ - 30^\circ$. Důležité je také to, navolit menší prvky, tj. jemnější triangulaci v místech, kde by mohlo dojít k výskytu větších chyb či prudších změn u řešení.

Definice 2.2. Index h , pro který platí

$$h = \max\{\text{diam}T_i ; T_i \in \mathcal{T}_h, i = 1, 2, \dots, s_h\},$$

nazveme **diskretizační parametr**.

Poznámka 2.12. Tohoto parametru využíváme např. při analýze konvergence. Jestliže máme posloupnost $\{V_h\}_{h=1}^\infty \subset V$ a platí

$$V_h \rightarrow V \quad \text{pro } h \rightarrow 0,$$

pak posloupnost podprostorů konverguje k V a je volena dobře.

Co je to konečný prvek?

Jak už vypovídá název metody, pracujeme s tzv. *konečnými prvky*. Následující definice nás s nimi obeznámí.

Definice 2.3. Trojici (T, P, Σ) , kde

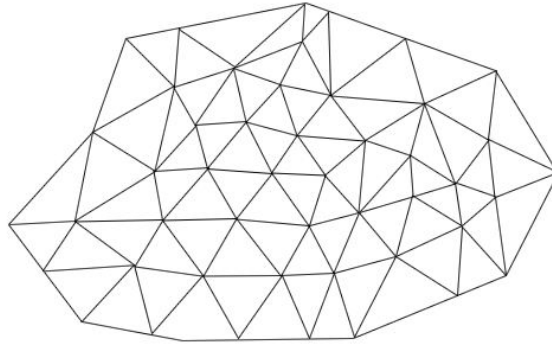
1. $T \subset \mathbb{R}^n$, n určuje dimenzi, je prvek, tj. uzavřená podmnožina v \mathbb{R}^n s neprázdným vnitřkem a lipschitzovskou hranicí,
2. P je prostor funkcí zobrazující $T \rightarrow \mathbb{R}$, $\dim P = N$,
3. Σ je množina lineárních forem $L_i : P \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$,

nazveme **konečným prvkem**.

Poznámka 2.13. Prostor P je často volen jako prostor polynomů. Prvky množiny Σ se často nazývají **stupni volnosti**.

Příklad 2.1. Jak vypadají prvky v závislosti na dimenzi n prostoru \mathbb{R}^n ?

V \mathbb{R}^1 jsou prvky přímky. V \mathbb{R}^2 volíme za prvky např. trojúhelníky (viz obrázek 1) či obdélníky. V \mathbb{R}^3 se jedná např. o čtyřstěny nebo hranoly.



Obrázek 1: Triangulace oblasti Ω v \mathbb{R}^2 .

Důležitá vlastnost, kterou u konečného prvku požadujeme je následující.

Definice 2.4. Konečný prvek (T, P, Σ) se nazývá **unisolvantní**, jestliže pro každou funkci $p \in P$ platí

$$(L_1(p) = L_2(p) = \dots = L_n(p) = 0) \Rightarrow (p = 0).$$

Jinými slovy, každý n -rozměrný vektor

$$\mathbf{L}(p) = (L_1(p), L_2(p), \dots, L_n(p))' \in \mathbb{R}^n$$

jednoznačně určuje polynom $p \in P$.

Tato vlastnost nám zaručuje to, že volba množiny Σ a prostoru P jsou ve vzájemném souladu.

Příklad 2.2. Ukažme si, jak mohou konečné prvky vypadat.

a) *Lineární prvek na simplexu* - zde za konečný prvek volíme trojici

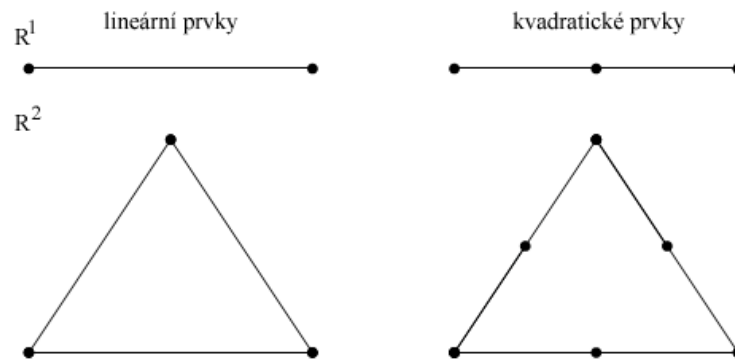
$$(T, P^1(T), \{p(A_i) ; i = 1, 2, \dots, n + 1\}).$$

- T je simplex v prostoru \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$.
- $P^1(T)$ je prostor všech lineárních polynomů $p(\mathbf{x})$ nad simplexem T , tj. pro $\mathbf{x} \in T$ je $p(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$, $a_n \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Dimenze tohoto prostoru je $n + 1$.
- Jako množinu Σ vezmeme lineární formy $L_i = p(A_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, kde A_i jsou navzájem různé body v T , často voleny jako vrcholy simplexu.

b) *Kvadratický prvek na simplexu* - uvažujeme trojici $(T, P^2(T), \Sigma)$, kde

- T je simplex v prostoru \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$.
- $P^2(T)$ je prostor všech kvadratických polynomů $p(\mathbf{x})$ nad simplexem T , tj. pro $\mathbf{x} \in T$ je $p(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j$, $a_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $1 \leq i < j \leq n$. A dimenze tohoto prostoru je $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.
- Jako prvky množiny Σ vezmeme lineární formy, které jsou hodnotami polynomu ve vrcholech T , tj. $p(A_i)$ pro $i = 1, 2, \dots, n+1$ a středech hran T , tj. $p(A_{ij})$ pro $1 \leq i < j \leq n+1$.

Obrázek 2 ukazuje postupně lineární a kvadratický prvek v prostorech \mathbb{R}^1 a \mathbb{R}^2 . Oba dva prvky se liší především počtem uzlů, které na prvku volíme. Tento počet je určen dimenzí prostoru polynomů.



Obrázek 2: Lineární a kvadratický prvek na simplexu v prostoru \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 .

c) *Lineární prvky na obdélníku* - zde vezmeme trojici $(T, Q^1(T), \Sigma)$, kde

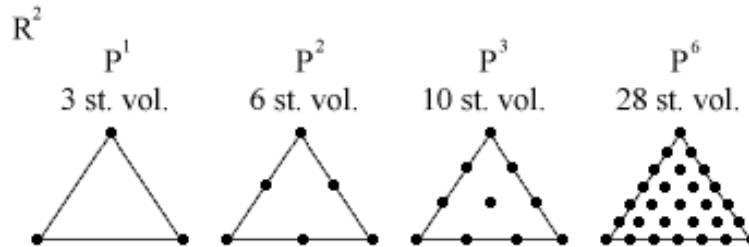
- T je obdélník v prostoru \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$.
- $Q^1(T)$ je prostor polynomů $p(\mathbf{x})$ nad T tvaru $p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_{q_1, \dots, q_n} x_i^{q_1} \dots x_n^{q_n}$, kde $\mathbf{x} \in T$, $q_i \in \langle 0, 1 \rangle$ a hodnoty a jsou reálné konstanty. Např. bilineární polynom v \mathbb{R}^2 je $p(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2$. Dimenze tohoto prostoru je 2^n .
- Jako prvky množiny Σ uvažujeme lineární formy z \mathbb{R}^n , které jsou hodnotami polynomu p ve vrcholech A_i pro $i = 1, \dots, 2^n$ obdélníku T .

Příklad 2.3. U následujícího typu konečných prvků předpokládáme splnění podmínky unisolventnosti.

Konečný prvek Lagrangeova typu - všechny stupně volnosti v bodě jsou ve tvaru polynomu a jejich počet je roven počtu uzlů na prvku. V případě simplexu máme

$$\frac{(n+k)!}{n!k!}$$

stupňů volnosti, kde n je dimenze prostoru a k je stupeň polynomu. Na obrázku 3 vidíme nejčastější rozmístění uzlů na trojúhelníku prostoru \mathcal{P}^k , $k = 1, 2, 3, 6$.



Obrázek 3: Uzly triangulace na trojúhelníku v prostoru \mathbb{R}^2 pro P^1, P^2, P^3 a P^6 .

Všechny prvky uvedené v předchozím příkladě 2.2 jsou tohoto typu. Popis více základních typů konečných prvků naleznete v literatuře [1], kapitole 4.

Poznámka 2.14. Problém unisolventnosti a otázka jejího ověření přes tzv. *Vandermondeovu matici* je zpracována např. v literatuře [6], kapitole 3.1.

Prostory konečných prvků

Základní verze metody konečných prvků nejčastěji pracuje s prostory V_h , které mají jako bázi po částech lineární funkce φ_i , $i = 1, 2, \dots, N_h$. V tomto případě se jako uzly triangulace uvažují vrcholy prvků, označme si je \mathbf{x}_i . Bázové funkce se volí tak, aby měly malý nosič a to konkrétně, vezmeme-li bázovou funkci φ_i , pak v uzlu \mathbf{x}_i je rovna jedné a v ostatních uzlech \mathbf{x}_j , $j \neq i$, je nulová. Tyto funkce se nazývají **Courantovy bázové funkce**, viz literatura [10], a splňují tedy podmínku

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}, \tag{2.12}$$

kde δ_{ij} je *Kroneckerovo delta*.

Máme-li prostor \mathbb{R}^1 a uvažujeme $\Omega = \langle a, b \rangle$, uzly triangulace

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{s_h} = b$$

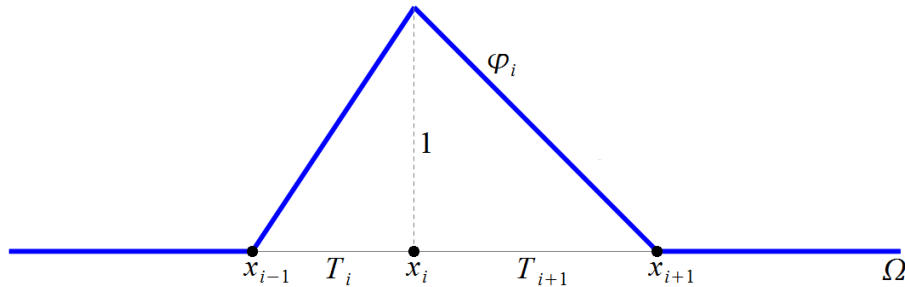
a prvky jsou tedy intervaly $T_i = (x_{i-1}, x_i)$. Bázových funkcí je zde $s_h - 1$, kde s_h vyjadřuje počet prvků triangulace a lze je zapsat předpisem

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & \text{pro } x \in \overline{T}_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & \text{pro } x \in \overline{T}_{i+1}, \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases} \quad (2.13)$$

pro $i = 1, 2, \dots, s_h - 1$.

Těmto funkcím se obecně říká **střeňové funkce**, viz obrázek 4. Z počtu funkcí v bázi lze ihned říci, jaká je dimenze prostoru V_h ,

$$\dim V_h = N_h = s_h - 1.$$



Obrázek 4: Bázová funkce $\varphi_i(x)$ v \mathbb{R}^1 .

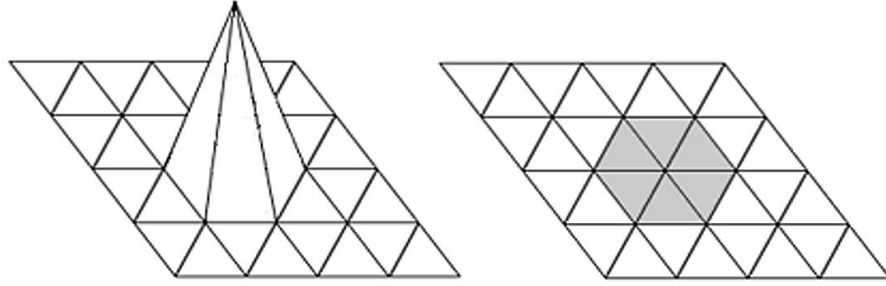
Využitím bázových funkcí (2.13) můžeme řešení diskretizované úlohy (2.4) napsat ve tvaru

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{s_h-1} y_i \varphi_i(x), \quad (2.14)$$

kde y_i jsou neznámé hledané koeficienty, které dostaneme vyřešením soustavy lineárních rovnic (2.5), tj.

$$\mathbf{A}_h \mathbf{y}_h = \mathbf{b}_h.$$

Na obrázku 5 je ukázána bázová funkce a vyznačen její nosič v prostoru \mathbb{R}^2 .



Obrázek 5: Bázová funkce a její nosič v \mathbb{R}^2 .

Poznámka 2.15. Z podmínky (2.12) a předpisu (2.14) pro řešení u_h plyne

$$u_h(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, s_h - 1.$$

Navíc, provedeme-li restrikcí řešení na prvek T_i , dostaneme

$$u_h(x) = y_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + y_i\varphi_i(x). \quad (2.15)$$

Konvergence MKP

Řekli jsme si, že metoda konečných prvků vzniká z Galerkinovy metody, kdy bázi prostoru volíme speciálně. Proto konvergenci MKP můžeme vyřešit podobně jako u Galerkinovy metody, viz strana 14.

Prostory V_h se v klasické metodě konečných prvků volí zjemňováním sítě. Což znamená, že diskretizační parametr $h \rightarrow 0$. Označujeme ji tedy jako h - verzi. V tomto případě prostor konečných prvků i báze volíme obdobně. Téma konvergence této verze je podrobněji zpracováno např. v literatuře [1], kapitole 5.

Druhou možností je zanechat zvolenou síť, tj. pracujeme na stejných prvcích, ale zvýšíme dimenzi prostoru konečných prvků a tedy bázové funkce volíme jako polynomy vyššího stupně. Zde ale na každém prvku triangulace uvažujeme více uzlů v závislosti na stupni p prostoru \mathcal{P}^p . Proto mluvíme o p - verzi metody.

V obou případech řešíme problém konvergence přes vztah $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0$.

V praxi se často používá také kombinace obou verzí, jedná se o *adaptivní metodu*, konkrétně o hp - verzi, viz např. literatura [5], kapitola 6.

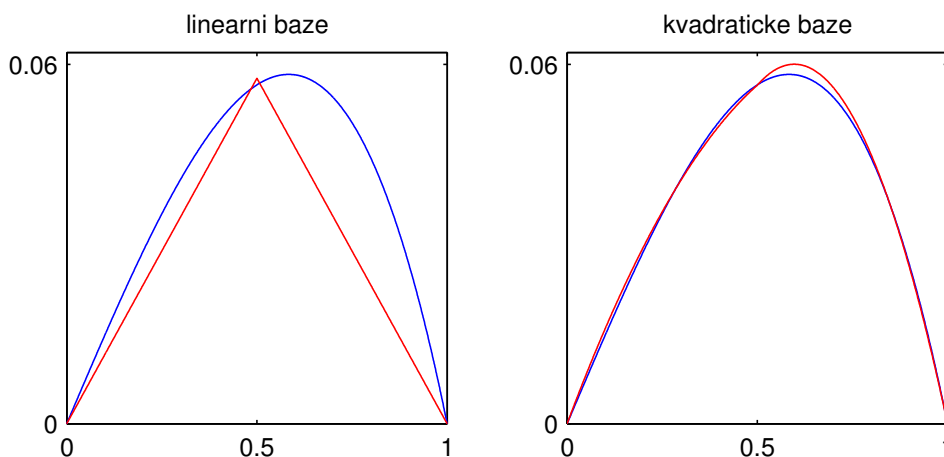
3 P-verze metody konečných prvků v 1D

Řekli jsme si, že v klasické MKP dosáhneme konvergence aproximovaných řešení k přesnému řešení zjemňováním sítě nebo lze také zanechat zvolenou síť a zvyšovat stupeň bázových polynomů. Nyní se podíváme na p-verzi MKP a směřujeme k tzv. *hierarchickým bázím*.

Ukažme si nejdříve motivační příklad. Uvažujme jednoduchou úlohu s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x & \text{na } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Přesné řešení této úlohy je $u(x) = x - \frac{\sinh x}{\sinh 1}$, viz literatura [20], str. 16. Oblast Ω rozdělíme ekvidistantně na dva prvky, $T_1 = (0, 0.5)$ a $T_2 = (0.5, 1)$. Vezmeme prvně po částech lineární bázi na daném prostoru a poté po částech kvadratickou bázi. Aproximovaná řešení (znázorněna červeně) vzhledem k přesnému řešení (modře) ukazuje obrázek 6. Vidíme, že zvýšení stupně bázových funkcí se projevilo a dostali jsme přesnější řešení. Podrobněji je tento příklad zpracován v kapitole 3.5 v příkladu 3.1.



Obrázek 6: Přesné řešení úlohy a přibližná řešení.

Dříve než se budeme věnovat eliptickým úlohám 2. řádu, řekneme si něco o tzv. referenčním prvku a zobrazení. Pracujeme-li s libovolnou oblastí $\Omega \in \mathbb{R}$, tj. obecně s intervalem a zde s prvky $T_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, s_h$, triangulace \mathcal{T}_h , je pro

nás vhodnější zavést jisté lineární zobrazení, které nám prvky T_i transformuje na základní interval, často volený jako $(-1, 1)$. Toto nám zjednoduší práci např. při vytváření algoritmu výpočtu. Kdy pracujeme s každým prvkem jako s intervalem $(-1, 1)$ a až po dokončení výpočtů provedeme transformaci výsledků.

Lineární zobrazení, které nazýváme **referenčním zobrazením**, můžeme pro $T_i = (x_{i-1}, x_i)$ zavést takto

$$x_{T_i} : T_{ref} \rightarrow T_i, \quad (3.1)$$

s vlastnostmi

$$\begin{aligned} x_{T_i}(\xi) &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi, \\ x_{T_i}(-1) &= x_{i-1}, \\ x_{T_i}(1) &= x_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Kde $T_{ref} = (-1, 1)$ je tzv. **referenční prvek** a $\xi \in T_{ref}$. Koeficienty $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ se vypočítají velmi snadno. Předpokládáme-li, že na každém prvku $T_i \in \mathcal{T}_h$ pracujeme s daným prostorem polynomů stupně nejvýše p_i , kde $i = 1, 2, \dots, s_h$, pak můžeme uvažovat následující.

▷ Obecně jsou koeficienty z (3.2) tvaru

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \\ \alpha_2 &= \frac{x_i - x_{i-1}}{2}. \end{aligned}$$

▷ Prostor V_h lze psát jedním ze způsobů

$$\begin{aligned} V_h &= \{v \in V ; v|_{T_i} \in \mathcal{P}^{p_i}(T_i), \forall i = 1, 2, \dots, s_h\}, \\ V_h &= \{v \in V ; v|_{T_i} \circ x_{T_i} \in \mathcal{P}^{p_i}(T_{ref}), \forall i = 1, 2, \dots, s_h\}. \end{aligned}$$

▷ A dimenzi prostoru V_h určíme dle vzorce

$$\dim V_h = N_h = (s_h - 1) + \sum_{i=1}^{s_h} (p_i - 1) = -1 + \sum_{i=1}^{s_h} p_i,$$

kde jsme sečetli dimenzi prostoru polynomů prvního řádu s dimenzemi prostorů polynomů vyšších řádů.

▷ Slabá formulace dané úlohy zůstává formálně totožná, ale musíme provést transformaci funkcí a integrálu, který se vyskytuje v bilineární formě $a(\cdot, \cdot)$ a lineárním funkcionálu $l(\cdot)$.

Podíváme-li se konkrétně na modelový příklad z kapitoly 2.3, vidíme, že jeho slabá formulace je tvaru (2.10). Po úpravě pro prostor \mathbb{R} a oblast (a, b) je tvaru

$$\int_a^b a_1 u' v' dx + \int_a^b a_0 u v dx = \int_a^b f v dx.$$

Po aplikaci Galerkinovy metody, kdy se již pohybujeme na diskretizovaném prostoru V_h a máme zde zvolenou bázi $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}\}$, řešíme na každém prvku $T_m = (x_{m-1}, x_m) \subset (a, b)$, $m = 1, 2, \dots, s_h$, rovnici

$$\sum_{j=1}^{N_h} y_j \int_{T_m} a_1 \varphi_j' \varphi_i' dx + \sum_{j=1}^{N_h} y_j \int_{T_m} a_0 \varphi_j \varphi_i dx = \int_{T_m} f \varphi_i dx, \quad i = 1, 2, \dots, N_h. \quad (3.3)$$

Tj. po sečtení přes všechny prvky T_m , $m = 1, 2, \dots, s_h$, dostáváme předpis přes celou oblast (a, b) a celkem pro $i = 1, 2, \dots, N_h$ máme soustavu N_h rovnic, odkud vypočítáme koeficienty y_j , $j = 1, 2, \dots, N_h$. Výsledná aproximace hledaného řešení u_h slabé formulace úlohy je tvaru

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} y_j \varphi_j.$$

Nyní provedeme transformaci jednotlivých členů pomocí referenčního zobrazení x_{T_m} . Vezmeme obecnou funkci $g \in C^1(T_m)$. Funkci g na T_m transformovanou na referenční prvek T_{ref} , označme ji $\hat{g}^{(m)}$, získáme dle předpisu

$$\hat{g}^{(m)}(\xi) = (g \circ x_{T_m})(\xi) = g(x_{T_m}(\xi)) = g(x)|_{x=x_{T_m}(\xi)}. \quad (3.4)$$

Derivaci funkce $\hat{g}^{(m)}$ lze psát

$$[\hat{g}^{(m)}(\xi)]' = (g \circ x_{T_m})'(\xi) = g'(x)|_{x=x_{T_m}(\xi)} J_{T_m}(\xi). \quad (3.5)$$

V obou předpisech je $\xi \in T_{ref}$ a x_{T_m} je dáno dle (3.1), (3.2). Navíc J_{T_m} je Jacobian referenčního zobrazení a obvykle je konstantní a nenulový.

Dle výše uvedených vzorců (3.4), (3.5) můžeme levou, resp. pravou stranu z rovnice (3.3) na T_{ref} psát

$$\sum_{j=1}^{N_h} y_j \int_{T_m} a_1 \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + \sum_{j=1}^{N_h} y_j \int_{T_m} a_0 \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_h} y_j \int_{T_{ref}} a_1 \frac{1}{J_{T_m}} [\hat{\varphi}_j^{(m)}(\xi)]' \frac{1}{J_{T_m}} [\hat{\varphi}_i^{(m)}(\xi)]' J_{T_m} d\xi + \quad (3.6)$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_h} y_j \int_{T_{ref}} a_0 \hat{\varphi}_j^{(m)}(\xi) \hat{\varphi}_i^{(m)}(\xi) J_{T_m} d\xi = \quad (3.7)$$

$$= \sum_{j=1}^{N_h} y_j \int_{T_{ref}} a_1 \frac{1}{J_{T_m}} [\hat{\varphi}_j^{(m)}(\xi)]' [\hat{\varphi}_i^{(m)}(\xi)]' d\xi + \sum_{j=1}^{N_h} y_j \int_{T_{ref}} a_0 \hat{\varphi}_j^{(m)}(\xi) \hat{\varphi}_i^{(m)}(\xi) J_{T_m} d\xi,$$

resp.

$$\int_{T_m} f(x) \varphi_i(x) dx = \int_{T_{ref}} \hat{f}^{(m)}(\xi) \hat{\varphi}_i^{(m)}(\xi) J_{T_m} d\xi \quad (3.8)$$

pro $i = 1, 2, \dots, s_h$.

Poznámka 3.1. Hodnoty J_{T_m} se ve výrazech (3.6), (3.7), (3.8) objevily díky aplikaci věty o substituci, ta produkuje Jacobián v integrálu. Viz kapitola 1.6.

3.1 Uzlové bázové funkce v MKP

Pro názornost si nyní ukážeme jeden typ funkcí, se kterými pracuje metoda konečných prvků. Poté zavedeme hierarchické báze.

Jedna možnost volby bázových funkcí na referenčním prvku T_{ref} , tedy bází z prostoru polynomů $\mathcal{P}^{p_i}(T_{ref})$, je hledat je jako funkce, které jsou tvořeny na základě znalostí Lagrangeovy interpolace, jedná se tedy o tzv. **Lagrangeovy uzlové tvarové funkce vyššího řádu**. Těchto funkcí je na prostoru polynomů řádu p_i celkem $p_i + 1$ a označme si je

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{p_i+1} \in \mathcal{P}^{p_i}(T_{ref}).$$

Dále zde uvažujeme $p_i + 1$ uzlových bodů

$$-1 = x_1 < x_2 < \dots < x_{p_i+1} = 1,$$

pro které jsou splněny Lagrangeovy interpolační podmínky

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, p_i + 1.$$

Na základě výše uvedených podmínek a vzorce pro Lagrangeův interpolační polynom (1.4) získáme explicitní předpis pro Lagrangeovy uzlové tvarové funkce

$$\phi_i(\xi) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p_i+1} \frac{(\xi - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, p_i + 1. \quad (3.9)$$

Konkrétně pro po částech lineární aproximaci, tedy pro $p_i = 1$, dávají dva uzlové body $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$ dvojici tvarových funkcí

$$\phi_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad \phi_2(\xi) = \frac{\xi + 1}{2}.$$

Uzly můžeme na daném referenčním prvku volit ekvidistantně, ale v praxi se častěji využívají vhodnější sítě uzlů. Nejznámější body pro konstrukci prvků vyšších řádů jsou *Chebyshevovy* nebo *Gauss-Lobattovy body*.

a) **Chebyshevovy body** jsou pro stupeň polynomu $p_i > 1$ na referenčním prvku T_{ref} definovány takto

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{p_i}\right), \quad j = 1, 2, \dots, p_i + 1.$$

Celkem je těchto bodů $p_i + 1$.

b) **Gauss-Lobattovy body** se volí jako kořeny funkce

$$(1 - x^2)L'_{p_i}(x),$$

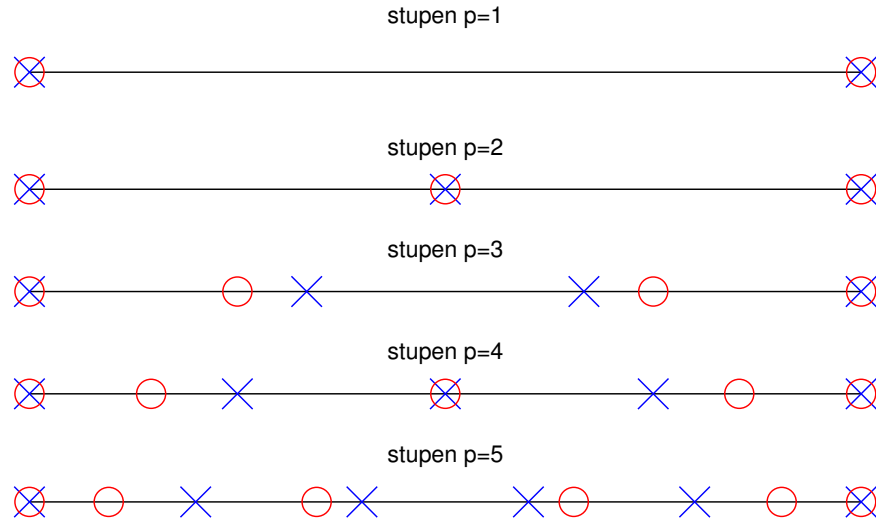
kde $L_{p_i}(x)$ je *Legendreův polynom* a těchto bodů je opět $p_i + 1$.

Pro Legendreův polynom obecně $L_p(x)$ platí následující rekurentní vztah

$$L_{p+1}(x) = \frac{1}{p+1} \left((2p+1)xL_p(x) - pL_{p-1}(x) \right),$$

první dva členy jsou $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$. Tento polynom je podrobněji zpracován v literatuře [7], kapitole 2.1.

Poznámka 3.2. Obrázek 7 ukazuje rozložení ekvidistantních uzlů (modré křížky) a Chebyshevových uzlů (červené kolečka), dle stupně polynomu $p = 1, 2, \dots, 5$, na referenčním prvku $T_{ref} = (-1, 1)$.



Obrázek 7: Ekvidistantní uzly a Chebyshevovy uzly pro $p = 1, 2, \dots, 5$.

Poznámka 3.3. Bází na daném prostoru, která je tvořena Lagrangeovými uzlovými tvarovými funkcemi, krátce nazveme jako uzlovou či Lagrangeovou bází.

Poznámka 3.4. Na obrázku 8 jsou znázorněny Lagrangeovy uzlové tvarové funkce pro Chebyshevovy body na referenčním prvku T_{ref} . Postupně vidíme báze pro prostory $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3$ a \mathcal{P}^4 . Funkce nabývající hodnoty 1 ve vrcholu, tj. krajním bodě intervalu, se nazývají **vrcholové funkce** - znázorněny červenou čarou. Zbylé funkce se označují jako **bublinové funkce** - znázorněny modrou čarou.

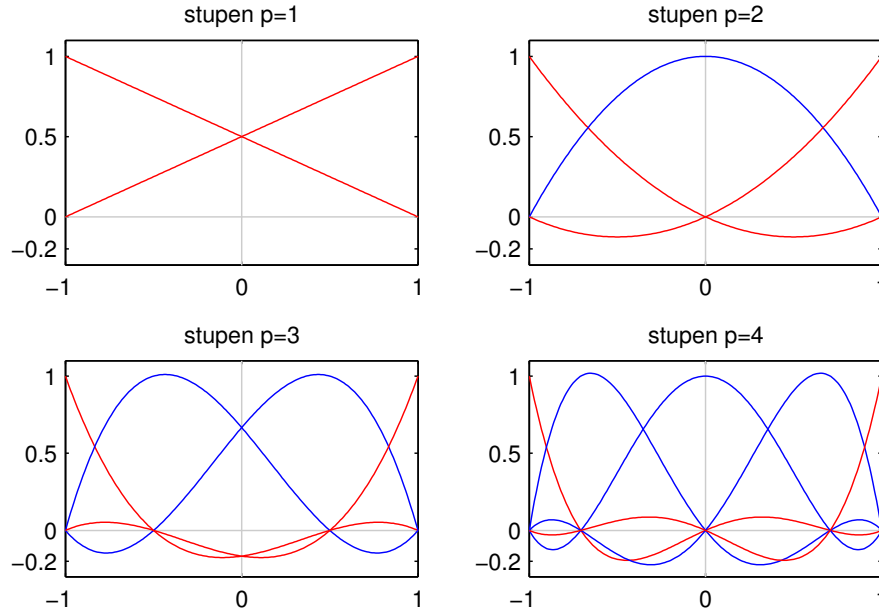
3.2 Hierarchické bázové funkce v MKP

Alternativní cestou ke konstrukci vhodné báze na prostoru polynomů $\mathcal{P}^{p_i}(T_{ref})$ lze využít tzv. **hierarchické tvarové funkce**. Myšlenka hierarchického přístupu je následující. Jestliže jsme již na prostoru $\mathcal{P}^{p_i}(T_{ref})$ našli systém tvarových funkcí

$$\mathcal{B}_{p_i} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{p_i+1}\},$$

který tvoří bázi na tomto prostoru, pak bázi prostoru $\mathcal{P}^{p_{i+1}}(T_{ref})$ lze definovat přidáním jedné tvarové funkce jako

$$\mathcal{B}_{p_{i+1}} = \mathcal{B}_{p_i} \cup \{\psi_{p_{i+1}}\}. \quad (3.10)$$



Obrázek 8: Lagrangeovy uzlové tvarové funkce pro Chebyshevovy body.

Báze na prostoru $\mathcal{P}^1(T_{ref})$ je totožná s Lagrangeovou bází pro po částech lineární funkce. Tedy

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\}.$$

Mezi často používané hierarchické tvarové funkce pro eliptické úlohy v 1D patří **Lobattovy polynomy** (viz literatura [14], str. 121)

$$\begin{aligned} l_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{2}, \\ l_2(\xi) &= \frac{1+\xi}{2}, \\ l_k(\xi) &= \sqrt{\frac{2(k-1)-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} L_{k-2}(\eta) d\eta \quad \text{pro } k = 3, 4, \dots, p_i + 1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Funkce L_j jsou Legendreovy polynomy zmíněné na straně 30, které jsou ortogonální v prostoru $L^2(-1, 1)$.

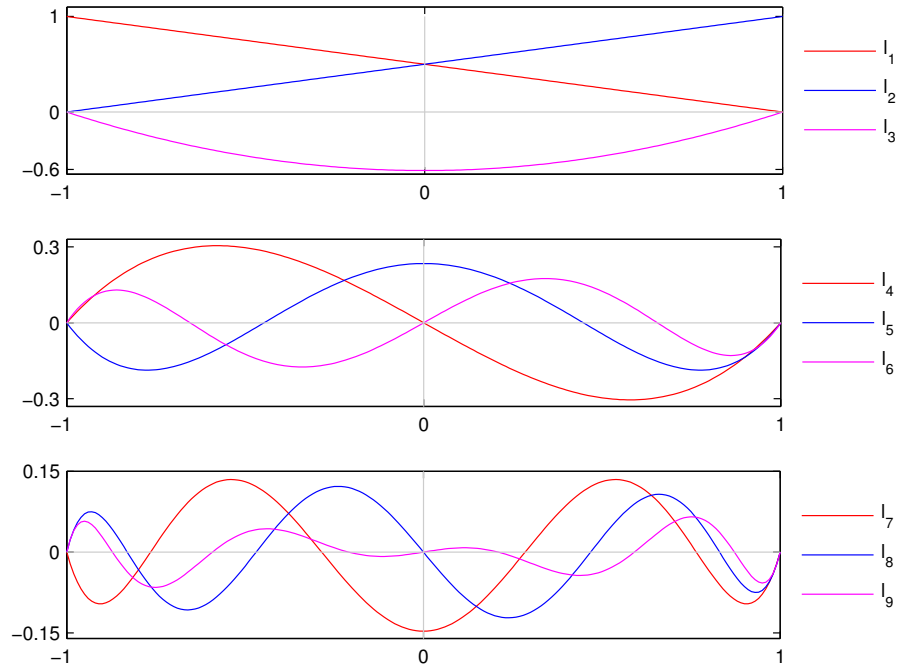
Z předpisu pro Lobattovy polynomy (3.11), konkrétně z integrálu, lze vidět, že jsou všechny funkce l_k , pro $k \geq 3$, v bodě -1 nulové. Z ortogonalit a toho, že $L_0(x) = 1$, zase plyne

$$l_k(1) = \sqrt{\frac{2(k-1)-1}{2}} \int_{-1}^1 L_{k-2}(\eta) d\eta = \sqrt{\frac{2(k-1)-1}{2}} \int_{-1}^1 L_{k-2}(\eta) L_0(\eta) d\eta = 0$$

pro každé $k \geq 3$. Můžeme tedy říci, že funkce $l_1, l_2, \dots, l_{p_i+1}$ tvoří vhodnou bázi na prostoru $P^{p_i}(T_{ref})$.

Ukažme si nyní několik **Lobattových hierarchických funkcí** (viz literatura [6], str. 74) a také jejich grafy, které jsou znázorněny na obrázku 9,

$$\begin{aligned} l_3(\xi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (\xi^2 - 1), \\ l_4(\xi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (\xi^2 - 1) \xi, \\ l_5(\xi) &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{7}{2}} (\xi^2 - 1) (5\xi^2 - 1), \\ l_6(\xi) &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{9}{2}} (\xi^2 - 1) (7\xi^2 - 3) \xi, \\ l_7(\xi) &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{11}{2}} (\xi^2 - 1) (21\xi^4 - 14\xi^2 + 1), \\ l_8(\xi) &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{13}{2}} (\xi^2 - 1) (33\xi^4 - 30\xi^2 + 5) \xi, \\ l_9(\xi) &= \frac{1}{128} \sqrt{\frac{15}{2}} (\xi^2 - 1) (429\xi^6 - 495\xi^4 + 135\xi^2 - 5), \\ l_{10}(\xi) &= \frac{1}{128} \sqrt{\frac{17}{2}} (\xi^2 - 1) (715\xi^6 - 1001\xi^4 + 385\xi^2 - 35) \xi. \end{aligned}$$



Obrázek 9: Lobattovy hierarchické funkce l_0, l_1, \dots, l_8 .

Poznámka 3.5. Důvod, proč zavádíme přístup přes hierarchické báze je jednoduchý. V MKP po diskretizaci prostoru V na V_h a nalezení báze $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$, řešíme

soustavu ze strany 13, tj. $\mathbf{A}_h \mathbf{y}_h = \mathbf{b}_h$, s maticí tuhosti $\mathbf{A}_h = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{N_h}$, kde $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $i, j = 1, 2, \dots, N_h$. V případě uzlové báze musíme při zvýšení stupně prostoru polynomů přepočítávat všechny prvky matice \mathbf{A}_h . Ale u hierarchických bazových funkcí zůstává matice stejná, jen dojde k jejímu rozšíření přidáním určitého počtu řádků či sloupců. Tento přístup je tedy početně méně náročný.

Konstrukce báze na prostoru V_h

Spojíme-li hierarchické tvarové funkce a referenční zobrazení x_{T_i} ze (3.1), můžeme lehce zkonstruovat hierarchickou bázi na prostoru V_h . Uvažujme opět obecnější případ, kdy na každém prvku $T_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, s_h$, triangulace \mathcal{T}_h máme prostor polynomů stupně nejvýše $p_i \geq 1$. Pro každý vnitřní vrchol x_i , $i = 1, 2, \dots, s_h - 1$, existuje jedna vrcholová funkce φ_i , která je nulová na celé oblasti kromě prvků T_i a T_{i+1} a má předpis

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (l_2 \circ x_{T_i}^{-1})(x) & \text{pro } x \in T_i, \\ (l_1 \circ x_{T_{i+1}}^{-1})(x) & \text{pro } x \in T_{i+1}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Hierarchické tvarové funkce druhého a vyššího řádu jsou bublinové funkce dané předpisem

$$(l_3 \circ x_{T_i}^{-1})(x), (l_4 \circ x_{T_i}^{-1})(x), \dots, (l_{p_m+1} \circ x_{T_i}^{-1})(x).$$

Poznámka 3.6. Inverze k referenčnímu zobrazení, pomocí níž jsou definovány báze na prvku T_i , se během výpočtů přímo nevyčíslovává.

Poznámka 3.7. Podobně můžeme provést konstrukci Lagrangeovy báze spojením Lagrangeových tvarových funkcí a referenčního zobrazení. Viz literatura [6], str. 76.

Poznámka 3.8. Pro báze na prostoru V_h , které jsou definovány pro celou oblast Ω , tj. funkce φ_i , se často používá přívlastek **globální**. Naopak báze na referenčním prvku, či obecně na prvku T_i , tj. funkce ϕ_i , resp. l_i , se nazývají **lokální**.

Poznámka 3.9. Otázka ohledně kvality tvarových bází je řešena např. v literatuře [6] v kapitole 2.5.3. Uvažujme zde rovnici (2.8) s podmínkou (2.9) a dále referenční prvek $(-1, 1)$. Pomocí teorie o podmíněnosti matice se ukazuje, že

v případě Lagrangeových funkcí na ekvidistantní síti uzlů roste číslo podmíněnosti matice tuhosti s rostoucím stupněm prostoru polynomů exponenciálně a úloha je velmi špatně podmíněná. Na Chebyshevových i Gauss-Lobattových uzlech je číslo podmíněnosti přívětivější. Nejlépe však vychází volba Lobattových hierarchických funkcí.

Ovšem pro obecnější problém (2.11), výše uvedené platí, když $a_0 \ll a_1$. Pokud tomu tak není, Lagrangeovy tvarové funkce na Chebyshevových či Gauss-Lobattových bodech jsou výhodnější.

Matice tuhosti pro Lobattovy hierarchické funkce

Matice tuhosti \mathbf{A} ze strany 13 se v případě hierarchických báзовých funkcí skládá z bloků. Jedná se o řídkou matici, což plyne z vlastností Lobattových polynomů, přesněji ortogonality Legendreových polynomů a předpisu pro jednotlivé prvky matice \mathbf{A} , kdy $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$.

Konkrétně pro Laplaceovu rovnici s homogenní okrajovou podmínkou, tj.

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 \text{ na } \Omega, \\ u(x) = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

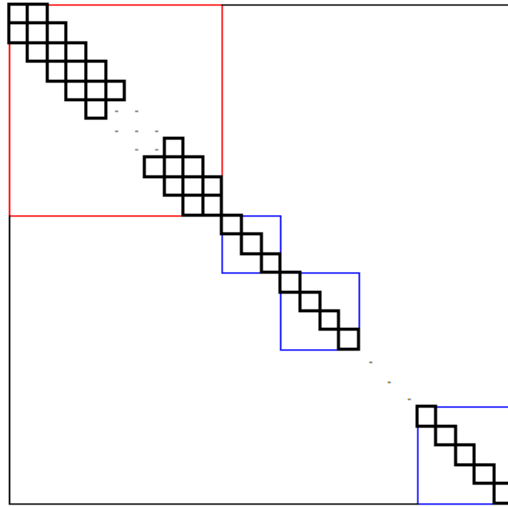
má matice strukturu zobrazenou na obrázku 10. První, třídiagonální, blok vlevo nahoře (znázorněn červeně) má rozměr $(s_h - 1) \times (s_h - 1)$ a odpovídá po částech lineárním báзовým funkcím $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s_h-1}$. Ostatních s_h bloků (znázorněny modře) má postupně rozměry

$$(p_1 - 1) \times (p_1 - 1), (p_2 - 1) \times (p_2 - 1), \dots, (p_{s_h} - 1) \times (p_{s_h} - 1)$$

a patří po řadě prvkům T_1, T_2, \dots, T_{s_h} . Hodnoty p_i značí stupeň prostoru polynomů na i -tém prvku.

Nehomogenní Dirichletovy okr. podmínky pro eliptické úlohy 2. řádu

Zatím jsme se věnovali převážně homogenním Dirichletovým okrajovým podmínkám. Tento typ podmínek je jednodušší pro výpočty. Nyní se podíváme u modelové úlohy z kapitoly 2.3 i na nehomogenní Dirichletovy okrajové podmínky, viz literatura [5], kapitola 3.1. Tedy pro rovnici (2.8) upravenou pro 1. dimenzi



Obrázek 10: Schéma matice tuhosti pro Laplaceovu rovnici.

máme

$$\begin{cases} -(a_1 u')' + a_0 u = f \text{ na } \Omega, \\ u = g \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.13)$$

kde $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a_0 \geq 0$, $a_1 > 0$ a $f \in L^2(\Omega)$. Okrajovou podmínku můžeme napsat přesněji jako

$$u(a) = g_a \in \mathbb{R}, \quad u(b) = g_b \in \mathbb{R}.$$

Řešení této úlohy (3.13) hledáme ve tvaru

$$u = u^* + \bar{u}, \quad (3.14)$$

kde funkce $u^* \in W^{1,2}(\Omega)$ splňuje dané okrajové podmínky, tj.

$$u^*(a) = g_a, \quad u^*(b) = g_b$$

a funkce $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ je nová neznámá funkce, která splňuje homogenní Dirichletovy okrajové podmínky

$$\bar{u}(a) = \bar{u}(b) = 0.$$

Celkem tedy platí $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Poznámka 3.10. Tento tvar řešení (3.14) pro úlohy s Dirichletovými okrajovými podmínkami volíme proto, že potencionální množina funkcí

$$\{v \in W^{1,2}(\Omega) ; v = g \text{ na } \partial\Omega\}$$

netvoří prostor.

Hledáme tedy funkci $\bar{u} \in V$, $V = W_0^{1,2}(\Omega)$, která splňuje slabou formulaci

$$a(\bar{u}, v) = l(v).$$

Přesněji, řeší rovnici

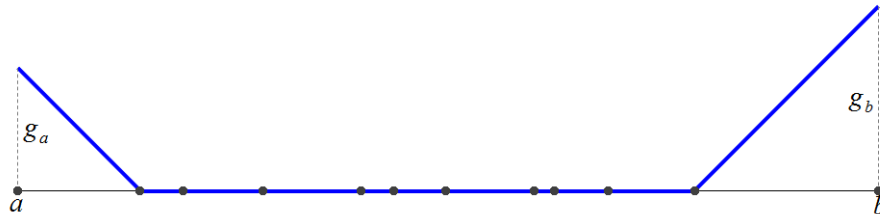
$$\int_a^b a_1 \left(u^*(x) + \bar{u}(x) \right)' v'(x) dx + \int_a^b a_0 \left(u^*(x) + \bar{u}(x) \right) v(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx, \quad (3.15)$$

pro $\forall u^*, v \in V$. Poté postupujeme jako v úvodu kapitoly 3. Zavedeme tedy referenční prvek $T_{ref} = (-1, 1)$ a známé referenční zobrazení x_{T_i} podle (3.2). Diskretizujeme prostor V na V_h . A prvky z rovnice (3.15) transformujeme na referenční prvek T_{ref} podobně jako na straně 28.

Poznámka 3.11. Funkci u^* volíme jednoduše a to jako spojitou po částech lineární funkci, která je nenulová na dvou krajních prvcích. Viz obrázek 11. V případě, že používáme Lobattovy hierarchické prvky, tedy prvky, kde řešení u je na i -tém prvku polynomem řádu p_i a funkce $\bar{u} \in V$, pak funkce u^* také musí být polynomiální řádu p_i na prvku T_i .

Navíc u^* můžeme při použití Lobattových hierarchických funkcí transformovat z prvku sítě T_i na referenční prvek T_{ref} následovně

$$(u^* \circ x_{T_i})(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 2 \leq i \leq s_h - 1, \\ g_a l_1(\xi) & \text{pro } i = 1, \\ g_b l_2(\xi) & \text{pro } i = s_h. \end{cases}$$



Obrázek 11: Příklad volby funkce u^* na intervalu (a, b) .

3.3 Numerická integrace v 1D

Metoda konečných prvků pracuje s množstvím integrálů. Ty se často nepočítají přesně, ale pouze přibližně pomocí numerického integrování. My se podíváme pouze na tzv. *Gaussovy kvadraturní formule*. Více variant naleznete např. v literatuře [15] či literatuře [19].

Uvažujme referenční prvek $T_{ref} = (-1, 1)$ a obecně integrál z funkce $f(x)$, která je na T_{ref} definovaná a také ohraničená, tj.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi. \quad (3.16)$$

Poté k -**bodovou Gaussovou kvadraturní formulí**, $k \in \mathbb{N}$, na T_{ref} , rozumíme aproximaci integrálu (3.16),

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^k w_i f(\xi_i). \quad (3.17)$$

Kde body $\xi_i \in T_{ref}$, $i = 1, 2, \dots, k$, jsou **integrační uzly** a hodnoty $w_i \in \mathbb{R}$ se nazývají **integrační váhy**. Váhy musí splňovat podmínku

$$\sum_{i=1}^k w_i = \int_{-1}^1 1 d\xi = 2.$$

Přesnost této formule je dána číslem $2k - 1$.

Pro $k > 0$ máme celkem $2k$ neznámých. Přesněji k neznámých uzlů ξ_i a k neznámých vah w_i . Pro nalezení daných hodnot potřebujeme systém $2k$ rovnic. Často je lze vytvořit využitím lineárně nezávislých členů $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{2k-1}$. Mnohem vhodnější je využití Legendreových polynomů $L_0, L_1, \dots, L_{2k-1}$. Tedy můžeme vzít

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k w_i L_{i,0} &= \int_{-1}^1 L_0 d\xi, \\ \sum_{i=1}^k w_i L_{i,1} &= \int_{-1}^1 L_1 d\xi, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^k w_i L_{i,2k-1} &= \int_{-1}^1 L_{2k-1} d\xi, \end{aligned} \quad (3.18)$$

kde $L_{i,j}$ je polynom L_j pro váhu w_i .

Poznámka 3.12. Systém rovnic (3.18) je nelineární. Dá se ukázat, viz literatura [6], str. 60, že při volbě integračních uzlů jakožto kořenů Legendreova polynomu L_k se systém stává lineárním a pro váhy platí

$$w_i = \frac{2}{(1 - \xi^2)L_k^2(\xi)}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Kořeny Legendreova polynomu a příslušné váhy jsou k nahlédnutí např. v literatuře [6], kapitole 2.3.2. Pro $k = 1, 2, 3$ to jsou

k	ξ_i	w_i
1	0.000 000	2.000 000
2	$\pm 0.577 350$	1.000 000
3	$\pm 0.774 597$	0.555 556
	0.000 000	0.888 889

Poznámka 3.13. Gaussovu kvadraturu uvádíme a počítáme na referenčním intervalu. Pro přechod na libovolný interval T_m z triangulace \mathcal{T}_h aplikujeme referenční zobrazení x_{T_m} dle (3.2). Vytvoříme nový integrační uzel $\hat{\xi}_i = x_{T_m}(\xi_i)$ a poté vypočítáme integrační váhu \hat{w}_i jako $J_{T_m} w_i$.

Poznámka 3.14. Množina integračních bodů je symetrická vzhledem k nule a příslušné váhy jsou stejné.

3.4 Interpolace na prvku

Metodou konečných prvků počítáme hodnoty řešení daného problému pouze ve zvolených uzlech. V těch, které dělí základní interval na jednotlivé podintervaly (prvky) a v těch, které na těchto intervalech volíme. Jejich počet závisí na stupni prostoru polynomů. V ostatních bodech musíme řešení vypočítat jinou cestou, např. použitím interpolace.

V případě MKP se pohybujeme na Hilbertově prostoru $V = V(a, b)$, který odpovídá dané úloze, resp. prostoru V_h pro její diskretizovanou slabou formulaci (2.2). Uvažujeme zde množinu funkcí C , např. množinu polynomiálních funkcí,

a funkci $f \notin C$. Hledáme funkci $f_c \in C$, která je dostatečně blízko funkci f . Kvalitu aproximace určíme minimalizací normy $\|f - f_c\|_V$. O interpolaci mluvíme tehdy, když funkce f_c splňuje podmínku

$$L_i(f_c) = b_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n,$$

kde L_i jsou lineárně nezávislé lineární formy a $L_i : V \rightarrow \mathbb{R}$, b_i jsou příslušné konstanty, např. funkční hodnoty.

Konkrétně u Lagrangeovy interpolace, viz kapitola 1.7, musí být splněny interpolační podmínky (1.3), tj. funkce f_c se musí rovnat funkci f v nějakých bodech $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$. Platí tedy

$$f_c(x_i) = f(x_i) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.19)$$

Uzlová interpolace

Typů interpolace je hned několik, nás bude zajímat Lagrangeova (uzlová) interpolace zmíněná již v kapitole 1.7. Volbou konkrétní sítě uzlů, např. ekvidistantních uzlů či Chebyshevových nebo Gauss-Lobattových uzlů, dostáváme různé varianty klasické Lagrangeovy interpolace. V literatuře [6], kapitole 2.7.2, resp. 2.7.3, naleznete popis tzv. *nejlepšího interpolantu*, resp. *interpolace založené na projekci*. Ve druhé zmíněné se dostaneme přes řešení soustavy lineárních rovnic k přesnějším či minimálně stejným výsledkům, jako u uzlové interpolace, zde ale žádnou soustavu řešit nemusíme.

Interpolační podmínky (3.19) se na prvku $T_i = (x_{i-1}, x_i) \in \mathcal{T}_h$, kde uvažujeme Lagrangeovy uzly $x_{i-1} = \hat{y}_1^{(i)} < \hat{y}_2^{(i)} < \dots < \hat{y}_{p_i+1}^{(i)} = x_i$, dají psát

$$f_h(\hat{y}_j^{(i)}) = f(\hat{y}_j^{(i)}) \quad \text{pro } 1 \leq j \leq p_i + 1, f_h \in V_h(a, b),$$

kde funkce f_h je ona hledaná funkce blízko f . Pro referenční prvek $T_{ref} = (-1, 1)$ platí ekvivalentní zápis

$$(f_h \circ x_{T_i})(y_j) = (f \circ x_{T_i})(y_j) \quad \text{pro } 1 \leq j \leq p_i + 1, f_h \circ x_{T_i} \in P^{p_i}(T_{ref}).$$

Uzly jsou $y_j = x_{T_{ref}}^{-1}(\hat{y}_j^{(i)})$.

Poznámka 3.15. Připomeňme si vzorec pro Lagrangeův polynom (1.4), zde konkrétně

$$f_h(x) = \sum_{j=1}^{p_i+1} \prod_{k=1, k \neq j}^{p_i+1} \frac{(x - y_k)}{(y_j - y_k)} f(y_j).$$

Dle literatury [6], kapitoly 2.7.4, existuje hodnota $\xi_y \in \langle \min\{-1, x\}, \max\{x, 1\} \rangle$ taková, že pro chybu Lagrangeovy intepolace platí

$$f(x) - f_h(x) = \frac{\prod_{j=1}^{p_i+1} (x - y_j)}{(p_i + 1)!} f^{p_i+1}(\xi_y).$$

Z čitatele tohoto zlomku lze vyčíst, že chyba je ovlivněna rozložením bodů interpolace a obecně je chyba největší v blízkosti krajních bodů prvku.

3.5 Příkladová část

V této kapitole si ukážeme několik příkladů v 1D. Výpočtovou část jsem zpracovala v matematickém programu MATLAB, k příkladům jsou uvedeny názvy m-filů, které jsem přiložila na CD. Vypsání výstupy jsou prostorově trochu upravené.

Celkem se jedná o tři m-fily, které jsou naprogramovány pro eliptickou rovnici tvaru

$$-ru''(x) + qu(x) = f(x). \quad (3.20)$$

Jako okrajové podmínky můžeme uvažovat homogenní Dirichletovu nebo Neumannovu podmínku a lze je libovolně kombinovat. Vybraný typ podmínek se zadá lehce na úvod souboru. Tedy každý m-file pro stejné bázové funkce se liší převážně úvodními řádky, které odpovídají konkrétní úloze. Například to je zadání intervalu, počet prvků na oblasti, koeficienty r, q a další. U každého příkladu si uvedeme název konkrétního m-filu.

Výjimkou je poslední příklad, pro který je přiložen soubor, který je přímo funkcí a nevstupuje se tedy do samotného kódu. Funguje ovšem na stejné bázi jako ostatní, rozdíl je v tom, že zde nepracujeme s přesným řešením úlohy a lze využít v obecném případě, kdy řešení není známo. Ačkoliv zde bude použit jen jeden m-file, na CD naleznete i další dva pro vyšší stupně bází.

Začneme jednoduchým příkladem, eliptickou rovnicí s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami, kde funkce $f(x) = x$.

Příklad 3.1. Na intervalu $(0, 1)$ řešte homogenní Dirichletovu úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x & \text{na } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Řešení vykreslete a porovnejte pro volbu bázových funkcí, které jsou po částech lineární, po částech kvadratické a po částech kubické. Znázorněte také velikost chyby, tedy rozdíl přesného a přibližného řešení.

Řešení: Na úvod řekneme, že existuje přesné řešení této úlohy a je ve tvaru

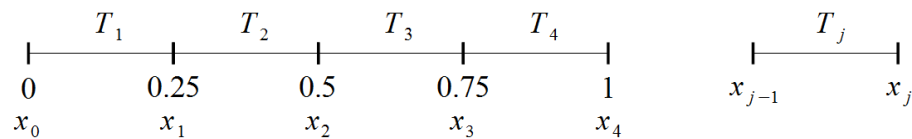
$$u(x) = x - \frac{\sinh x}{\sinh 1}. \quad (3.22)$$

Přibližné řešení hledáme jako

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N_h} c_j \varphi_j(x).$$

Bázové funkce volíme speciálně a koeficienty c_i vypočítáme ze soustavy $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$.

Oblast $\Omega = (0, 1)$ si rozdělíme na čtyři prvky (ozn. $N = 4$) a to ekvidistantně s krokem $h = 0.25$, viz obrázek 12. Tedy $h_j = x_j - x_{j-1} = h, \forall j$. Vzhledem



Obrázek 12: Rozdělení intervalu, tj. oblasti $(0, 1)$. Prvek T_j .

k náročnosti příkladu je toto rozdělení dostačující. Dále provedeme převod zadání na slabou formulaci. Postupovat můžeme podle kroků z kapitoly 2.3,

$$\begin{aligned} -u'' + u &= x, \\ -\int_{\Omega} u''v + \int_{\Omega} uv &= \int_{\Omega} xv, \\ \int_{\Omega} u'v' - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Omega} uv &= \int_{\Omega} xv. \end{aligned}$$

Přechod od 2. řádku ke 3. řádku jsme provedli aplikací Greenovy formule (1.2) na integrál s druhou derivací funkce u . Navíc integrál přes hranici oblasti je díky Dirichletovým okrajovým podmínkám nulový. Přecházíme tedy ke tvaru

$$\int_{\Omega} u'(x)v'(x)dx + \int_{\Omega} u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} xv(x)dx. \quad (3.23)$$

Řešení úlohy rozdělíme do tří částí podle stupně prostoru konečných prvků.

a) Po částech lineární bázové funkce.

Z kapitoly 2.4 víme, že řešení úlohy (3.21) hledáme dle (2.14) ve tvaru lineární kombinace „nějakých“ bázových funkcí a jistých koeficientů. A také z vlastnosti každé bázové funkce φ_j a to té, že má malý nosič, lze při restrikci $u(x)$ na prvek T_j psát

$$u(x) = [c_{j-1}, c_j] \begin{bmatrix} \varphi_{j-1}(x) \\ \varphi_j(x) \end{bmatrix}.$$

Podobně pro testovací funkce obdržíme

$$v(x) = [d_{j-1}, d_j] \begin{bmatrix} \varphi_{j-1}(x) \\ \varphi_j(x) \end{bmatrix} = [\varphi_{j-1}(x), \varphi_j(x)] \begin{bmatrix} d_{j-1} \\ d_j \end{bmatrix}.$$

V tomto případě $\forall j$ jsou $c_j, d_j \in \mathbb{R}$ a funkce $\varphi_j(x)$ jsou dány předpisem (2.13), konkrétně na prvku T_j jsou nenulové dvě funkce

$$\varphi_{j-1}(x) = \frac{x_j - x}{h_j}, \quad \varphi_j(x) = \frac{x - x_{j-1}}{h_j}.$$

▷ Nyní postupně vytvoříme tři matice odpovídající integrálům z (3.40). Nejdříve pro prvek T_j a pak vše sečteme tak, aby jednotlivé řádky odpovídaly postupně uzlům triangulace, to ukážeme později. Tedy

$$\begin{aligned} a_j^S(u, v) &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} u'(x)v'(x)dx = & (3.24) \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} [c_{j-1}, c_j] \begin{bmatrix} \varphi'_{j-1}(x) \\ \varphi'_j(x) \end{bmatrix} [\varphi'_{j-1}(x), \varphi'_j(x)] \begin{bmatrix} d_{j-1} \\ d_j \end{bmatrix} dx = \\ &= [c_{j-1}, c_j] \mathbf{S}_j \begin{bmatrix} d_{j-1} \\ d_j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matice \mathbf{S}_j je

$$\mathbf{S}_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_j} \\ \frac{1}{h_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_j}, \frac{1}{h_j} \end{bmatrix} dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \begin{bmatrix} \frac{1}{h_j^2} & -\frac{1}{h_j^2} \\ -\frac{1}{h_j^2} & \frac{1}{h_j^2} \end{bmatrix} dx = \dots = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Označení $a_j^S(u, v)$ vychází z označení bilineární formy, pohybu na prvku T_j a anglického názvu této matice - „*element stiffness matrix*“.

▷ Podobně tomu je pro druhý integrál

$$\begin{aligned} a_j^M(u, v) &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x)v(x)dx = & (3.25) \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} [c_{j-1}, c_j] \begin{bmatrix} \varphi_{j-1}(x) \\ \varphi_j(x) \end{bmatrix} [\varphi_{j-1}(x), \varphi_j(x)] \begin{bmatrix} d_{j-1} \\ d_j \end{bmatrix} dx = \\ &= [c_{j-1}, c_j] \mathbf{M}_j \begin{bmatrix} d_{j-1} \\ d_j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matice \mathbf{M}_j je

$$\mathbf{M}_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \begin{bmatrix} \frac{x_j-x}{h_j} \\ \frac{x-x_{j-1}}{h_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j-x, x-x_{j-1} \\ h_j, h_j \end{bmatrix} dx = \dots = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zde M ve značení $a_j^M(u, v)$ odvozujeme z anglického - „*element mass matrix*“.

▷ Nakonec zbývá pravá strana rovnice, tj. lineární funkcionál $l(v)$. Tady se nabízí aproximovat funkci $f(x) = x$ pomocí interpolace,

$$f(x) = f_{j-1}\varphi_{j-1}(x) + f_j\varphi_j(x) = f(x_{j-1})\varphi_{j-1}(x) + f(x_j)\varphi_j(x). \quad (3.26)$$

Pro lepší představu a zobecnění pro další příklady, zanecháme funkci $f(x)$ místo konkrétního x , zde je poté dosazení elementární.

$$l_j(v) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)v(x)dx = \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x_{j-1}), f(x_j)] \begin{bmatrix} \varphi_{j-1}(x) \\ \varphi_j(x) \end{bmatrix} [\varphi_{j-1}(x), \varphi_j(x)] \begin{bmatrix} d_{j-1} \\ d_j \end{bmatrix} dx = \\
&= \mathbf{l}_j \begin{bmatrix} d_{j-1} \\ d_j \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Matice \mathbf{l}_j je

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}_j &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x_{j-1}), f(x_j)] \begin{bmatrix} \frac{x_j-x}{h_j} \\ \frac{x-x_{j-1}}{h_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_j-x}{h_j}, \frac{x-x_{j-1}}{h_j} \end{bmatrix} dx = \\
&= \dots = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2f(x_{j-1}) + f(x_j) \\ f(x_{j-1}) + 2f(x_j) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

▷ Nyní máme vše připraveno pro sestavení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$, odkud vypočítáme neznámé koeficienty c_i . Koeficienty d_i dle literatury [21], str. 16. počítat nemusíme, neboť slabá formulace platí pro každou testovací funkci v a tedy i každý vektor \mathbf{d} . V dalším uvidíme, že velikost vektoru \mathbf{c} závisí na počtu bodů, které na oblasti Ω volíme, tyto body odpovídají počtu prvků a stupni bázeových funkcí. V tomto konkrétním příkladě, kdy máme homogenní Dirichletovy okrajové podmínky, pracujeme s menší maticí a to proto, že ihned lze říci, že první a poslední hodnota vektoru \mathbf{c} je nulová.

Pro matici \mathbf{A} a vektor \mathbf{b} platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{M}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{l},$$

sestavení těchto matic, resp. vektoru je podrobně sepsáno v literatuře [21], str. 13. – 15. Vznikají sečtením dílčích matic $\mathbf{S}_j, \mathbf{M}_j$, resp. vektoru \mathbf{l}_j , které jsme vypočítali výše. Například z matic \mathbf{S}_j dostaneme

$$\mathbf{S} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 1+1 & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & & & & \\ & & & -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & & & & -1 & 1 & & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}.$$

Zde lze vyškrtnout první a poslední řádek, resp. sloupec matice. Máme tedy

$$\mathbf{S} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}. \quad (3.28)$$

Obdobně se dostaneme k matici \mathbf{M} a vektoru \mathbf{l} , původně jsou jejich rozměry postupně $(N+1) \times (N+1)$ a $(N+1) \times 1$, zde ale

$$\mathbf{M} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{l} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \\ f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times 1}. \quad (3.30)$$

Z tvaru matice \mathbf{S} i \mathbf{M} lze vidět, že jejich součet, tedy matice \mathbf{A} je třídiagonální a příslušnou soustavu lze řešit pomocí LU-rozkladu a Croutovy metody, podrobnější informace viz literatura [4], str. 42. Já jsem však příslušný m-file naprogramovala bez tohoto urychlení, neboť v tomto případě není rozdíl patrný. Vypočítaný vektor \mathbf{c} má podobně jako \mathbf{l} „jen“ $N - 1$ hodnot, c_1, c_2, \dots, c_{N-1} a platí tedy zmíněný vzorec (2.14), tj.

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j \varphi_j(x).$$

▷ M-file, který řeší tuto úlohu a stačí jej pouze spustit, nese název

`PR1A_linearni_baze.m`

Od ostatních souborů, které řeší rovnici (3.20) pomocí po částech lineárních bází, se liší v následujících řádcích, které odpovídají naší úloze.

```
% zadani ulohy -----
N = 4;           % pocet prvku
int_a = 0;      % levý krajní bod intervalu (0,1)
int_b = 1;      % pravý krajní bod intervalu (0,1)
r = 1;         % koeficient z rce u členu ... -u''(x)
q = 1;         % koeficient z rce u členu ... u(x)
podm_a = 0;    % okrajová podmínka pro derivaci v bode 0
podm_b = 0;    % okrajová podmínka pro derivaci v bode 1
okr_podm = 0;  % není předepsána Neumannova podmínka
fce = @(z) z;  % fce prave strany ... f(x)=x
% presne reseni
presne = @(z) z-(sinh(z))/(sinh(1));
```

Proměnná `okr_podm` určuje o jaký typ podmínek se jedná. Jak bylo řečeno, m-fily jsem naprogramovala pro dva typy okrajových podmínek: homogenní Dirichletovu a Neumannovu podmínku a lze je libovolně kombinovat. Zde se druhá zmíněná nevyskytuje, proto položíme `okr_podm = 0` a můžeme tedy za proměnné `podm_a`, resp. `podm_b` zadat libovolnou číselnou hodnotu, nebude se s nimi dále pracovat.

Po spuštění souboru dostaneme graf přibližného řešení úlohy a graf znázorňující chybu aproximace, tj. rozdíl přesného a přibližného řešení. Navíc lze jednoduše zobrazit údaje, které nás zajímají. Např.

```
uzly = 0    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000

S =  8    -4     0
    -4     8    -4
     0    -4     8

M = 0.1667    0.0417     0
     0.0417    0.1667    0.0417
          0    0.0417    0.1667
```


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8.1667 & -3.9583 & 0 \\ -3.9583 & 8.1667 & -3.9583 \\ 0 & -3.9583 & 8.1667 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [0.0625 \quad 0.1250 \quad 0.1875]'$$

$$\mathbf{c} = [0 \quad 0.0352 \quad 0.0569 \quad 0.0505 \quad 0]'$$

Jedná se o výčet uzlů sítě, tvar matice \mathbf{S} , \mathbf{M} a výsledné matice \mathbf{A} . Dále zde vidíme vektor \mathbf{b} , tj. vektor \mathbf{l} , a nakonec vypočítané koeficienty c_i do lineární kombinace pro řešení. Jak víme, tyto koeficienty stačí počítat bez dvou krajních hodnot, ty zde pak dodáme „uměle“.

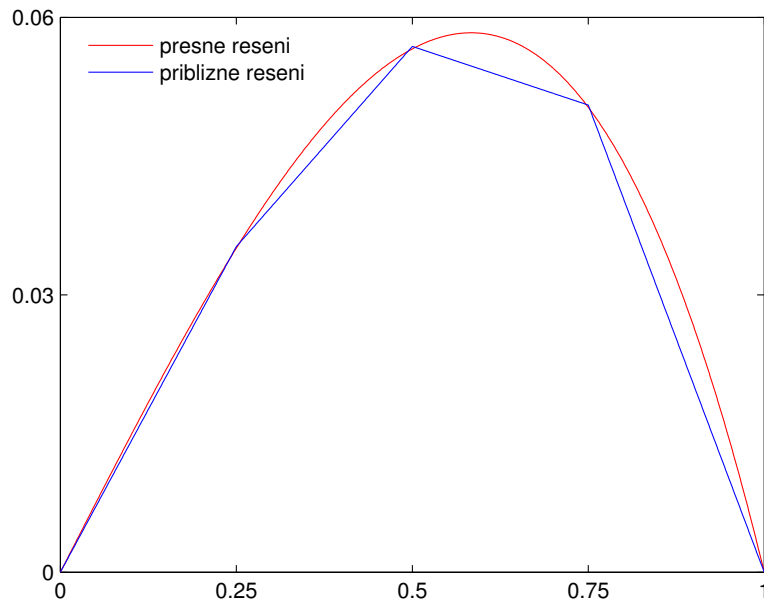
Graf přesného a přibližného řešení je zobrazen na obrázku 13. Odlišnost vypočítaného řešení (znázorněno modře) od toho skutečného (červeně) je ihned patrná. Na konci tohoto příkladu porovnáme maximální rozdíl obou těchto řešení s chybami pro po částech kvadratické, resp. kubické báze. Výpočty můžeme zpřesnit zjemněním sítě na oblasti, což si ukážeme na dalším příkladu, nebo následným zvýšením stupně báze funkcí.

b) Po částech kvadratické báze funkce.

V případě po částech lineárních bází jsme počítali integrály ze slabé formulace úlohy přímo na jednotlivých prvcích T_j , ačkoliv jsme mohli využít převodu na referenční prvek $(-1, 1)$. Takto budeme ale postupovat nyní v případě hierarchického přístupu s bázemi z prostoru polynomů vyšších stupňů než-li jedna. Důvod je jednoduchý. Krom toho, že výpočty budou obecnější, máme všechny uvedené báze definovány na tomto prvku. Tedy, každý integrál transformujeme pomocí referenčního zobrazení x_{T_j} dle (3.1) na $T_{ref} = (-1, 1)$. Postup je totožný s postupem na straně 28.

Na rozdíl od části a) pro vytváření matic pracujeme s výrazy

$$a_j^S(u, v) = \frac{2}{h_j} \int_{-1}^1 u'(\xi)v'(\xi)d\xi \quad (\text{místo (3.24)}), \quad (3.31)$$



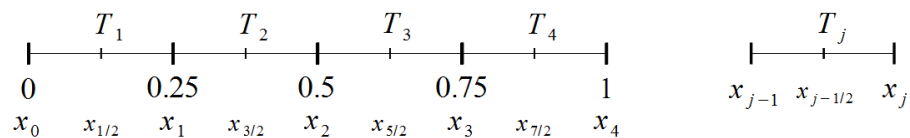
Obrázek 13: Graf přesného a přibližného řešení - lineární případ.

$$a_j^M(u, v) = \frac{h_j}{2} \int_{-1}^1 u(\xi)v(\xi)d\xi \quad (\text{místo (3.25)}), \quad (3.32)$$

$$l_j(v) = \frac{h_j}{2} \int_{-1}^1 f(\xi)v(\xi)d\xi \quad (\text{místo (3.27)}). \quad (3.33)$$

Hodnoty před integrály vznikly díky Jacobiánu zobrazení x_{T_j} , který je $\frac{h_j}{2}$.

Protože bázové funkce uvažujeme z prostoru \mathcal{P}^2 , je třeba na prvku volit tři funkce a tedy uvažovat jeden bod navíc. Viz obrázek 14. Pro názornost budeme



Obrázek 14: Rozdělení intervalu, tj. oblasti $(0, 1)$. Prvek T_j .

v příkladech rozlišovat uzly a body na oblasti, přestože se jedná o ekvivalentní pojem. Uzly dělí oblast na jednotlivé prvky a body jsou hodnoty vycházející z těchto uzlů a ze stupně prostoru polynomů. Formálně bodem navíc na T_{ref} je 0,

ačkoliv jej při hierarchickém přístupu určovat nepotřebujeme. Na základě tohoto, označíme báze funkce jako φ_{-1}, φ_1 pro krajní body prvku a φ_0 pro vnitřní bod. Pro úplnost, na prvku T_j zvolíme vnitřní bod např. $x_{j-\frac{1}{2}}$. Tedy funkci $u(\xi)$ lze psát

$$u(\xi) = [c_{j-1}, c_j, c_{j-\frac{1}{2}}] \begin{bmatrix} \varphi_{-1}(\xi) \\ \varphi_1(\xi) \\ \varphi_0(\xi) \end{bmatrix}.$$

Podobně pro testovací funkci $v(\xi)$. Báze jsou dány předpisem (3.11) a pro interval $(-1, 1)$ a prostor \mathcal{P}^2 to jsou

$$\varphi_{-1}(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad \varphi_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2}, \quad \varphi_0(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(\xi^2 - 1).$$

▷ Nyní se konečně podíváme na matice, pomocí nichž vytvoříme soustavu rovnic. Podrobněji ukážeme výpočet $a_j^S(u, v)$, ostatní se počítá podobně jako v části a) s tím rozdílem, že koeficienty i báze jsou tři. Tedy

$$a_j^S(u, v) = \frac{2}{h_j} \int_{-1}^1 u'(\xi)v'(\xi)d\xi = [c_{j-1}, c_j, c_{j-\frac{1}{2}}] \mathbf{S}_j \begin{bmatrix} d_{j-1} \\ d_j \\ d_{j-\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

kde matice \mathbf{S}_j je

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j &= \frac{2}{h_j} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} \varphi_{-1}(\xi) \\ \varphi_1(\xi) \\ \varphi_0(\xi) \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} [\varphi_{-1}(\xi), \varphi_1(\xi), \varphi_0(\xi)] d\xi = \\ &= \frac{2}{h_j} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}}\xi \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \sqrt{\frac{3}{8}}\xi \\ -\sqrt{\frac{3}{8}}\xi & \sqrt{\frac{3}{8}}\xi & \frac{3}{2}\xi^2 \end{bmatrix} d\xi = \dots = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Prvky matice jsme počítali pomocí MATLABu. Tuto i následnou matici \mathbf{M}_j nám počítá M-file s názvem `vypocet_matic_na_Tj_1D.m`. Například pro zvýrazněný prvek $s_{1,2}^j = -1$ zadáme

```
syms x
int((-1/2)*(1/2), x, -1, 1)
```

Integrály nejsou složité a numerická integrace zde není výslovně nutná.

▷ Dále

$$a_j^M(u, v) = \frac{h_j}{2} \int_{-1}^1 u(\xi)v(\xi)d\xi = [c_{j-1}, c_j, c_{j-\frac{1}{2}}] \mathbf{M}_j \begin{bmatrix} d_{j-1} \\ d_j \\ d_{j-\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

kde matice \mathbf{M}_j je

$$\mathbf{M}_j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 & 2 & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

▷ Nakonec pro pravou stranu rovnice platí

$$l_j(v) = \frac{h_j}{2} \int_{-1}^1 f(\xi)v(\xi)d\xi = \mathbf{l}_j \begin{bmatrix} d_{j-1} \\ d_j \\ d_{j-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

Vektor \mathbf{l}_j je

$$\mathbf{l}_j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2f(x_{j-1}) + f(x_j) \\ f(x_{j-1}) + 2f(x_j) \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}(f(x_{j-1}) + f(x_j)) \end{bmatrix}.$$

Funkce $f(x) = x$ je aproximována stejně jako v části a), tj. dle (3.26).

▷ Koeficienty c_i potřebné pro sestavení přibližného řešení počítáme ze soustavy $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$. Vektor koeficientů \mathbf{c} se dá napsat pomocí dvou dílčích vektorů,

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_L \\ \mathbf{c}_Q \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{c}_L = [c_1, c_2, \dots, c_{N-1}]^T$ odpovídá bodům x_j , $\mathbf{c}_Q = [c_{\frac{1}{2}}, c_{\frac{3}{2}}, \dots, c_{N-\frac{1}{2}}]^T$ zase bodům $x_{j-\frac{1}{2}}$. Opět platí, že hodnoty $c_0 = c_N = 0$.

Matice $\mathbf{S}_j, \mathbf{M}_j$ mají blokovou strukturu, což lze ihned vidět. Sečtením těchto matic přes j získáme matice \mathbf{S}, \mathbf{M} a pro matici soustavy tedy platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_L + \mathbf{M}_L & \mathbf{M}_{LQ} \\ \mathbf{M}_{LQ}^T & \mathbf{S}_Q + \mathbf{M}_Q \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Kde \mathbf{S}_L je totožná s (3.28) a \mathbf{M}_L zase s (3.29). Dále

$$\mathbf{S}_Q = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_Q = \frac{h}{5} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{LQ} = -\frac{h}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Velikosti matic jsou

matice	obecně	pro tuto úlohu
$\mathbf{S}_L, \mathbf{M}_L$	$\mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$	$\mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$
$\mathbf{S}_Q, \mathbf{M}_Q$	$\mathbb{R}^{N \times N}$	$\mathbb{R}^{N \times N}$
\mathbf{M}_{LQ}	$\mathbb{R}^{(N+1) \times N}$	$\mathbb{R}^{(N-1) \times N}$

Podobně jako vektor \mathbf{c} , lze i vektor \mathbf{l} psát

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_L \\ \mathbf{l}_Q \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

kde \mathbf{l}_L je stejný jako (3.30) a dále

$$\mathbf{l}_Q = -\frac{h}{\sqrt{24}} \begin{bmatrix} f(x_0) + f(x_1) \\ f(x_1) + f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) + f(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_Q \in \mathbb{R}^{N \times 1}.$$

Jak bylo řečeno v teorii, tak také z příkladu lze vidět, že zvýšením stupně prostoru polynomů, využíváme předchozí matice, jen k nim přidáme odpovídající bloky.

▷ M-file pro tento příklad je pojmenován jako `PR1_B_kvadraticka_base.m` a úvodní proměnné jsou totožné s předchozím m-filem, konkrétně

```
% zadani ulohy -----
N = 4;           % pocet prvku
int_a = 0;      % levý krajní bod intervalu (0,1)
int_b = 1;      % pravý krajní bod intervalu (0,1)
r = 1;          % koeficient z rce u členu ... -u''(x)
q = 1;          % koeficient z rce u členu ... u(x)
podm_a = 0;     % okrajová podmínka pro derivaci v bode 0
podm_b = 0;     % okrajová podmínka pro derivaci v bode 1
okr_podm = 0;  % není předepsána Neumannova podmínka
fce = @(z) z;   % fce prave strany ... f(x)=x
% přesné řešení
presne = @(z) z-(sinh(z))/(sinh(1));
```

Výstupem může být výčet uzlů dělicích oblast Ω , výčet bodů pro výpočet. Dále to jsou všechny matice a vektory, ukážeme zde jen některé, např. matice \mathbf{A} , vektor \mathbf{b} a vektor řešení \mathbf{c} . Protože je vektor \mathbf{c} uspořádán jinak než potřebujeme pro lineární kombinaci s bázemi, museli jsme jej v programu přeskádat. Navíc zde jsou opět přidány hodnoty, konkrétně nuly, pro první a poslední prvek. Výsledný graf srovnávající přesné a přibližné řešení je znázorněn na obrázku 15.

```
uzly = 0      0.250    0.500    0.750    1.000

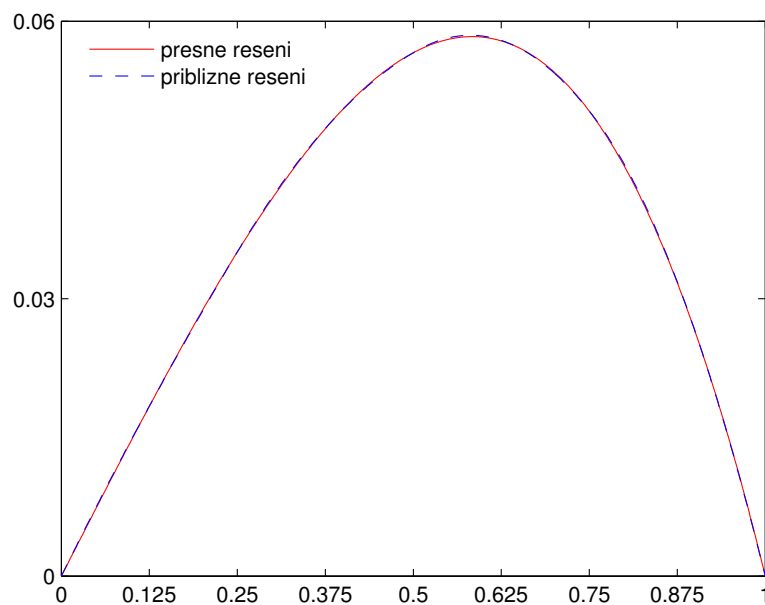
body = 0      0.1250   0.2500   0.3750   0.5000   0.6250   ...
```

0. 7500 0.8750 1.0000

```
A = 8.1667 -3.9583      0 -0.0510 -0.0510      0      0
     -3.9583 8.1667 -3.9583      0 -0.0510 -0.0510      0      0
           0 -3.9583 8.1667      0      0 -0.0510 -0.0510
     -0.0510      0      0 8.0500      0      0      0
     -0.0510 -0.0510      0      0 8.0500      0      0
           0 -0.0510 -0.0510      0      0 8.0500      0
           0      0 -0.0510      0      0      0 8.0500
```

```
b = [0.0625    0.1250    0.1875    -0.0128    -0.0383 ...
     -0.0638    -0.0893]'
```

```
c = [0    -0.0014    0.0350    -0.0042    0.0566    -0.0072 ...
     0.0503    -0.0108    0]'
```



Obrázek 15: Graf přesného a přibližného řešení - kvadratický případ.

Na rozdíl od použití po částech lineárních bází, je přibližné řešení mnohem přesnější a téměř splývá s přesným řešením (3.22).

c) Po částech kubické bázové funkce.

Postup výpočtu řešení úlohy (3.21) s bázemi z prostoru \mathcal{P}^3 je obdobný jako v části b). Opět počítáme příslušné integrály na referenčním prvku $(-1, 1)$, ale máme zde čtyři bázové funkce a čtyři body. Formálně uvažujeme $-1, 1$ a dvakrát 0 , báze označíme $\varphi_{-1}, \varphi_1, \varphi_{0_1}, \varphi_{0_2}$ a jsou to taktéž Legendreovy polynomy

$$\varphi_{-1}(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad \varphi_1(\xi) = \frac{1 + \xi}{2},$$

$$\varphi_{0_1}(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(\xi^2 - 1), \quad \varphi_{0_2}(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(\xi^2 - 1)\xi.$$

Tyto vnitřní body si můžeme dovolit, protože jak víme, hierarchické báze nejsou závislé na volbě bodů na prvku. Navíc na prvku T_j se jedná o krajní body x_{j-1}, x_j a dva vnitřní body $x_{j-\frac{1}{3}}, x_{j-\frac{2}{3}}$.

Kdybychom ale řešení úlohy počítali s Lagrangeovými bázemi, tak bychom vnitřní body na prvku museli volit konkrétně např. jako ekvidistantní, Gauss - Lobattovy či jiné.

Tedy funkci $u(x)$ lze psát podobně jako dříve, tj. ve tvaru

$$u(\xi) = \begin{bmatrix} c_{j-1}, c_j, c_{j-\frac{1}{3}}, c_{j-\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{-1}(\xi) \\ \varphi_1(\xi) \\ \varphi_{0_1}(\xi) \\ \varphi_{0_2}(\xi) \end{bmatrix}.$$

Testovací funkce $v(\xi)$ je obdobná, jen s koeficienty $d_{j-1}, d_j, d_{j-\frac{1}{3}}, d_{j-\frac{2}{3}}$.

▷ Vzorce pro $a_j^S(u, v)$, $a_j^M(u, v)$ a $l_j(v)$ jsou dány vztahy (3.31), (3.32) a (3.33). Matice obsažené v těchto výrazech, se kterými budeme dále pracovat, jsou tvaru

$$\mathbf{S}_j = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{1}{10}} \\ 1 & 2 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{10}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{6}{5} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{10}} & -\sqrt{\frac{1}{10}} & 0 & \frac{6}{21} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{l}_j = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2f(x_{j-1}) + f(x_j) \\ f(x_{j-1}) + 2f(x_j) \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}(f(x_{j-1}) + f(x_j)) \\ \sqrt{\frac{1}{10}}(f(x_{j-1}) - f(x_j)) \end{bmatrix}.$$

▷ Pro matici ze soustavy $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$, odkud vypočítáváme vektor neznámých koeficientů, platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_L + \mathbf{M}_L & \mathbf{M}_{LQ} & \mathbf{M}_{LR} \\ \mathbf{M}_{LQ}^T & \mathbf{S}_Q + \mathbf{M}_Q & \mathbf{M}_{QR} \\ \mathbf{M}_{LR}^T & \mathbf{M}_{QR}^T & \mathbf{S}_R + \mathbf{M}_R \end{bmatrix}.$$

Výše uvedené matice $\mathbf{S}_L, \mathbf{M}_L, \mathbf{S}_Q, \mathbf{M}_Q$ a \mathbf{M}_{LQ} jsou tytéž jako v části b), tj. (3.34). Pro ostatní matice platí

$$\mathbf{S}_R = \mathbf{S}_Q \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbf{M}_{QR} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$\mathbf{M}_R = \frac{h}{21} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_R \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$\mathbf{M}_{LR} = -\frac{h}{6} \sqrt{\frac{1}{10}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{LR} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}.$$

Z těchto „nových“ matic měníme pouze rozměr matice \mathbf{M}_{LR} , který je obecně větší a to $(N + 1) \times N$. Vektor pravých stran, tj. vektor $\mathbf{b} = \mathbf{l}$ lze psát

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_L \\ \mathbf{l}_Q \\ \mathbf{l}_R \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{l}_L, \mathbf{l}_Q$ odpovídá části b), tedy (3.35) a

$$\mathbf{l}_R = \frac{h}{6} \sqrt{\frac{1}{10}} \begin{bmatrix} f(x_0) - f(x_1) \\ f(x_1) - f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) - f(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_R \in \mathbb{R}^{N \times 1}.$$

Nakonec, hledaný vektor \mathbf{c} se skládá ze tří vektorů

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_L \\ \mathbf{c}_Q \\ \mathbf{c}_R \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{ll} \mathbf{c}_L = [c_1, c_2, \dots, c_{N-1}], & \text{pro uzly } x_j, \\ \mathbf{c}_Q = [c_{\frac{1}{3}}, c_{\frac{4}{3}}, \dots, c_{N-\frac{2}{3}}], & \text{pro body } x_{j-\frac{1}{3}}, \\ \mathbf{c}_R = [c_{\frac{2}{3}}, c_{\frac{5}{3}}, \dots, c_{N-\frac{1}{3}}], & \text{pro body } x_{j-\frac{2}{3}}. \end{array}$$

Pro dosazení do lineární kombinace musíme hodnoty opět vhodně přeskádat.

▷ M-file najdeme pod názvem PR1_C_kubicka_baze.m a na úvod nám je již známý,

```
% zadani ulohy -----
N = 4;           % pocet prvku
int_a = 0;      % levy krajni bod intervalu (0,1)
int_b = 1;      % pravy krajni bod intervalu (0,1)
r = 1;         % koeficient z rce u clenu ... -u''(x)
q = 1;         % koeficient z rce u clenu ... u(x)
podm_a = 0;    % okrajova podminka pro derivaci v bode 0
podm_b = 0;    % okrajova podminka pro derivaci v bode 1
okr_podm = 0;  % neni predepsana Neumannova podminka
fce = @(z) z;  % fce prave strany ... f(x)=x
```

```
% presne reseni
presne = @(z) z-(sinh(z))/(sinh(1));
```

Výstupem mohou být opět uzly, body, matice soustavy \mathbf{A} a vektor řešení \mathbf{c} .

```
uzly = 0    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000
```

```
body = 0    0.0833    0.1667    0.2500    0.3333    0.4167 ...
      0.5000    0.5833    0.6667    0.7500    0.8333 ...
      0.9167    1.0000
```

```
A =
```

```
Columns 1 through 6
```

```
 8.1667 -3.9583     0 -0.0510 -0.0510     0
-3.9583  8.1667 -3.9583     0 -0.0510 -0.0510
     0 -3.9583  8.1667     0     0 -0.0510
-0.0510     0     0  8.0500     0     0
-0.0510 -0.0510     0     0  8.0500     0
     0 -0.0510 -0.0510     0     0  8.0500
     0     0 -0.0510     0     0     0
-0.0132     0     0     0     0     0
 0.0132 -0.0132     0     0     0     0
     0  0.0132 -0.0132     0     0     0
     0     0  0.0132     0     0     0
```

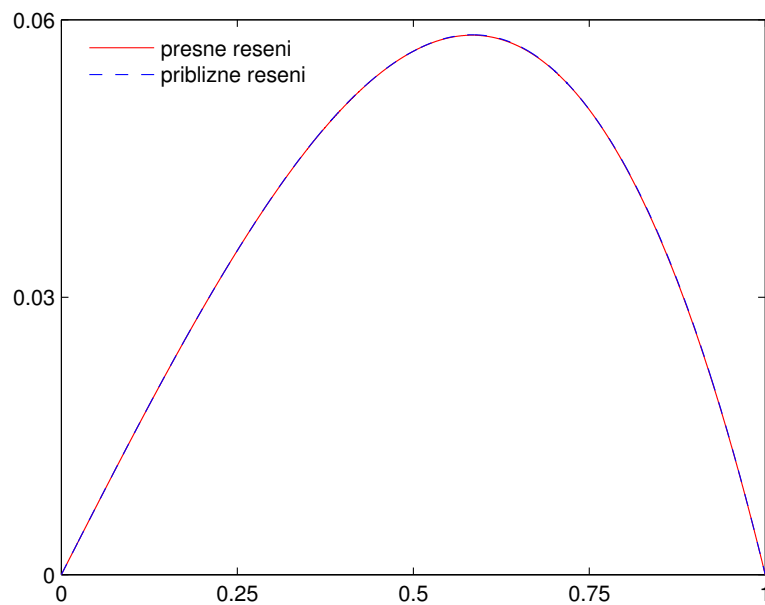
```
Columns 7 through 11
```

```
     0 -0.0132  0.0132     0     0
     0     0 -0.0132  0.0132     0
-0.0510     0     0 -0.0132  0.0132
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
 8.0500     0     0     0     0
     0  8.0119     0     0     0
     0     0  8.0119     0     0
```

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 8.0119 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.0119 \end{array}$$

$$c = [0 \quad -0.0014 \quad -0.0004 \quad 0.0350 \quad -0.0042 \quad -0.0004 \quad \dots \\ 0.0566 \quad -0.0072 \quad -0.0004 \quad 0.0503 \quad -0.0108 \quad \dots \\ -0.0005 \quad 0]'$$

A graf přibližného řešení ve srovnání s přesným řešením ukazuje obrázek 16.

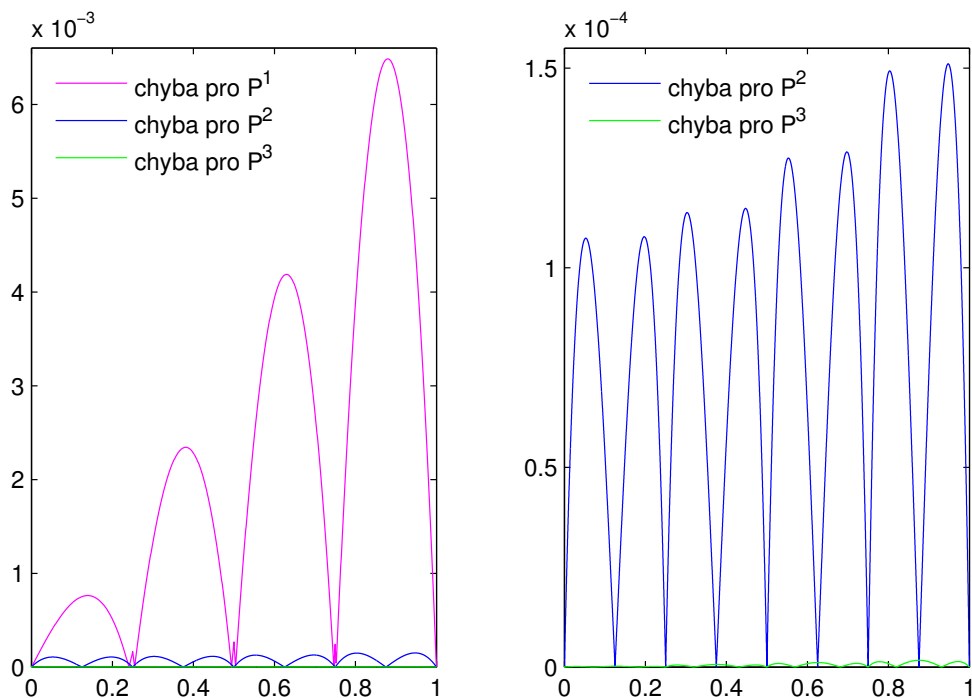


Obrázek 16: Graf přesného a přibližného řešení - kubický případ.

Chyby aproximací.

Nakonec si vykreslíme chyby jednotlivých aproximací a to v absolutní hodnotě. Tyto grafy jsou součástí příslušných m-filů (popř. souhrnný m-file, který vznikl složením všech tří, nalezneme na CD jako PR1_chyby_aproximaci.m) a jsou znázorněny na obrázku 17. Chyba pro \mathcal{P}^1 je od chyb pro prostory \mathcal{P}^2 a \mathcal{P}^3 mnohem větší jak ukazuje levá část obrázku. Totéž lze teoreticky říci o pravé části, musíme ale brát v úvahu dané měřítko osy y, které je zde velmi malé, tj. $1e-004$.

Pro zajímavost si můžeme nechat vypsát max chyby. Použijeme příkazy



Obrázek 17: Absolutní chyby aproximací.

```
chyba = abs(presne(sit) - reseni);
max_chyba = max(chyba)
```

Zde `sit` je množina bodů ve kterých je počítáno řešení na intervalu $(-1, 1)$, `presne` je funkce vyjadřující přesné řešení úlohy a `reseni` je množina funkčních hodnot v bodech z vektoru `sit`. Tedy

<code>max_chyba = 0.0065</code>	po částech lineární báze
<code>max_chyba = 1.5108e-004</code>	po částech kvadratické báze
<code>max_chyba = 1.7143e-006</code>	po částech kubické báze



Poznámka 3.16. Při řešení této úlohy jsem vycházela z literatury [21], [22]. Jsou zde teoreticky zpracovány první dvě části příkladu 3.1, poslední část týkající se po částech kubických funkcí jsem vytvořila svépomocí.

Předchozí příklad nastínil problematiku hierarchických bází. V případě Lagrangeových bází bychom postupovali podobně. S tím rozdílem, že všechny báze z prostoru \mathcal{P}^p byly řádu p a nelze využít matice z předchozího prostoru \mathcal{P}^{p-1} , této vlastnosti však v m-filech také nevyužívám. Nyní si krátce ukážeme h -verzi metody. Již bez podrobnějšího postupu. Jedná se totiž o případ z příkladu 3.1 části a), jen měníme počet prvků sítě.

Příklad 3.2. Uvažujme úlohu (3.21) z předchozího příkladu. Řešte tuto úlohu standardní h -verzí metody pro počet prvků $N_1 = 3, N_2 = 4, N_3 = 5, N_4 = 6$. Zobrazte kromě grafů aproximovaných řešení také grafy vyjadřující chybu aproximace.

Řešení: K vyřešení tohoto příkladu stačí použít tentýž m-file, jako v příkladu 3.1, části a). Tedy PR1_A_linearni_baze.m. Jeho tvar je totožný s předchozím příkladem díky stejné úloze, jen pro různá N_i musí dojít ke změně N.

Grafy řešení jsou znázorněny na obrázku 18 a chyby zase na obrázku 19. Zde jsme narozdíl od předchozího příkladu použili pro určení vektoru chyb příkaz

```
chyba = presne(sit) - reseni;
```

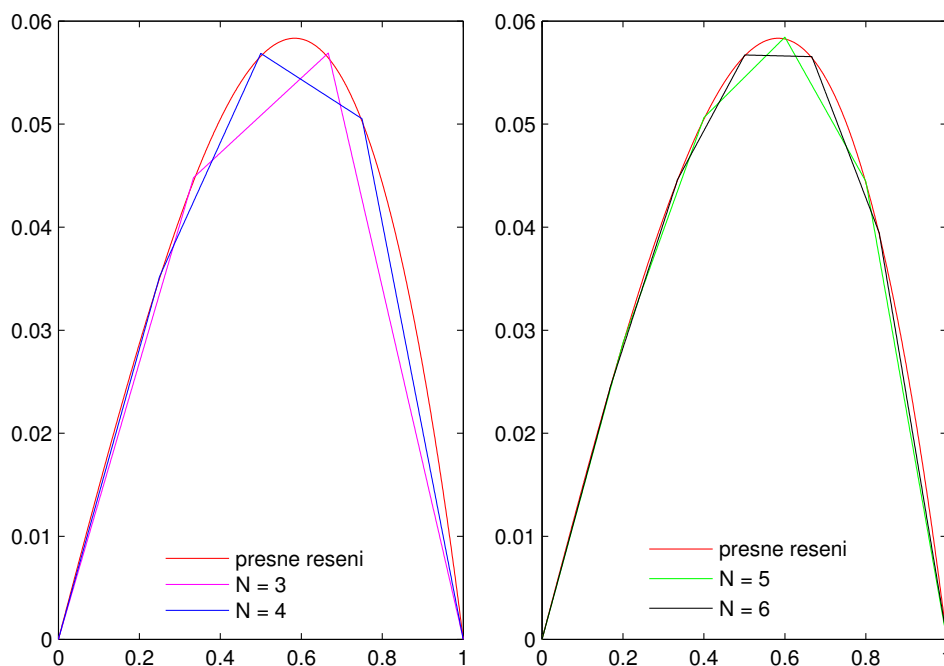
Tabulka maximální chyby v jednotlivých případech je následující

max_chyba = 0.0108	pro $N_1 = 3$
max_chyba = 0.0065	pro $N_2 = 4$
max_chyba = 0.0043	pro $N_3 = 5$
max_chyba = 0.0030	pro $N_4 = 6$

Lze vidět, že chyba s rostoucím počtem prvků na oblasti $(0, 1)$ klesá pomalu. K vykreslení jsme použili m-file PR2_ruzne_h_linearni_baze.m.



Poznámka 3.17. Jednoduše se dá ověřit, že chceme-li dosáhnout chyby nejvýše $1.5108e-004$, kterou jsme získali v příkladě 3.1 při řešení na čtyřprvkové síti s po částech kvadratickými bázemi, je v případě po částech lineárních bází nutné počítat alespoň na 26 prvcích. Tehdy získáme maximální chybu (v absolutní hodnotě) přibližně $1.3577e-004$.



Obrázek 18: Přibližná řešení úlohy pro různá N_i - lineární případ.

V následujících třech příkladech 3.3, 3.4, 3.5 budeme řešit úlohy se stejnou eliptickou rovnicí, ale s různými okrajovými podmínkami.

Příklad 3.3. Nalezněte přibližné řešení homogenní Dirichletovy úlohy

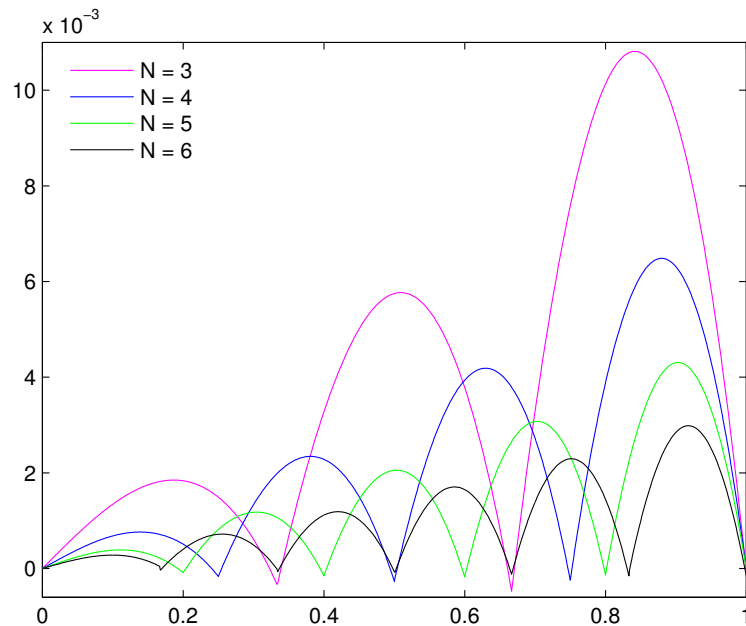
$$\begin{cases} -u''(x) - u(x) = -x^2 & \text{na } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Použijte opět po částech lineární, kvadratické a kubické báze. Dále porovnejte řešení pro $N=4$ prvky a zjistěte, pro jaký počet prvků klesne chyba aproximace pod hodnotu $1e-004$.

Řešení: Nejdříve řekněme, že přesné řešení dané úlohy je známo a je tvaru

$$u(x) = \frac{1}{\sin 1} (\sin x - 2 \sin(1-x)) + x^2 - 2.$$

K výpočtu přibližného řešení využijeme téměř stejné m-fily, jako v předchozím příkladě 3.1, pouze změníme začátky těchto souborů. Konkrétně to jsou



Obrázek 19: Chyby aproximací pro různá N_i .

PR3_linearni_baze.m, PR3_kvadraticka_baze.m, PR3_kubicka_baze.m.

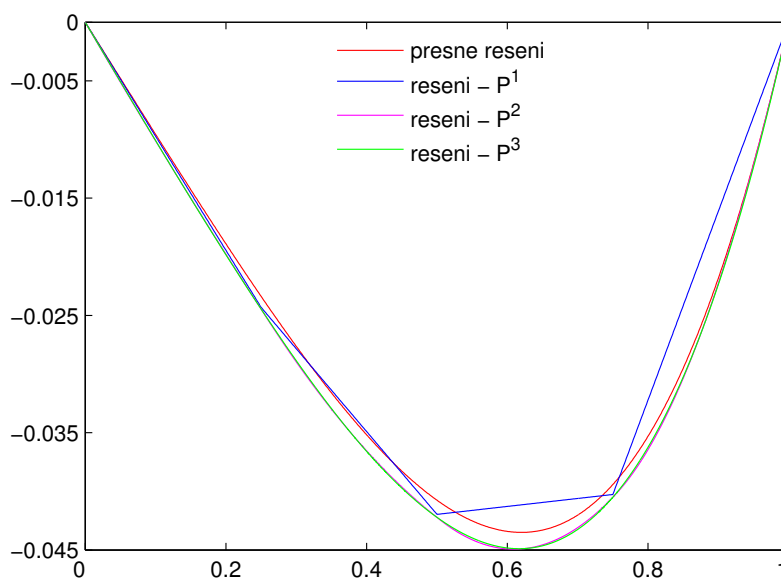
Stále máme homogenní Dirichletovy okrajové podmínky, proto

```
% zadani ulohy -----
N = 4;           % pocet prvku
int_a = 0;      % levý krajní bod intervalu (0,1)
int_b = 1;      % pravý krajní bod intervalu (0,1)
r = 1;         % koeficient z rce u členu ... -u''(x)
q = -1;        % koeficient z rce u členu ... u(x)
podm_a = 0;    % okrajová podmínka pro derivaci v bode 0
podm_b = 0;    % okrajová podmínka pro derivaci v bode 1
okr_podm = 0;  % není předepsána Neumannova podmínka
fce = @(z) - z.^2; % fce prave strany ... f(x)=-x^2
% presne reseni
presne = @(z) 1/sin(1).*(sin(z) + 2.*sin(1-z)) + z.^2 - 2;
```

Na obrázku 20 jsou společně znázorněny řešení úlohy na čtyřech intervalech a obrázek 21 znázorňuje chyby aproximací. Jsou vykresleny bez použití příkazu

`abs(...)`, ale tabulka maximálních chyb již pracuje s absolutní hodnotou. Chyby na \mathcal{P}^2 i \mathcal{P}^3 jsou velmi podobné a dá se říci, že další zpřesnění není již nutné.

max_chyba = 0.0058	po částech lineární báze
max_chyba = 0.0016	po částech kvadratické báze
max_chyba = 0.0015	po částech kubické báze



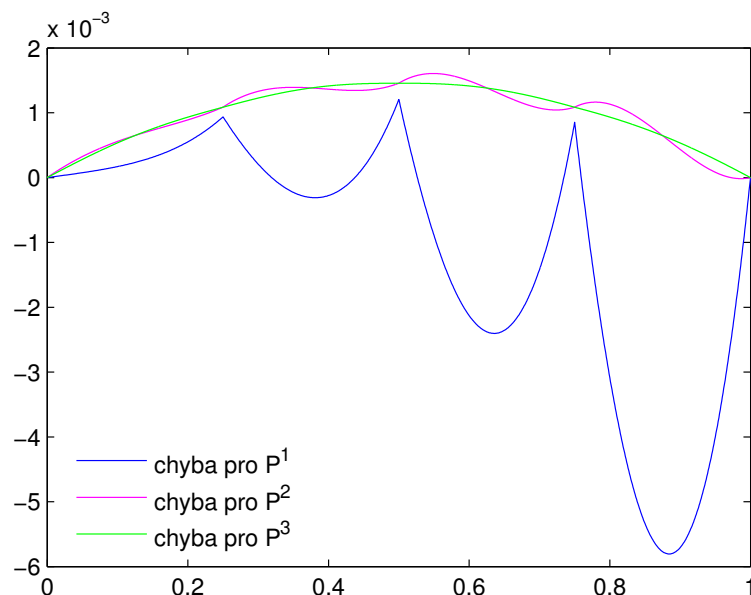
Obrázek 20: Přibližná řešení úlohy pro různé stupně bazových funkcí.

Kolik prvků musíme zvolit, aby chyba klesla pod hodnotu $1e-004$? Změnou hodnoty N lze zjistit, že při použití po částech kvadratických funkcí je třeba poloviční počet intervalů vedoucí k přibližně stejné chybě.

$N = 30$	max_chyba = 9.4978e-005	po částech lineární báze
$N = 16$	max_chyba = 9.2945e-005	po částech kvadratické báze
$N = 16$	max_chyba = 9.0823e-005	po částech kubické báze



Poznámka 3.18. Spustíme-li některý ze tří hlavních souborů pro vyšší počet prvků, uvidíme, že matice tuhosti je opravdu řídká.



Obrázek 21: Chyby aproximací pro různé stupně bázových funkcí.

Nyní budeme řešit stejnou rovnici jako v příkladě 3.3 jen s kombinací homogenní Dirichletovy a Neumannovy okrajové podmínky.

Příklad 3.4. Nalezněte přibližné řešení smíšené okrajové úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) - u(x) = -x^2 & \text{na } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 1. \end{cases} \quad (3.37)$$

Použijte po částech lineární, kvadratické a kubické bázové funkce.

Řešení: V tomto případě, kdy má úloha jednu Dirichletovu a jednu Neumannovu okrajovou podmínku, lze řešení zapsat ve tvaru

$$u(x) = \frac{1}{\cos 1} (2 \cos(1-x) - \sin x) + x^2 - 2.$$

Použité m-fily k nalezení přibližného řešení jsou opět stejné jako ve všech předchozích příkladech. Ale je zde jeden rozdíl od případu se dvěma Dirichletovými okrajovými podmínkami, dochází ke změně rozměrů matic. To je způsobeno tím,

že slabá formulace úlohy je následující

$$\int_{\Omega} u'(x)v'(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial n} v(x)dx + \int_{\Omega} u(x)v(x)dx = - \int_{\Omega} x^2 v(x)dx.$$

Máme zde tedy na rozdíl od (3.40) navíc integrál přes hranici oblasti. Z podmíněk víme, že $\frac{\partial u(1)}{\partial n} = 1$, tedy na pravé straně soustavy přibude tento člen. Skutečnost, že hledaný vektor \mathbf{c} ze soustavy $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ zde nemá hodnotu c_N nulovou jako ve všech předchozích příkladech, rozšíří některé matice o řádek či řádek a sloupec.

Ukažme několik matic, které se ve výpočtu vyskytují a dojde k jejich rozšíření, ostatní zůstávají beze změny. Např.

$$\mathbf{S}_L = \frac{r}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_L \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$\mathbf{M}_L = \frac{qh}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_L \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$\mathbf{M}_{LQ} = -\frac{qh}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{LQ} \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$\mathbf{M}_{LR} = -\frac{qh}{6} \sqrt{\frac{1}{10}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{LR} \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Dále se jedná o vektory

$$\mathbf{l}_L = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \\ f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N) \\ f(x_{N-1}) + 2f(x_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \quad \mathbf{c}_L = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 1}.$$

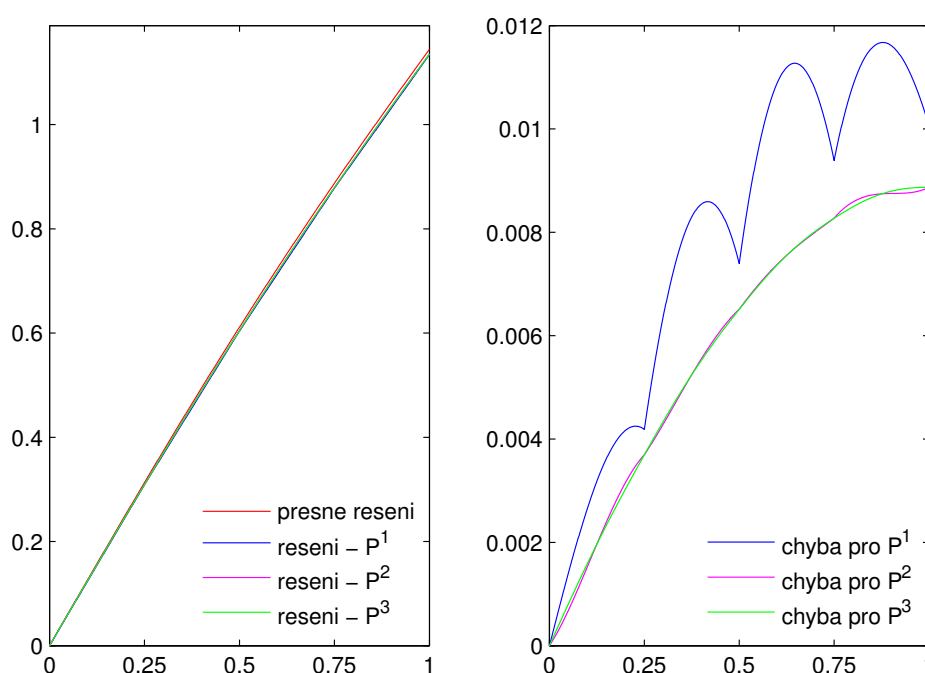
Dochází zde k přidání posledního řádku a sloupce u matic $\mathbf{S}_L, \mathbf{M}_L$, u matic $\mathbf{M}_{LQ}, \mathbf{M}_{LR}$ a vektorů $\mathbf{l}_L, \mathbf{c}_L$ přidáváme poslední řádek. Využíváme toho, že musíme do výpočtu zahrnout i onen poslední bod, tj. krajní bod intervalu $(0, 1)$, kde tentokrát není homogenní Dirichletova okrajová podmínka. Všechny již použité m-fily, ať už obecné nebo pro konkrétní příklady, zahrnují i tuto možnost a při řešení této úlohy se pouze nastaví následující údaje

```
% zadani ulohy -----
N = 4;                % pocet prvku
int_a = 0;           % levy krajni bod intervalu (0,1)
int_b = 1;           % pravy krajni bod intervalu (0,1)
r = 1;               % koeficient z rce u clenu ... -u''(x)
q = -1;              % koeficient z rce u clenu ... u(x)
podm_a = 0;          % okrajova podminka pro derivaci v bode 0
podm_b = 1;          % okrajova podminka pro derivaci v bode 1
okr_podm = 2;        % Neumannova podminka v bode 1
fce = @(z) - z^2;    % fce prave strany ... f(x)=-x^2
% presne reseni
presne = @(z) 1./cos(1).*(2.*cos(1-z) - sin(z)) + z.^2 - 2;
```

Grafy řešení a chyb jsou zobrazeny na obrázku 22. Pro jednotlivé stupně
 bazových funkcí se řešení počítá pomocí m-filů

PR4_linearni_baze.m, PR4_kvadraticka_baze.m, PR4_kubicka_baze.m.

Rostoucí chyby jsou způsobeny okrajovou podmínkou $u'(1) = 1$. V levém krajním
 bodě intervalu nemáme zadanou pevnou funkční hodnotu řešení, ale pouze směr
 tečny.



Obrázek 22: Aproximace a chyby pro různé stupně bazových funkcí.

Nakonec ještě ukážeme tabulku maximální chyby pro všechny stupně bází

max_chyba = 0.0117	po částech lineární báze
max_chyba = 0.0089	po částech kvadratické báze
max_chyba = 0.0089	po částech kubické báze



V příkladu 3.5 řešíme též úlohu s Neumannovými okrajovými podmínkami.

Příklad 3.5. Nalezněte přibližné řešení Neumannovy okrajové úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) - u(x) = -x^2 & \text{na } \Omega = (0, 1), \\ u'(0) = 1, \\ u'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Použijte po částech lineární, kvadratické a kubické bázové funkce a vykreslete přibližná řešení.

Řešení: Přesné řešení této úlohy je

$$u(x) = \frac{1}{\sin x} (\cos(1-x) + 2 \cos x) + x^2 - 2.$$

Podobně jako v předchozím příkladě ovlivní Neumannova okrajová podmínka rozměry matic, resp. vektorů v naprogramovaných m-filech, nalezneme je pod názvy

PR5_linearni_baze.m, PR5_kvadraticka_baze.m, PR5_kubicka_baze.m.

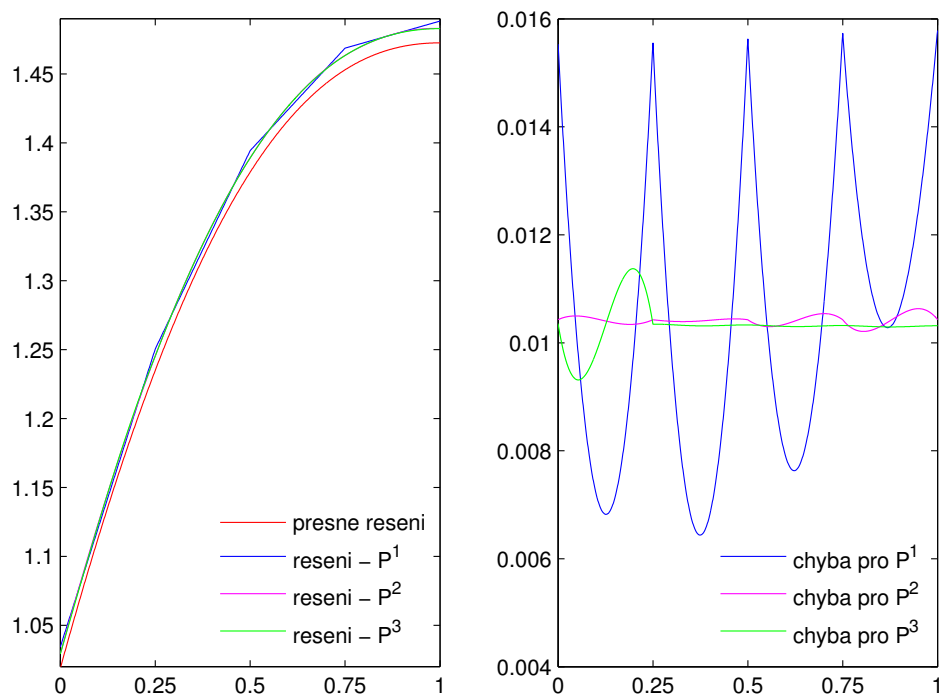
Podmínky jsou v obou krajních bodech, musíme tedy při výpočtu uvažovat plné rozměry matic, resp. vektorů a krom posledního řádku či sloupce, přidáme v maticích $\mathbf{S}_L, \mathbf{M}_L \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ také první řádek a sloupec, resp. první řádek v $\mathbf{l}_L \in \mathbb{R}^{(N+1) \times 1}$ a $\mathbf{M}_{LQ}, \mathbf{M}_{LR} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times 1}$. Toto přidání probíhá obdobně jako v příkladě 3.37.

Před spuštěním m-filů nahlédneme na jeho úvodní řádky. Této úloze odpovídají následující

```
% zadani ulohy -----
N = 4;                % pocet prvku
int_a = 0;           % levý krajní bod intervalu (0,1)
int_b = 1;           % pravý krajní bod intervalu (0,1)
r = 1;               % koeficient z rce u členu ... -u''(x)
q = -1;              % koeficient z rce u členu ... u(x)
podm_a = 1;          % okrajová podmínka pro derivaci v bode 0
podm_b = 0;          % okrajová podmínka pro derivaci v bode 1
okr_podm = 3;        % Neumannova podm. v obou krajních bodech
```

```
fce = @(z) - z^2;    % fce prave strany ... f(x)=-x^2
% presne reseni
presne = @(z) 1./sin(1).*(cos(1-z) + 2.*cos(z)) + z.^2 - 2;
```

Na obrázku 23 vidíme graf přesného řešení (červeně) a aproximovaných řešení, které spolu téměř splývají. Po výpočtu s po částech lineárními bázemi dostaneme maximální chybu 0.0158, po po částech kvadratickými bázemi je zase 0.0106. Všechna řešení vychází velmi podobně, rozdíl od toho přesného činí v průměru kolem 0.01, což přikládám zaokrouhlovacím chybám, kterým se v MATLABu nevyhneme.



Obrázek 23: Aproximace a chyby pro různé stupně bázových funkcí.



V další sérii dvou příkladů se podíváme na stejnou eliptickou rovnici pro dvě okrajové podmínky.

Příklad 3.6. Řešte homogenní Dirichletovu okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) = \cos \pi x & \text{na } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

Použijte po částech lineární, kvadratické a kubické bázové funkce a vykreslete přibližná řešení.

Řešení: Tato úloha má přesné řešení a je tvaru

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} (\cos \pi x + 2x - 1).$$

K vyřešení této úlohy použijeme stejné m-fily jako ve všech předchozích příkladech, konkrétně

PR6_linearni_baze.m, PR6_kvadraticka_baze.m, PR6_kubicka_baze.m.

Počátky vypadají takto

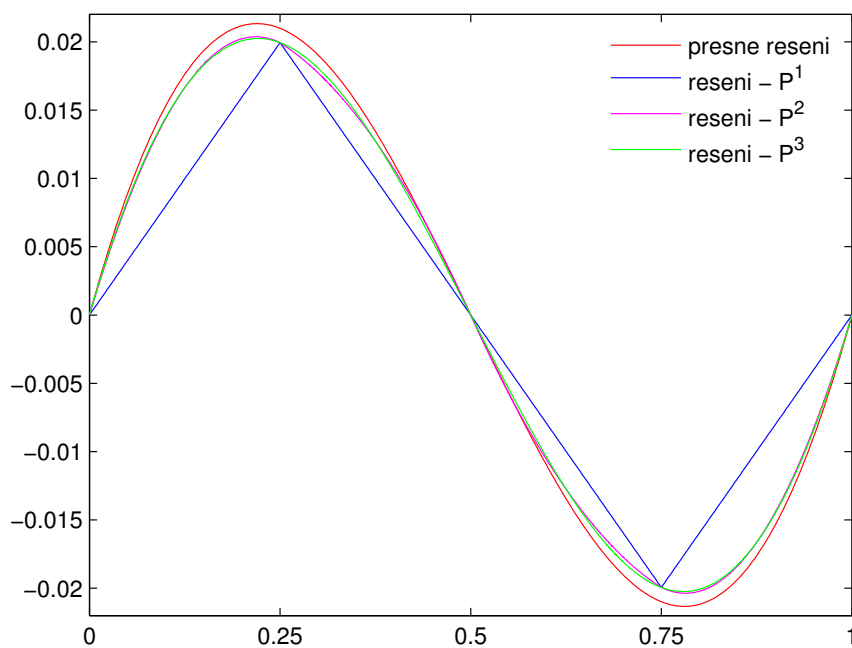
```
% zadani ulohy -----
N = 4;                % pocet prvku
int_a = 0;           % levy krajni bod intervalu (0,1)
int_b = 1;           % pravy krajni bod intervalu (0,1)
r = 1;               % koeficient z rce u clenu ... -u''(x)
q = 0;               % koeficient z rce u clenu ... u(x)
podm_a = 0;          % okrajova podminka pro derivaci v bode 0
podm_b = 0;          % okrajova podminka pro derivaci v bode 1
okr_podm = 0;        % neni zadana Neumannova podminka
fce = @(z) cos(pi.*z); % fce prave strany ... f(x)=cos(pi*x)
% presne reseni
presne = @(z) 1/pi^2 .* (cos(pi.*z) + 2.*z -1);
```

Kdybychom chtěli vytvořit nový m-file pro případ, kdy máme na pravé straně rovnice pouze člen se druhou derivací funkce u , nemuseli bychom počítat matice $M_{\times \times \times}$. Slabá formulace této úlohy je totiž následující

$$\int_{\Omega} u'(x)v'(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx. \quad (3.40)$$

Nevyskytuje se zde tedy člen, odkud počítáme tyto matice. Pro \mathcal{P}^1 viz m-file PR6_linearni_baze_laplace.m. Druhou možností, jak upravit m-file je přidat několik podmínek např. `for q = 0 ... end`.

Grafy přesného a přibližného řešení jsou spolu s absolutní hodnotou z chyb znázorněny na obrázku 24, resp. obrázku 25.



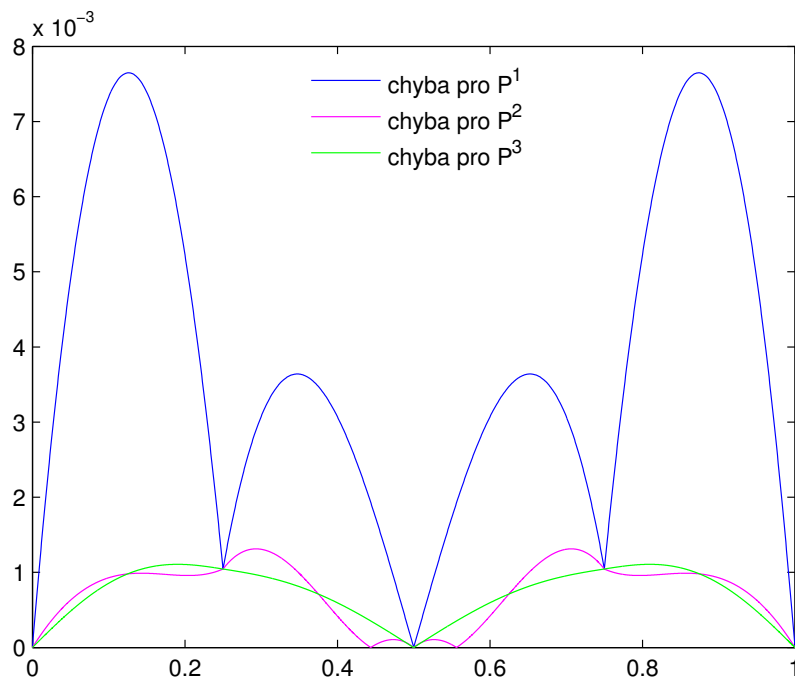
Obrázek 24: Aproximace řešení pro různé stupně bazových funkcí.

Následující tabulka ukazuje maximální chyby aproximací.

max_chyba = 0.0076	po částech lineární báze
max_chyba = 0.0013	po částech kvadratické báze
max_chyba = 0.0011	po částech kubické báze

Jako u většiny předchozích příkladů je i zde aproximované řešení v prostoru \mathcal{P}^2 velmi blízko řešení z \mathcal{P}^3 .





Obrázek 25: Chyby řešení pro různé stupně bázových funkcí.

Příklad 3.7. Řešte smíšenou okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) = \cos \pi x & \text{na } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Použijte po částech lineární, kvadratické a kubické bázové funkce a vykreslete přibližná řešení.

Řešení: Přesné řešení je tvaru

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} (\cos \pi x - 1).$$

M-fily jsou

PR7_linearni_baze.m, PR7_kvadraticka_baze.m, PR7_kubicka_baze.m.

a na jejich počátku je zadáno

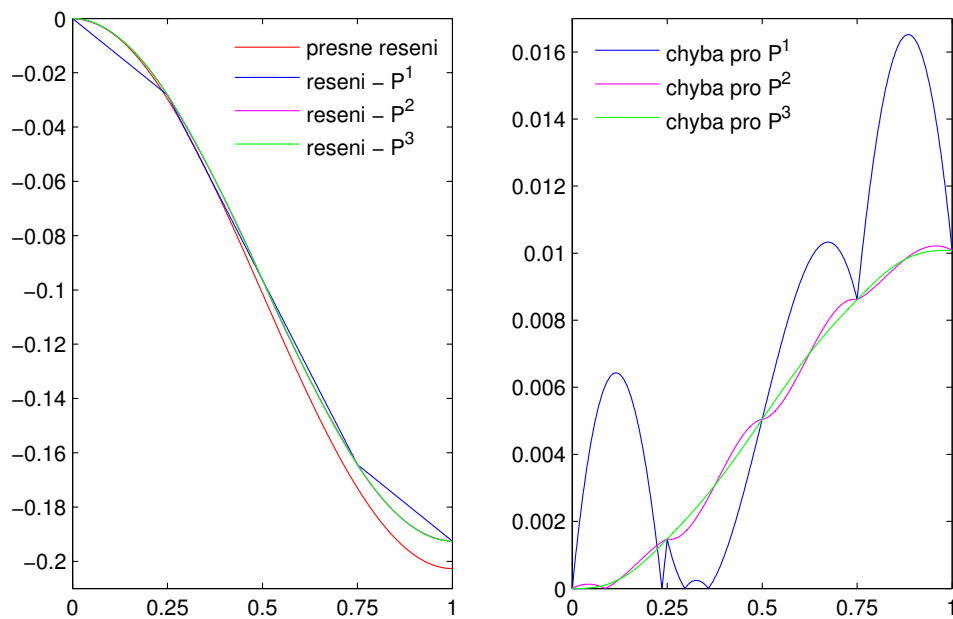
% zadani ulohy -----

```

N = 4; % pocet prvku
int_a = 0; % levý krajní bod intervalu (0,1)
int_b = 1; % pravý krajní bod intervalu (0,1)
r = 1; % koeficient z rce u členu ... -u''(x)
q = 0; % koeficient z rce u členu ... u(x)
podm_a = 0; % okrajová podmínka pro derivaci v bode 0
podm_b = 0; % okrajová podmínka pro derivaci v bode 1
okr_podm = 2; % Neumannova podmínka v bode 1
fce = @(z) cos(pi.*z); % fce prave strany ... f(x)=cos(pi*x)
% presne reseni
presne = @(z) 1/pi^2 .* (cos(pi.*z) -1);

```

Grafy přesného a přibližného řešení jsou spolu s absolutními hodnotami chyb znázorněny na obrázku 26.



Obrázek 26: Aproximace a chyby pro různé stupně bazových funkcí.

A v tabulce opět vidíme maximální chyby aproximací,

max_chyba = 0.0165	po částech lineární báze
max_chyba = 0.0102	po částech kvadratické báze
max_chyba = 0.0101	po částech kubické báze



Vraťme se pro zajímavost například k úloze (3.39) z příkladu 3.6 a podívejme se na h-verzi MKP.

Příklad 3.8. Řešte standardní h-verzí metody konečných prvků homogenní Dirichletovu okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) = \cos \pi x & \text{na } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Použijte 3, 4, ..., 7 prvků na intervalu Ω . Kromě grafů ukažte i absolutní chyby.

Řešení: Ačkoliv víme, jak vypadá přesné řešení této úlohy, nyní jej nevyužijeme. Pro výpočty přibližných řešení a vykreslení grafů jsem naprogramovala tři m-fily,

`linearni_baze.m`, `kvadraticka_baze.m`, `kubicka_baze.m`.

Na rozdíl od ostatních programů jsou tyto tři funkce, tzn. že při volání není potřeba jednotlivé m-fily otevírat a měnit jejich úvodní řádky v závislosti na dané úloze, jako jsme to dělali dříve. Pro naši úlohu využijeme volání v obecném tvaru

```
linearni_baze(N,int_a,int_b,r,q,podm_a,podm_b,okr_podm,fce)
```

Před tímto voláním je ovšem potřeba zadat funkci pravé strany rovnice jako inline funkci. Všechny vstupní hodnoty již známe, jsou to

```
% Vstup: 'N' ... pocet prvku na oblasti, intervalu (a,b)      %
%           'int_a' ... pocatecni bod intervalu a, tj. levý bod %
%           'int_b' ... koncový bod intervalu b, tj. pravý bod %
%           'r' ... koeficient z rovnice u členu -u''(x)      %
%           'q' ... koeficient z rovnice u členu u(x)         %
%           'podm_a' ... u'(a) = podm_a (if není, vložte napr. 0)%
%           'podm_b' ... u'(b) = podm_b (if není, vložte napr. 0)%
```

```

%      'okr_podm' ... urcuje zda a kde je zadana Neumannova %
%                okr. podminka (tj. derivace u)           %
%                = 0... neni predepsana                  %
%                = 1... predepsana v pravem krajnim bode a %
%                = 2... predepsana v levem krajnim bode b  %
%                = 3... predepsany v obou krajnich bodech a,b%
%      'fce' ... funkce na prave strane rovnice, nutne zadat%
%                drive jako inline fci (fce=inline('  ')) %

```

Výstupem jsou dva vektory, které využijeme pro vykreslení řešení,

```

% Vystup: 'sit' ... vektor pro osu x                      %
%      'reseni' ... vektor reseni pro osu y              %

```

Obrázky 27, 28, které vznikly příkazy v m-filu `PR8_linearni_baze.m`, ukazují přibližná řešení a chyby pro jednotlivé h .

Mimo jiné m-file obsahuje

```

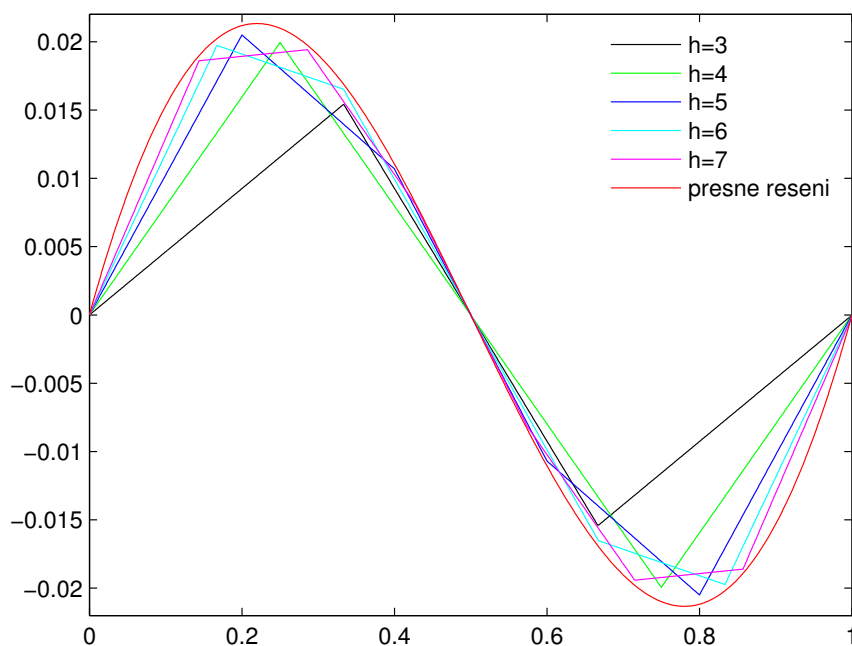
fce = inline('cos(pi.*z)')
presne = @(z) 1/pi^2 .* (cos(pi.*z) + 2.*z -1);

[sit,reseni] = linearni_baze(3,0,1,1,0,0,0,0,fce);
figure(1)
    plot(sit,reseni,'k')
figure(2)
    chyba = abs(presne(sit)-reseni);
    plot(sit,chyba,'k')
    max_chyba = max(chyba)
...
...

```

Jedná se o volání funkce pro $h = 3$, ostatní výsledky se přidají pomocí příkazu `hold on` a opětovného volání funkce a vykreslení grafu.

Vypočítaná řešení se postupně se zjemněním sítě blíží k přesnému řešení. Přesto je ale tato konvergence pomalejší než při použití p -verze MKP na čtyřech prvcích. Jak víme z příkladu 3.6 už po částech kvadratické báze způsobily maximální chybu aproximace řešení přibližně 0.0013. Zde můžeme vidět, že sedm



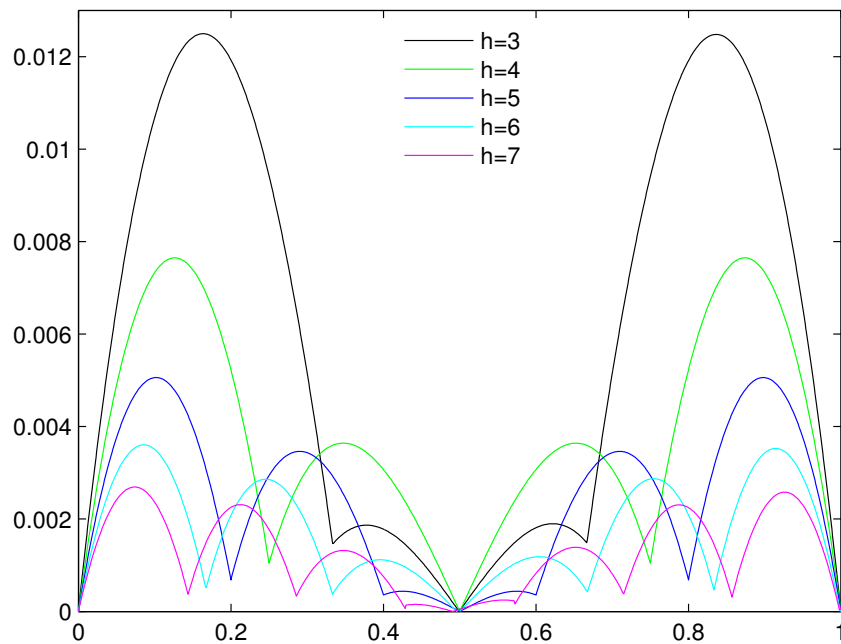
Obrázek 27: Aproximovaná řešení h-verzí MKP.

prvků má chybu stále větší než 0.0020 a následující tabulka říká, že je potřeba 10 prvků k chybě přibližně 0.0013.

max_chyba = 0.0125	$N = 3$
max_chyba = 0.0076	$N = 4$
max_chyba = 0.0051	$N = 5$
max_chyba = 0.0036	$N = 6$
max_chyba = 0.0027	$N = 7$
max_chyba = 0.0020	$N = 8$
max_chyba = 0.0016	$N = 9$
max_chyba = 0.0013	$N = 10$



Poznámka 3.19. Funkci `linearni_baze()` (resp. `kvadraticka_baze()`) či `kvadraticka_baze()`, kterou jsme nyní použili jako součást m-filu počítající



Obrázek 28: Chyby řešení pro různé h .

přibližné řešení úlohy (3.42), lze stejným způsobem použít i ve všech zbylých m -filech, které se liší pouze úvodními a závěrečnými řádky a zpřehlednit tím samotný kód. Tyto kódy, ale nejsou příliš obsáhlé, proto jsem k tomuto kroku nepřistoupila.

Poznámka 3.20. Všechny uvedené příklady vypovídají o jednom. Konvergence posloupnosti aproximovaných řešení, které získáme použitím polynomiálních bází vyšších řádů, je v daných úlohách rychlejší než při zjemňování sítě.

4 P-verze metody konečných prvků ve 2D

V případě dvoudimenzionálního prostoru se opět podíváme pouze na úlohy s eliptickou diferenciální rovnicí 2. řádu.

Uveďme si příklad, na kterém ukážeme prvotní kroky při výpočtu. Zatím jsme se v rámci teorie dívali na eliptickou rovnici 2. řádu s Dirichletovou homogenní a nehomogenní okrajovou podmínkou. Nyní se podívejme na úlohu s naší „tradiční“ eliptickou rovnicí a s Neumannovou okrajovou podmínkou, tedy

$$\begin{cases} -\nabla(a_1 \nabla u) + a_0 u = f \text{ na } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

jako oblast Ω uvažujme ohraničenou oblast v \mathbb{R}^2 a $g \in C(\partial\Omega)$.

Řešení této úlohy existuje jednoznačně v případě platnosti podmínek z Lemmatu 2.2, krátce tedy $a_1 > 0$ a navíc zde posílíme požadavek na koeficient a_0 a to $a_0 > 0$ na Ω .

Slabá formulace úlohy (4.1) je najít funkci $u \in V = W^{1,2}(\Omega)$ takovou, která splňuje

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V,$$

kde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_1 \nabla u \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v d\mathbf{x}, \quad (4.2)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} a_1 g v d\mathbf{s}. \quad (4.3)$$

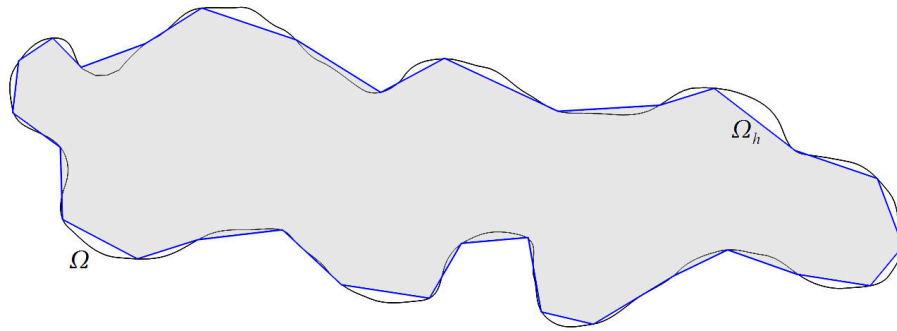
Pro funkce platí, že $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Poznámka 4.1. Odvození výrazů (4.2), (4.3) pomocí Greenovy formule (1.2) naleznete v literatuře [6], kapitole 1.2.6.

Nástin aproximace

Následující kroky (viz také literatura [6], kapitola 4.1.2.) nás dovedou od nekonečně dimenzionálního problému ke konečné dimenzi a řešení soustavy rovnic jako ve (2.5), tedy $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

1. Obecně uvažujeme oblast $\Omega \in \mathbb{R}^2$ s křivočarou hranicí. Tuto oblast musíme aproximovat tak, aby její hranice byla po částech polygonální, tím dostaneme novou oblast Ω_h . Obvykle $\Omega_h \neq \Omega$ a $\Omega_h \not\subset \Omega$, viz obrázek 29. My se budeme zabývat pouze „vhodnými“ oblastmi, tato aproximace nám tedy odpadá.



Obrázek 29: Polygonální aproximace oblasti - $\Omega \rightarrow \Omega_h$.

2. Oblast Ω_h pokryjeme konečným počtem prvků $T_1, T_2, \dots, T_{s_h} \in \mathcal{T}_h$. Ty jsou často trojúhelníky, viz obrázek 1, či čtyřúhelníky. Mohou se ale i kombinovat.

3. Při přechodu od oblasti Ω k Ω_h ztrácíme předepsané okrajové podmínky na $\partial\Omega$. Musíme je tedy jistým způsobem převést na $\partial\Omega_h$.

Pro úlohu (4.1) je přepis následující

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{na } \partial\Omega_h,$$

ačkoliv funkce g zde původně ani definována nebyla.

4. Dalším krokem je aproximace prostoru V prostorem V_h , $\dim V_h = N_h < \infty$, kterou musíme provést díky přechodu k Ω_h . Pracujeme tedy s následujícím po částech polynomiálním prostorem

$$V_h(\Omega_h) = \{v \in C(\Omega_h) ; v_h|_{\partial\Omega_h} = 0\}.$$

Kde $v|_{T_i}$ jsou trojúhelníky či čtyřúhelníky.

5. Nyní můžeme formulovat diskrétní slabou formulaci úlohy (4.1) a to takto: hledáme funkci $u_h \in V_h(\Omega_h)$ takovou, která splňuje rovnost

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4.4)$$

Předpis pro $a(u, v)$, $l(v)$ odpovídá výrazům (4.2), (4.3).

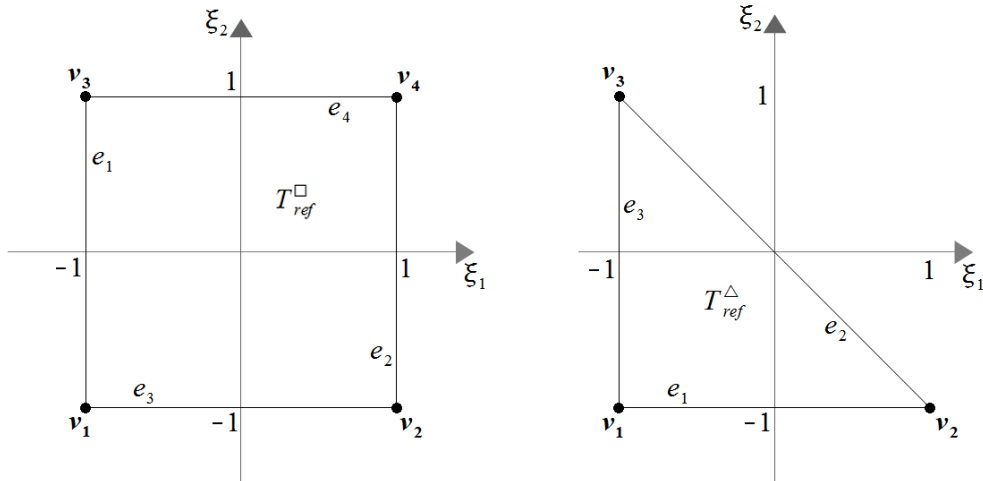
6. Dle postupu z kapitoly 2.1 víme, že na prostoru V_h máme konečnou bázi $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}\}$ a hledanou funkci lze zapsat ve tvaru $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} y_j \varphi_j$. Po dosazení do (4.4) a využití bazových funkcí dostaneme vztah (2.4), odkud vypočítáme neznámé koeficienty y_j , tedy po rozepsání konkrétně

$$\sum_{j=1}^{N_h} y_j \int_{\Omega_h} a_1 \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_h} y_j \int_{\Omega_h} a_0 \varphi_j \varphi_i d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} f \varphi_i d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_h} a_1 g \varphi_i d\mathbf{s}, \quad (4.5)$$

pro $i = 1, 2, \dots, N_h$. Dostali jsme tedy soustavu N_h lineárních rovnic o N_h neznámých y_i . Jednotlivé integrály přes Ω_h lze nahradit součtem integrálů přes prvky T_m , $m = 1, 2, \dots, s_h$, tj. $\int_{\Omega_h} \dots = \sum_{m=1}^{s_h} \int_{T_m} \dots$. Podobně je tomu u integrálu přes $\partial\Omega_h$, kde dílčí integrály jsou přes $\partial\Omega_h \cap \bar{T}_m$.

4.1 Příklady základních prvků, báze prostoru V_h , transformace

Prvky triangulace budeme uvažovat dva. Buď trojúhelníky, prostor označíme Δ^p , nebo čtyřúhelníky, které označíme \square^p . Kde hodnota p opět značí stupeň prostoru polynomů. Nyní si ukážeme krátce prvky z Δ^1 a \square^1 . Později si zavedeme i vyšší řády.



Obrázek 30: Referenční prvky pro prostory \square^1 , Δ^1 .

Prvky z prostoru \square^1

Referenční oblast pro prvek z \square^1 je $T_{ref}^\square = T_{ref} \times T_{ref} = (-1, 1)^2$ a prostor polynomů $\square^1(T_{ref}^\square) = span\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2\}$. Množina stupňů volnosti $\hat{\Sigma}^\square$ obsahuje 4 lineární formy $\hat{L}_i : \square^1(T_{ref}^\square) \rightarrow \mathbb{R}$, pro které platí

$$\begin{aligned}\hat{L}_1(g) &= g(\mathbf{v}_1) & (= [-1, -1]), \\ \hat{L}_2(g) &= g(\mathbf{v}_2) & (= [1, -1]), \\ \hat{L}_3(g) &= g(\mathbf{v}_3) & (= [-1, 1]), \\ \hat{L}_4(g) &= g(\mathbf{v}_4) & (= [1, 1]),\end{aligned}$$

$\forall g \in \square^1(T_{ref}^\square)$ a \mathbf{v}_i jsou vrcholy čtyřúhelníku. Situace je znázorněna v levé části obrázku 30.

Důležité je splnění požadavku unisolventnosti prvku, tuto vlastnost jsme zavedli v Definici 2.4 a následující Lemma jej potvrzuje. Navíc dává tvar uzlových bází.

Lemma 4.1. *Konečný prvek $(T_{ref}^\square, \square^1(T_{ref}^\square), \hat{\Sigma}^\square)$ je unisolventní a uzlová báze prostoru $\square^1(T_{ref}^\square)$ obsahuje biafinní tvarové funkce*

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_\square^{v_1}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}{4}, & \hat{\psi}_\square^{v_2}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{(1+\xi_1)(1-\xi_2)}{4}, \\ \hat{\psi}_\square^{v_3}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{(1-\xi_1)(1+\xi_2)}{4}, & \hat{\psi}_\square^{v_4}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{(1+\xi_1)(1+\xi_2)}{4}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Důkaz: viz literatura [6], str. 108 - 109

Díky tomu, že T_{ref}^\square vychází z T_{ref} , lze uzlové tvarové funkce v případě hierarchických bází psát pomocí Lobattových funkcí

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_\square^{v_1}(\boldsymbol{\xi}) &= l_1(\xi_1)l_1(\xi_2), & \hat{\psi}_\square^{v_2}(\boldsymbol{\xi}) &= l_2(\xi_1)l_1(\xi_2), \\ \hat{\psi}_\square^{v_3}(\boldsymbol{\xi}) &= l_1(\xi_1)l_2(\xi_2), & \hat{\psi}_\square^{v_4}(\boldsymbol{\xi}) &= l_2(\xi_1)l_2(\xi_2).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Situace pro prvek z prostoru \square^1 na konvexním čtyřúhelníku $T^\square \subset \mathbb{R}^2$ je pak docela snadná. Stačí použít referenční oblast T_{ref}^\square a vhodné referenční zobrazení $\mathbf{x}_{T^\square} : T_{ref}^\square \rightarrow T^\square$. To můžeme definovat jako lineární kombinaci funkcí (4.6),

$$\mathbf{x}_{T^\square} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{x}_i \hat{\psi}_\square^{v_i}(\boldsymbol{\xi}).\tag{4.8}$$

Body \mathbf{x}_i jsou vrcholy T^\square .

Poznámka 4.2. Referenční zobrazení zobrazí vrcholy \mathbf{v}_i , resp. strany e_i referenčního čtyřúhelníku na vrcholy \mathbf{x}_i , resp. strany s_i konvexního čtyřúhelníku, příkladem může být obrázek 31. Pracujeme tedy s konečným prvkem $(T^\square, \square^1(T^\square), \Sigma^\square)$, který je opět unisolventní, viz literatura [6], str. 110. Prostor

$$\square^1(T^\square) = \{g \circ \mathbf{x}_{T^\square}^{-1} ; g \in \square^1(T_{ref}^\square)\}.$$

Pro lineární formy $L_i \in \Sigma^\square$ platí

$$L_i : \square^1(T^\square) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_i(g) = g(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Tvarové funkce jsou

$$\psi_\square^{v_i}(\mathbf{x}) = (\hat{\psi}_\square^{v_i} \circ \mathbf{x}_{T^\square}^{-1})(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Prvky z prostoru Δ^1

Situace pro prostor Δ^1 je obdobná. Referenční prvek T_{ref}^Δ ale nelze vyjádřit pomocí T_{ref} , je znázorněn v pravé části obrázku 30. Prostor polynomů uvažujeme $\Delta^1(T_{ref}^\Delta) = \text{span}\{1, \xi_1, \xi_2\}$. Množina stupňů volnosti $\hat{\Sigma}^\Delta$ je složena ze tří lineárních forem $\hat{L}_i : \Delta^1(T_{ref}^\Delta) \rightarrow \mathbb{R}$, kde

$$\begin{aligned} \hat{L}_1(g) &= g(\mathbf{v}_1) & (= [-1, -1]), \\ \hat{L}_2(g) &= g(\mathbf{v}_2) & (= [1, -1]), \\ \hat{L}_3(g) &= g(\mathbf{v}_3) & (= [-1, 1]). \end{aligned}$$

Body \mathbf{v}_i jsou vrcholy referenčního trojúhelníku a fce $g \in \Delta^1(T_{ref}^\Delta)$.

Dle literatury [6], str. 112, lze Lemma 4.1 vyslovit také pro konečný prvek $(T_{ref}^\Delta, \Delta^1(T_{ref}^\Delta), \hat{\Sigma}^\Delta)$ a tvarové funkce jsou

$$\hat{\psi}_\Delta^{v_1}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \hat{\psi}_\Delta^{v_2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1 + \xi_1}{2}, \quad \hat{\psi}_\Delta^{v_3}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1 + \xi_2}{2}. \quad (4.9)$$

Nyní vezměme obecný trojúhelník $T^\Delta \subset \mathbb{R}^2$, jehož vrcholy označíme opět jako $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. Referenční zobrazení lze uvažovat podobně jako ve (4.8), tedy $\mathbf{x}_{T^\Delta} : T_{ref}^\Delta \rightarrow T^\Delta$

$$\mathbf{x}_{T^\Delta} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \hat{\psi}_\Delta^{v_i}(\boldsymbol{\xi}). \quad (4.10)$$

Funkce $\hat{\psi}_\Delta^{v_i}$ odpovídají (4.9).

Poznámka 4.3. Je-li zobrazení \mathbf{x}_{T^Δ} afinní a Jacobián prvku $J_{T^\Delta} \neq 0$, pak i inverzní zobrazení $\mathbf{x}_{T^\Delta}^{-1}$ je afinní. Prostor $\Delta^1(T^\Delta) = \{g \circ \mathbf{x}_{T^\Delta}^{-1} ; g \in \Delta^1(T_{ref}^\Delta)\}$ je polynomiální a konečný prvek je $(T^\Delta, \Delta^1(T^\Delta), \Sigma^\Delta)$. Množinu Σ^Δ a tvarové funkce $\psi_\Delta^{v_i}(\mathbf{x})$ definujeme podobně jako v poznámce 4.2.

Báze prostoru V_h

Nyní se podíváme na bázi prostoru V_h . Uvažujeme triangulaci \mathcal{T}_h , která je složená z s_h^\square čtyřúhelníků z prostoru \square^1 a s_h^Δ trojúhelníků z prostoru Δ^1 . Celkem platí $s_h^\square + s_h^\Delta = s_h \geq 1$. Dále vezmeme N_h bodů triangulace, které neleží na homogenní Dirichletově části $\partial\Omega$, pokud taková část hranice existuje, označíme je $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N_h}$ a pojmenujeme je jako *vrcholové uzly*. Poté $\dim V_h = N_h$.

Bázové funkce si můžeme zadefinovat následovně. Díky tomu, že bázová funkce prvního řádu φ_i je ve vrcholovém uzlu \mathbf{x}_i rovna jedné a vytváří tvar podobný pyramidě, viz obrázek 5, obdobně jako střešové funkce v 1D, nazveme φ_i *vrcholovou funkcí*. Nyní vezmeme část triangulace, která je složena z trojúhelníků či čtyřúhelníků, které sdílí vrcholový uzel \mathbf{x}_i , na obrázku 5 jsou znázorněny šedou plochou. Označme si ji $Z(i)$ a platí

$$Z(i) = \bigcup_{m \in N(i)} \bar{T}_m, \text{ kde } N(i) = \{m \in \mathbb{N} ; T_m \in \mathcal{T}_h \text{ a } \mathbf{x}_i \text{ je vrchol prvku } T_m\}.$$

Vrcholová funkce φ_i je nenulová pouze na části oblasti $Z(i)$ a má tvar

$$\varphi_i(\mathbf{x})|_{T_m} = \begin{cases} (\hat{\psi}_\square^{v_r} \circ \mathbf{x}_{T_m^\square}^{-1})(\mathbf{x}), & \text{jestli-že } T_m \in Z(i) \text{ je čtyřúhelník,} \\ (\hat{\psi}_\Delta^{v_r} \circ \mathbf{x}_{T_m^\Delta}^{-1})(\mathbf{x}), & \text{jestli-že } T_m \in Z(i) \text{ je trojúhelník.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Funkce φ_i je pro příslušný vrchol \mathbf{x}_i vždy spojitá na oblasti Ω_h . Jednotlivé funkce $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}$ tvoří bázi prostoru V_h a splňují vlastnost

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad \text{pro } 1 \leq i, j \leq N_h.$$

Poznámka 4.4. Dle literatury [6], kapitoly 4.1.3, je pro každý prvek $T_m \in Z(i)$ jediný vrchol uzlové tvarové funkce na referenční doméně T_{ref}^\square či T_{ref}^Δ . A pro funkce $\hat{\psi}_\square^{v_r}$ nebo $\hat{\psi}_\Delta^{v_r}$ platí $\hat{\psi}_\square^{v_r}(\mathbf{x}_{T_m^\square}^{-1}(\mathbf{x}_i)) = 1$ nebo $\hat{\psi}_\Delta^{v_r}(\mathbf{x}_{T_m^\Delta}^{-1}(\mathbf{x}_i)) = 1$.

Transformace slabého řešení

Nyní provedeme transformaci slabého řešení na referenční prvek, podobně jako na str. 28. Veškeré výpočty provedeme na tomto prvku a pak je transformujeme na konkrétní prvek triangulace. Zjednodušíme si tak počítání.

Připomeňme si soustavu (4.5), tj.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h} y_j \sum_{m=1}^{s_h} \int_{T_m} a_1 \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_h} y_j \sum_{m=1}^{s_h} \int_{T_m} a_0 \varphi_j \varphi_i d\mathbf{x} = \\ = \sum_{m=1}^{s_h} \int_{T_m} f \varphi_i d\mathbf{x} + \sum_{m=1}^{s_h} \int_{\partial\Omega_h \cap \bar{T}_m} a_1 g \varphi_i ds. \end{aligned}$$

Uvažujme nyní prvek T_m triangulace \mathcal{T}_h , který je čtyřúhelník. Pro trojúhelník by byl postup obdobný. Vezmeme opět obecnou funkci $g \in C^1(T_m)$ a podíváme se na transformaci g a ∇g na referenční doménu T_{ref}^\square pomocí zobrazení (4.8), tj. $\mathbf{x}_{T_m^\square} : T_{ref}^\square \rightarrow T_m$, po složkách $\mathbf{x}_{T_m^\square} = (x_{T_m^\square,1}, x_{T_m^\square,2})$.

Transformaci g označíme $\hat{g}^{(m)}$, poté

$$\hat{g}^{(m)}(\boldsymbol{\xi}) = (g \circ \mathbf{x}_{T_m^\square})(\boldsymbol{\xi}) = g(x_{T_m^\square,1}(\boldsymbol{\xi}), x_{T_m^\square,2}(\boldsymbol{\xi})) = g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{T_m^\square}(\boldsymbol{\xi})}. \quad (4.12)$$

Bod $\boldsymbol{\xi} \in T_{ref}^\square$.

Parciální derivace funkce g v \mathbb{R}^2 lze, dle literatury [6], kapitoly 4.1.4, po transformaci psát maticově

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{g}^{(m)}}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \hat{g}^{(m)}}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{T_m^\square,1}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_{T_m^\square,2}}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_{T_m^\square,1}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_{T_m^\square,2}}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_{T_m})^T \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Matice \mathbf{D}_{T_m} je Jacobiho maticí referenčního zobrazení $\mathbf{x}_{T_m^\square}$. Výraz (4.13) zkráceně napíšeme jako $\nabla \hat{g}^{(m)}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{D}_{T_m})^T \nabla g(\mathbf{x})$, kde pro $\mathbf{x} \in T_m$ platí $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_{T_m^\square}^{-1}(\mathbf{x})$.

Nyní můžeme formulaci (4.5) přepsat pomocí výrazů (4.12), (4.13), tj.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h} y_j \sum_{m=1}^{s_h} \int_{T_{ref}^\square} \hat{a}_1^{(m)} (\mathbf{D}_{T_m})^{-T} \nabla \hat{\varphi}_j^{(m)}(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{D}_{T_m})^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i^{(m)}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{J}_{T_m} d\boldsymbol{\xi} + \\ + \sum_{j=1}^{N_h} y_j \sum_{m=1}^{s_h} \int_{T_{ref}^\square} \hat{a}_0^{(m)} \hat{\varphi}_j^{(m)}(\boldsymbol{\xi}) \hat{\varphi}_i^{(m)}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{J}_{T_m} d\boldsymbol{\xi} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{s_h} \int_{T_{ref}^{\square}} \hat{f}^{(m)}(\boldsymbol{\xi}) \hat{\varphi}_i^{(m)}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{J}_{T_m} d\boldsymbol{x} + \sum_{m=1}^{s_h} \int_A \hat{a}_1^{(m)} \hat{g}^{(m)}(\boldsymbol{\xi}) \hat{\varphi}_i^{(m)}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{J}_{T_m} ds.$$

Oblast $A = \{\boldsymbol{\xi} \in \bar{T}_{ref}^{\square} ; \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_{T_m}^{-1}(\mathbf{x}) \text{ pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega_h \cap \bar{T}_m\}$. Hodnoty $\hat{a}_0^{(m)}, \hat{a}_1^{(m)}$ jsou konstanty.

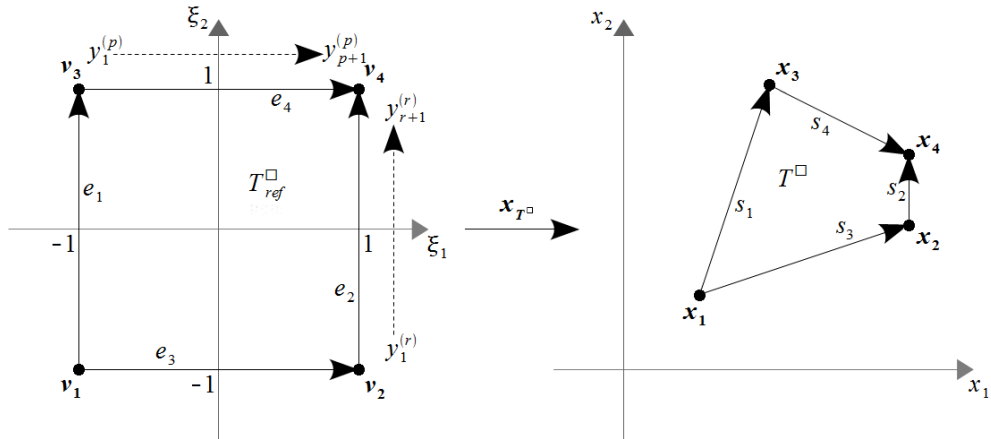
4.2 Uzlové bázové funkce v MKP, prvky vyšších řádů

Podobně jako u 1 dimenze v kapitole 3.1 si ukážeme volbu báze MKP pomocí Lagrangeových uzlových tvarových funkcí. Dostaneme tak představu o tom, jak volíme na prvku uzly a jednotlivé funkce. Nejdříve se podíváme na situaci na referenčním prvku, poté krátce na obecném prvku.

Čtyřúhelníkový prvek - volba uzlů a báze

Z předpisu pro referenční prvek $T_{ref}^{\square} = T_{ref} \times T_{ref}$ se nabízí při volbě Lagrangeových prvků postupovat podobně jako v 1D u $T_{ref} = (-1, 1)$.

Vybereme si například Gauss-Lobattovy body, viz str. 30, poté kartézským součinem zvolených bodů dostaneme síť uzlů na \bar{T}_{ref}^{\square} . Vrcholy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ a strany e_1, e_2, e_3, e_4 referenčního prvku si zvolíme dle obrázku 31. Při volbě bodů



Obrázek 31: Referenční čtverec T_{ref}^{\square} a obecný čtyřúhelník T^{\square} .

lze díky kartézskému součinu uvažovat dva stupně prostoru polynomů, $p, r \geq 1$. Označme si 1D Gauss-Lobattovy body p -řádu a r -řádu jako $y_i^{(p)}, y_i^{(r)} \in \bar{T}_{ref}^{\square}$. Tyto body označujeme ve směru, který ukazují přerušované šipky na obrázku 31.

Celkem dostaneme po řadě $(p + 1)$ a $(r + 1)$ bodů, tedy prvek $\overline{T}_{ref}^\square$ obsahuje $(p + 1)(r + 1)$ uzlů:

a) čtyři vrcholové uzly

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{v_1} = \mathbf{v}_1 &= (y_1^{(p)}, y_1^{(r)}) = [-1, -1], \\ \mathbf{v}^{v_2} = \mathbf{v}_2 &= (y_{p+1}^{(p)}, y_1^{(r)}) = [1, -1], \\ \mathbf{v}^{v_3} = \mathbf{v}_3 &= (y_1^{(p)}, y_{r+1}^{(r)}) = [-1, 1], \\ \mathbf{v}^{v_4} = \mathbf{v}_4 &= (y_{p+1}^{(p)}, y_{r+1}^{(r)}) = [1, 1].\end{aligned}\tag{4.14}$$

b) $(p - 1)$, resp. $(r - 1)$ uzlů, které leží na stranách e_3, e_4 , resp. e_1, e_2 . Lze je seřadit následovně

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i^{e_1} &= (y_1^{(p)}, y_{i+1}^{(r)}) = [-1, y_{i+1}^{(r)}], & i = 1, 2, \dots, r - 1, \\ \mathbf{v}_i^{e_2} &= (y_{p+1}^{(p)}, y_{i+1}^{(r)}) = [1, y_{i+1}^{(r)}], & i = 1, 2, \dots, r - 1, \\ \mathbf{v}_i^{e_3} &= (y_{i+1}^{(p)}, y_1^{(r)}) = [y_{i+1}^{(p)}, -1], & i = 1, 2, \dots, p - 1, \\ \mathbf{v}_i^{e_4} &= (y_{i+1}^{(p)}, y_{r+1}^{(r)}) = [y_{i+1}^{(p)}, 1], & i = 1, 2, \dots, p - 1.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Kde $\mathbf{v}_i^{e_j}$ je i -tý uzel na straně e_j .

c) $(p - 1)(r - 1)$ vnitřních uzlů, tzv. *bublinových*, které leží uvnitř prvku T_{ref}^\square ,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{1,1}^b &= (y_2^{(p)}, y_2^{(r)}), \\ \mathbf{v}_{1,2}^b &= (y_2^{(p)}, y_3^{(r)}), \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_{p-1,r-1}^b &= (y_p^{(p)}, y_r^{(r)}).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Nyní můžeme zkonstruovat na T_{ref}^\square *Lagrange-Gauss-Lobattovy prvky* $\square^{p,r}$. Jedná se o trojici $(T_{ref}^\square, \square^{p,r}(T_{ref}^\square), \hat{\Sigma}^\square)$, kde prostor

$$\square^{p,r}(T_{ref}^\square) = \text{span}\{\xi_1^k \xi_2^l ; 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq r, -1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}.\tag{4.17}$$

Množina $\hat{\Sigma}^\square$ obsahuje lineární formy odpovídající funkčním hodnotám v uzlech. V případě, kdy $p = r$ píšeme $\square^{p,r} = \square^p$.

Uzlové tvarové funkce na referenčním prvku T_{ref}^\square lze rozdělit do tří skupin podle typu uzlů. Všechny tyto funkce vyjádříme pomocí 1D Lagrangeových uzlových tvarových funkcí řádu p , resp. r , viz vzorec (3.9). Označme je nyní jako $\phi_i^{(p)}$, $i = 1, 2, \dots, p+1$ a $\phi_i^{(r)}$, $i = 1, 2, \dots, r+1$.

a) Čtyři vrcholové funkce

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{\square}^{v_1}(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_1^{(p)}(\xi_1)\phi_1^{(r)}(\xi_2), \\ \hat{\psi}_{\square}^{v_2}(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_{p+1}^{(p)}(\xi_1)\phi_1^{(r)}(\xi_2), \\ \hat{\psi}_{\square}^{v_3}(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_1^{(p)}(\xi_1)\phi_{r+1}^{(r)}(\xi_2), \\ \hat{\psi}_{\square}^{v_4}(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_{p+1}^{(p)}(\xi_1)\phi_{r+1}^{(r)}(\xi_2),\end{aligned}\tag{4.18}$$

v příslušném vrcholu jsou funkce rovny jedné, v ostatních jsou nulové.

b) $(p-1)$, resp. $(r-1)$ funkcí odpovídající stranám e_3, e_4 , resp. e_1, e_2 . Tedy

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{i,\square}^{e_1}(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_1^{(p)}(\xi_1)\phi_{i+1}^{(r)}(\xi_2), & i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \hat{\psi}_{i,\square}^{e_2}(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_{p+1}^{(p)}(\xi_1)\phi_{i+1}^{(r)}(\xi_2), & i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \hat{\psi}_{i,\square}^{e_3}(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_{i+1}^{(p)}(\xi_1)\phi_1^{(r)}(\xi_2), & i = 1, 2, \dots, p-1, \\ \hat{\psi}_{i,\square}^{e_4}(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_{i+1}^{(p)}(\xi_1)\phi_{r+1}^{(r)}(\xi_2), & i = 1, 2, \dots, p-1.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Funkce pro stranu e_1 jsou ve všech vrcholech a zbylých třech stranách nulové. Ostatní podobně.

c) $(p-1)(r-1)$ bublinových funkcí, které náležejí vnitřním uzlům prvku T_{ref}^\square

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{1,1,\square}^b(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_2^{(p)}(\xi_1)\phi_2^{(r)}(\xi_2), \\ \hat{\psi}_{1,2,\square}^b(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_2^{(p)}(\xi_1)\phi_3^{(r)}(\xi_2), \\ &\vdots \\ \hat{\psi}_{p-1,r-1,\square}^b(\boldsymbol{\xi}) &= \phi_p^{(p)}(\xi_1)\phi_r^{(r)}(\xi_2)\end{aligned}\tag{4.20}$$

a jsou nulové na hranici prvku.

Poznámka 4.5. Bázi prostoru $\square^{p,r}(T_{ref}^\square)$ tvoří tvarové funkce (4.18), (4.19) a (4.20) a jeho dimenze je $(p+1)(r+1)$. Podobně jako Lagrangeovy tvarové funkce také splňují podmínku s Kroneckerovým delta. Viz literatura [6], str. 144.

Transformaci na obecný konvexní čtyřúhelník $T^\square \subset \mathbb{R}^2$, který je znázorněn na obrázku 31 a jehož vrcholy označíme jako $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ a strany s_1, s_2, s_3, s_4 , provedeme aplikací vhodného bilineárního referenčního zobrazení (4.8). Místo uzlů (4.14), (4.15), (4.16) pracujeme postupně s uzly

$$\begin{aligned}
\text{a) } & \mathbf{x}^{v_i} = \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{T^\square}(\mathbf{v}^{v_i}), & \text{pro } i = 1, 2, 3, 4, \\
\text{b) } & \mathbf{x}_i^{e_j} = \mathbf{x}_{T^\square}(\mathbf{v}_i^{e_j}), & \text{pro } i = 1, 2, \dots, r-1, j = 1, 2, \\
& \mathbf{x}_i^{e_j} = \mathbf{x}_{T^\square}(\mathbf{v}_i^{e_j}), & \text{pro } i = 1, 2, \dots, p-1, j = 3, 4, \\
\text{c) } & \mathbf{x}_{i,j}^b = \mathbf{x}_{T^\square}(\mathbf{v}_{i,j}^b), & \text{pro } i = 1, 2, \dots, p-1, i = 1, 2, \dots, r-1,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

podrobně jsou rozepsány v literatuře [6] na straně 147.

Konečným prvkem je trojice $(T^\square, \square^{p,r}(T^\square), \Sigma^\square)$, kde

$$\square^{p,r}(T^\square) = \{g \circ \mathbf{x}_{T^\square}^{-1} ; g \in \square^{p,r}(T_{ref}^\square)\}.$$

Lineární formy odpovídají uzlům (4.21). Tvarové funkce jsou produktem složení funkcí z (4.18), (4.19), (4.20) a referenčního zobrazení $\mathbf{x}_{T^\square}^{-1}$. Například máme $\psi_{\square}^{v_i}$, $\psi_i^{e_j}$ a $\psi_{i,j}^b$. Navíc tvoří opět uzlovou bázi prostoru $\square^{p,r}(T^\square)$.

Trojúhelníkový prvek - volba uzlů a báze

V případě trojúhelníkového prvku je situace složitější. Kartézský součin např. ekvidistantních uzlů, který je zúžen na trojúhelníkový prvek, není nejlepší volba. Často se uvažují speciální body na Lagrangeově prvku T_{ref}^Δ , které se nazývají *Feketeho uzly*, viz literatura [6], kapitola 4.3.3 a 4.3.4. Tyto uzly vykazují lepší výsledky než produkty např. ekvidistantních uzlů a jejich definice může být následující.

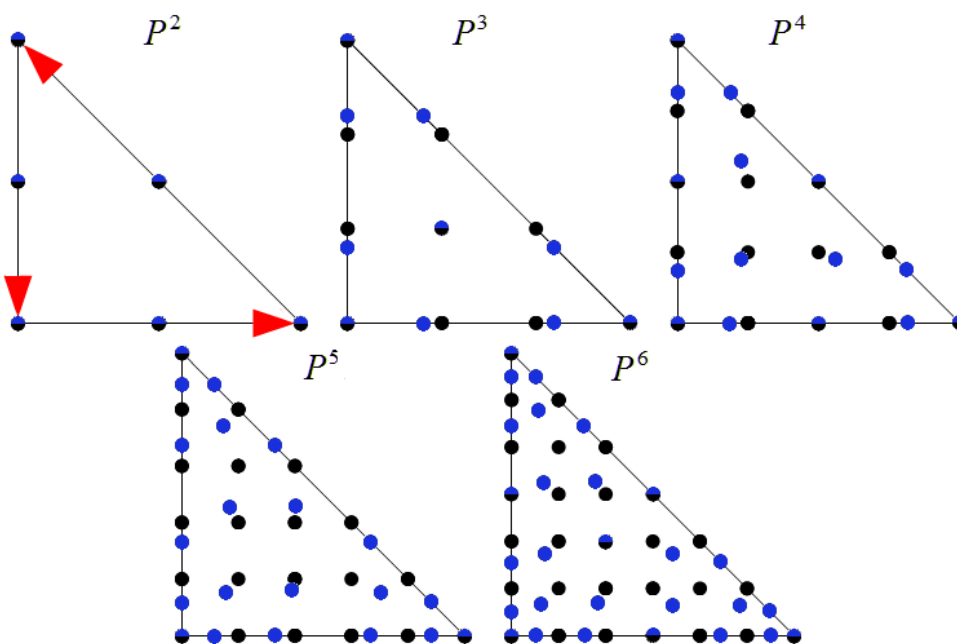
Definice 4.1. Nechť $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená konvexní oblast a je zde definován prostor polynomů $P^p(\mathcal{T})$ dimenze N_p . Dále nechť $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_p}\}$ je libovolná jeho báze. **Feketeho uzly** rozumíme množinu bodů $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{N_h}\} \subset \overline{\mathcal{T}}$, která maximalizuje determinant

$$\max\{\det \mathbf{L}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_{N_p}) ; \{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_{N_p}\} \subset \overline{\mathcal{T}}\} = \mathbf{L}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{N_p})$$

přes oblast \overline{T} , kde \mathbf{L} je tzv. *Vandermondeova matice* pro Lagrangeovy stupně volnosti $L_i(g) = g(\xi_i)$, která je dána vztahem

$$\mathbf{L}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N_p}) = \{L_i(\varphi_j)\}_{i,j=1}^{N_p} = \{\varphi_j(\xi_i)\}_{i,j=1}^{N_p}.$$

Poznámka 4.6. Neexistuje explicitní vyjádření pro Feketeho uzly, musí se tedy počítat numericky. Což je ale nelineární problém z oblasti optimalizace. Navíc výsledky výpočtu různými numerickými metodami se mohou lišit například volbou vstupních hodnot. Proto se vyjadřují pouze přibližně. Jejich rozložení (modře) ve srovnání s ekvidistantními uzly (černě) je přibližně znázorněno na obrázku 32. Proč se tedy používají? Výhodou totiž je, že lze numerickými experimenty dokázat, že Lagrangeovy tvarové funkce na Feketeho uzlech jsou velmi dobře podmíněné, což dokazuje i literatura [6], kapitola 4.3.4. Tento typ uzlů je navíc úzce spjat s Gauss-Lobattovými uzly a v jednodimenzionálním případě, tedy i v případě jejich kartézského součinu, jsou dokonce totožné. Navíc Feketeho uzly jsou nezávislé na volbě básových funkcí na prostoru $P^p(T)$.



Obrázek 32: Rozložení ekvidistantních a Feketeho uzlů na prvku $\overline{T}_{ref}^\Delta$.

Na referenčním prvku T_{ref}^Δ , který je znázorněn na obrázku 30, budeme postupovat obdobně jako u prvku T_{ref}^\square . Pro výpočet musíme Feketeho body znát. Ihned lze říci něco o vrcholech a bodech na stranách trojúhelníku.

- a) Na každé straně trojúhelníku leží $(p - 1)$ uzlů, tedy krom vrcholů, které odpovídají Gauss-Lobattovým bodům řádu p . Označme je ve směru šipek na obrázku 32 jako $y_i^{(p)} \in \overline{T}_{ref}^\Delta$,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{e_1} &= (y_{i+1}^{(p)}, y_1^{(p)}) = [y_{i+1}^{(p)}, -1], & i &= 1, 2, \dots, p-1, \\ \mathbf{v}_i^{e_2} &= (y_{p+2-i}^{(p)}, y_{i+1}^{(p)}), & i &= 1, 2, \dots, p-1, \\ \mathbf{v}_i^{e_3} &= (y_1^{(p)}, y_{p+2-i}^{(p)}) = [-1, y_{p+2-i}^{(p)}], & i &= 1, 2, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

- b) Tři vrcholové uzly jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{v_1} &= \mathbf{v}_1 = (y_1^{(p)}, y_1^{(p)}) = [-1, -1], \\ \mathbf{v}^{v_2} &= \mathbf{v}_2 = (y_{p+1}^{(p)}, y_1^{(p)}) = [1, -1], \\ \mathbf{v}^{v_3} &= \mathbf{v}_3 = (y_1^{(p)}, y_{p+1}^{(p)}) = [-1, 1]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

- c) Nakonec zde máme $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ bublinových uzlů

$$\mathbf{v}_1^b, \mathbf{v}_2^b, \dots, \mathbf{v}_{\frac{1}{2}(p-1)(p-2)}^b. \quad (4.24)$$

Tyto uzly se musí vypočítat ovšem jinou cestou.

Lagrange-Feketeho prvek na T_{ref}^Δ je trojice $(T_{ref}^\Delta, \Delta^p(T_{ref}^\Delta), \hat{\Sigma}^\Delta)$, kde $\Delta^p(T_{ref}^\Delta)$ je prostor polynomů, jehož dimenze je $N_p = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$. Lineární formy ze $\hat{\Sigma}^\Delta$ jsou spojeny s Feketeho uzly ξ_i a platí $\hat{L}_i(g) = g(\xi_i)$, $i = 1, 2, \dots, N_p$, $g \in \Delta^p(T_{ref}^\Delta)$.

Bázové tvarové funkce opět rozdělíme do tří skupin.

- a) Bodům $\mathbf{v}_j^{e_i}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, p-1$, na stranách e_i patří funkce $\hat{\psi}_{j,\Delta}^{e_i}$ a jsou nenulové ve všech třech vrcholech a všech stranách prvku kromě i -té.
- b) Funkci odpovídající vrcholu \mathbf{v}^{v_i} , $i = 1, 2, 3$, označíme $\hat{\psi}_\Delta^{v_i}$. A je nulová ve zbylých vrcholech a na protější straně vzhledem k \mathbf{v}_i .
- c) Nakonec pro bublinové uzly \mathbf{v}_j^b , $j = 1, 2, \dots, \frac{(p-1)(p-2)}{2}$, máme funkce $\hat{\psi}_{j,\Delta}^b$, které jsou nulové na všech stranách T_{ref}^Δ .

Způsob transformace hodnot a funkcí z referenční oblasti T_{ref}^Δ na obecný trojúhelník $T^\Delta \subset \mathbb{R}$ je obdobný jako v případě čtyřúhelníkového prvku.

Lagrangeova báze prostoru V_h .

Uvažujme triangulaci $\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, \dots, T_{s_h}\}$, která je složena z s_h^\square čtyřúhelníků z prostoru \square^p a s_h^\triangle trojúhelníků z prostoru \triangle^p a platí $s_h^\square + s_h^\triangle = s_h \geq 1$. Aby byla splněna spojitost, předpokládejme, že pro všechny prvky T_i platí stejný stupeň prostoru polynomů, tj. stupeň p . Navíc, pokud to nebude nutné, nebudeme rozlišovat, zda je prvek z \square^p či \triangle^p . Nyní chceme zkonstruovat bázi prostoru V_h pomocí bází, které jsme si uvedli dříve. Dle literatury [6], kapitoly 4.3.6, pro dimenzi prostoru V_h platí

$$\dim V_h = N_h = s_h^v + (p-1)s_h^e + (p-1)^2 s_h^\square + \frac{(p-1)(p+1)}{2} s_h^\triangle,$$

kde s_h^v je počet vrcholových funkcí odpovídající vrcholovým uzlům, $(p-1)s_h^e$ je počet stranových funkcí náležející stranovým uzlům a $(p-1)^2 s_h^\square$, resp. $\frac{(p-1)(p+1)}{2} s_h^\triangle$, je množství bublinových funkcí pro čtyřúhelníky, resp. trojúhelníky z oblasti. Jak ale tyto funkce zkonstruujeme?

- a) Stranová bázová funkce pro stranu s_j , jejíž krajní body jsou \mathbf{x}_{i_1} \mathbf{x}_{i_2} a orientace je od bodu s nižším indexem k bodu s vyšším indexem, je definována pomocí množiny $Z_s(j)$ znázorněné na obrázku 33. Jedná se o

$$Z_s(j) = \bigcup_{m \in N_e(j)} \bar{T}_m, \text{ kde } N_e(j) = \{m \in \mathbb{N}; T_m \in \mathcal{T}_h, s_j \text{ je strana } T_m\}.$$

Pro každou stranu s_j z $T_m \in Z_e(i)$ existuje jedna strana e_l z T_{ref} a platí $\mathbf{x}_{T_m}(e_l) = s_j$. Vnitřních bodů $\mathbf{x}_i^{s_j}$ je $p-1$ a příslušné bázové funkce jsou $\varphi_i^{s_j}$. Definujeme je takto

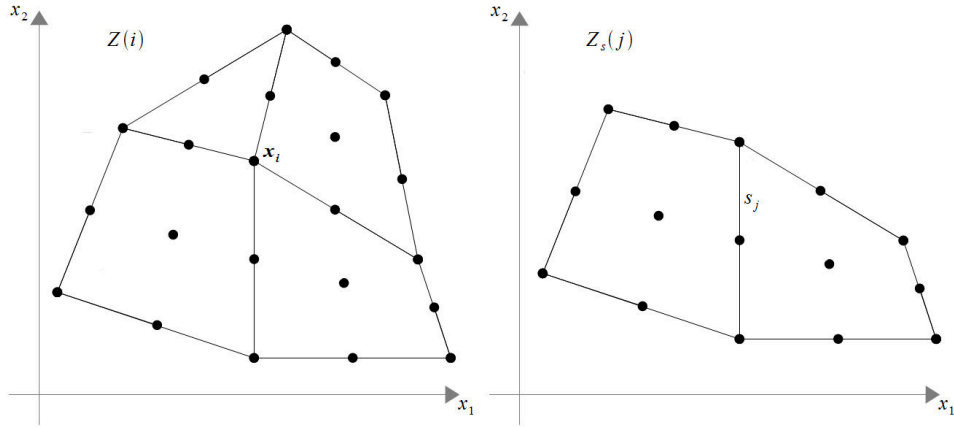
$$\varphi_i^{s_j}(\mathbf{x})|_{T_m} = \begin{cases} (\hat{\psi}_{r,\square}^{e_l} \circ \mathbf{x}_{T_m^\square}^{-1})(\mathbf{x}), & \text{jestli-že } T_m \in Z(i) \text{ je čtyřúhelník,} \\ (\hat{\psi}_{r,\triangle}^{e_l} \circ \mathbf{x}_{T_m^\triangle}^{-1})(\mathbf{x}), & \text{jestli-že } T_m \in Z(i) \text{ je trojúhelník.} \end{cases}$$

Navíc zde platí obdoba poznámky 4.4.

- b) Vrcholová bázová funkce φ^{v_i} odpovídající vrcholu \mathbf{x}_i je nenulová pouze na množině $Z(i)$, která je znázorněna na obrázku 33 a je definována jako v (4.11). Poznámka 4.4 je opět platná.

- c) Bublinových bázových funkcí je na každém prvku $(p-1)^2$, resp. $\frac{(p-1)(p+1)}{2}$. Uvažujme například čtyřúhelníkový prvek T_m . Bublinové uzly jsou $\mathbf{x}_i^{T_m}$, $i = 1, 2, \dots, (p-1)^2$ a bublinové funkce jsou

$$\varphi_i^{T_m}(\mathbf{x}) = (\hat{\psi}_{r,s,\square}^b \circ \mathbf{x}_{T_m}^{-1})(\mathbf{x}).$$



Obrázek 33: Část $Z(i)$, resp. $Z_s(j)$ oblasti Ω_h pro uzel \mathbf{x}_i , resp. stranu s_j .

4.3 Hierarchické bázové funkce v MKP

Nyní se konečně podíváme na volbu hierarchických bází pro dvoudimenzionální prostor. Myšlenka přístupu je totožná jako v 1D, viz kapitola 3.2. Tedy platí, že bázi prostoru $\mathcal{P}^{p_i+1}(T_{ref})$ sestavíme pomocí báze prostoru $\mathcal{P}^{p_i}(T_{ref})$.

Poznámka 4.7. Pro zajímavost, v literatuře [5], kapitole 2, je problematika hierarchických bází řešena pomocí tzv. *De Rham diagramu*. Schéma souvisí se vztahy mezi prostory $W^{1,2}$, $W(curl)$ (obsahuje funkce z L^2 , jejichž gradient opět padne do L^2), $W(div)$ (divergence funkce z L^2 padne do L^2) a L^2 .

Budeme předpokládat, že prvky triangulace jsou pouze čtyřúhelníky a referenční prvek je T_{ref}^\square , viz obrázek 30. Odlišnost od 1D je v tom, že pracujeme se dvěma prostory, viz například literatura [3], kapitola 6.

1. Máme tzv. „trunk space“, nazveme jej **hlavní prostor** a označíme $\square_{hl}^{p,r}(T_{ref}^\square)$. Jedná se o prostor polynomů na referenční oblasti T_{ref}^\square , který je rozšířen

o funkce

$$\begin{aligned} \xi_1^i \xi_2^j & \text{ pro } i = 0, 1, \dots, p, j = 0, 1, \dots, r, i + j = 0, 1, \dots, \max\{p, r\}, \\ \xi_1 \xi_2 & \text{ pro } p = r = 1, \\ \xi_1^p \xi_2 & \text{ pro } p \geq 2, \\ \xi_1 \xi_2^r & \text{ pro } r \geq 2. \end{aligned}$$

2. Druhý prostor je tzv. „tensor space“, tedy **tensorový prostor** a značit jej budeme jako $\square_{te}^{p,r}(T_{ref}^\square)$. Obsahuje opět polynomy na T_{ref}^\square a navíc všechny funkce $\xi_1^i \xi_2^j$, kde $i = 0, 1, \dots, p$ a $j = 0, 1, \dots, r$.

Rozdíl mezi těmito prostory ukazuje Pascalův trojúhelník na obrázku 34.

Opět platí, že hierarchické báze funkce jsou konstruovány pomocí Legendreových polynomů, resp. Lobattových polynomů l_i dle vzorce (3.11). Označme je podobně jako Lagrangeovy tvarové funkce ze str. 88, tj. $l_i^{(p)}$, $i = 1, 2, \dots, p + 1$ a $l_i^{(r)}$, $i = 1, 2, \dots, r + 1$. A také je rozdělíme do tří skupin.

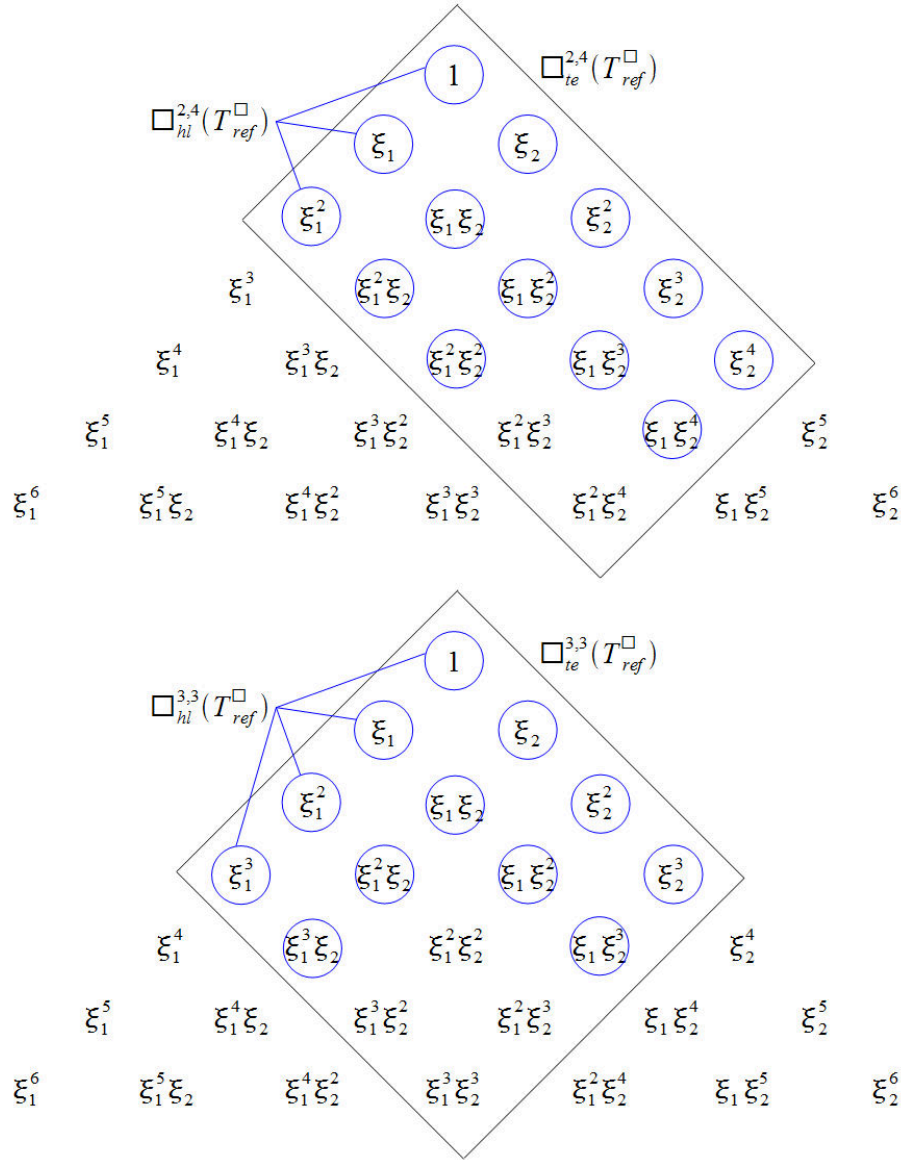
- a) Pro čtyři vrcholové tvarové funkce, které jsou bilineární, platí

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\square}^{v1}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) = l_1^{(p)}(\xi_1)l_1^{(r)}(\xi_2), \\ \hat{\psi}_{\square}^{v2}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) = l_2^{(p)}(\xi_1)l_1^{(r)}(\xi_2), \\ \hat{\psi}_{\square}^{v3}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) = l_1^{(p)}(\xi_1)l_2^{(r)}(\xi_2), \\ \hat{\psi}_{\square}^{v4}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) = l_2^{(p)}(\xi_1)l_2^{(r)}(\xi_2). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Jedná se o tvary totožné s (4.6), (4.7) pro čtyřúhelníkový prvek \square^1 .

- b) Stranových funkcí máme celkem $2(p - 1)$ pro strany e_3, e_4 . A $2(r - 1)$ pro strany e_1, e_2 . Lze je psát

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{i,\square}^{e1}(\boldsymbol{\xi}) &= l_1^{(p)}(\xi_1)l_{i+2}^{(r)}(\xi_2), \quad i = 1, 2, \dots, r - 1, \\ \hat{\psi}_{i,\square}^{e2}(\boldsymbol{\xi}) &= l_2^{(p)}(\xi_1)l_{i+2}^{(r)}(\xi_2), \quad i = 1, 2, \dots, r - 1, \\ \hat{\psi}_{i,\square}^{e3}(\boldsymbol{\xi}) &= l_{i+2}^{(p)}(\xi_1)l_1^{(r)}(\xi_2), \quad i = 1, 2, \dots, p - 1, \\ \hat{\psi}_{i,\square}^{e4}(\boldsymbol{\xi}) &= l_{i+2}^{(p)}(\xi_1)l_2^{(r)}(\xi_2), \quad i = 1, 2, \dots, p - 1. \end{aligned} \tag{4.26}$$



Obrázek 34: Rozdíl mezi prostory $\square_{hl}^{p,r}(T_{ref}^\square)$, $\square_{te}^{p,r}(T_{ref}^\square)$.

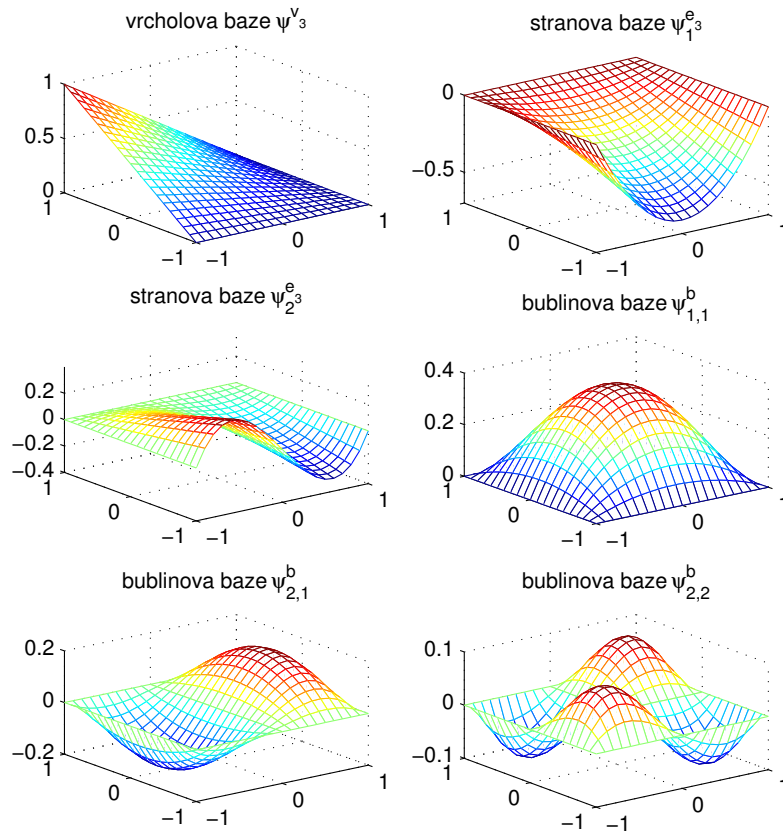
- c) Bublinových funkcí pro prostor $\square_{te}^{p,r}(T_{ref}^\square)$, $p, r \geq 2$, je opět $(p-1)(r-1)$ a jsou to

$$\hat{\psi}_{i,j,\square}^b(\boldsymbol{\xi}) = l_{i+2}^{(p)}(\xi_1)l_{j+2}^{(r)}(\xi_2), \quad i = 1, 2, \dots, p-1, \quad j = 1, 2, \dots, r-1. \quad (4.27)$$

Avšak pro prostor $\square_{hl}^{p,r}(T_{ref}^\square)$ je funkcí pouze $\frac{1}{2}(p-2)(r-3)$, $p, r \geq 4$.

Poznámka 4.8. Následující obrázek 35 ukazuje příklady hierarchických bázevých funkcí pro prostor polynomů \mathcal{P}^3 . Celkem na referenčním čtyřúhelníku máme

4 vrcholové funkce (funkce pro vrchol v_3 , tj. $\hat{\psi}_{\square}^{v_3}$ je znázorněna na obrázku, zbylé jsou podobné), 8 stranových funkcí (zde jsou znázorněny funkce pro stranu e_3 , tedy $\hat{\psi}_{1,\square}^{e_3}, \hat{\psi}_{2,\square}^{e_3}$, ostatní funkce jsou obdobné) a 4 bublinové funkce (zobrazeny funkce $\hat{\psi}_{1,1,\square}^b, \hat{\psi}_{2,1,\square}^b, \hat{\psi}_{2,2,\square}^b$, zbylá funkce $\hat{\psi}_{1,2,\square}^b$ je pootočená funkce $\hat{\psi}_{2,1,\square}^b$).



Obrázek 35: Příklad hierarchických bází na \mathcal{P}^3 .

Na Obrázku je odlišné značení, tj. bez „stříšky“ a „čtverečku“, jedná se ale o výše uvedené hierarchické funkce na T_{ref}^{\square} .

Hierarchické báze pro trojúhelníkový prvek

Teorie hierarchických bází pro trojúhelníky je zpracována např. v literatuře [3] v kapitole 6.2. či v literatuře [18]. Problematiku si pouze nastíníme.

Uvažujme prostor Δ^p a referenční prvek $T_{ref}^{\Delta_h}$, který je poněkud jiný než známý T_{ref}^{Δ} . Jedná se o rovnoramenný trojúhelník se základnou na ose ξ_1 a délkou 2

a s výškou $\sqrt{3}$. Souřadnice vrcholů jsou $[-1, 0]$, $[1, 0]$ a $[0, \sqrt{3}]$. Budeme pracovat s tzv. *barycentrickými souřadnicemi*

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \xi_1 - \frac{\xi_2}{\sqrt{3}} \right), \\ V_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \xi_1 - \frac{\xi_2}{\sqrt{3}} \right), \\ V_3 &= \frac{\xi_2}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

kde $V_1 + V_2 + V_3 = 1$.

Hierarchické tvarové funkce se konstruuji podobně jako u čtyřúhelníků. Máme

a) tři vrcholové funkce

$$\hat{\psi}_{\Delta}^{v_i}(\boldsymbol{\xi}) = V_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

b) Stranových funkcí je celkem $3(p-1)$. Lze je psát ve tvaru

$$\hat{\psi}_{j,\Delta}^{e_i}(\boldsymbol{\xi}) = V_{i_1} V_{i_2} \mu_{j+1}(V_{i_2} - V_{i_1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad (4.29)$$

kde funkce μ_k je definována pomocí Lobattových funkcí výrazem

$$l_{k+1}(\eta) = l_1(\eta) l_2(\eta) \mu_k(\eta).$$

Jedná se o tzv. *Kernelovy funkce*, viz literatura [5], kapitola 1.2.4. První funkce jsou tvaru

$$\begin{aligned} \mu_2(\eta) &= -2\sqrt{\frac{3}{2}}, \\ \mu_3(\eta) &= -2\sqrt{\frac{5}{2}}\eta, \\ \mu_4(\eta) &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5\eta^2 - 1), \\ \mu_5(\eta) &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2}}(7\eta^2 - 3)\eta, \\ \mu_6(\eta) &= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{2}}(21\eta^4 - 14\eta^2 + 1). \end{aligned}$$

c) Na prostoru $\Delta^p(T_{ref}^{\Delta_h})$, který je ekvivalentní k prostoru $\square_{hl}^{p,p}(T_{ref}^{\square})$, máme $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ funkcí, první tři jsou

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{1,\Delta}^b(\boldsymbol{\xi}) &= V_1 V_2 V_3, \\ \hat{\psi}_{2,\Delta}^b(\boldsymbol{\xi}) &= V_1 V_2 V_3 L_1(V_2 - V_1), \\ \hat{\psi}_{3,\Delta}^b(\boldsymbol{\xi}) &= V_1 V_2 V_3 L_1(2V_3 - 1). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Kde L_i jsou Legendreovy polynomy ze strany 30.

4.4 Numerická integrace ve 2D

Podobně jako v jednodimenzionálním případě i zde se integrály ze slabé formulace úlohy ve velké většině případů nepočítají přesně, ale využívá se metod numerické integrace.

Kvadraturních pravidel je mnoho, my se opět podíváme na Gaussovy kvadraturní formule.

Čtyřúhelníkový prvek

Situace pro případ referenčního čtyřúhelníku je vcelku snadná. Vycházíme z předpisu pro 1D, tj. (3.17). Pak lze pro integrál z funkce $f(\xi_1, \xi_2)$ na prvku T_{ref}^\square psát

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k w_i w_j f(\xi_{1,i}, \xi_{2,j}). \quad (4.31)$$

Kde w_i, w_j jsou *integrační váhy* a $(\xi_{1,i}, \xi_{2,j})$ jsou *integrační uzly*, $\forall i, j$. Formule má přesnost p , pokud funkce f je polynomem stupně nejvýše p .

Poznámka 4.9. Formule se dá použít také pouze s jednou sumou, v tomto případě uvažujeme jen jednu integrační váhu. Tento tvar je ale vhodný pouze pro případ, kdy $k \geq 7$, viz literatura [22], kapitola 6.3.

Chyba integrace je rozdíl přesného a aproximovaného integrálu.

Trojúhelníkový prvek

Pro trojúhelníkový prvek je situace poněkud složitější. Je třeba převést integraci z referenčního trojúhelníku na referenční čtverec. Tento problém vyřešíme zavedením jisté transformace, která obecně integrálu z funkce $g(\boldsymbol{\xi})$ přes T_{ref}^Δ přiřadí integrál dle předpisu

$$\int_{T_{ref}^\Delta} g(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_{T_{ref}^\square} \frac{1-y_2}{2} g\left(-1 + \frac{1-y_2}{2}(y_1+1), y_2\right) d\mathbf{y}.$$

Podrobnější popis i s důkazem je uveden v literatuře [6], kapitole 4.2.2.

I zde lze ale použít Gaussovy kvadraturní formule v tzv. *ekonomické* verzi

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^{-\xi_1} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \approx \sum_{i=1}^k w_i f(\xi_{1,i}, \xi_{2,i}),$$

w_i jsou opět *integrační váhy* a hodnoty $(\xi_{1,i}, \xi_{2,i})$ *integrační uzly*. Počet těchto uzlů je dán číslem k a každý z nich je určen třemi neznámými hodnotami $(w_i, \xi_{1,i}, \xi_{2,i})$. Vezmeme-li vhodnou polynomiální bázi řádu nejvýše p , pak můžeme obdržet rovnice, kterých je méně než neznámých.

Poznámka 4.10. V případě barycentrických souřadnic (4.28) lze psát

$$\int_{T_{ref}^\Delta} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx A_\epsilon \sum_{i=1}^k w_i f(V_{1,i}, V_{2,i}, V_{3,i}),$$

kde $(V_{1,i}, V_{2,i}, V_{3,i})$ jsou souřadnice pro i -tý integrační uzel a A_ϵ je oblast trojúhelníku.

4.5 Interpolace na prvku

Interpolace na konečných prvcích produkuje vhodnou po částech polynomiální funkci $f_h \in V_h(\Omega_h)$, která reprezentuje vstupní funkci $f \in V(\Omega_h)$. Oblast Ω_h je aproximací oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$, viz str. 80. V případě dvoudimenzionálního prostoru lze podobně jako v 1D případě užít uzlovou interpolaci či interpolaci přes projekci. Podívejme se na první zmíněnou.

Uzlová interpolace

Definice obecné Lagrangeovy interpolace, kterou nalezneme např. v literatuře [6] v kapitole 3.3.1, vychází z 1D a zní

Definice 4.2. Nechť $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ je nějaká uzlová báze na unisolventním konečném prvku $(T, P(T), \Sigma)$. Nechť $f \in V$, kde $P(T) \subset V$, je funkce, pro kterou existují hodnoty $L_1(f), L_2(f), \dots, L_N(f)$ a $L_i(f) \in \mathbb{R}, \forall i$. Poté je **lokální uzlový interpolant** na prvku T definován jako

$$f_h^T = \sum_{j=1}^N L_j(f) v_j.$$

Poznámka 4.11. Na základě předchozí definice lze říci, že pro lineární formy L_i platí

$$L_i(f_h) = L_i(f), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Předtím, než zavedeme globální uzlový interpolant, se musíme seznámit s pojmem **regulární síť**. Jedná se o triangulaci \mathcal{T}_h na oblasti $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ takovou, že

$$\bigcup_{j=1}^{s_h} \bar{T}_j = \bar{\Omega}_h.$$

Navíc prvky T_i musí být po dvou disjunktní.

Definice 4.3. Globální uzlový interpolant f_h funkce $f \in V(\Omega_h)$ je definován pomocí lokálního interpolantu f_h^T jako

$$f_h|_{T_i} \equiv f_h^{T_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s_h.$$

Poznámka 4.12. Globální interpolant k funkci f získáme sestrojením lokálních interpolantů pro všechny prvky triangulace. Pokud funkce $f \in V$, pak i $f_h \in V$. Podrobnější informace naleznete v literatuře [6] v kapitole 3.3.

Nyní můžeme vyslovit vlastnost Lagrangeovy interpolace na síti složené ze čtvercových, resp. trojúhelníkových prvků, resp. obou typů. Předpokládáme, že triangulace \mathcal{T}_h oblasti Ω_h je regulární a obsahuje s_h prvků z \square^p , resp. \triangle^p . Globální Lagrangeův interpolant f_h je spojitý na $\bar{\Omega}_h$ pro každou funkci $g \in C(\Omega_h)$. Navíc každá regulární síť odpovídá prostoru $W_{1,2}(\Omega_h)$. Vše se opět počítá na referenčních prvních a pak převádí na konkrétní prvek triangulace.

4.6 Příkladová část

Ukážeme si h -verzi a částečně také p -verzi MKP. V obou případech použijeme stejnou rovnici i stejné okrajové podmínky. M-fily jsem naprogramovala pouze pro tyto konkrétní případy.

Příklad 4.1. Uvažujme jednoduchou Laplaceovu rovnici ve dvou dimenzích s Dirichletovými okrajovými podmínkami, konkrétně

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) = 0 & \text{na } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \text{na stranách } x_1 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0, \\ u(\mathbf{x}) = \sin \pi x_1 & \text{na straně } x_2 = 1. \end{cases} \quad (4.32)$$

Ukažte jak vypadá řešení s po částech lineárními bázemi, když oblast Ω rozdělíme na 2, 4, 8 a nakonec 16 prvků.

Řešení: Pro tuto úlohu existuje opět přesné řešení a je tvaru

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\sin \pi x_1 \cdot \sin \pi x_2}{\sin \pi}. \quad (4.33)$$

Nejdříve nalezneme slabou formulaci úlohy.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0, \\ -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) &= 0, \\ -\int_{\Omega} \Delta u \cdot v d\mathbf{x} &= 0, \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds. \end{aligned}$$

K poslední rovnici jsme došli pomocí aplikace Greenovy formule (1.2).

Integrál přes hranici oblasti Ω na pravé straně rovnice se v úloze projeví pouze v místech odpovídajících hraně $x_2 = 1$ oblasti Ω . Zde je totiž Dirichletova okrajová podmínka nehomogenní. V m-filu stačí zadat jen okrajové hodnoty v příslušných uzlech, jinak se algoritmus nijak nemodifikuje. Změna počtu prvků triangulace se projeví pouze zadáním bodů sítě, definováním prvků a vložením okrajových podmínek.

Budeme se pohybovat na referenčním prvku $T_{ref}^{\square} = (-1, 1) \times (-1, 1)$ a pro transformaci na prvek T_j použijeme referenční zobrazení (4.8), tj.

$$\mathbf{x}_{T_j^{\square}} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{x}_i \hat{\psi}_{\square}^{v_i}(\boldsymbol{\xi}).$$

Situaci znázorňuje obrázek 31.

Dle předchozího textu máme v případě lineárních bází čtyři bázové funkce (4.25), které náležejí příslušným vrcholům,

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\square}^{v_1}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2), & \hat{\psi}_{\square}^{v_2}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2), \\ \hat{\psi}_{\square}^{v_3}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2), & \hat{\psi}_{\square}^{v_4}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2). \end{aligned}$$

Přibližné řešení úlohy lze tedy na j -tém prvku psát ve tvaru lineární kombinace výše uvedených bází. Konkrétní hodnoty koeficientů této kombinace nalezneme jako řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$, která odpovídá této úloze.

Prvky do matice tuhosti \mathbf{A} počítáme podobně jako v 1D. Nejdříve vytvoříme matice pro prvky T_j a poté z těchto matic vytvoříme hledanou matici \mathbf{A} . Proto

$$\begin{aligned} a_j(u, v) &= \int \int_{T_j} \nabla u \nabla v d\mathbf{x} \approx \\ &\approx \int \int_{T_{ref}^\square} (\mathbf{D}_{T_j})^{-T} \nabla u^{(j)}(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{D}_{T_j})^{-T} \nabla v^{(j)}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{J}_{T_j} d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Což vyplývá ze strany 85. Tvar Jacobiho matice $(\mathbf{D}_{T_j})^T$ plyne z výrazu (4.13), tj.

$$\left(\mathbf{D}_{T_j}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{T_{j,1}}^\square}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_{T_{j,2}}^\square}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_{T_{j,1}}^\square}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_{T_{j,2}}^\square}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Jednotlivé prvky není obtížné vypočítat. My budeme uvažovat ekvidistantní kroky h_{x_1} pro osu x_1 a h_{x_2} pro osu x_2 , proto např.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{T_{m,1}}^\square}{\partial \xi_1} &= -x_{1,1} \frac{1 - \xi_2}{4} + x_{2,1} \frac{1 - \xi_2}{4} - x_{3,1} \frac{1 + \xi_2}{4} + x_{4,1} \frac{1 + \xi_2}{4} = \\ &= (1 - \xi_2) \frac{x_{2,1} - x_{1,1}}{4} + (1 + \xi_2) \frac{x_{4,1} - x_{3,1}}{4} = \frac{h_{x_1}}{4} (1 - \xi_2) + \frac{h_{x_1}}{4} (1 + \xi_2) = \frac{h_{x_1}}{2}. \end{aligned}$$

Označení $x_{i,j}$ znamená, že se jedná o j -tou souřadnici bodu \mathbf{x}_i . Poté tedy

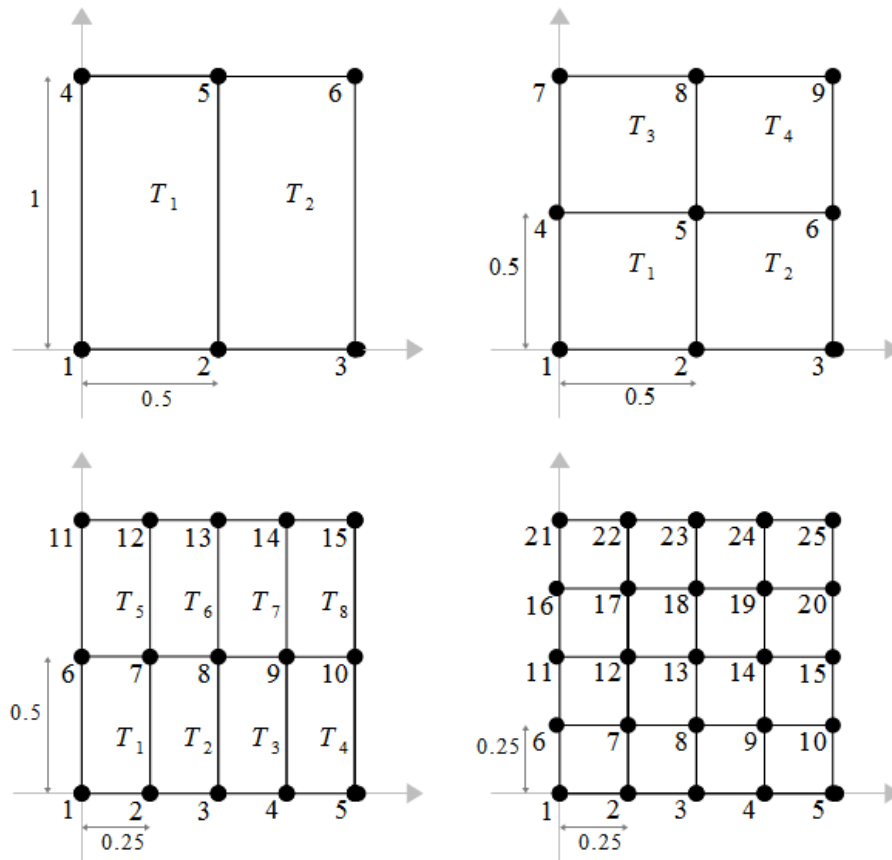
$$\left(\mathbf{D}_{T_j}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{h_{x_1}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h_{x_2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \left(\mathbf{D}_{T_j}\right)^{-T} = \begin{pmatrix} \frac{2}{h_{x_1}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{h_{x_2}} \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Inverzi jsme vypočítali dle literatury [6], poznámky 4.2 a Jacobián je $\mathbf{J}_{T_j} = \frac{h_{x_1} h_{x_2}}{2}$.

Jak vypočítáme hodnoty uvnitř integrálu, tj. součin Jacobiho matice a gradientu funkce? Matice $(\mathbf{D}_{T_j})^{-T}$ je typu 2×2 a $\nabla \mathbf{u}^{(j)}$ si lze představit jako součin neznámých koeficientů c_i a matice 2×4 , přesněji

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_\square^{v1}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \hat{\psi}_\square^{v2}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \hat{\psi}_\square^{v3}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \hat{\psi}_\square^{v4}}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_\square^{v1}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \hat{\psi}_\square^{v2}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \hat{\psi}_\square^{v3}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \hat{\psi}_\square^{v4}}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Integrály do prvků matice nemusíme počítat přímo. Zde je výhodné použít metod numerické integrace, např. Gaussovy kvadraturní formule (4.31).



Obrázek 36: Uvažované triangulace oblasti Ω .

Nyní se podívejme na aproximaci řešení pro různé triangulace oblasti Ω . Zvolila jsem je postupně dle obrázku 36.

M-fily, pomocí kterých vypočítáme a vykreslíme přibližné řešení, jsou pojmenovány

PR1_2D_linearni_baze_2prvky.m, PR1_2D_linearni_baze_4prvky.m,
 PR1_2D_linearni_baze_8prvku.m, PR1_2D_linearni_baze_16prvku.m.

Pro představu, jak zadáváme uzly a prvky triangulace, si ukážeme několik řádků ze souboru pro dva prvky.

```
% ----- souradnice uzlu -----
% g_sour(cislo uzlu,souradnice pro x resp. y) = souradnice
g_sour(1,1) = 0; g_sour(1,2) = 0;
g_sour(2,1) = 0.5; g_sour(2,2) = 0;
g_sour(3,1) = 1; g_sour(3,2) = 0;
```



```

g_sour(4,1) = 0;   g_sour(4,2) = 1;
g_sour(5,1) = 0.5; g_sour(5,2) = 1;
g_sour(6,1) = 1;   g_sour(6,2) = 1;

% ----- prvky -----
% prvek 1 z uzlu 1,2,4,5
prvek(1,1) = 1; prvek(1,2) = 2; prvek(1,3) = 4; prvek(1,4) = 5;

% prvek 2 z uzlu 2,3,5,6
prvek(2,1) = 2; prvek(2,2) = 3; prvek(2,3) = 5; prvek(2,4) = 6;

% ----- okrajove podminky v krajnich uzlech -----
okr_hodnota(1) = 1; okr_stupen_volnosti(1) = 0;
okr_hodnota(2) = 2; okr_stupen_volnosti(2) = 0;
okr_hodnota(3) = 3; okr_stupen_volnosti(3) = 0;
okr_hodnota(4) = 4; okr_stupen_volnosti(4) = 0;
okr_hodnota(5) = 5; okr_stupen_volnosti(5) = sin(pi*1/2);
okr_hodnota(6) = 6; okr_stupen_volnosti(6) = 0;

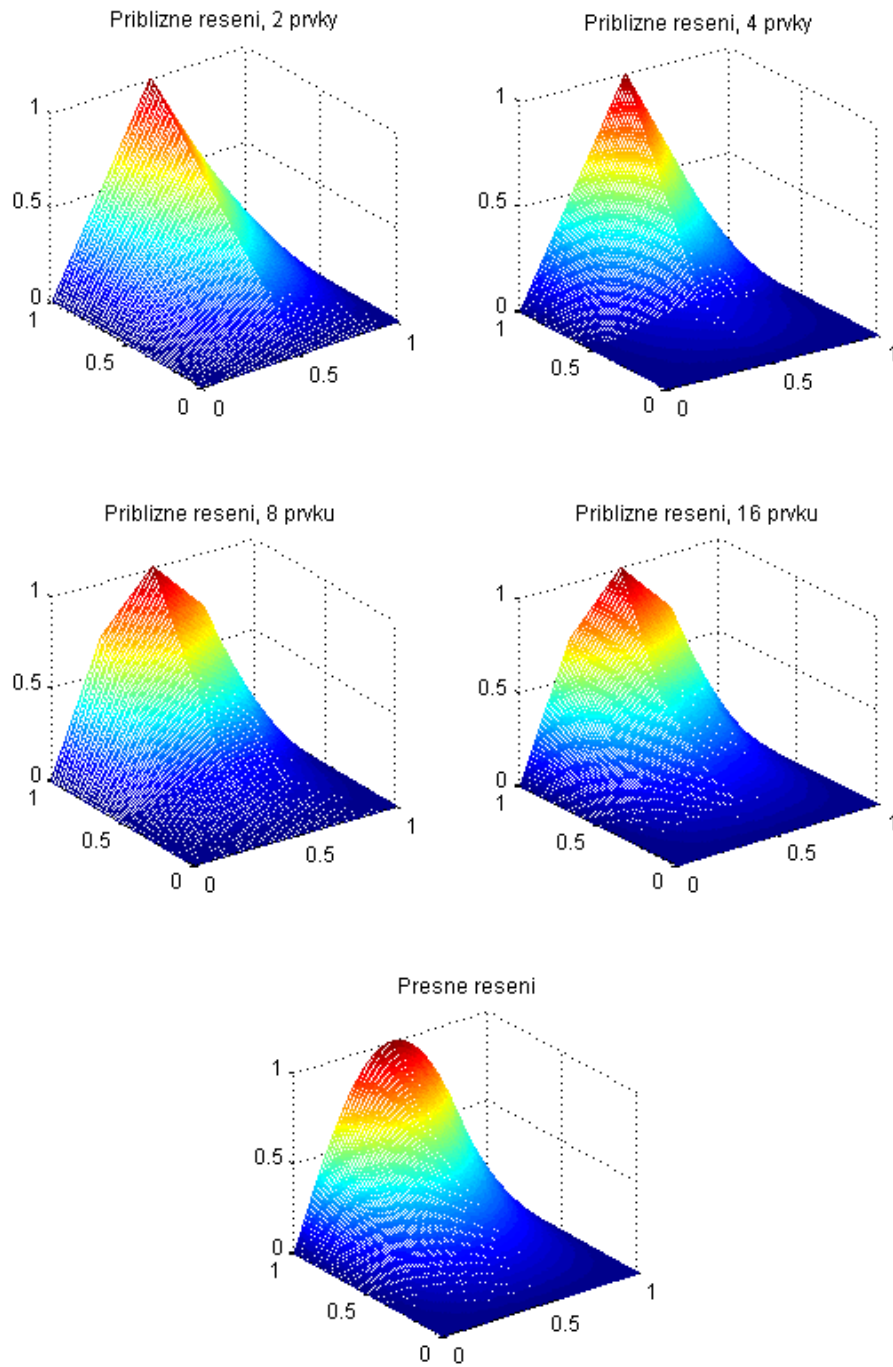
```

Pole `g_sour` uchovává souřadnice uzlů. Řádek udává o který uzel se jedná a sloupec určuje zda se jedná o souřadnici vzhledem k ose x_1 , resp. x_2 . Pro přehlednost se v m-filu pracuje s osami x, y . Jednotlivé prvky T_i určíme pomocí pole `prvek`, kde řádek značí j -tý prvek a sloupce dané uzly. Dirichletovy okrajové podmínky pak vložíme do vektorů `okr_hodnota`, která udává o který krajní uzel se jedná a `okr_stupen_volnosti`, kde je uložena informace o hodnotě v daném bodě.

Nyní se můžeme podívat na grafy, které se postupně při spouštění m-filů vykreslují, viz obrázek 37. I boční pohled, kde nevidíme osu x_1 , ukazuje zpřesňování aproximací, viz obrázek 38.

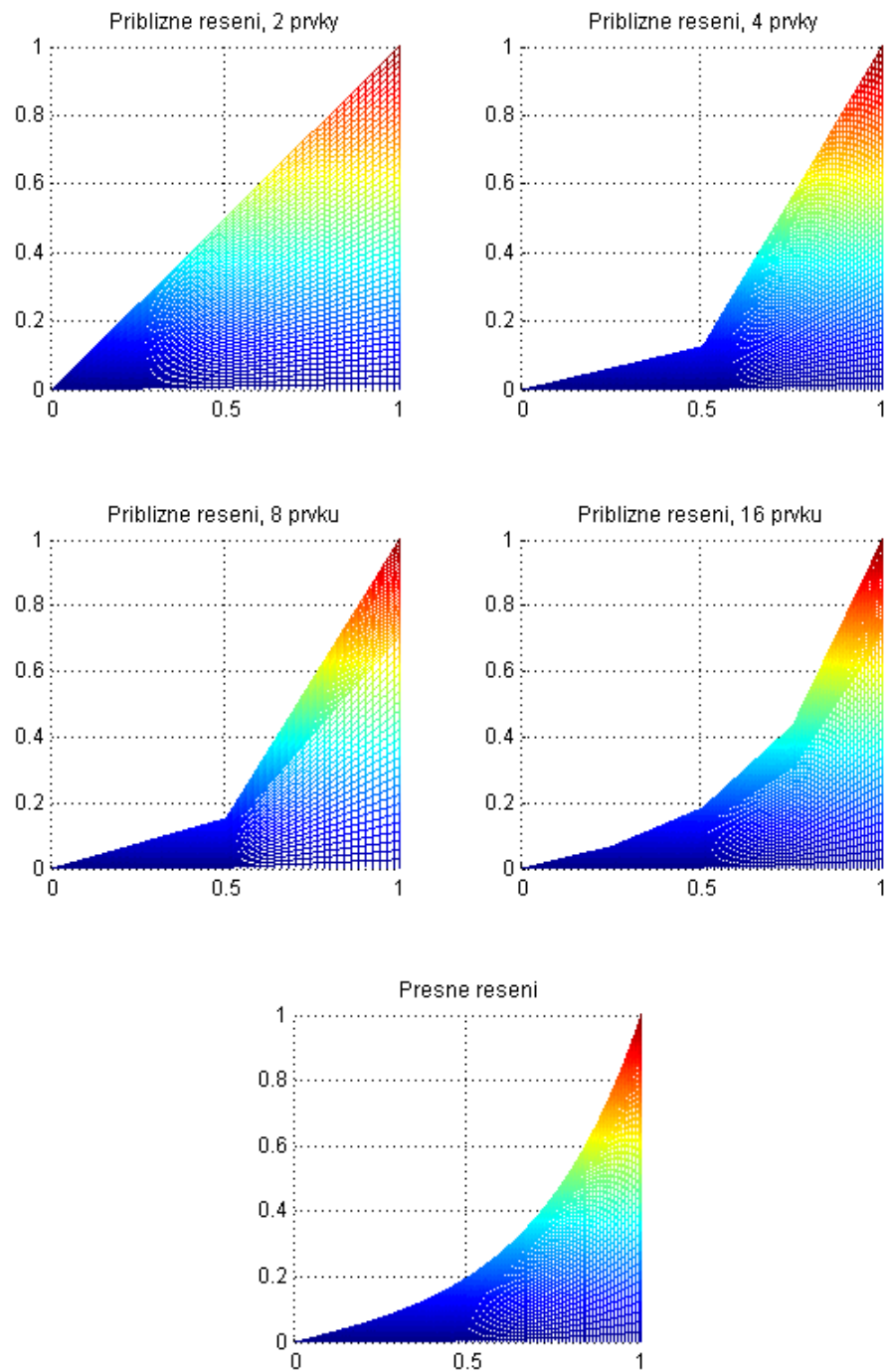


Poznámka 4.13. Předchozí příklad je řešen pomocí čtyř m-filů. Při jejich sestavování jsem vycházela z literatury [2], kapitoly 6. Je zde stručně zpracována teorie eliptických úloh ve 2D. Kniha obsahuje mnoho m-filů pro řešení nejen těchto úloh.



Obrázek 37: Přibližná řešení na 2, 4, 8, 16 prvcích a přesné řešení.

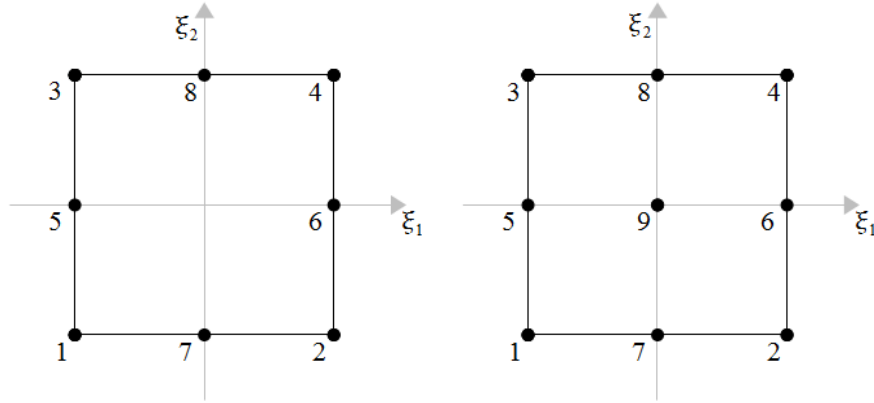
Příklad 4.2. Uvažujme stejnou úlohu (4.32) jako v předchozím příkladu. Zjistěte pomocí po částech kvadratických bází přibližné řešení této úlohy na oblasti Ω , která je nerozdělená a rozdělená na 2 a 4 prvky.



Obrázek 38: Přibližná řešení a přesné řešení z pohledu $Y - Z$.

Řešení: Přesné řešení této úlohy již známe a je dáno vzorcem (4.33). Rozdíl v m-filu od předchozího příkladu s po částech lineárními bázemi je v zadaných

bodech triangulace, protože v případě po částech kvadratických bází můžeme na referenčním prvku volit osm či devět bodů, které jsou často rozmístěny jako na obrázku 39. Obě varianty mají své bázové funkce, které jsou konkrétně sepsány



Obrázek 39: Možnosti volby uzlů u čtyřúhelníkového prvku.

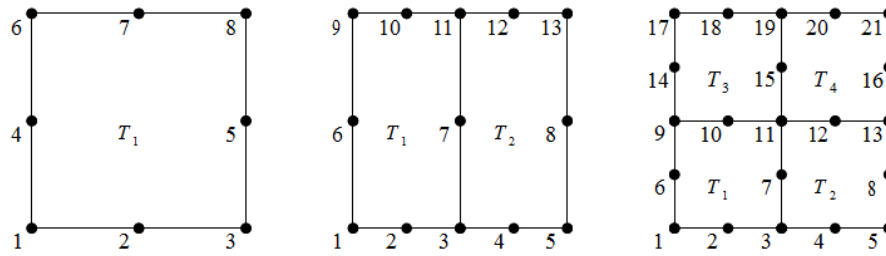
v literatuře [2] na str. 167. Přistoupila jsem k volbě osmi bodů a daných bázových funkcí místo hierarchických funkcí (4.25), (4.26), (4.27). Přesněji

$$\begin{aligned}
 \hat{\psi}_{\square}^{v_1}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(-1 - \xi_1 - \xi_2), & (\text{ pro uzel 1}), \\
 \hat{\psi}_{\square}^{v_2}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(-1 + \xi_1 - \xi_2), & (\text{ pro uzel 2}), \\
 \hat{\psi}_{\square}^{v_3}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(-1 - \xi_1 + \xi_2), & (\text{ pro uzel 3}), \\
 \hat{\psi}_{\square}^{v_4}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(-1 + \xi_1 + \xi_2), & (\text{ pro uzel 4}), \\
 \hat{\psi}_{1,\square}^{e_1}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2^2), & (\text{ pro uzel 5}), \\
 \hat{\psi}_{1,\square}^{e_2}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2), & (\text{ pro uzel 6}), \\
 \hat{\psi}_{1,\square}^{e_3}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2), & (\text{ pro uzel 7}), \\
 \hat{\psi}_{1,\square}^{e_4}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2), & (\text{ pro uzel 8}).
 \end{aligned}$$

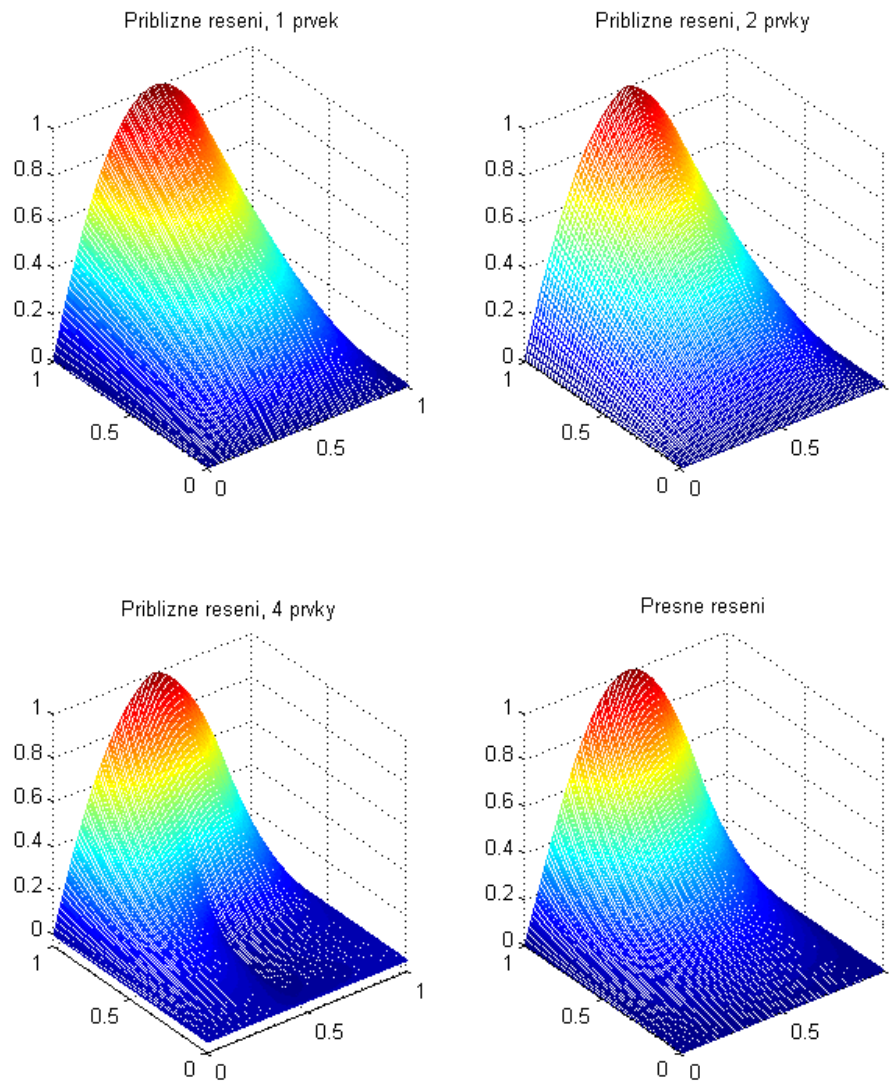
Úkolem je najít aproximaci přesného řešení na 1, 2 a 4 prvcích. Tyto prvky spolu s očíslovanými body znázorňuje obrázek 40.

M-fily řešící daný problém nalezneme pod názvy

PR1_2D_kvadraticke_baze_1prvek.m,
 PR1_2D_kvadraticke_baze_2prvky.m,
 PR1_2D_kvadraticke_baze_4prvky.m.



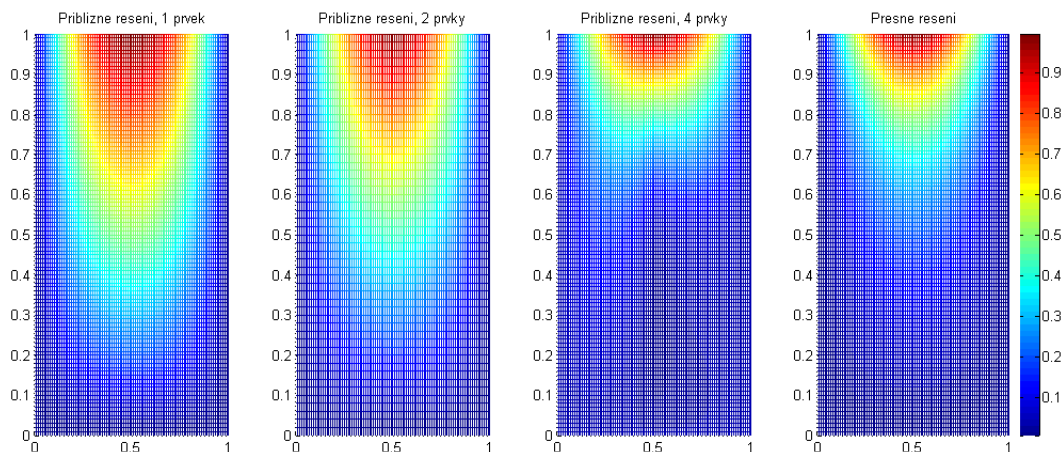
Obrázek 40: Uvažované triangulace oblasti Ω .



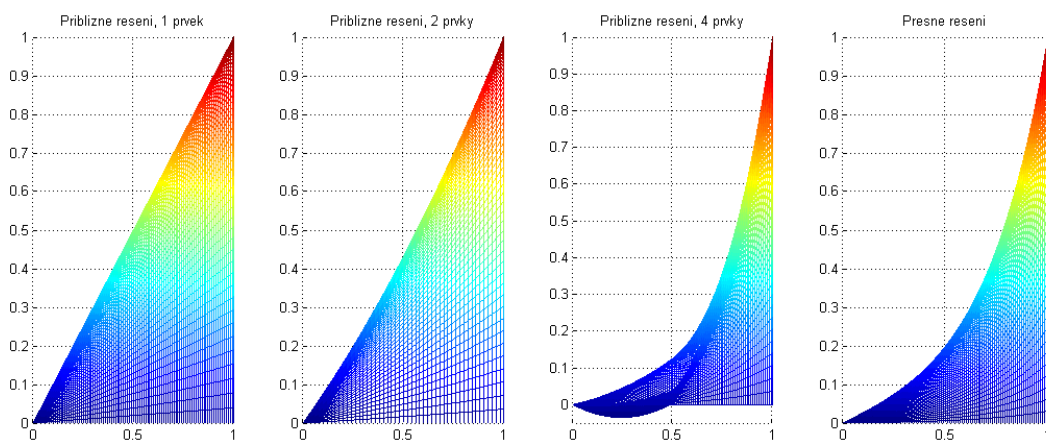
Obrázek 41: Uvažované triangulace oblasti Ω .

Uzly i prvky do souboru zadáváme stejným způsobem jako u lineárního případu, proto se ihned podíváme na grafy znázorňující vypočítaná řešení, viz obrázek 41.

Přesnější představu o zpřesňování řešení nám dá horní, resp. boční pohled na vykreslené grafy, které vidíme na obrázku 42, resp. 43.



Obrázek 42: Přibližná řešení a přesné řešení z pohledu $X - Y$.



Obrázek 43: Přibližná řešení a přesné řešení z pohledu $Y - Z$.



Poznámka 4.14. Na závěr lze říci, že porovnáme-li odpovídající grafy přibližných řešení nalezených pomocí po částech lineárních, resp. kvadratických bází na stejné triangulaci, je pouhým okem vidět, že řešení z prostoru \square^2 je přesnější než z prostoru \square^1 .

Závěr

Ačkoliv téma práce zní „Hierarchické báze v metodě konečných prvků“, rozhodla jsem se zmínit nejen tento typ bází a popsat také základní myšlenky samotné metody konečných prvků (krátce MKP). Proto se může zdát, že je práce poněkud obsáhlejší, nedovolila jsem si vynechat teoretickou či praktickou část.

MKP řeší okrajové úlohy s parciálními diferenciálními či integrálními rovnicemi. Já jsem se zaměřila pouze na časově nezávislé eliptické parciální diferenciální rovnice 2. řádu v 1D a 2D.

První kapitola nás seznámila s několika pojmy, na které se v práci odkazují. Jsou jimi například prostory Lebesgueův a Sobolevův, Greenovy formule či Jacobiho matice.

Ve druhé kapitole jsme v rychlosti nahlédli na Galerkinovu metodu, ze které MKP vychází. Řekli jsme si, jak vypadá slabá formulace úlohy, k níž přecházíme z praktického důvodu. Mnoho úloh, které vyplývají ze světa kolem nás, v klasické formulaci nesplňuje základní požadavky na řešitelnost, např. spojitost pravé strany. Tento problém zde ale odpadá. Po vytvoření slabé formulace úlohy a diskretizaci prostoru, na kterém se pohybujeme, přecházíme volbou báze k řešení soustavy lineárních rovnic, odkud se dostaneme k aproximaci hledaného řešení.

Druhá část této kapitoly nás uvedla do problematiky MKP, rozdělení oblasti na prvky, volby prostoru konečných prvků a nejvhodnější báze. V teoretické části již nezbyl prostor na podrobnou analýzu konvergence zmíněných metod, proto jsou zde uvedeny pouze odkazy na použitou literaturu.

Třetí kapitola přešla k p -verzi MKP v 1D. Tato verze se vyznačuje tím, že bázi na prostoru volíme jako polynomy vyššího řádu. Na úvod jsme si uvedli motivační příklad a poté si zavedli výhodné referenční zobrazení a referenční oblast. Jako stupínek k hierarchickým bázím jsem považovala za nutné zmínit Lagrangeovy uzlové tvarové funkce vyšších řádů, tyto funkce přímo souvisí se znalostí Lagrangeovy interpolace v bodech oblasti. Počet těchto bodů souvisí se stupni bázových funkcí. Jako početně výhodnější se ale jeví hierarchické báze. Při zvýšení stupně prostoru polynomů lze využít předchozí výpočty a tím zkrátit čas výpočtu, navíc není potřeba volit konkrétní uzly. Dále jsme se podívali na numerickou integraci v 1D, která je často potřebná pro výpočet prvků do matice

soustavy a také na interpolaci.

Na závěr třetí kapitoly jsme ukázali několik jednoduchých příkladů s homogenními Dirichletovými či nehomogenními Neumannovými okrajovými podmínkami. První úlohu jsem zpracovala také z pohledu výpočtu a spolu se zbylými jsem je řešila pomocí m-filů vytvořených v matematickém programu MATLAB. V příkladech jsme počítali s po částech lineárními, kvadratickými a kubickými bázemi.

Poslední, čtvrtá, kapitola se zabývala p -verzí MKP ve 2D. Také zde jsme pracovali na referenčních prvcích a tedy i s referenčním zobrazením. Jako prvky na oblasti jsme vybrali čtyřúhelníky a trojúhelníky. Podívali jsme se na prostory \square^p a \triangle^p , hlavně na volbu bodů a příslušných bází, které jsme opět uvažovali jako Lagrangeovy tvarové funkce. V případě čtyřúhelníkových prvků se dalo vycházet ze znalostí z 1D, ale u trojúhelníkových prvků jsme si zavedli často užívané body tzv. Feketeho. A nakonec jsme zde sestavili Lagrangeovu bázi. Tato teorie nám pomohla pochopit, jak se dívat na prvky na oblasti a jak zde volit body. Poté jsme si uvedli teorii hierarchických bází ve 2D. Podobně jako v 1D se zde vyskytují Lobattovy funkce. I zde jsme krátce zmínili numerickou integraci a interpolaci. Na závěr jsem uvedla 2 příklady pro čtyřúhelníkové prvky. Jeden na h -verzi MKP a ve druhém jsme počítali s kvadratickými bázemi.

Během přípravy této práce jsem se potýkala zejména s rozsahem tématu, což se projevilo i na délce práce, která ale mohla být ještě mnohem delší. Zásadní bylo také poměrně nedostatečné množství literatury na hierarchické báze, hlavně pro čtyřúhelníkové prvky, které jsem si vybrala jako hlavní. Troufnu si říci, že jsem se s těmito problémy docela dobře popasovala a doufám, že práce bude přínosná zejména studentům, kteří by se o dané problematice chtěli něco dozvědět.

Literatura

- [1] Gockenbach, M. S.: Understanding and Implementing the Finite Element Method. SIAM. 2006.
- [2] Kwon, Y. W., Bang, H.: The Finite Element Method Using MATLAB. CRC Press. 1997.
- [3] Szabo, B., Babuška, I.: Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc. 1991.
- [4] Smělá, A.: Interpolace splajny. Bakalářská práce, KMAaAM PřF UP Olomouc, 2011.
- [5] Šolín, P., Segeth, K., Doležel, I.: Higher-Order Finite Element Methods. CRC Press. 2004.
- [6] Šolín, P.: Partial Differential Equations and the Finite Element Method. John Wiley & Sons, Inc. 2006.
- [7] Unzietig, L.: Ortogonální polynomy. Bakalářská práce, KMAaAM PřF UP Olomouc, 2008.
- [8] Galerkin method [online]. Dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Galerkin_method [citováno 25. 10. 2012].
- [9] Finite element method [online]. Dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_Element_Method [citováno 26. 10. 2012].
- [10] Křížek, M.: Padesát let metody konečných prvků. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 37, No. 3, pp. 129-140. 1992. [online]. Dostupné z <http://dml.cz/dmlcz/139386> [citováno 26. 10. 2012].
- [11] Beran, Z.: Parciální diferenciální rovnice a jejich význam pro aplikace. Učební texty k semináři. UAMT VUT v Brně. 2011. [online]. Dostupné z

- http://www.crr.vutbr.cz/system/files/brozura_05_1109_0.pdf
[citováno 27. 10. 2012].
- [12] Sloughter, D.: The Calculus of Functions of Several Variables, Section 1.5 Linear and Affine Functions. [online]. Dostupné z <http://cfsv.synechism.org/c1/sec15.pdf>
[citováno 8. 11. 2012].
- [13] Nekvinda, A.: Matematika 4 - výběrová. Materiály k přednáškám. ČVUT Praha. [online]. Dostupné z <http://mat.fsv.cvut.cz/nales/prednasky4/MA4predn.pdf>
[citováno 12. 11. 2012].
- [14] Szabó, B., Düster, A., Rank, E.: The p-version of the Finite Element Method. Encyclopedia of Computational Mechanics, Vol. 1, Chapter 5, pp. 119-139. John Wiley & Sons, Inc. 2004. [online] Dostupné z [http://zi.zavantag.com/tw_files2/urls_1/245/d-244814/ ...
... 7z-docs/25.pdf](http://zi.zavantag.com/tw_files2/urls_1/245/d-244814/...7z-docs/25.pdf)
[citováno 18. 10. 2013].
- [15] Limpouch, J.: Numerická integrace (kvadratura). Materiály k přednáškám. ČVUT Praha. [online]. Dostupné z <http://www-troja.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/numint1.pdf>
[citováno 17. 11. 2013].
- [16] Jacobian matrix and determinant [online]. Dostupné z [http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_ ...
... determinant#Jacobian_determinant](http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_...determinant#Jacobian_determinant)
[citováno 28. 12. 2013].
- [17] Substituční metoda (integrování) [online]. Dostupné z [http://cs.wikipedia.org/wiki/Substitu%C4%8Dn%C3%AD_metoda_ ...
... \(integrov%C3%A1n%C3%AD%29\)](http://cs.wikipedia.org/wiki/Substitu%C4%8Dn%C3%AD_metoda_...%28integrov%C3%A1n%C3%AD%29)
[citováno 28. 12. 2013].
- [18] Adjerid, S., Aiffa, M., Flaherty, J., E.: Hierarchical Finite Element Bases for Triangular and Tetrahedral Elements. [online]. Dostupné z

- <http://www.math.vt.edu/people/adjerids/research/papers/basis.pdf>
[citováno 29. 1. 2014].
- [19] Doležel, I.: Numerické metody I. Materiály k přednáškám. ZČU v Plzni. [online]. Dostupné z http://home.zcu.cz/~karban/teaching/mem/dolezel/course_2/...lect1.pdf
[citováno 2. 2. 2014].
- [20] Flaherty, J., E.: Finite Element Analysis. Chapter 1, Introduction. Studijní materiály. Rensselaer Polytechnic Institute, New York. [online]. Dostupné z <http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/pdf/fea1.pdf>
[citováno 17. 2. 2014].
- [21] Flaherty, J., E.: Finite Element Analysis. Chapter 2, One-Dimensional Finite Element Methods. Studijní materiály. Rensselaer Polytechnic Institute, New York. [online]. Dostupné z <http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/pdf/fea2.pdf>
[citováno 17. 2. 2014].
- [22] Flaherty, J., E.: Finite Element Analysis. Chapter 6, Numerical Integration. Studijní materiály. Rensselaer Polytechnic Institute, New York. [online]. Dostupné z <http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/pdf/fea6.pdf>
[citováno 19. 2. 2014].