UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Mgr. Petr Dvořák, PhD.

Kvantová logika

Olomouc 2013 vedoucí práce: doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně výhradně s použitím zdrojů uvedených v Bibliografii.

…………………………

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce doc. RNDr. Tomáši Zdráhalovi, CSc. za inspiraci a cenné připomínky. Můj dík také patří RNDr. Miloši Pachrovi, CSc. z Katedry fyziky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze za cenné připomínky a korekturu práce z fyzikálního hlediska. Konečně, nikoliv však naposled, děkuji své ženě Márii za trpělivost.

Obsah

1. Úvod

1.1. Kvantová logika a kvantová teorie

Rozvoj logiky byl v minulosti často motivován vývojem a pokrokem v jiných vědních disciplínách. V antice a středověku to byla filozofie, lingvistika a dokonce i teologie. Od 19. století pak podobnou roli hrála matematika a vědy o přírodě, a to dokonce natolik, že se logika stala součástí matematiky a později i informatiky. Přesněji řečeno, logické struktury se staly předmětem zájmu matematiky a informatiky. Takže tu kromě studia logiky v úzkém sepětí se zkoumáním argumentace v přirozeném jazyce, které představuje tzv. logiku filozofickou, vznikla logika matematická (dříve zvaná též symbolická) v dílech mnohých autorů, k nimž náleží A. de Morgan, G. Boole, Ch. S. Peirce, G. Frege, B. Russell a další. Kromě této matematizace logiky si ostatní vědy stále zachovávají pro logiku inspirující vliv. S tím souvisí i skutečnost, že se logika obohacuje v mnoha překvapivých aplikacích. Zmiňme bouřlivý rozvoj intenzionální logiky zhruba od šedesátých let dvacátého století v souvislosti s moderní lingvistikou a informatikou (rozvoj modální, temporální a jiných logik). Předkládaná práce si všímá jednoho z nejzajímavějších impulsů, které přicházejí do logiky díky aplikacím, v tomto případě v oblasti fyzikálního studia přírody. Vyložme blíže. V našem případě se jedná o zachycení chování fyzikálního kvantového systému tak, jak jej popisuje matematicky formulovaná kvantová teorie opírající se o opakované a opakovatelné experimenty. „Chování systému“ je vágní výraz. Míníme jím to, že výroky o pozorovaných charakteristikách takového systému nelze spojovat pomocí klasicky definovaných výrokově-logických spojek, nýbrž některé z těchto spojek nutně nabývají díky povaze fyzikálního systému a jeho interakce s měřícím zařízením (pozorováním) odlišného významu. Tato modalita, nemožnost spojovat spojkami s klasickým významem, je dána povahou části fyzikální reality, nakolik je uchopena kvantovou fyzikální teorií, tedy, obecně řečeno, empiricky. Realita (uchopená prizmatem fyzikální teorie) tak motivuje vytvoření určitého nového logického systému (výrokové logiky s některými odlišně definovanými spojkami, což se promítá do inferenčních pravidel) zvaného kvantová logika.[1] Logický systém, logika, je ve své podstatě apriorní, motivace pro jeho vytvoření (či objevení, zastáváme-li odlišnou filozofii logiky) je však empirická.[2]

Kvantová teorie ve fyzice patří k největším úspěchům přírodní vědy vůbec a co do svého významu je srovnatelná snad jen s evoluční teorií v biologii. S kvantovými jevy se setkáváme v oblasti mikrosvěta a podivné a v jistém smyslu nečekané chování nejmenších částic hmoty je na obecné úrovni dobře známo i laikům díky častému vědecko-popularizačnímu zpracování v knihách a jiných médiích (v televizních dokumentech, časopisech i novinách a derivativně pak ve vědeckofantastické literatuře). Souvisí to mimo jiné s tím, že finančně velmi náročná experimentální zařízení na detekci částic a jejich vlastností (např. urychlovač a detektor částic CERNu poblíž Ženevy) jsou financována z veřejných zdrojů a proto je informování elektorátu o přínosu takového výzkumu nezbytné. Obeznámenost s touto oblastí vědy a jejích výsledků je tedy v laické veřejnosti větší než v jiných oblastech. Často se tak setkáváme s tvrzeními o odlišné kvantové logice, kterou se řídí mikrosvět, a to i mezi mládeží, žáky středních škol a vyšších

[1] Dějiny vývoje kvantové logiky od třicátých let 20. století nalezneme ve Foulis (1995). Pro současné přístupy v kvantové logice srov. Dalla Chiara, Giuntini (2002). Podrobný výklad kvantové logiky, z něhož vycházíme, nalezne čtenář ve Svozil (1998), zejména kapitoly 1-4.

[2] Putnam (1968).

ročníků škol základních.[3]

1.2. Obecný a specifický cíl práce

Obecným cílem této práce je tedy z matematického hlediska popsat tuto tak zvanou kvantovou logiku a porozumět rozdílu mezi ní a logikou klasickou. Srovnání logiky, jíž se „řídí“ chování pozorovaných systémů mikrosvěta, tedy logiky experimentálních výroků kvantové teorie, a logiky klasické, která je v pozadí popisu makrosvěta, tedy např. experimentálních výroků Newtonovské mechaniky, je možné na půdě logiky samotné, např. tím, že srovnáme definice logických výrazů (logických spojek, jedná-li se logiku výrokovou) a inferenční pravidla obou logik. Druhou možností je chápat obě logiky jako matematickou strukturu určitého typu (svaz) a jejich odlišnosti popsat jako diference různých druhů této obecné struktury. V této ve své povaze matematické, nikoli logické práci volíme druhou možnost. Nevycházíme tedy od zavedení významu logických výrazů, nýbrž od definice pojmu určité obecné matematické struktury, která bude ve svých zvláštních případech odpovídat (ve smyslu izomorfismu) oběma srovnávaným logikám. Logické systémy tedy budeme uchopovat algebraicky. Potřebnou obecnou matematickou strukturou bude svaz a hlavní rozdíl mezi oběma logikami, které budeme uvažovat jako typy svazu, bude distributivita (svaz, který je nebo není distributivní). Nyní tedy lze náš obecně formulovaný cíl (porozumění rozdílu mezi kvantovou a klasickou logikou) zpřesnit na základě právě popsaného matematického (algebraického) přístupu: cílem práce je popsat rozdíl mezi uvedenými logikami chápanými jako typy svazů. Popis rozdílu sám však ještě není porozuměním rozdílu, které je, jak bylo řečeno, naším obecným cílem. Proto je při upřesňování cíle v rámci vysvětleného matematického přístupu třeba doplnit, jak dosáhneme určitého stupně porozumění. Jak již víme, kvantová logika (ať už ji chápeme jako logický systém či jako svaz určitého typu), má empirickou motivaci, je to logika experimentálních výroků fyzikální teorie. Rozdíl logiky experimentálních výroků o kvantových fenoménech a experimentálních výroků o jevech makrosvěta bude tedy mít svůj zdroj, pramen či základ v daném obrazu světa, ve fyzikální teorii samotné, v našem případě tedy v odlišnostech implicitních v kvantové teorii od jiných teorií (klasické mechaniky). Z toho důvodu nestačí jen popsat rozdíl obou logik z matematického hlediska, ale je třeba alespoň částečně pochopit (a větší ambici zde nemáme) proč v kvantové logice neplatí distributivní zákon. Kvantová teorie je matematický popis fyzikální reality, tj. určitým matematickým objektům a jejich vlastnostem odpovídají reálné objekty a jejich vlastnosti. Specifičnost kvantové fyzikální reality se tedy promítne do objektů matematického popisu této reality. Proto bude zapotřebí v nezbytné míře představit matematický aparát kvantové teorie a ukázat, že na úrovni matematického popisu je specifičnost kvantového světa dána určitými vlastnostmi matematických objektů, které reprezentují skutečné rysy kvantového světa (vlastnostmi operátorů, které představují pozorovatelné veličiny).

[3] Autorovi této práce byla při jedné veřejné přednášce položena otázka týkající se povahy kvantové logiky a její odlišnosti od logiky klasické a dále pak obecných důsledků z toho plynoucích pro chápání skutečnosti. Práce tedy vzniká z potřeby odpovědět na první část vzneseného dotazu, přičemž odpověď na druhou část otázky (důsledků pro obraz světa) již nespadá do kompetence matematiky, nýbrž fyziky a filozofie.

1.3. Postup a charakter práce

Jelikož cílem se řídí volba prostředků, náš cíl upřesněný vzhledem k matematickému (a nikoli logickému) přístupu určuje postup v této práci. **Zaprvé** bude nutno co nejstručněji vyložit charakter kvantového systému a specifičnost jeho chování v interakci s pozorováním. Podle metodologické zásady, podle níž není třeba volit více prostředků, než je k dosažení cíle nezbytně nutné (Ockhamova břitva), zvolíme ten nejjednodušší fyzikální systém, jehož chování se řídí kvantovou logikou, což je již nejjednodušší kvantový systém vůbec, izolovaná mikročástice a její kvantová vlastnost, spin. Protože logiku experimentálních výroků získaných měřením stavu tohoto systému vyjádříme jako svaz, bude **zadruhé** nutné zavést matematický pojem svazu a všechny nezbytné matematické pojmy, které toto zavedení umožňují. **Zatřetí**, s pomocí pojmu svazu srovnáme logiku experimentálních výroků našeho kvantového systému s klasickou výrokovou logikou a popíšeme základní odlišnosti. V dalším se pokusíme porozumět kořenu této odlišnosti, selhání jedné části distributivního zákona, v povaze kvantového popisu samotného. **Začtvrté** proto zavedeme základní pojmy kvantového systému a jeho matematického popisu. Klíčovým bude pojem operátoru, který odpovídá pozorovatelné veličině. Konečně, **zapáté**, znalost základů matematické reprezentace kvantového světa umožní pochopit klasickou sémantiku kvantové logiky založenou na přiřazení podprostorů Hilbertova vektorového prostoru jednotlivým experimentálním výrokům kvantové teorie. To by nebylo možné bez základních znalostí matematické reprezentace reality vykazující kvantové chování.

Tím jsme stanovili obecný cíl práce, metodologický přístup a na jeho základě pak specifický cíl a postup v pěti krocích.[4] Zbývá připojit několik poznámek k lepšímu porozumění zkoumání, které máme před sebou.

Tak jako stačí izolovaný systém jedné částice s jednou vlastností (veličinou) k tomu, aby výroky o stavu tohoto systému tvořily popis ztělesňující kvantovou logiku, a není nutno studovat složitější fyzikální systém více částic či jedné částice, ale více fyzikálních veličin, podobně postačuje výroková logika k tomu, abychom vyjádřili rozdíl mezi kvantovou logikou a logikou klasickou, a není nutno sahat ke složitějšímu logickému systému, tj. buď k logice predikátové, nebo k nějaké extenzi výrokové logiky. Pro náš cíl, který v práci sledujeme, rovněž stačí představit základní poznatky z teorie svazů a také pouze elementy matematiky kvantové teorie. Čtenář nechť má tedy na paměti, že místy zjednodušujeme (nikoliv však na úkor korektnosti vyjádření) a neprobíráme detailně ani příslušné partie teorie svazů, ani kvantovou mechaniku, jak by tomu nutně bylo u práce většího rozsahu (diplomové).

Kvantová logika je téma pro bakalářskou práci vděčné, protože se zde propojuje logika s algebrou a geometrií a zároveň se poukazuje na zajímavou aplikaci matematiky ve fyzikální teorii. Práce je vedena snahou o porozumění z pohledu klasické fyziky nečekaným výsledkům moderní fyzikální teorie (kvantové fyziky), touhou porozumět „logice“ kvantového světa, má proto výlučně teoretický charakter a explicitně chybí aplikovaný rozměr. Ten je však implicitní. Autor poznatků využije ve své pedagogické a přednáškové praxi.

Na závěr je třeba předejít určitému nedorozumění. Hovoříme-li o kvantové logice, tedy o logickém systému s částečně odlišnou definicí logických výrazů od logiky klasické (v našem

---

[4] Postup v pěti krocích představuje logické celky výkladu. Členění na kapitoly a podkapitoly tento sled pěti kroků přesně neodráží, jelikož je kromě logiky výkladu vedeno snahou o přehlednost, která převážila. Číslování kapitol také navíc zahrnuje úvod a závěr práce.

případě výrokových spojek), pak touto logikou se „řídí“ experimentální výroky o kvantové fyzikální realitě (fyzikálním systému), které popisují výsledky měření určitých vlastností (veličin) tohoto systému. Samotný matematický aparát kvantové teorie ani popis fyzikálního systému jako takového či popis měřícího zařízení a jeho funkce, případně popis toho, které matematické objekty kvantové teorie odpovídají těm či oněm prvkům fyzikálního systému, nejsou samy o sobě soubory výroků, jejichž logické spojení by bylo odlišné od klasického. Po tomto vyjasnění je možno přistoupit k našemu teoretickému zkoumání.

2. Kvantová logika jako nedistributivní svaz

2.1. Kvantový fyzikální systém

Spin je typicky kvantovou vlastností některých sub-atomárních částic, jež nemá přesný ekvivalent na makroskopické úrovni, v klasické fyzice.[5] Určitou analogii zde však představuje veličina zvaná orbitální moment hybnosti (*angular momentum*). Spin vykazuje charakteristiky vektorové veličiny mající velikost a směr.[6] Základními stavebními kameny hmoty jsou sub-atomární částice tzv. fermiony s poločíselnou hodnotou spinu (1/2, 3/2, 5/2 atd. v jednotkách Planckovy konstanty vydělené 2π). Patří sem protony, neutrony, elektrony, kvarky, leptony, neutrina aj. Naproti tomu částice s celočíselnou hodnotou spinu, bosony, zprostředkovávají fyzikální síly: foton zprostředkovává elektromagnetickou sílu, gluon silnou jadernou sílu atd. V dalším se soustředíme jen na jeden příklad, elektron, mající hodnotu spinu 1/2 nebo -1/2.

Uvažujme nejjednodušší kvantově fyzikální systém: jedinou částici, elektron, procházející elektromagnetickým polem.[7] Nyní experimentální procedurou měření zjišťujeme směr spinu podle pevné, libovolně zvolené osy *x*, *y*, *z* Eukleidovského (reálného) prostoru (rotací detekčního zařízení). Pro zjednodušení předpokládejme, že budeme spin měřit ve směru dvou os, osy *z* a osy *x*. Měříme-li ve směru těchto os, vždy dostaneme hodnotu buď +1 nebo -1, tedy orientaci spinu nahoru nebo dolů.[8] Měření ve směru osy *z* a ve směru osy *y* jsou dvě různé experimentální procedury. Důležitým důsledkem plynoucím ze zobecněného principu neurčitosti je skutečnost, že se naměřená hodnota spinu, resp. informace o orientaci spinu, nezachovává jako pevný vstupní údaj následného měření podle jiné, ortogonální osy. Tedy obě měření nelze provádět současně v tom smyslu, že by naměřené výsledky platily současně, např. že by bylo možné o daném elektronu tvrdit, že má spin „nahoru“ ve směru osy z a zároveň ostrou (konkrétní, jistou) hodnotu projekce ve směru osy *x*. Opakovaná měření ve směru jedné osy dávají identické výsledky, např. „nahoru“. Měření ve směru jiné osy ukazuje v polovině případů výsledek „nahoru“, v polovině „dolů“, takže nezávisí na předchozím měření ve směru jiné osy. Další měření ve směru původní osy je opět nezávislé, tzn. polovina případů dává výsledek „nahoru“, polovina „dolů“.

Máme tedy dvě experimentální procedury měření fz a fx. V obou vždy naměříme směr spinu nahoru (u) nebo dolů (d). Procedura fz poskytne výsledek buď u(z) nebo d(z), zatímco procedura fx dá u(x) nebo d(x). Souhrnně máme dvě množiny výsledků těchto procedur:

Z = {u(z), d(z)}, X = {u(x), d(x)}

---

[5] Dobré přehledy kvantové teorie pro nespecialisty jsou Jenann (2009), Gibbins (2007). Standardní často doporučovaná učebnice je Shankar (1994).

[6] Přesněji řečeno se jedná o tzv. spinor, prvek komplexního vektorového prostoru, který se na rozdíl od klasického prostorového vektoru chová v transformacích mírně odlišně, přesněji řečeno, rotace o 360° transformuje složky spinoru na složky s opačným znaménkem. Spinory docházejí širšího užití ve fyzice.

[7] Spin se měří tak, že elektronové dělo vystřeluje elektrony po dráze, která je přímkou. Ta prochází magnetickým polem se silným gradientem, které může elektrony vychýlit. Na detekční rovině mějme souřadnicový systém *z-x*. Pak lze elektron vychýlit ve směru osy *z* i *x*. Tento experiment na měření spinu se nazývá Stern-Gerlachův (po O. Sternovi a W. Gerlachovi, kteří prováděli podobný experiment s atomy stříbra r. 1921). Neklasickou vlastností spinu je, že je „kvantován“.

[8] V případě osy *x* bychom měli hovořit o směru spinu dopředu a dozadu. Užíváme výrazů „nahoru“ a „dolů“ obecněji ve smyslu kladné či záporné orientace, přičemž směr je dán příslušnou osou. Můžeme si představit ukazatel měřícího zařízení, který ukazuje vždy buď nahoru nebo dolů. Tento ukazatel neudává směr, nýbrž orientaci.

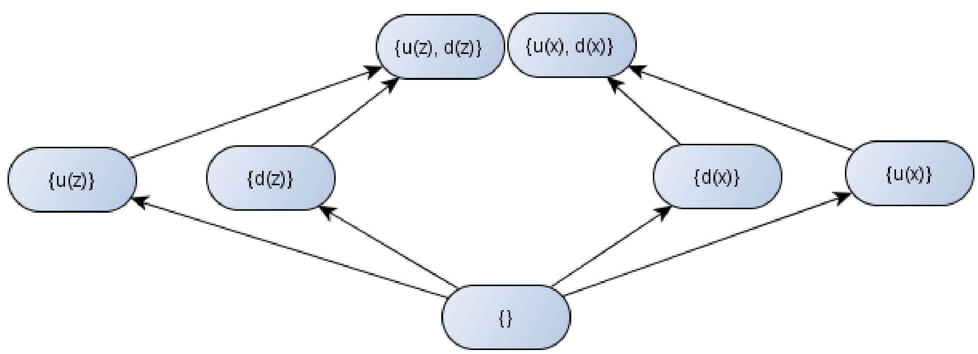
Sjednocením Z a X dostáváme množinu všech možných výsledků A:

A = {u(z), d(z), u(x), d(x)}.

Následující podmnožiny množiny A budeme nazývat událostmi:

{u(z)}, {d(z)}, {u(x)}, {d(x)}, {u(z), d(z)}, {u(x), d(x)}, ∅.

Prázdná množina ∅ znamená, že není naměřen žádný výsledek (nulová událost). První čtyři množiny o jednom prvku představují události, kdy měřením (tj. buď aplikací fz nebo fx) zjistíme výsledný stav, v němž se systém nachází (spin má orientaci nahoru, spin má orientaci dolů). Množiny, resp. události, o dvou prvcích chápeme tak, že měřením zjistíme, že systém je právě v jednom ze dvou uvedených výsledných stavů. Výčet podmnožin, resp. událostí, nezahrnuje všechny podmnožiny množiny A, protože jedním měřením (buď jen aplikací fz nebo jen fx) nelze zjistit, že se systém nachází v jednom ze stavů, zjišťovaných různými měřeními, např. u(z) a u(x). Proto mezi události nelze řadit {u(z), u(x)}, apod. Události, které představují výsledky jednoho měření, např. {u(x)} a {u(x), d(x)}, a jsou tak podmnožinami množin všech výsledků Z či X, nazýváme *kompatibilní*. Kompatibilní události, jejichž sjednocením dostaneme množinu všech výsledků dané procedury měření, nazýváme *komplementární*. Například, komplementárními jsou kompatibilní množiny {u(x)}, {d(x)}, protože jejich sjednocení přestavuje množinu X. Prvky množiny událostí jsou uspořádány množinovou inkluzí, což lze znázornit s pomocí Hasseova diagramu:



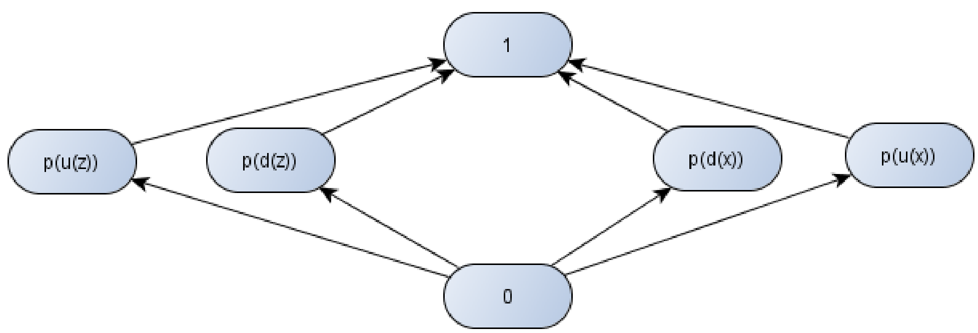
Obr. 1

Nyní každé události přiřadíme výrok o této události, který je pravdivý právě tehdy, když událost nastává. Událost nastává tehdy a jen tehdy, pokud měřením zjistíme, že systém je právě v jednom ze stavů, prvků příslušné události. Tak výrok „p(u(x))“ je pravdivý, když nastává {u(x)}, tedy, když aplikací procedury měření fx zjistíme, že spin směřuje nahoru, což značíme u(x).

Výroky o komplementárních událostech jsou negací jeden druhého v tom smyslu, že je-li pravdivý jeden, není pravdivý druhý. Například je-li pravdivý p(u(z)), není pravdivý p(d(z)) a naopak.

Jak bude zřejmější později, přistoupíme ke ztotožnění výroků p(u(z), d(z)) a p(u(x), d(x)). Tyto výroky jsou disjunkcemi výroků p(u(z)) a p(d(z)), resp. p(u(x) a p(d(x)) Jak uvidíme, výroky v disjunkci budeme reprezentovat ortonormálními (bázovými) vektory, disjunkce výroků pak představuje podprostor, který vzniká jako lineární kombinace těchto bázových vektorů. Výroky v obou disjunkcích tak představují alternativní báze, jejichž lineárním obalem je celý prostor. Je-li tedy oběma disjunkcím přiřazen tento jediný prostor, pak mají obě stejný význam. Symbolem „1“ tedy označujeme výrok, který je při jakémkoli výsledku měření vždy pravdivý.

Uvažujme nyní výrok o prázdné množině, která je také podmnožinou množiny výsledků A. Prázdná množina znamená, že nastává nulová událost, tj. událost s žádným výsledkem. Výrok o této události označíme „0“. Za našeho předpokladu, že provádíme měření některou z procedur fz nebo fx, je tento výrok vždy nepravdivý, protože vždy dostaneme nějaký výsledek z množiny možných výsledků A. Uspořádejme výroky o událostech do Hasseova diagramu:



Obr. 2

Uvedená struktura představuje tzv. svaz (angl. *lattice*). Abychom ji mohli zkoumat, je třeba tento pojem zavést.

2.2. Svaz[9]

Předtím než zavedeme pojem svazu, je zapotřebí definovat několik pojmů z teorie uspořádání. Definujeme relaci částečného uspořádání na množině A a pojem částečně uspořádané množiny:
Binární relace R na množině A je částečným uspořádáním, je-li R reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Uspořádaná dvojice <A, R> je částečně uspořádaná množina (poset) a relace R je částečné uspořádání na množině A.

Dále definujme největší a nejmenší prvek:
Nechť $\langle A, \leq \rangle$ je poset, kde „$\leq$“ představuje relaci částečného uspořádání, a B je podmnožinou A:
Prvek $b \in B$ je největší prvek B jestliže pro každý prvek $b' \in B$, $b' \leq b$.
Prvek $b \in B$ je nejmenší prvek B jestliže pro každý prvek $b' \in B$, $b' \geq b$.
Nejmenší a největší prvek množiny B nemusí existovat. Pokud existují, pak jsou jedinečné: jestliže a a b jsou největším (nejmenším) prvkem množiny B, potom $a = b$.

[9] K teorii svazů srov. např. Mac Lane, Birkhoff (1974, s. 545-569) nebo podrobněji v Birkhoff (1967).

Dále definujeme maximální prvek, horní mez a supremum:
Nechť $\langle A, \leq \rangle$ je poset a B je podmnožinou A:
Prvek $b \in B$ je maximální prvek B, jestliže $b \in B$ a neexistuje žádný prvek $b' \in B$ takový, že $b \neq b'$ a $b \leq b'$.
Prvek $b \in A$ je horní mez množiny B, jestliže pro každé $b' \in B$, $b' \leq b$.
Prvek $b \in A$ je nejmenší horní mez množiny B (supremum), jestliže b je horní mez a pro každou horní mez b' množiny B, $b \leq b'$.

Analogicky definujeme minimální prvek, dolní mez a infimum:
Nechť $\langle A, \leq \rangle$ je poset a B je podmnožinou A:
Prvek $b \in B$ je minimální prvek B, jestliže $b \in B$ a neexistuje žádný prvek $b' \in B$ takový, že $b \neq b'$ a $b \geq b'$.
Prvek $b \in A$ je dolní mez množiny B, jestliže pro každé $b' \in B$, $b' \geq b$.
Prvek $b \in A$ je největší dolní mez množiny B (infimum), jestliže b je dolní mez a pro každou dolní mez b' množiny B, $b \geq b'$.

Uvažujme konečné množiny. Srovnáním definic největšího a maximálního prvku je zřejmé, že každý největší prvek je maximální, ale naopak to neplatí. Zatímco největší prvek, existuje-li, je jedinečný, maximálních prvků může být v částečně uspořádané množině více (pak zde není největší prvek). Totéž platí, *mutatis mutandis*, o nejmenším a minimálním prvku. Z definice je také zřejmé, že dolní/horní mez nemusí patřit do uvažované podmnožiny B, zatímco největší/nejmenší prvek a maximální/minimální prvek do ní z definice náleží. Dále z definice plyne, že jestliže b je největší prvek podmnožiny B, pak b je nejmenší horní mez (supremum) množiny B. Konečně, jestliže b je horní mez podmnožiny B a $b \in B$, pak b je největší prvek množiny B. Totéž platí, *mutatis mutandis*, o nejmenším prvku, infimu a dolní mezi.

Hasseův diagram na obr. 1 představuje množinu částečně uspořádanou relací množinové inkuze, „$\subseteq$“. Množina nemá největší prvek, ale má dva maximální prvky. Naproti tomu částečně uspořádaná množina výroků na obr. 2 má největší prvek, který je zároveň prvkem maximálním a supremem.

Nyní máme definovány všechny potřebné pojmy k zavedení pojmu svazu jako částečně uspořádané množiny. Svaz je částečně uspořádaná množina, v níž pro libovolnou dvouprvkovou podmnožinu platí, že má supremum a infimum, které jsou rovněž prvky dané uspořádané množiny.

Přesněji: nechť je dán libovolný poset $\langle P, \leq \rangle$, kde „$\leq$“ představuje nějakou relaci částečného uspořádání, a podmnožina $M = \{a, b\}$. Pak prvek $\inf(M) \in P$ se nazývá infimum podmnožiny M, platí-li, že $\inf(M) \leq a$, $\inf(M) \leq b$ a $x \leq a$ a $x \leq b$ implikuje, že $x \leq \inf(M)$. Analogicky, prvek $\sup(M) \in P$ se nazývá supremum podmnožiny M, platí-li, že $\sup(M) \geq a$, $\sup(M) \geq b$ a $x \geq a$ a $x \geq b$ implikuje, že $x \geq \sup(M)$.

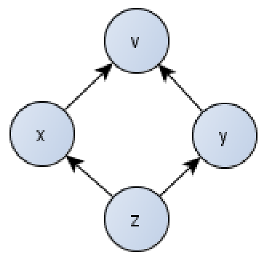
Svaz je taková částečně uspořádaná množina $\langle P, \leq \rangle$, v níž pro libovolnou dvouprvkovou podmnožinu $M = \{a, b\}$ platí, že $\inf(M)$ a $\sup(M) \in P$.

Doposud jsme svaz uvažovali jako částečně uspořádanou množinu. Na svaz lze také ekvivalentně pohlížet jako na algebraickou strukturu se dvěma binárními operacemi průsek „$\wedge$“ a spojení „$\vee$“, $(P, \wedge, \vee)$, které splňují následující soubor axiomů (pro libovolné $x, y, z \in P$):

(1) $x \wedge x = x$; $x \vee x = x$ (idempotence)

(2) $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$ (komutativita)
(3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$; $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ (asociativita)
(4) $x \wedge (x \vee y) = x$; $x \vee (x \wedge y) = x$ (absorbce)

Operace spojení a průsek přiřazují každým dvěma a, b $\in$ P supremum, resp. infimum. Snadno lze také ukázat, že ve svazu chápaném jako poset platí vztahy (1) až (4) chápané jako rovnosti mezi infimy a supremy, např. první část (2) čteme jako inf(x, y) = inf (y, x), což evidentně platí. Podobně z obrázku snadno nahlédneme, že absorbce (4) inf(x, sup(x,y)) = x a sup(x, inf (x,y)) = x také platí:



Obr. 3

Vidíme, že sup(x, y) = v a inf(x, v) = x. Podobně, inf(x,y) = z a sup(x, z) = x.

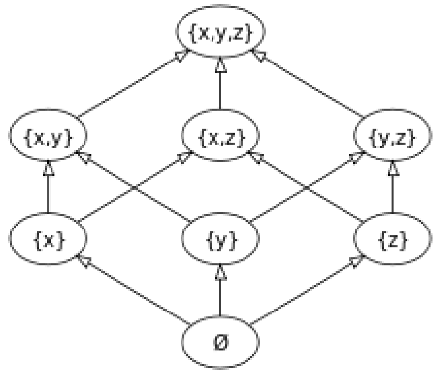
2.3. Logika experimentálních výroků kvantového systému jako nedistributivní svaz

Nyní můžeme definované pojmy aplikovat na strukturu na obr. 2, kterou představují experimentální (typy) výroky o měřených stavech nějakého kvantového systému. Nazvěme si tuto množinu výroků P. Jedná se o svaz v obou definovaných, vzájemně ekvivalentních smyslech (svaz jako poset a svaz jako matematická struktura s dvěma binárními operacemi). Libovolné dva prvky množiny P mají supremum a infimum. Vidíme, že u množiny událostí na obrázku 1 to tak není, události {u(z), d(z)} a {u(x), d(x)} nemají supremum. Proto množina kvantových událostí, které mohou nastat, není svaz.

Nyní blíže zkoumejme druh svazu, který množina (typů) výroků P představuje. To bude podstatné z hlediska srovnání kvantové výrokové logiky s klasickou. Některé svazy splňují kromě axiomů (1) až (4) ještě tzv. distributivní zákony, které provazují binární operace průsek a spojení ještě těsněji než absorbce (platí pro libovolné x, y, z, které je prvkem svazu):

(5) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
(6) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Typickým příkladem distributivního svazu je potenční množina nějaké množiny S, $\mathbb{P}$(S). Příkladem budiž potenční množina tříprvkové množiny $\{x, y, z\}$, $\mathbb{P}(\{x, y, z\})$, 2^3:



Obr. 4[10]

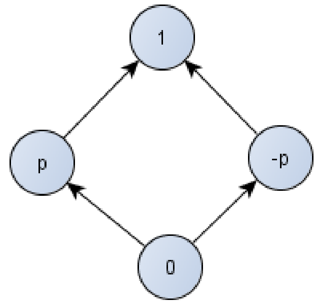
Vezmeme-li libovolnou trojici prvků množiny ℙ, vidíme, že axiomy (5) a (6) platí. Platí tyto distributivní zákony také ve svazu kvantových výroků P? Jak lze očekávat, neplatí. K tomu, abychom to nahlédli, stačí uvažovat jediný případ, jedinou trojici prvků P, pro které rovnost neplatí. Vezměme si trojici prvků p(u(z)), p(u(x)), p(d(x)). Levá strana rovnosti (5) vypadá následovně: $p(u(z)) \wedge [p(u(x) \vee p(d(x)] = p(u(z)) \wedge 1 = p(u(z))$. Pravá strana rovnosti (5) vypadá takto: $[p(u(z)) \wedge p(u(x)] \vee [p(u(z) \wedge p(d(x)] = 0 \vee 0 = 0$. Pravá strana se tedy nerovná levé.

Pokud bychom uvažovali pouze jedinou měřící proceduru, tedy např. jenom fz nebo jenom fx, pak by se „logika“ událostí nelišila od klasické výrokové logiky, v níž distributivní zákony platí. V obou případech zde máme jen dva možné stavy, z nichž jeden se vždy realizuje, totiž s a ne-s, kde „s“ znamená, že systém má příslušný stav (např. spin nahoru), „ne-s“, že jej nemá čili že má stav opačný (např. spin dolů). Množinu možných výsledků tvoří množina S = {s, ne-s}. Uvažujme čtyři události, prvky potenční množiny ℙ(S), a přiřaďme jim rovnou výroky o těchto událostech:

„p(s, ne-s)“, který budeme značit „1“, je pravdivý, když se realizuje právě jeden z příslušných stavů, prvků množiny S, tedy vždy.
„p(s)“ čili „p“ je pravdivý, když se realizuje stav s
„p(ne-s)“ neboli „~ p“ je pravdivý, když se realizuje prvek ne-s
„p(∅)“ čili „0“, znamená, že se žádný stav, prvek S, nerealizuje, a tudíž není pravdivý nikdy.

Poznamenejme, že symboly „1“ a „0“ se obvykle značí největší a nejmenší prvek ve svazu. Množina výroků {1, p, ~p, 0} představuje distributivní svaz:

[10] Zdroj obrázku Wikipedia.



Obr. 5

Navíc každý prvek této množiny má svůj komplement. Komplement prvku *a* je prvek *a*’ takový, že platí:

(i) $a \wedge a' = 0$
(ii) $a \vee a' = 1$

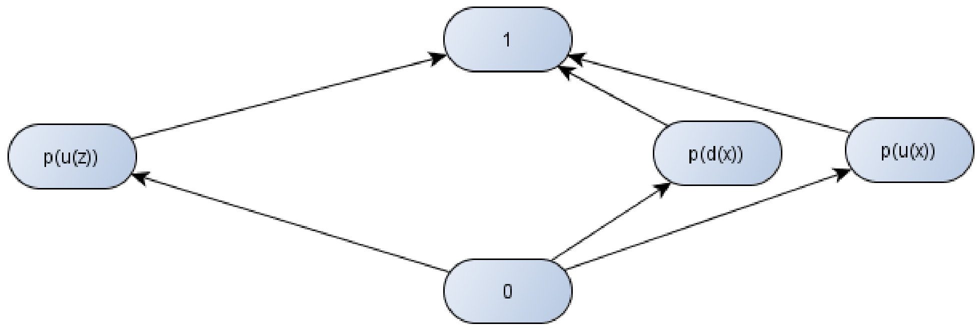
Je zřejmé, že p a ~p jsou komplementární. Evidentně, p ∧ ~p = 0 a p ∨ ~p = 1. Svaz, který má největší a nejmenší prvek a platí v něm (i) a (ii) pro každý jeho prvek a, je komplementární. Komplementární distributivní svaz je tzv. Boolova algebra. Náš svaz výroků o experimentálních výrocích kvantového systému P je komplementární, není však distributivní.

Svaz P splňuje slabší, resp. obecnější podmínku, než je distributivita, a tou je modularita. Modulární svaz splňuje tuto podmínku (pro libovolnou trojici prvků *x*, *y*, *z*):

(5)’ jestliže $x \leq z$, potom $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

Ukažme na příkladu. Mějme například trojici prvků p(u(z)), p(u(x)), 1) přičemž platí, že p(u(z)) ≤ 1: LS (5)’ p(u(z)) ∨ [p(u(x)) ∧ 1] = p(u(z)) ∨ p(u(x)) = 1; PS (5)’ [p(u(z)) ∨ p(u(x))] ∧ 1 = 1 ∧ 1 = 1. Levá strana rovnosti se skutečně rovná pravé.

Platí, že každý distributivní svaz je modulární, naopak to však neplatí. Důležitým matematickým poznatkem je, že svaz podprostorů libovolného vektorového prostoru je modulární. Mezi další významné poznatky patří tato fakta: Nejjednodušší nedistributivní modulární svaz je diamant, což je právě podsvaz našeho svazu P, který zahrnoval vybrané prvky p(u(z)), p(u(x)), p(d(x)), u nichž jsme prokázali, že neplatí distributivní zákon (obrázek 6). Obecně platí, že podsvaz M svazu S je neprázdná podmnožina S, pro jejíž libovolné dva prvky *a*, *b* (∈ M) platí, že $a \wedge b$, $a \vee b \in$ M. Jinak řečeno, M je uzavřená svazovým operacím průsek a spojení.

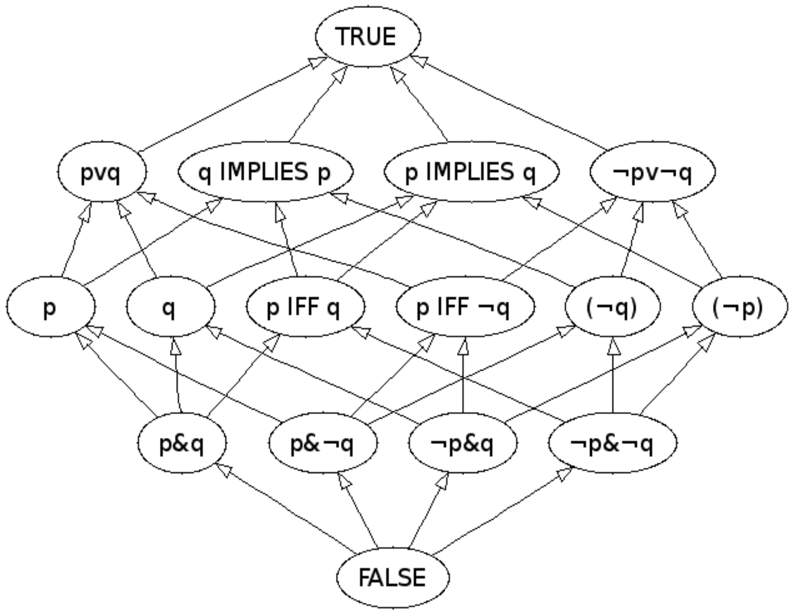


Obr. 6

Platí, že každý podsvaz distributivního svazu je sám distributivním. Pokud je podsvazem nějakého svazu diamant, pak má daný svaz nedistributivní podsvaz, a tudíž nemůže být distributivní. Ve svazu P lze identifikovat vícero podsvazů, jejichž diagram má tvar diamantu. Snadno nahlédneme, že jsou 4 (každý z diamantů vynechává jeden prvek ze střední úrovně Hasseova diagramu na obr. 2.).

Nedistributivní svaz logiky experimentálních výroků P srovnáme s výrokovou logikou výroků p a q, která je Boolovou algebrou.[11]

[11] Naše srovnání je obecné tj. z hlediska toho, že v obou případech máme strukturu výroků, která odpovídá nějaké množinové struktuře. Bylo by však možno srovnávat i konkrétně: Řekněme, že výroky p a q, resp. ~p, ~q odpovídají experimentálním výrokům „elektron má spin nahoru podle osy *z* (výše značeno p(u(z)))“ a „elektron má spin nahoru podle osy *x* (p(u(x)))“, resp. „elektron má spin dolu podle osy *z* (p(d(z)))“ a „elektron má spin dolu podle osy *x* (p(d(x)))“. Chová-li se systém kvantově, jak bylo popsáno výše, vztahy mezi experimentálními výroky reprezentuje diagram na obr. 2. Nyní předpokládejme ve smyslu myšlenkového experimentu *per impossibile* (tj. navzdory fyzikální nemožnosti), že by náš kvantový systém vykazoval klasické chování, tj. že by mohla být měřena hodnota spinu podle osy *z* i podle osy *x* zároveň a disjunkce experimentálních výroků nepředstavovala nutně pravdivý výrok (smysl tohoto požadavku vyplyne z výkladu níže). Pak by logické vztahy mezi výroky reprezentoval diagram na obr. 7.



Obr. 7[12]

To, že výroková logika výroků p a q je Boolovou algebrou, nahlédneme z toho, že tato logická struktura koresponduje ve smyslu izomorfismu nějaké množinové struktuře, o níž víme či snadno zjistíme, že je Boolovou algebrou. Logické operace negace, konjunkce, disjunkce a implikace jsou standardně interpretovány jako relace a operace na množinách (množinová algebra). Přesněji řečeno, obě struktury (tj. logika: množina výroků a operace na nich, a množinová algebra: množina množin a operace a relace na nich) jsou izomorfní případy Boolovy algebry. Výrokům p a q jsou přiřazeny nějaké vlastní podmnožiny univerzální množiny. Relace „být podmnožinou“, $\subseteq$, je izomorfní s implikací, negace je operace doplněk množiny (do univerzální množiny), konjunkce je operace průnik a disjunkce pak operace sjednocení:

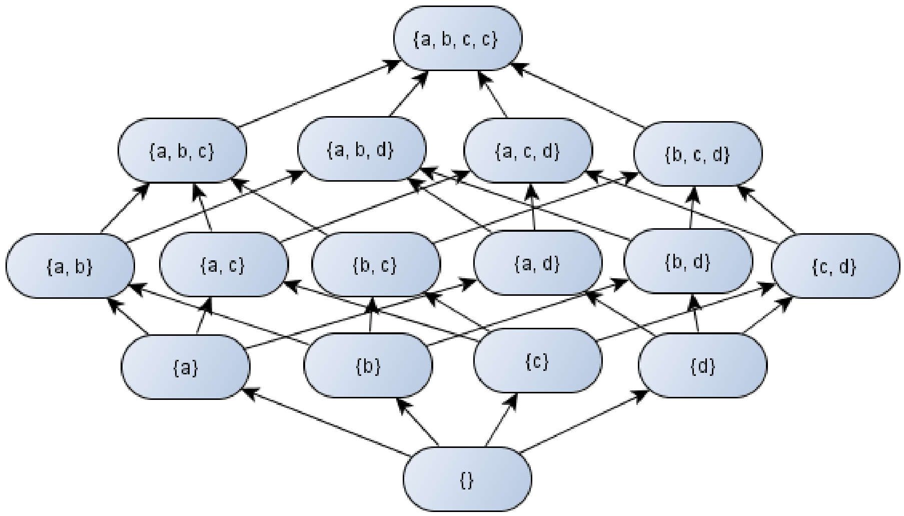
Nechť A, B $\subseteq$ U. Dále, nechť A koresponduje s p a B koresponduje s q. Potom
$A \subseteq B$ je izomorfní s $p \rightarrow q$
U – A, tj. A’, je izomorfní s $\sim p$
$A \cap B$ je izomorfní s $A \wedge B$
$A \cup B$ je izomorfní s $A \vee B$

Uveďme příklad: nechť univerzální množina U = {a, b, c, d}. Nechť p odpovídá množina A = {a, b} a q množina B = {a, c}. Pak
U – A = {c, d} odpovídá $\sim p$, U – B = {b, d} odpovídá $\sim q$.
$A \cap B$ = {a} odpovídá $p \wedge q$
$A \cup B$ = {a, b, c} odpovídá $p \vee q$
$A \subseteq (A \cup B)$, tj. {a, b} $\subseteq$ {a, b, c}, odpovídá $p \rightarrow (p \vee q)$

Tento izomorfismus snadno nahlédneme, srovnáme-li obrázek 7 a obrázek 8. Obrázek

[12] Zdroj obrázku Wikipedia, namísto 1 je v obrázku uvedeno TRUE, místo 0 pak FALSE.

8 představuje Hasseův diagram potenční množiny čtyřprvkové množiny 2^4. Víme, že potenční množiny představují typický příklad Boolovy algebry, ohraničeného komplementárního distributivního svazu. Proto je Boolovou algebrou výroková logika výroků p a q.



Obr. 8

2.4. Logické spojky v kvantové výrokové logice

Ve svazu (Hasseovu diagramu) klasické výrokové logiky výroků p a q na obrázku 7 si všimněme, že zde průsek $p \wedge q$ interpretujeme jako konjunkci a spojení $p \vee q$ jako disjunkci, jejichž význam je dán známými pravdivostními tabulkami. Jak již bylo řečeno, s těmito logickými operacemi korespondují množinové operace. V logice experimentálních propozic P na obrázku 2 naproti tomu vidíme, že průsek (infimum), konjunkce libovolných „elementárních výroků“ z množiny {p(u(z)), p(d(z)), p(u(x)), p(d(x))}, např. p(u(z)) a p(d(x)), je vždy nepravdivý výrok. To neznamená, že by se jednalo o jiný význam „konjunkce“, o jinou podobu pravdivostní tabulky či že by konjunkci nebylo možno chápat jako množinový průnik (průnik vektorových podprostorů, který koresponduje konjunkci, lze v širším smyslu chápat jako průnik množin, jejichž prvky tvoří vektory). V logice experimentálních propozic vlivem chování fyzikálního systému nikdy nenastává situace (tj. je fyzikálně nemožná taková situace), kdy by průnikem dvou množin reprezentujících dvě různé propozice byla jiná množina než množina prázdná. To snadno nahlédneme srovnáním Hasseova diagramu chování kvantového systému na obrázku 1 a obrázku 8, který odpovídá množinovým relacím a operacím izomorfním s výrokovou logikou výroků p a q. Jinými slovy, konjunkce experimentálních výroků o chování kvantového systému bude vždy nepravdivý výrok, protože libovolné dva z těchto výroků nemohou být zároveň pravdivé, ať už proto, že vyjadřují nekompatibilní výsledky měření (slabá nekompatibilita), nebo proto, že popisují výsledky nekompatibilních měřících procedur fz a fx (silná nekompatibilita).[13]

Podobně spojení (supremum) elementárních výroků z množiny {p(u(z)), p(d(z)), p(u(x)),

[13] Ve fyzice se pojem nekompatibility vztahuje na silnou nekompatibilitu.

p(d(x))}, např. p(u(z)) a p(d(x)), je vždy pravdivý výrok. To už není jen díky tomu, že by kvůli z hlediska logiku vnějšímu fyzikálnímu omezení byla fyzikálním systémem realizována jen „část“ možností daných výrokovou logikou, jako je tomu v případě konjunkce daných výroků, nýbrž proto, že samotná disjunkce, tedy logická operace, nabývá odlišného významu. Disjunkci totiž neodpovídá množinové sjednocení, nýbrž lineární obal vektorů. Před zkoumáním odlišného významu disjunkce však předřaďme pojednání o významu negace.

Zmínili jsme dvojí nekompatibilitu výroků (a stavů, které popisují): slabou, v rámci jednoho měření a silnou, jež se týká výroků, které činí pravdivými nekompatibilní měření. Uvažujme výrok p („elektron má spin podle z nahoru“). Je-li pravdivý, pak *slabě nekompatibilní* výrok q („elektron má spin podle z dolu“), který představuje (kvantově logickou) negaci výroku p, tzn. ~p, je automaticky nepravdivý. Pokud by byl výrok q pravdivý, pak by byl naopak p nepravdivý. Zde ovšem paralela s výrokově-logickou negací končí. Kvantově logická negace nemá stejný význam s výrokově-logickou negací, protože z nepravdivosti p nebo q nelze usoudit na pravdivost slabě nekompatibilního výroku q nebo p. Hlubší důvod bude zřejmější později na základě izomorfie kvantové logiky s podprostory Hilbertova prostoru. Nyní stačí říci, že nevíme, zdali je příslušný výrok nepravdivý proto, že je pravdivý výrok opačný (jak by případně ukázala měřící procedura fz), nebo proto, že je pravdivý některý ze silně nekompatibilních výroků, jehož pravdivost měří fx. Výrok i jeho kvantová negace mohou být oba nepravdivé.

Vraťme se ale k předpokladu, že je p pravdivý. Potom není nepravdivý jen výrok slabě nekompatibilní, q, ale nepravdivé jsou i *silně nekompatibilní* výroky r („elektron má spin podle *x* nahoru“) a s („elektron má spin podle *x* dolu“), z nichž právě jeden může být pravdivý, jen provedeme-li měření fx. Není třeba dodávat, že r a s jsou vzájemně slabě nekompatibilní. Tyto závislosti pravdivostních hodnot platí, *mutatis mutandis*, pro všechny čtyři výroky p, q, r, s. Přehledně je vyjádřeme v tabulce:[14]

p/~q	q/~p	r/~s	s/~r
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Podobná změna významu se týká také disjunkce v kvantové logice. Uvidíme, že tak jako může být zároveň nepravdivý výrok a jeho kvantová negace, tak mohou být nepravdivé oba členy kvantové disjunkce.

Selhává-li distributivní zákon,

$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

pak jedna s tímto zákonem provázaných logických spojek musí mít odlišný význam od standardního. Není-li to konjunkce, musí to být disjunkce. Má-li odlišný význam, pak se už nejedná o odlišné chování systému od běžného, tedy o „kvantovou logiku“ v uvozovkách, ale o deviantní či neklasickou logiku v tom smyslu, že definice alespoň jedné z logických spojek je

[14] Lomítko v tabulce znamená „záměnnost“, tj. striktní ekvivalenci.

odlišná či změněná.[15] Pak už se jedná o kvantovou logiku jako takovou.

Abychom trochu lépe porozuměli nestandardnímu logickému chování disjunkce, prozkoumejme selhání distributivního zákona blíže: mějme výrok p, který znamená „elektron má spin nahoru ve směru osy z“, q: „elektron má spin nahoru ve směru osy *x*“ a r: „elektron má spin dolů ve směru osy *x*“. Připusťme hypoteticky, že se náš systém chová klasicky, což, jak víme, je v rozporu s fyzikální realitou: *Kdyby* se systém elektron-spin choval ve shodě s klasickou mechanikou, pak by platilo, že „elektron má spin nahoru ve směru osy *z A ZÁROVEŇ* ve směru osy *x* má *buď* spin nahoru, *nebo* dolů“, pokud by měření ukázalo, že ve směru osy z je skutečně nahoru a předpokládali bychom, že musí platit jedna z opačných variant ve směru osy *x* (kterou by mohlo následné měření zjišťovat). Za stejné situace by platilo také ekvivalentní vyjádření podle distributivního zákona „elektron má spin nahoru ve směru osy *z a zároveň* má spin nahoru ve směru osy *x NEBO* má spin nahoru ve směru osy *z a zároveň* dolů ve směru osy *x*“. Jelikož bychom věděli, že ve směru osy *z* má elektron skutečně spin nahoru a dále bychom předpokládali, že ve směru osy *x* má elektron buď spin nahoru, nebo dolů, byla by nutně jedna ze dvou disjunktivně spojených konjunkcí pravdivá, a tím by byla pravdivá i hlavní disjunkce. Nemuseli bychom ani provádět měření ve směru osy *x*. Nicméně pokud bychom ho provedli a zjistili kupříkladu, že elektron má spin nahoru, nerušil by se předchozí výsledek měření podle osy *z* a platil by výrok o tom, že elektron má spin nahoru podle osy *z* a zároveň nahoru podle osy *x*.

Jak již víme, systém se takto ve skutečnosti nechová. Nyní tedy uvažujeme ve shodě s výše popsanými kvantově mechanickými charakteristikami systému. Měření opět prokáže, že spin je orientován nahoru podle osy *z*. *Zároveň* lze předpokládat, že platí disjunkce vzájemně slabě nekompatibilních výroků o spinu elektronu ve směru osy *x*. Platnost disjunkce je výsledkem našeho poznání, že se jedná o nekompatibilní stavy (orientace nahoru, resp. dolů) a že je úplná (více stavů není).[16] Nevíme však, *ani v principu nemůžeme vědět*, která z těchto hodnot to je. Proto je sice disjunkce slabě nekompatibilních experimentálních výroků pravdivá, ani jeden z disjunkce experimentálních výroků však není pravdivý, protože víme, že platí elektron má spin ve směru osy z (nahoru), a pravdivost tohoto výroku vylučuje, aby zároveň platil výrok o tom, že elektron má jednu ze silně nekompatibilních vlastností. Naproti tomu druhá část distributivního zákona, ekvivalentní vyjádření („pravá strana ekvivalence“), pravdivá není, ani jeden z disjunkcí spojených konjunktivních výroků nemůže být pravdivý, protože se zde předpokládá *současná* pravdivost nekompatibilních experimentálních výroků. Měření podle osy *z* a *x* nelze provádět současně. Jedno „zruší“ výsledek druhého.

Nyní je tedy nestandardní charakter kvantové disjunkce o něco zřejmější: na rozdíl od standardní disjunkce ve výrokové logice může být kvantová disjunkce pravdivá, třebaže ani jeden z disjunktů není pravdivý. Pravdivost disjunkce je kompatibilní s tím, aby obě disjunktní možnosti byly nedeterminované. Proč tomu tak je, objasníme později. K tomu je zapotřebí obeznámit se s kvantovou teorií trochu blíže, zejména s matematickou stránkou této teorie.

Popsaný jev silné nekompatibility se ve fyzikálním popisu kvantových jevů objevuje na různých úrovních a z různých hledisek jako princip superpozice a princip neurčitosti. My jsme si jej ilustrovali jen na nejjednodušším příkladu fyzikálního kvantového systému, elektronu s orientací spinu měřenou podle osy *z* a osy *x*. Analogické výsledky bychom získali při zkoumání výroků o výsledcích měření hybnosti a polohy elektronu, které nelze provádět zároveň. I zde bychom získali kvantovou logiku, v níž selhává distributivní zákon (srov. Putnam, 1968). Jedná se o nemožnost měřit hodnoty různých pozorovatelných veličin systému zároveň. Matematickým

[15] Neklasickými či „deviantními“ logikami včetně kvantové se zabývá Haack (1996).
[16] Míníme zde slabou nekompatibilitu, což není nekompatibilita fyzikální.

důvodem je nekomutativita určitého typu lineárních operátorů, které představují pozorovatelné (měřitelné veličiny), v maticově-mechanickém vyjádření kvantové mechaniky. Nyní je tedy zapotřebí alespoň v hrubých obrysech nastínit tuto matematickou formulaci kvantové teorie.

3. Matematické minimum kvantové teorie

3.1. Maticově-mechanické vyjádření kvantové teorie: operátory, vlastní vektory a vlastní čísla

Maticově-mechanické (*matrix mechanics*) vyjádření kvantové teorie zformulovali Werner Heisenberg, Max Born, and Pascual Jordan v roce 1925.[17] Je ekvivalentní s vlnovou formulací Erwina Schrödingera, která je o necelý rok mladší. Základem je myšlenka, že stavy kvantového systému se chápou jako vektory Hilbertova vektorového prostoru (se skalárním součinem) nad tělesem komplexních čísel. Pozorovatelným veličinám odpovídají Hermitovské lineární operátory (jejichž povahu vyjasníme později), které si lze reprezentovat jako matice (odtud „maticově-mechanické" vyjádření kvantové mechaniky). Třebaže se jedná o nekonečný prostor s vektory (přesněji: spinory) s nekonečně mnoha komplexními složkami (tj. složky vektorů představují komplexní čísla), základní myšlenku lze ilustrovat i analogií s konečným reálným vektorovým prostorem, např. R^2, R^3, na kterou se budeme odvolávat kvůli názornosti.

Uvažujme opět náš jednoduchý systém elektronu, u něhož měříme spin, tentokrát pouze ve směru osy z. Pozorovatelnou veličinou je spin ve směru osy z, kterou představuje lineární operátor – matice, A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dvě možné hodnoty, které lze naměřit, jsou „nahoru" a „dolů", +1, -1.[18] Těmto měřitelným hodnotám odpovídají dva možné měřitelné stavy systému, spin nahoru a spin dolů, které reprezentujeme jednotkovými vektory zapsanými ve sloupcovém tvaru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Máme tedy pozorovatelnou veličinu, měřitelnou hodnotu a stav systému. Vyjádřeno jazykem maticové kvantové mechaniky, máme lineární operátor (se speciálními vlastnostmi, které popíšeme níže), reálné číslo a vektory. Nyní ukažme, nejprve obecně, jak spolu tyto prvky fyzikálního systému, resp. jeho matematického popisu souvisejí:

Nenulové vektory, které při transformaci (tj. je-li na ně aplikován operátor, resp. násobíme-li vektor maticí zleva) zůstávají co do směru totožné, jsou tzv. vlastní vektory operátoru A (angl. *eigenvectors*). Číslo λ, které udává, o kolik se v transformaci změní velikost původního vektoru **v**, je tzv. vlastní či charakteristické číslo (angl. *eigenvalue*) příslušného operátoru A. Doplňme, že v kvantové fyzice jsou vlastní čísla fyzikálních operátorů reálná kvůli zvláštní vlastnosti zmíněných fyzikálních operátorů, hermicitě, třebaže vektory a matice obsahují komplexní složky, jak bylo už řečeno:

$$\mathrm{A}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$$
$$\mathrm{A}\,|\mathrm{v}\rangle = \lambda\,|\mathrm{v}\rangle$$

[17] Přehled matematiky kvantové teorie nalezne čtenář např. v Gillespie (1973).

[18] Tento údaj je ovšem bez fyzikálního rozměru, bez vyjádření v standardních jednotkách. Ve skutečnosti je spin elektronu ±½ $\frac{h}{2\pi}$, kde *h* je Planckova konstanta.

Druhý zápis rovnice je v kvantové mechanice obvyklejší, vektory se zapisují pomocí tzv. bra-ket notace, kterou zavedl jeden z autorů teorie Paul Dirac, např. sloupcový ket vektor |v⟩ znamená $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.[19] Korespondující bra podoba ⟨v| představuje řádkový vektor (v_1^*, v_2^*), kde v_1^*, v_2^* jsou čísla komplexně sdružená k v_1, v_2. Platí, že skalární součin ⟨v||v⟩, resp. ve standardním zjednodušeném zápise ⟨v|v⟩, je roven svému komplexně sdruženému číslu $\langle v|v\rangle^*$, což znamená, že se jedná o (kladné) reálné číslo.

Klíčové nyní je, že vlastní vektory operátoru, který chápeme jako pozorovatelnou veličinu, představují možné měřitelné stavy systému s ohledem na danou veličinu. Přitom stavy reprezentujeme obvykle jednotkovými vektory. Jejich k-násobky nemají v kvantové teorii fyzikální význam. Všechny tyto vektory reprezentují jediný stav. Vlastní čísla operátoru udávají možné měřitelné hodnoty dané veličiny-operátoru (díky výsledku měření – vlastnímu číslu – vím, v jakém stavu se systém nachází, jelikož znám operátor-matici a mohu zjistit korespondující vlastní vektor; to je typická úloha v rámci kvantové fyziky). Nyní je jasné, proč se jedná o *reálná* čísla – jde o výsledky měření. Fyzikální požadavek reálnosti měřitelných veličin je zabezpečen matematicky hermicitou příslušných operátorů.

Nyní se vraťme k měření spinu ve směru osy z Eukleidovského prostoru. Platí tyto rovnice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jak vidíme, vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou v transformaci nezměněny. Jsou to tedy vlastní vektory, a 1, -1 jsou vlastní čísla operátoru $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Je tedy zřejmé, že dané vektory reprezentují stavy vzhledem k dané pozorovatelné veličině, přičemž uvedená vlastní čísla jsou hodnoty veličiny, které lze zjišťovat měřící procedurou. Viděli jsme, jak spolu jednotlivé prvky fyzikálního systému, resp. jeho matematického popisu souvisejí a nyní se podrobněji zaměřme na samotné lineární operátory, které představují pozorovatelné veličiny.

3.2. Operátor a jeho reprezentace

Podívejme se nejprve obecně na ideu operátoru. Operátor ve vektorovém prostoru je nějaká matice, nazvěme si ji M, která působí na každý vektor z daného prostoru (násobíme vektor tímto operátorem zleva). Výsledkem tohoto působení je rovněž vektor daného vektorového prostoru:

$M\,|a\rangle = |b\rangle$.

Jinak zapsáno (užíváme nejjednoduššího případu matice 2x2):

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

[19] Vektor může mít samozřejmě *n* složek, kde *n* je konečné nebo i nekonečné číslo.

Jedná se o lineární operátor, tzn. operátor M splňující tyto známé podmínky:

1. $M\,[\,z\,|a\rangle\,] = z\,M\,|a\rangle$,

kde „z“ je číslo (v našem případě komplexní),

2. $M\,[|a\rangle + |b\rangle] = M\,|a\rangle + M\,|b\rangle$

Hermitovský operátor – matice je takový, v němž pro každou složku platí $m_{ij} = m_{ji}^*$, kde m_{ji}^* je komplexně sdružené číslo k číslu m_{ji}. Jinak řečeno, $M = (M^T)^* = M^\dagger$, tj. matice hermitovského operátoru se rovná matici transponované, kde všechny složky nahradíme jejich komplexně sdruženými čísly.

Například matice $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ je hermitovským operátorem. Matice $\sigma_2^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ a $(\sigma_2^T)^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Vidíme tedy, že $\sigma_2 = (\sigma_2^T)$.

Spin elektronu ve směrech *x*, *y*, *z* představuje tři pozorovatelné veličiny, které lze reprezentovat operátory σ_1, σ_2, σ_3. V maticové podobě se jedná o tzv. Pauliho matice:[20]

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Snadno nahlédneme, že vynásobíme-li každou z těchto matic sama sebou, dostaneme jednotkovou matici, např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To znamená, že tyto matice představují tzv. unitární operátory. Dlužno však poznamenat, že unitárnost není obecnou vlastností hermitovských operátorů.

Z faktu, že $\sigma_i^2 = I$ plyne, že možná vlastní čísla jsou pouze 1 a -1. Řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých s vlastními čísly pro každou matici bychom zjistili, že vlastními vektory jsou např. $\sigma_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \sigma_2: \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},\ \sigma_3: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Snadno ověříme, že tomu tak je, vynásobením vektoru s příslušnou maticí. Za reprezentanty příslušného stavu se standardně berou jednotkové vektory, takže uvedené vektory σ_1 a σ_2 je nutno normalizovat.

$$\sigma_1: \sqrt{\tfrac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\tfrac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \sigma_2: \sqrt{\tfrac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \sqrt{\tfrac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Je tomu tak proto, že libovolný stavový vektor je možno zapsat jako lineární kombinaci jednotkových bázových vektorů, jako tzv. superpozici bázových vektorů, resp. měřitelných stavů:

[20] Pojmenovány na počest rakouského fyzika Wolfganga Pauliho (1900-1958), který je užil ve své studii o spinu v kvantové mechanice (z r. 1925).

$|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$,

kde $|\psi\rangle$ představuje libovolný stavový vektor $\binom{\alpha}{\beta}$; α, β jsou komplexní čísla; $|1\rangle$, $|0\rangle$ jsou jednotkové bázové vektory, např. $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$. Již víme, že možné stavy, které lze získat jako výsledky měření, přestavují právě ony bázové vektory. Před měřením ale systém může být v libovolném stavu, který je lineární kombinací bázových vektorů. Říkáme, že se systém nachází v tzv. superpozici obou stavů. Druhá mocnina absolutní hodnoty koeficientů α, β, tj. $|\alpha|^2$, $|\beta|^2$, představuje pravděpodobnost, s níž bude výsledek měření stav $|1\rangle$ resp. $|0\rangle$. (Komplexní) čísla α, β se nazývají amplituda pravděpodobnosti. Standardně se tato skutečnost interpretuje tak (tzv. Kodaňská interpretace kvantové mechaniky), že systém nabude měřením jeden z determinovaných stavů $|1\rangle$ nebo $|0\rangle$, nikoli tak, že před měřením je v daném stavu s příslušnou pravděpodobností. Jedná-li se o pravděpodobnost, s níž bude změřen ten či onen stav, pak je zřejmé, že $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Jinak řečeno, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Pokud by bázové vektory nebyly normalizovány, pak by tato rovnost neplatila.

Snadno nahlédneme, že dvojice jednotkových vlastních vektorů každého z operátorů tvoří ortonormální bázi dvoudimenzionálního komplexního vektorového prostoru. Jejich skalární součin je roven 0. Vezmeme-li jednu bázi za výchozí, bázové dvojice vlastních vektorů zbývajících dvou operátorů lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů výchozí báze. Za výchozí bázi se zpravidla bere dvojice $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$ v kvantové komputační teorii zvaná komputační báze. Tato dvojice vektorů odpovídá naměřené +1, resp. -1 ve směru osy z (Eukleidovského prostoru), tj. $|1\rangle = 1\binom{1}{0} + 0\binom{0}{1}$; $|0\rangle = 0\binom{1}{0} + 1\binom{0}{1}$. Víme, že ve směru osy x bude výsledek +1, resp. -1 následně naměřen s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Proto bázové vektory veličiny (operátoru) „směr podle x“ budou mít hodnotu $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{0}{1}$, resp. $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{0}{1}$. Vidíme, že se jedná o vektory $\binom{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}, \binom{1/\sqrt{2}}{-1/\sqrt{2}}$, resp. $\sqrt{\frac{1}{2}}\binom{1}{1}, \sqrt{\frac{1}{2}}\binom{1}{-1}$.

Jsou operátory komponent spinu komutativní? Lineární operátory obecně nejsou komutativní. Snadno nahlédneme, že $\sigma_1\sigma_3 \neq \sigma_3\sigma_1$:

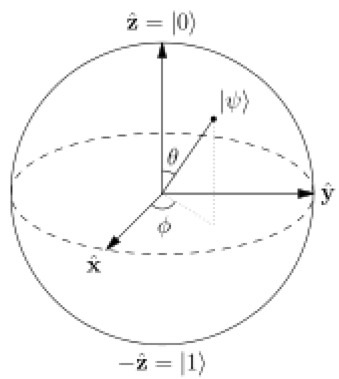
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

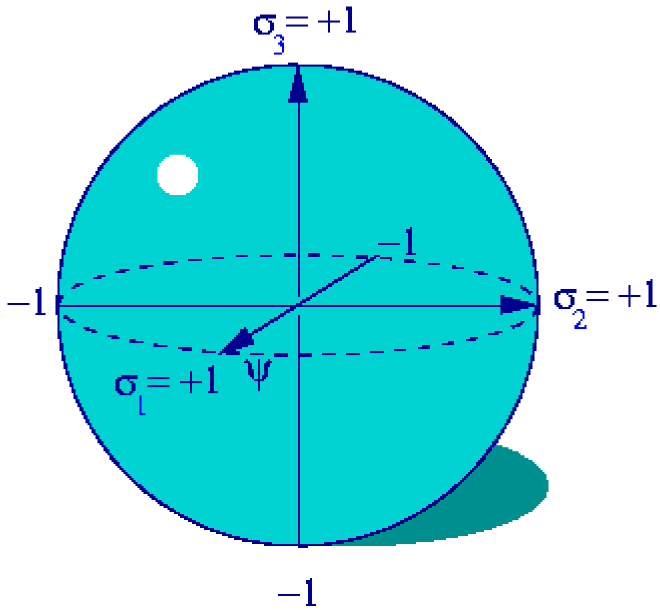
Je to právě nekomutativita hermitovských operátorů reprezentujících pozorovatelné veličiny, co odpovídá za nemožnost měření dvou veličin současně. Například lineární operátor reprezentující hybnost nekomutuje s tím, který reprezentuje polohu.

Tím jsme si zavedli matematické reprezentace pojmu stavu systému (angl. *state*), pozorovatelné (měřitelné veličiny, angl. o*bservable*) a měřitelné hodnoty (angl. *value*).

Zbývá dodat skutečnost, kterou si patrně pozorný čtenář již uvědomil sám (pro naše účely se omezujeme jen na tzv. nedegenerované veličiny): Vlastních vektorů příslušného operátoru je vždy tolik, kolik je dimenze příslušného prostoru, tedy n. Tyto vektory reprezentující možné stavy systému, jsou vzájemně ortogonální, resp. ortonormální, protože se jedná o jednotkové vektory. To v našem případě snadno nahlédneme – jejich skalární součin je roven 0. Jak víme, n ortogonálních vektorů tvoří bázi n-dimenzionálního vektorového prostoru. Třebaže se v našem případě bude jednat o komplexní vektorový prostor, dané vektory $\binom{1}{0}\binom{0}{1}$ tvoří bázi i reálného prostoru R^2, který je velmi snadno představitelný, takže dobře poslouží pro ilustraci. Pokud by byl systém složitější a měl by tři možné stavy, pak by bázi tvořily tři vektory a ilustrací by byl reálný prostor R^3. Musíme mít však stále na paměti, že se jedná jen o ilustraci, o strukturální podobnost (analogii), která pro vysvětlení kvantové logiky stačí. Vektorový prostor, s nímž zde pracujeme, je komplexní vektorový prostor C^2. Všechny jednotkové vektory $\binom{\alpha}{\beta}$, jež představují možné (nikoliv však ve smyslu měřitelné) stavy systému, lze transformovat do koule v R^3 o poloměru 1, jejíž jednotlivé body tvoří koncové body polohového vektoru $\binom{\alpha}{\beta}$. Tato koule se nazývá Blochova. Ortogonální vektory směřují ze středu koule k bodům, které jsou přesně naproti sobě, tedy např. k severnímu a jižnímu pólu:[21]



[21] Zdroj Wikipedia. Pozor na tento rozdíl: v obraze C^2 v R^3 – což je Blochova koule – jsou ortogonální směry (tj. ortogonální v C^2) kolineární (kolineární v R^3). V R^3 se pochopitelně nejedná o ortogonální směry.



Obr. 9

Nyní již máme vše potřebné pro poučenější návrat ke kvantové logice. Větší vhled bude spočívat v tom, že zatímco v první kapitole jsme pouze konstatovali, že „logika“ kvantového systému není distributivní, v dalším lépe pochopíme proč tomu tak je.

4. Von Neumannova formulace kvantové logiky

Nyní představíme základní myšlenku klasické formulace kvantové logiky, která pochází od Garretta Birkhoffa and Johna von Neumanna (Birkhoff, von Neumann, 1936).[22]

Základní myšlenkou je, že experimentální výrok, např. „hodnota veličiny S je s_1“ koresponduje uzavřenému podprostoru Hilbertova prostoru nad tělesem komplexních čísel. V našem příkladu máme jen dvě možné experimentální propozice: výroku „elektron má spin podle osy z nahoru“ odpovídá podprostor generovaný vektorem $\binom{1}{0}$ a výroku „elektron má spin podle osy z dolů“ odpovídá podprostor generovaný vektorem $\binom{0}{1}$. Označme si první výrok p a druhý q. Nyní platí:

(1) negace výroku p je výrok ~p, jemuž odpovídá podprostor, který je ortogonální doplněk k podprostoru, jenž koresponduje s výrokem p.
(2) konjunkci p $\wedge$ q odpovídá podprostor, který je průnikem příslušných podprostorů, které odpovídají výrokům p a q.
(3) disjunkci p $\vee$ q odpovídá podprostor, který je lineárním obalem (všech) vektorů příslušných podprostorů, které odpovídají výrokům p a q. Je to nejmenší podprostor, který

[22] Krom příslušného článku – primárního zdroje – vycházíme zejména z Dalla Chiara, Giuntini (2002) a Svozil (1998).

obsahuje oba podprostory asociované s p, resp. q.

(4) implikaci p $\rightarrow$ q odpovídá fakt, že prostor přiřazený p je podprostorem prostoru odpovídajícímu q.

Nyní blíže objasněme uvedené přiřazení podprostorů výrokům. Zaměříme se na důsledky tohoto přiřazení ve srovnání s výrokovou logikou a podobné přiřazení relací a operací s množinami logickým spojkám. Pokud jde o samotné přiřazení podprostorů výrokům, pak se nejedná o nic překvapivého, protože již víme, že standardní výroková logika je izomorfní s množinovou algebrou (obsahující relaci $\subseteq$, a operace doplněk ', $\cap$, $\cup$). Vektorový podprostor je rovněž v základním smyslu podmnožinou vektorového prostoru (plus něco navíc, totiž podmnožinou uzavřenou na operace sčítání vektorů a násobení skalárem). Proto implikace v obou logikách (standardní a kvantové) lze připodobnit množinové inkluzi.

U negace musíme být opatrní, již jsme viděli, že kvantová negace má jinou definici než standardní negace (za jistých okolností, tj. pokud je pravdivý jeden z experimentálních výroků verifikovaných jiným měřením, než to, které verifikuje náš výrok a jeho negaci, mohou tyto být zároveň nepravdivé). Standardní negace je izomorfní s množinovým doplňkem do univerzální množiny. Kvantová negace je izomorfní s ortogonálním doplňkem k příslušnému podprostoru. Mějme podprostor A, jeho ortogonální doplněk značíme $A^{\perp}$. Ortogonální doplněk znamená, že všechny vektory tohoto podprostoru (doplňku) jsou ortogonální ke všem výrokům druhého podprostoru (jejich skalární součin je roven nule). Zatímco sjednocení množiny a jejího doplňku představuje univerzální třídu, sjednocení podprostoru a jeho ortogonálního doplňku netvoří celý prostor. Některé vektory prostoru tedy nepatří ani do podprostoru, ani do jeho ortogonálního doplňku. Např. v R^3 je ortogonálním doplňkem přímky rovina, na kterou je přímka kolmá. Jiné přímky, které protínají rovinu a svírají s ní ostrý úhel jiný než 90°, např. 45°, patří do R^3, neleží ani v rovině, ani nejsou kolineární s přímkou. Celý prostor však představuje lineární obal podprostoru a jeho ortogonálního doplňku. Tedy např. všechny vektory v R^3 lze zapsat jako lineární kombinace dvou libovolných vektorů z roviny a vektoru přímky. Pokud se systém nachází ve stavu, jemuž odpovídá vektor, který neleží ani v uvedeném podprostoru, ani v jeho ortogonálním doplňku, pak výrok přiřazený podprostoru ani jeho negace (jíž je přiřazen doplněk) nejsou pravdivé. Vzniká však otázka, zda je to možné, jelikož bylo řečeno, že všechny možné stavy systému představují ortonormální bázi celého prostoru. Protože platí, že dim(A) + dim ($A^{\perp}$) = *n*, pak po provedeném měření musí stavový vektor ležet buď v A nebo v $A^{\perp}$. Je to možné proto, že tyto možné stavy, přesněji, stavy, v nichž může měření ukázat, že se systém nachází, jsou relativní právě vůči tomuto měření konkrétní veličiny (připomeňme: pozorovatelné veličině odpovídá operátor, hodnoty veličiny jsou vlastní čísla, možné stavy jsou vlastní vektory tvořící bázi v daném prostoru). Takže vektor, který neleží ani v A ani v $A^{\perp}$, představuje možný stav jiné veličiny zjišťované odlišným měřením (tj. je vlastním vektorem jiného lineárního operátoru), jeden z bázových vektorů jiné báze v R^3, kterou bychom z původní získali rotací v R^3. To je situace, kdy výrok a jeho kvantová negace jsou oba nepravdivé, jelikož je pravdivý právě jeden z experimentálních výroků měření jiné veličiny (např. místo spinu ve směru osy *z* měříme spin ve směru osy *x*).

Průnik podprostorů je rovněž podprostor, takže konjunkce odpovídá množinovému pojetí. Množinové algebře však podobně jako negace neodpovídá disjunkce.[23] Máme další příležitost lépe pochopit její odlišnost v kvantové logice (jak jsme viděli, tato odlišnost odpovídá za selhání

[23] Podrobněji v Aerts, D'Hondt, Gabora (2000).

distributivity). Standardní disjunkce je izomorfní množinovému sjednocení. Tak je tomu i v logice experimentálních výroků klasické fyziky, která se řídí standardní logikou a představuje Boolovu algebru. Systému odpovídá tzv. fázový prostor (angl. *phase space*), v němž body představují všechny možné stavy uvedeného systému. Fázový prostor hmotného bodu je množina, jeho body jsou všechny uspořádané šestice reálných čísel, kde první tři složky představují *x*-ovou, *y*-ovou a *z*-ovou souřadnici polohy, zbývající tři složky podobné souřadnice hybnosti:

$\langle r_1, r_2, r_3, p_1, p_2, p_3 \rangle$

Podobné n-tice existují i pro jiné veličiny. Diferenciální rovnice popisují, jak se tyto stavové n-tice mění. Jedná se o množiny, tedy platí izomorfie mezi strukturou podmnožin a výroků s příslušnými relacemi a operacemi, kterou jsme popsali výše. V kvantové fyzice jsou ovšem výrokům přiřazeny podprostory vektorového prostoru, nikoli jen množiny. Sjednocení podprostorů není vždy podprostorem! Například v R^2, tj. v rovině, máme dvě různé přímky, které dohromady netvoří podprostor. Vektory, které náleží těmto podprostorům (přímkám), jejich generátory **u** a **v** a všechny jejich k-násobky, sice představují množinu, která je podmnožinou množiny V všech vektorů vektorového prostoru R^2, tato podmnožina však není uzavřená na příslušné operace spjaté s vektorovým prostorem (sčítaní vektorů a násobení skalárem). Problém vzniká se sčítáním, např. vektor **u + v** neleží ani v podprostoru generovaném **u**, ani v tom, který vzniká násobením **v** reálným číslem. Nejmenší uzavřený podprostor, v němž leží obě přímky – podprostory přiřazené p a q – je celá rovina R^2. Tento podprostor je lineárním obalem vektorů **u** a **v**. Proto je disjunkci výroků v logice kvantových přiřazen tento lineární obal.

Snadno nahlédneme, že právě z tohoto důvodu distributivní zákon neplatí.

$r \wedge (p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge p) \vee (r \wedge q).$

Mějme výroky p, q, r a dále se držme analogie s R^2. Všechny tyto výroky představují „paprsky“ (přímky) v rovině. Řekněme, že p, q jsou navzájem kolmé a představují dva možné stavy spojené s jednou veličinou (resp. měřením, operátorem). „$p \vee q$“ představuje celou rovinu R^2. Výrok r pak interpretujeme jako přímku, která obě předcházející protíná a není kolmá ani na jednu z nich. „$r \wedge (p \vee q)$“ je průnik přímky spojené s r a roviny, jíž je samotná přímka, korelát výroku r. Naproti tomu „$(r \wedge p) \vee (r \wedge q)$“ odpovídá nulový podprostor: obě konjunkce „$r \wedge p$“ a „$r \wedge q$“ jsou nulové podprostory (přímky se protínají); lineární obal nulových vektorů je nulový podprostor. Pravá strana distributivního zákona není ekvivalentní s levou. Totéž platí, *mutatis mutandis*, pokud uvažujeme R^3 a disjunkci tří stavových bázových vektorů. Lineární obal této báze je celý R^3, kam náleží i podprostor-přímka, která neleží v rovině generované dvěma z bázových vektorů, ani není kolineární s přímkou určenou třetím bázovým vektorem. Levá strana tedy bude odpovídat této přímce, zatímco pravá strana nulovému prostoru přesně ze stejných důvodů jako v předchozím případě modelovaném v R^2.

Poznatky o kvantové negaci a disjunkci lze vztáhnout na otázku, zdali v kvantové logice platí princip vyloučeného třetího, který neplatí v některých nestandardních logikách (intuicionistická, tříhodnotová), které podobně jako kvantová logika interpretují negaci tak, že za určitých okolností neplatí výrok ani jeho negace. Zatímco ve zmíněných nestandardních logikách tento princip neplatí, v kvantové logice ano. Je tomu tak proto, že uvedené nestandardní logiky pracují se standardní vylučovací disjunkcí, zatímco kvantová logika má, jak jsme viděli, slabší disjunkci (tzv. „choice disjunction“, srov. Hardegree, 1979, s. 56). Princip vyloučeného třetího „p $\vee$ ~p“ v kvantové logice platí ve smyslu lineárního obalu A a $A^{\perp}$, nikoli sjednocení A a $A^{\perp}$. Jelikož je možné, aby platil výrok o stavu systému, jehož vektor neleží ani v A, ani v $A^{\perp}$ (viz výše), pak „vyloučený třetí“ v pravém smyslu třetí (výrok) nevylučuje. Jak výrok spjatý s A, tak jeho negace odpovídající $A^{\perp}$ mohou být oba nepravdivé a platí nějaký třetí výrok.

Nyní vztáhněme obecné poznatky na námi zkoumaný příklad kvantového systému. Uvažujme pro ilustraci opět R^2 se skalárním součinem. Podprostor generovaný vektorem $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ je přímka, osa *z*, podprostor generovaný vektorem $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ je taktéž přímka, osa *x*. Jak již víme, všechny vektory v daném podprostoru reprezentují tentýž stav systému, potažmo propozici resp. výrok o tom, že systém je v tomto stavu. Jak zřejmo, naše výroky p a q jsou logickými opaky, jeden je negací druhého, jelikož s nimi spojené podprostory, přímky, jsou navzájem kolmé (víme, že skalární součin uvedených vektorů je 0). Vidíme, že konjunkce p $\wedge$ q je průnik s výroky spojených podprostorů, v tomto případě přímek, os *z* a *x*. Průnikem je nulový podprostor, počátek. To plně odpovídá našim poznatkům v první kapitole. Nulový podprostor odpovídá nutně nepravdivému výroku. Lze očekávat, že naopak nutně (ve všech modelech) pravdivý výrok bude přiřazen celému prostoru, který reprezentuje kvantově-fyzikální systém. Přesně toto nastává. Lineárním obalem jednotkových vektorů $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, které tvoří bázi R^2, je celý tento prostor, protože všechny vektory v R^2 lze zapsat jako lineární kombinaci daných bázových vektorů (resp. jejich k-násobků, které tvoří další možné báze). Tedy disjunkci p $\vee$ q je přiřazen celý prostor.

Vidíme, že se nyní propojuje úvaha z první a nynější kapitoly. Množina všech podprostorů Hilbertova prostoru je svaz. Částečným uspořádáním je zde inkluze (vztah prostoru a podprostoru). Každé dva prvky, resp. podprostory, mají supremum, jímž je lineární obal M $\vee$ N, a infimum, jímž je průnik M $\cap$ N. Všechny svazy Hilbertových podprostorů konečné dimenze jsou modulární. Distributivní je pouze svaz podprostorů s dimenzí menší nebo rovnou jedné (Halmos, 1982, s. 9,177). Svaz podprostorů nekonečné dimenze splňuje slabší podmínku než je modularita, tzv. ortomodularitu. Ortomodulární svaz je ortosvaz, který splňuje axiom ortomodularity. Ortosvaz je komplementární ohraničený svaz, kde navíc, kromě podmínek pro komplementární svaz

(i) $a \wedge a' = 0$
(ii) $a \vee a' = 1$

platí (iii) $a'' = a$; (iv) jestliže $a \leq b$, pak $a' \geq b'$
Ortomodularita je následující axiom: (v) jestliže $a \leq b$, potom $a \vee (a' \wedge b) = b$. Abychom předešli možnému omylu, poznamenejme jen, že ortomodulární svaz není totéž co modulární ortosvaz. Sice každý modulární ortosvaz je ortomodulární, nicméně ortomodulární svaz nemusí být modulární.

Tyto detaily však nejsou rozhodující. Klíčovým poznatkem je, že svaz podprostorů Hilbertova prostoru (ať už konečné nebo nekonečné dimenze) není distributivní. Selhání distributivity souvisí s tím, že disjunkci výroků není přiřazeno sjednocení množin odpovídajících těmto výrokům, nýbrž podprostor všech lineárních kombinací vektorů, které jsou samy generátory jednodimenzionálních podprostorů spjatých s danými disjunkcí spojenými výroky. Levé straně (jedné ze dvou ekvivalencí) distributivního zákona

$r \wedge (p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge p) \vee (r \wedge q)$,

tj. $r \wedge (p \vee q)$ odpovídá průnik jednodimenzionálního podprostoru. Řekněme, že „r“ odpovídá přímka $z = x$ (množina k-násobků vektoru $\binom{1}{1}$). Konjunkci r s $(p \vee q)$ koresponduje podprostor, který je průnikem přímky $z = x$ s rovinou, v níž leží jednodimenzionální podprostory-přímky osa z (generovaná $\binom{1}{0}$) a osa x (generovaná$\binom{0}{1}$). Tato rovina – celý prostor R^2 – je lineárním obalem těchto přímek (přesněji daných vektorů). Průnikem je samotný podprostor přiřazený r, resp. přímka $z = x$, která leží ve stejné rovině.

Pravá strana ekvivalence, $(r \wedge p) \vee (r \wedge q)$, představuje prostor, který vzniká jako lineární kombinace vektorů podprostorů, které představují obě konjunkce. Těmito podprostory jsou však v obou případech nulové podprostory, jelikož průnik dvou ne-kolineárních přímek (přímky $z = x$ s osou z a téže přímky s osou x), je bezrozměrný bod, v tomto případě počátek. Proto celé disjunkci odpovídá nulový podprostor (lineárním obalem nulových vektorů je zase nulový vektor). Výsledkem je, že levá strana konjunkce se nerovná pravé (srov. např. Bacciagaluppi, 2007, s. 9). Dodejme, že výrok r představuje podprostor, přímku, která je možným stavem zjišťovaným jiným měřením, než stavy spojené s výroky p a q. Těmito stavy jsou přímky generované bázovými vektory $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$, které jsou vlastními vektory operátoru – pozorovatelné veličiny, jíž je spin ve směru osy z. Jednotkový vektor $\sqrt{\frac{1}{2}}\binom{1}{1}$ je vlastním vektorem jiného operátoru – pozorovatelné veličiny, jíž je spin ve směru osy x. Spolu s jednotkovým vektorem $\sqrt{\frac{1}{2}}\binom{1}{-1}$, jenž je druhým vlastním vektorem téhož operátoru, tvoří ortonormální bázi generující tentýž prostor R^2, kterou dostaneme z původní báze pouhou rotací o -45°.

Dlužno ještě poznamenat, že existuje ještě reprezentace experimentálních výroků ekvivalentní k reprezentaci pomocí jednodimenzionálních podprostorů Hilbertova prostoru, a to pomocí projektivních operátorů Hilbertova prostoru. Místo jednodimenzionálního podprostoru, např. např. $\binom{1}{0}$, je každému výroku přiřazen tento operátor. Projektivní lineární operátor transformuje libovolný vektor $\binom{\alpha}{\beta}$, který reprezentuje stav kvantového systému vzhledem k nějaké měřitelné veličině (která je, jak víme, reprezentována také jako speciální lineární operátor, tzv. hermitovský) do podprostoru, který je k-násobkem bázového vektoru, např. $\binom{1}{0}$, tedy v našem případě se jedná o projekci do přímky, osy z. Jakou podobu má tento operátor? Víme, že obecně platí[24]

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v},$$

kde $\mathbf{x}$ je libovolný vektor, jehož projekci na přímku L hledáme, $\mathbf{v}$ je vektor, který generuje přímku L. Tento vztah lze odvodit následovně. Jedná se o ortogonální projekci na přímku, takže platí

[24] Předpokládáme, že máme ve vektorovém prostoru zaveden skalární součin.

$(\mathbf{x} - \mathrm{Proj_L}(\mathbf{x})).\mathbf{v} = 0,$

kde $\mathbf{x}$ – $\mathrm{Proj_L}(\mathbf{x})$ představuje kolmici z přímky L do koncového bodu vektoru $\mathbf{x}$ a $\mathbf{v}$ je vektor, který generuje přímku L. Jelikož $\mathrm{Proj_L}(\mathbf{x})$ je nějaký k-násobek vektoru $\mathbf{v}$, tj. $\mathrm{Proj_L}(\mathbf{x})$ = k$\mathbf{v}$, pak můžeme psát

$(\mathbf{x} - \mathrm{k}\mathbf{v})).\mathbf{v} = 0$, tj. $\frac{\mathbf{x.v}}{\mathbf{v.v}} = \mathrm{k}$, a tedy $\mathrm{Proj_L}\,(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x.v}}{\mathbf{v.v}}\,\mathbf{v}$

Pokud je $\mathbf{v}$ jednotkový vektor, pak se vztah zjednoduší na $\mathrm{Proj_L}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}.\mathbf{v})\,\mathbf{v}$. Pokud o projekci uvažujeme jako o lineárním operátoru, pak $\mathrm{Proj_L}(\mathbf{x}) = \mathrm{A}\,\mathbf{x}$. Příslušná matice A bude mít následující podobu. Nechť $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{v_1} \\ \mathrm{v_2} \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{v}_1^2 & \mathrm{v_2 v_1} \\ \mathrm{v_1 v_2} & \mathrm{v}_2^2 \end{pmatrix}$$

Proto matice odpovídající projektoru na podprostor generovaný vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ má tento tvar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mějme například vektor $\mathbf{x} = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, pak $\mathrm{Proj_L}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Z tvaru matice je zřejmé, že ve vektoru $\mathrm{Proj_L}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Proj}\ \mathrm{x_1} \\ \mathrm{Proj}\ \mathrm{x_2} \end{pmatrix}$, bude složka Proj $\mathrm{x_2}$ vždy rovna 0, takže libovolný vektor bude některým k-násobkem vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Již výše bylo řečeno, že všechny k-násobky daného vektoru jsou z fyzikálního hlediska ekvivalentní. To znamená, že jim odpovídá jen jeden měřitelný fyzikální stav systému.

5. Závěr

Zkoumali jsme jednoduchý kvantový systém tvořený izolovanou mikročásticí, elektronem, a její kvantovou vlastností, jíž je spin měřený ve směru osy z a osy x. Výroky o těchto měřeních představují experimentální propozice, které lze negovat a výrokově-logicky spojovat. Negace a disjunkce však nemají tentýž význam jako v klasické výrokové logice. Zatímco logika těchto experimentálních výroků představuje nedistributivní svaz (splňující určité další vlastnosti), logika klasických protějšků (experimentálních výroků za předpokladu, že by se zkoumaný systém choval klasicky) je Boolova algebra, tedy svaz distributivní. Selhání jedné části distributivního zákona (distributivity konjunkce vzhledem k disjunkci) se na úrovni matematické reprezentace fyzikální reality (měřitelných veličin, resp. pozorovatelných) projevuje jako nekomutativita operátorů, které odpovídají těmto pozorovatelným veličinám. Na úrovni sémantické reprezentace kvantové logiky (klasické von Neumannovy koncepce) pomocí podprostorů Hilbertova vektorového prostoru (vektory Hilbertova prostoru matematicky reprezentují stavy fyzikálního systému) je selhání distributivního zákona zřejmé. Plyne ze skutečnosti, že disjunkci neodpovídá sjednocení podprostorů, které samo není podprostorem, nýbrž lineární obal spojovaných podprostorů (resp. jejich charakteristických vektorů). Tím jsme dosáhli cíle, který jsme si v práci stanovili: popsat odlišnost kvantové logiky od logiky klasické (na výrokově-logické úrovni) a částečně porozumět důvodům pro tento rozdíl.

6. Bibliografie

AERTS, Diederik, D'HONDT, Ellie, GABORA, Liane. Why the Disjunction in Quantum Logic is Not Classical. *Foundations of Physics*. 2000, **30**(9), 1473-1480. ISSN 0015-9018.

BACCIAGALUPPI, Guido, 2007. Is Logic Empirical? [online] [cit. 20.5.2013]. Dostupné na http://philpapers.org/rec/BACILE

BIRKHOFF, Garrett, 1967. *Lattice Theory*. 3. vyd. New York: American Mathematical Society Colloquium Publications. ISBN 0821810251.

BIRKHOFF, Garrett, VON NEUMANN, John, 1936. The Logic of Quantum Mechanics. *Annals of Mathematics. Second Series*. **37**(4), 823-843. ISSN 0003-486X.

COHEN, David W., 1989. *An Introduction to Hilbert Space and Quantum Logic*. New York: Springer. ISBN 0-387-96870-9.

DALLA CHIARA, Maria-Luisa, GIUNTINI, Roberto, 2002. Quantum Logics. In: D. M. GABBAY, F. GUENTHNER, eds. *Handbook of Philosophical Logic, 2nd Edition*. 6. díl. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, s. 129-228. ISBN 1-4020-0583-0.

FOULIS, D. J., 1995. A Half Century of Quantum Logic. What Have We Learned? [online] [cit. 20.4.2013]. Dostupné z: http://www.quantonics.com/Foulis_On_Quantum_Logic.html

GIBBINS, Peter, 2007 (1. vyd. 1987). *Particles and Paradoxes. The Limits of Quantum Logic*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-33498-3.

GILLESPIE, Daniel T., 1973. *A Quantum Mechanics Primer*. London: International Textbook Company Ltd. ISBN 0 7002 2290 1.

HAACK, Susan, 1996. *Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism*. Chicago: University of Chicago Press. ISBN 0226311341.

HALMOS, Paul R., 1982. *A Hilbert Space Problem Book*. 2. vyd. New York: Springer. ISBN 0-387-90685-1.

HARDEGREE, Gary M., 1979. The Conditional in Abstract and Concrete Quantum Logic. In: C. A. HOOKER, ed. *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*. sv. 2. Dordrecht: D. Reidel, s. 49-108. ISBN 90-277-0707-3.

JENANN, Ismael, 2009. Quantum Mechanics. In: E. Zalta, ed. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [online] [cit. 15.4.2013]. Dostupné z: http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/qm/

MAC LANE, Saunders, BIRKHOFF, Garrett, 1974. *Algebra*. 2. vyd. Bratislava: Vydavatelstvo technickej a ekonomickej literatúry. ISBN 63-551-74.

PUTNAM, Hilary, 1968. Is logic empirical? In: R. COHEN, M. WARTOFSKY, eds. *Boston Studies in the Philosophy of Science*, 5, Dordrecht: D. Reidel, s. 216-241. ISSN: 0068-0346. Rovněž dostupné na http://www.socsci.uci.edu/~dmalamen/courses/prob-determ/Putnam.pdf

SHANKAR, Ramamurti, 1994. *Principles of Quantum Mechanics*. 2. vyd. New York: Plenum Press. ISBN 0-306-44790-8.

SVOZIL, Karl, 1998. *Quantum Logic*. New York: Springer. ISBN 981-4021-07-5.

Abstract

The thesis focuses on the main differences between quantum logic and classical logic. The aim is to describe and at least partially understand these differences. The issue is narrowed down to propositional logic and the physical system under scrutiny is that of one isolated elemental particle and its spin. The mathematical approach to the problem enables one to compare the two logics as special mathematical structures, lattices. While quantum logic is isomorphic to a non-distributive lattice, its classical counterpart corresponds in the same way to Boolean algebra which is a distributive lattice. The failure of distribution is accounted for by a different logical behavior of both negation and disjunction in quantum logic. This clearly stands out through the fact that in von Neumann's concept of quantum logic disjunction does not correspond to the union of subspaces, but to their linear span.

Keywords: quantum logic; non-distributive lattice; deviant logic; Hilbert space

Abstrakt

Práce se zaměřuje na hlavní rozdíly mezi kvantovou a klasickou logikou. Cílem je tyto rozdíly popsat a alespoň částečně jim porozumět. Problém se omezuje na výrokovou logiku a zkoumaný fyzikální systém představuje jen jedna izolovaná částice a její spin. Matematický přístup umožňuje srovnat obě logiky, uvažujeme-li je jako zvláštní typ matematické struktury, svaz. Zatímco kvantová logika je izomorfní s nedistributivním svazem, její klasický protějšek takto odpovídá Boolově algebře, která je svazem distributivním. Selhání distributivnosti lze připsat logickému chování negace a disjunkce, které je v kvantové logice odlišné. To se zřetelně ukazuje ve skutečnosti, že ve von Neumannově koncepci kvantové logiky neodpovídá disjunkce sjednocení podprostorů, nýbrž jejich lineárnímu obalu.

Klíčové výrazy: kvantová logika; nedistributivní svaz; neklasická logika; Hilbertův prostor