Univerzita Palackého v Olomouci

Přírodovědecká fakulta

Katedra algebry a geometrie

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Řezy těles – pracovní listy, modely v rozšířené realitě

Autor:	Tomáš Odstrčil
Studijní program:	B0114A170003 – Matematika pro vzdělávání
Studijní obor:	1101R016 – Matematika pro vzdělávání maior
	1701R003 – Fyzika pro vzdělávání minor
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Rok odevzdání práce:	2023

Bibliografická identifikace:

Jméno a příjmení autora	Tomáš Odstrčil
Název práce	Řezy těles – pracovní listy, modely v rozšířené realitě
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	RNDr. Lenka Juklová Ph.D.
Rok obhajoby práce	2023
Abstrakt	Cílem práce bude vytvořit pracovní listy s řešenými úlohami o řezech hranatých těles pro využití ve výuce. Součástí práce bude rovněž tištěné zadání jako předloha pro učitele, řešení v GeoGebře a převedení modelu do rozšířené reality.
Klíčová slova	Řez, těleso, stereometrie, GeoGebra, rozšířená realita, pracovní list.
Počet stran	68
Počet příloh	0
Jazyk	Český

Bibliographical identification:

Autor’s first name and surname	Tomáš Odstrčil
Title	Sections of solids – worksheets, augmented reality models
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	RNDr. Lenka Juklová Ph.D.
The year of presentation	2023
Abstract	The goal of the work will be to create worksheets with solved problems on cutting of polyhedra for use in teaching. The work will also include a printed assignment as a template for teachers, solutions in GeoGebra, and conversion of the model into augmented reality.
Keywords	Cross sections, solid figure, stereometry, Geogebra, augmented reality, worksheet.
Number of pages	68
Number of appendices	0
Language	Czech

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Lenky Juklové, Ph.D., a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne: 3. 4. 2023 ...……………………………......

Obsah

Úvod

Ve své bakalářské práci se věnuji části stereometrie zabývající se řezy těles. Jako studenta matematiky se zaměřením na vzdělávání, tedy pro budoucího učitele, mě velmi zaujala možnost psát bakalářskou práci, která by pomohla učitelům a studentům při výuce stereometrie. Téma jsem si vybral z toho důvodu, že během studia na gymnáziu patřila stereometrie mezi mé nejoblíbenější části středoškolské matematiky a chtěl jsem vytvořit pro studenty a učitele studijní materiály, které by byly přehledné a daly by studentům možnost probírané látce porozumět.

Výuku stereometrie považuji za velmi důležitou, protože rozvíjí nejen prostorovou představivost, ale i logické myšlení. Stereometrie pomůže studentům nejenom během případného studia na vysoké škole, ale především v běžném životě a technické praxi.

V bakalářské práci se věnuji řezům hranatých těles, tedy hranolům a jehlanům. K tomuto účelu v bakalářské práci využívám program GeoGebra, ve kterém jsou tvořeny jak zadání pracovních úloh, tak i 3D modelace těles a řezů. Aplikaci GeoGebra jsem zvolil, protože je dostupná zdarma ke stažení, její ovládání je intuitivní a snadno pochopitelné. Studenti a učitelé si také mohou stáhnout aplikaci GeoGebra 3D, pomocí které jdou převést 3D modelace do rozšířené reality. V tom vidím největší přínos pro studenty. Možnost se na těleso podívat z různých stran a úhlů takovým způsobem, jako by se těleso nacházelo uprostřed místnosti.

Součástí bakalářské práce je teoretická část a praktická část. V teoretické části uvádím základní vztahy a polohové vlastnosti, popisuju základní vlastnosti geometrických útvarů, a v části praktické se věnuji konkrétním konstrukčním úlohám.

1. Základy stereometrie

V první kapitole bakalářské práce se věnuji prostorové geometrii neboli stereometrii, která představuje teoretický základ zobrazovacích metod v deskriptivní geometrii. První části bakalářské práce je rozdělena na 5 částí: polohové vlastnosti, tělesa, rovnoběžné promítání, pravoúhlé rovnoběžné promítání a řešení polohových konstrukčních úloh. V první kapitole uvádím věty společně s definicemi, které slouží ke správné interpretaci zadání a řešení konstrukčních úloh. Tyto věty a definice nám popisují vztahy mezi geometrickými útvary. Věty jsou uvedeny bez důkazů a jsou převzaty z [1], [2] a [3].

1.1 Polohové vlastnosti

K popisu polohových vlastností v tomto textu byly použity věty uvedené v [1]. Jednotlivé věty využívají geometrické pojmy jako je bod, přímka, rovina a základních vztahů mezi nimi. Budeme-li uvažovat různé dvojice jako například bod a přímka, bod a rovina nebo přímka a rovina, tak může nastat, že bod leží na přímce nebo rovině, přímka prochází bodem, nebo také rovina prochází přímkou. Pro vyjádření takových vztahů používáme termín incidentní. Pokud tedy bod leží na přímce, tak říkáme, že bod je incidentní s přímkou. Pokud bod neleží na přímce, tak říkáme, že bod není incidentní s přímkou. Pro symbolický zápis použijeme po řadě symboly $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$. Tyto symboly se používají ve tvaru $A \in p$ značící, že bod A náleží přímce p nebo také bod A je incidentní s přímkou p. Zápis $p \subset \rho$ značí, že přímka p náleží rovině ρ, tedy přímka p je incidentní s rovinou ρ.

Věta 1.1.1

Dvěma různými body A, B je určena právě jedna přímka p. V takovém případě říkáme, že přímka p prochází body A, B a píšeme $p \leftrightarrow AB$.

Věta 1.1.2

Přímkou p a bodem A, který na ní neleží, je určena právě jedna rovina ρ. Takto vzniklou rovinu zapisujeme jako $\rho \leftrightarrow Ap$.

Věta 1.1.3

Třemi body A, B, C, které neleží na téže přímce, je určena právě jedna rovina. Takto vzniklou rovinu zapíšeme jako $\rho \leftrightarrow ABC$.

Věta 1.1.4

Pokud leží dva různé body přímky p v rovině ρ, pak každý bod přímky p leží v rovině ρ. V takovém případě říkáme, že přímka p leží v rovině. Zapisujeme jako $p \subset \rho$ nebo řekneme, že rovina ρ prochází přímkou p.

Věta 1.1.5

Dvě roviny ρ, σ jsou buď různé, nebo splývající. Pokud jsou různé, pak nemají žádný společný bod nebo mají společnou právě jednu přímku.

Věta 1.1.6

Mají-li dvě různé roviny ρ, σ společný bod, pak mají společnou přímku, která tímto bodem prochází. Dvě různé roviny, které mají společnou přímku, nazýváme různoběžné a onu přímku nazýváme průsečnicí. Dvě roviny, které nemají žádný společný bod, nazýváme rovnoběžné. Symbolicky zapíšeme rovnoběžnost dvou rovin $\rho \parallel \sigma$.

Věta 1.1.7

Přímka a rovina mají buď společný právě jeden bod, nebo nemají žádný společný bod nebo mají všechny body společné.

Věta 1.1.8

Dvě přímky buď splývají, nebo jsou různé. Jsou-li různé, pak mají společný právě jeden bod nebo nemají společný žádný bod a leží v téže rovině, nebo nemají žádný společný bod a neleží v žádné rovině. Dvě různé přímky, které mají společný právě jeden bod, nazýváme různoběžky a jejich společný bod označíme jako průsečík přímek. Dvě přímky, které splývají nebo nemají žádný společný bod a leží v téže rovině, nazýváme rovnoběžky.

Věta 1.1.9

Bodem A lze vést právě jednu přímku q rovnoběžnou s přímkou p.

Věta 1.1.10

Dvěma různoběžkami a, b je určena právě jedna rovina $\rho \leftrightarrow ab$.

Věta 1.1.11

Dvěma různými rovnoběžkami a, b je určena právě jedna rovina $\rho \leftrightarrow ab$.

Věta 1.1.12

Je-li přímka a rovnoběžná s přímkou b a přímka b je rovnoběžná s přímkou c pak je přímka a rovnoběžná s přímkou c. To označujeme jako tranzitivnost rovnoběžnosti.

Věta 1.1.13

Je-li přímka p rovnoběžná s některou přímkou q roviny ρ, pak je rovnoběžná s rovinou ρ. Tuto větu označujeme jako kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny.

Věta 1.1.14

Je-li přímka a rovnoběžná s přímkou b a přímka b je rovnoběžná s rovinou ρ, pak je přímka a rovnoběžná s rovinou ρ.

Věta 1.1.15

Je-li přímka a rovnoběžná s rovinou ρ a rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ, je přímka a rovnoběžná s rovinou σ.

Věta 1.1.16

Je-li přímka a rovnoběžná s rovinou ρ i s rovinou σ a jsou-li ρ a σ různoběžné, pak je přímka a rovnoběžná s jejich průsečnicí.

Věta 1.1.17

Obsahuje-li rovina ρ dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou σ, pak je rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ. Tuto větu označujeme jako kritérium rovnoběžnosti dvou rovin.

Věta 1.1.18

Všechny přímky, které prochází bodem A a jsou rovnoběžné s rovinou ρ, leží v rovině σ rovnoběžné s rovinou ρ. Daným bodem lze k dané rovině vést jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.

Věta 1.1.19

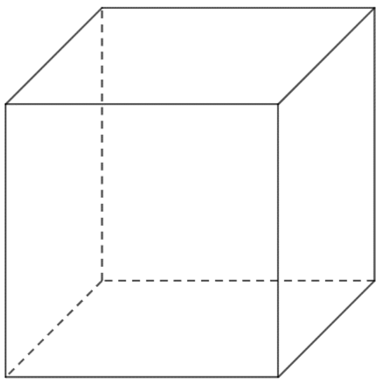
Je-li rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ a rovina σ je rovnoběžná s rovinou τ, pak je ρ rovnoběžná s τ. Věta nám vyjadřuje tranzitivnost rovnoběžnosti rovin.

Věta 1.1.20

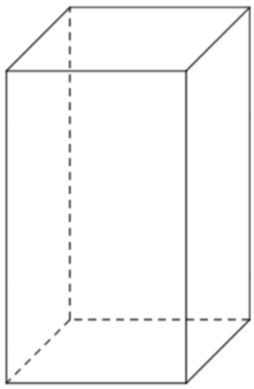
Je-li rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ a je-li rovina τ různoběžná s rovinou ρ, pak je různoběžná i s rovinou σ. Průsečnice $\rho \cap \tau$ a $\sigma \cap \tau$ jsou rovnoběžné.

1.2 Tělesa

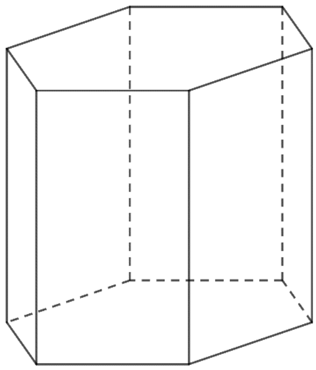
Při práci s řezy využívám modelaci prostorových situací, které nazýváme tělesa. Mezi nejdůležitější a nejčastěji se vyskytující tělesa řadíme krychle, hranoly a jehlany. Tato tělesa obecně nazýváme hranatými tělesy.



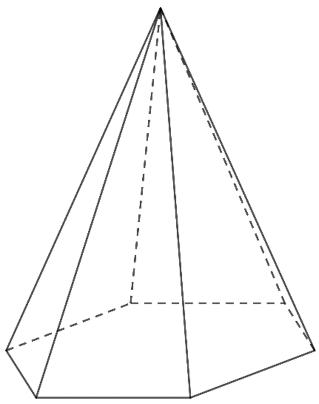
Obrázek 1: Krychle



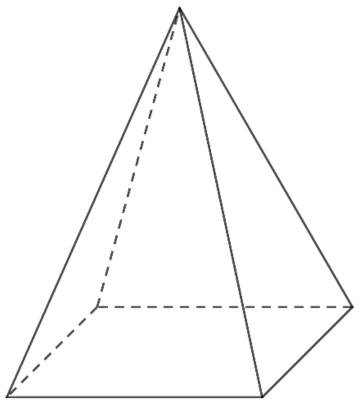
Obrázek 2: Pravidelný čtyřboký hranol



Obrázek 3: Pravidelný šestiboký hranol



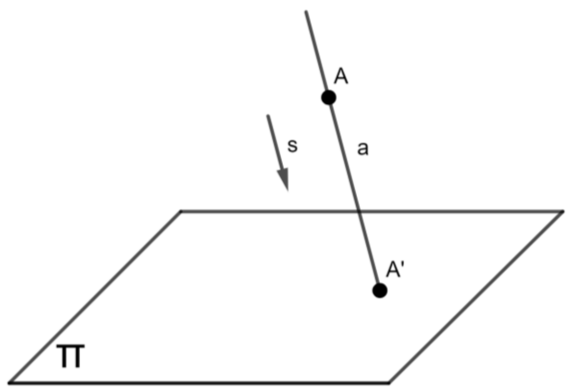
Obrázek 4:Pravidelný šestiboký jehlan



Obrázek 5: Pravidelný čtyřboký jehlan

1.3 Rovnoběžné promítání

Nejčastější a zároveň nejjednodušší zobrazení prostoru na rovinu je v deskriptivní geometrii rovnoběžné promítání. Rovnoběžné promítání je určeno rovinou a směrem, jehož přímky nejsou rovnoběžné s rovinou. Rovinu si označíme jako π, tuto rovinu nazýváme průmětnou a směr nazýváme směrem promítání a značíme jej s_u. Obrazem libovolného bodu A prostoru je průsečík A' přímky a, jdoucím bodem A a patřící směru s_u, s průmětnou π. Přímka a náležící směru promítání se nazývá promítací přímka bodu A, bod A' je rovnoběžný průmět bodu A.



Obrázek 6: Volné rovnoběžné promítání

Definice 1.3.1

Rovnoběžný průmět libovolného geometrického útvaru U definujeme pomocí průmětu bodu. Rovnoběžný průmět U' útvaru U na rovinu π je množina rovnoběžných průmětů všech bodů útvaru U.

Věta 1.3.1

Rovnoběžný průmět bodu je bod.

Věta 1.3.2

Rovnoběžným průmětem přímky je přímka nebo bod.

Definice 1.3.2

Přímka se nazývá promítací přímka, pokud patří směru promítání. Jejím průmětem je bod. Rovina rovnoběžná s přímkami směru promítání se nazývá promítací rovina. Jejím průmětem je přímka.

Věta 1.3.3

Průmětem roviny je celá průmětna nebo přímka.

Věta 1.3.3

Incidence bodů, přímek a rovin se rovnoběžným promítáním zachovává.

Věta 1.3.4

Rovnoběžný průmět rovnoběžných přímek, které nejsou promítací, jsou rovnoběžné přímky. Tím charakterizujeme vlastnost, že rovnoběžné promítání zachovává rovnoběžnost přímek. Za předpokladu, že žádný z následujících útvarů není promítací nebo není částí promítací přímky, resp. promítací roviny, můžeme říct, že rovnoběžným průmětem úsečky je úsečka, rovnoběžným průmětem poloroviny je polorovina, rovnoběžným průmětem rovnoběžníku je rovnoběžník atd. Rovnoběžný průmět různoběžných přímek, z nichž žádná není promítací, jsou různoběžky, nebo splývající přímky.

Věta 1.3.5

Rovnoběžným průmětem navzájem shodných a rovnoběžných úseček, které neleží na promítacích přímkách, jsou opět shodné a rovnoběžné úsečky.

Věta 1.3.6

Poměr velikostí rovnoběžných úseček, které neleží na promítacích přímkách, se rovnoběžným promítáním nemění.

Věta 1.3.7

Rovnoběžný průmět útvaru, který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, je útvar s ním shodný.

1.4 Pravoúhlé rovnoběžné promítání

Jsou-li přímky směru s_u kolmé k průmětně π, pak příslušné rovnoběžné promítání nazýváme pravoúhlé. Kromě již uvedených vět pro pravoúhlé rovnoběžné promítání platí ještě následující věty.

1.4.1 Doplňkové věty pro pravoúhlé rovnoběžné promítání

Věta 1.4.1.1 Věta o velikosti pravoúhlého průmětu úsečky

Je-li d velikost úsečky AB a α její odchylka od průmětny, pak $d' = d \cdot \cos\alpha$ je velikost pravoúhlého průmětu úsečky AB. Pokud $d' = d$, pak úsečka AB je rovnoběžná s průmětnou a pokud $d' = 0$, pak je přímka AB kolmá k průmětně.

Věta 1.4.1.2 Věta o pravoúhlém průmětu kolmých přímek

Dvě kolmé přímky, z nichž žádná není promítací, se v pravoúhlém promítání promítají opět jako kolmé přímky právě tehdy, když aspoň jedna je rovnoběžná s průmětnou.

Věta 1.4.1.3 Věta o pravoúhlém průmětu pravého úhlu

Pravoúhlým průmětem pravého úhlu, jehož žádné rameno není kolmé k průmětně a jehož aspoň jedno rameno je s průmětnou rovnoběžné, je opět pravý úhel. Obráceně platí, je-li pravoúhlým průmětem úhlu α pravý úhel a je-li aspoň jedno rameno úhlu α rovnoběžné s průmětnou, pak úhel α je pravý.

1.4.2 Zobrazení

Vezmeme model krychle $ABCDEFGH$ a umístíme ho tak, aby stěna $DCGH$ ležela v průmětně. Vrcholem A vedeme přímku tak, aby protínala průmětnu v bodě A', který neleží ani na přímce CD, ani na přímce DH. Promítneme pak všechny ostatní vrcholy krychle směrem určeným přímkou AA'. V průmětně dostaneme některý z obrázků, které představují rovnoběžný průmět krychle.

K názornému zobrazování hranatých těles i k řešení stereometrických úloh užíváme volné rovnoběžné promítání. Pro získání prostorové představy je třeba dodržovat následující pravidla:

Pravidla volného rovnoběžného promítání

1. Útvary ležící v rovinách rovnoběžných s průmětnou se zobrazují ve skutečném tvaru a skutečné velikosti.

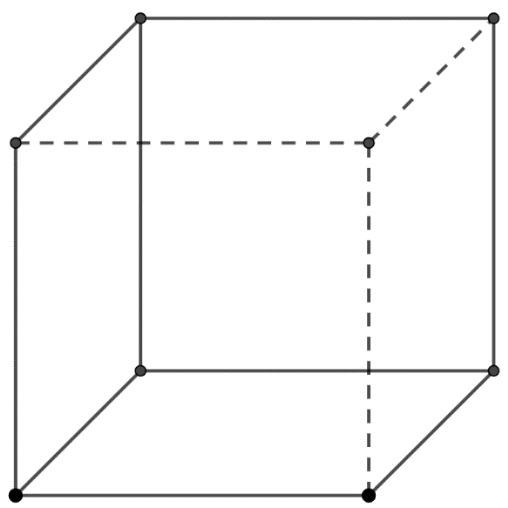
2. Obrazy přímek kolmých k průmětně svírají s obrazy přímek s průmětnou rovnoběžných úhel velikosti 45°.

3. Délky úseček na přímkách kolmých k průmětně se zkracují na polovinu.

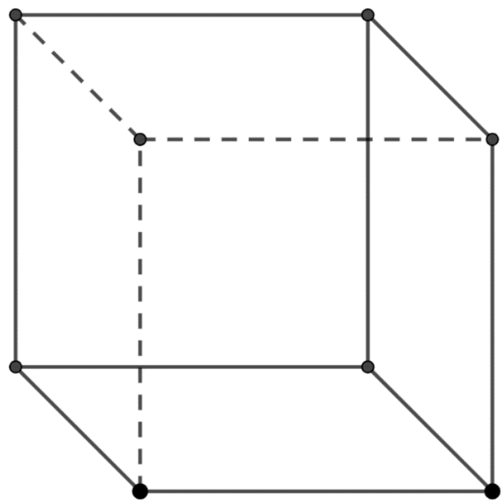
. Z tohoto postupu je patrné, že shodné a navzájem rovnoběžné úsečky se promítají do úseček, které jsou také shodné a navzájem rovnoběžné. Útvar, který leží v průmětně nebo v rovině s průmětnou rovnoběžné (tzv. průčelné rovině), se promítá do útvaru, který je s ním shodný.

Zobrazujeme-li krychli, je výsledkem jeden z obrázků 7-10.

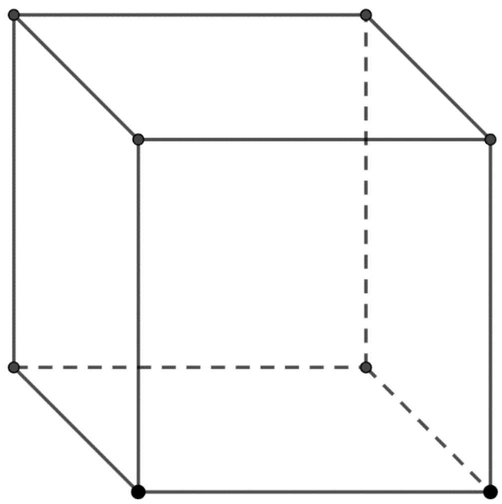
Obrázky 7 a 8 odpovídají pohledu na krychli zdola nahoru, krychle je zobrazena v podhledu. Obrázek 7 zobrazuje levý podhled a obrázek 8 zobrazuje pravý podhled. Obrázky 9 a 10 představují nadhled na krychli shora dolů. Krychle je zobrazena v nadhledu. Obrázek 9 zobrazuje levý nadhled a obrázek 10 představuje pravý nadhled.



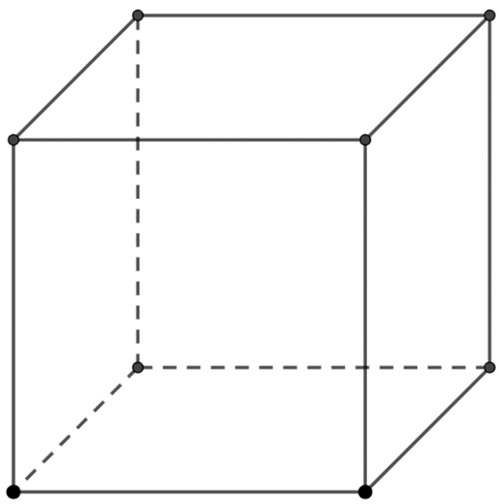
Obrázek 7: Krychle v podhledu zleva.



Obrázek 8: Krychle v podhledu zprava.



Obrázek 9: Krychle v nadhledu zleva.



Obrázek 10: Krychle v nadhledu zprava.

Pravidla při zobrazování jednotlivých prostorových geometrických útvarů jsme si již uvedli, ale pro zjednodušení si je můžeme shrnout do 8 bodů. Převzato z [3].

1. Body zobrazujeme jako body.
2. Přímky zobrazujeme jako přímky nebo jako body.
3. Zachováváme incidenci bodů a přímek.
4. Rovnoběžné přímky zobrazujeme jako rovnoběžky nebo jako body.
5. Zachováváme poměr velikostí rovnoběžných úseček.
6. Obrazce ležící v rovinách rovnoběžných s průmětnou zobrazujeme ve skutečné velikosti.
7. Obrazy přímek kolmých k průmětně, které nazýváme hloubkové, kreslíme tak, aby svíraly s vodorovnou přímkou zvolený úhel, který označíme jako úhel zkosení. Nejčastěji volíme úhel o velikosti 45°.
8. Obrazy úseček na hloubkových přímkách zkracujeme na polovinu jejich skutečné velikosti.

1.5 Řešení polohových konstrukčních úloh

1.5.1 Průsečík přímky a roviny

Je-li přímka p různoběžná s rovinou ρ, pak její průsečík s rovinou získáme tak, že nejprve přímkou p proložíme vhodnou rovinu σ, která je s rovinou ρ různoběžná, poté určíme průsečnici r rovin ρ a σ. Průsečík P přímek p a r je námi hledaný průsečík přímky p a roviny ρ.

1.5.2 Řez tělesa rovinou

Řez tělesa rovinou je průnikem tělesa a roviny. Jedná se o rovinný útvar, jehož hranice je průnik hranice tělesa a roviny řezu. Hranice řezu se skládá z průniku roviny řezu se stěnami. Sestrojit řez znamená sestrojit průsečnici dané roviny s rovinou jednotlivých stěn. Pro konstrukci jednotlivých řezů budeme využívat zejména tři věty, které si uvedeme a které přímo vycházejí z vět již zmíněných. Ke každé větě doplníme její důsledek, který pro nás představuje praktické využití při konstrukci řezů. Pro lepší práci s větami používáme v řešených příkladech označení vět v závorkách.

Věta 1.5.2.1 (Věta 1)

Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka, kterou tyto dva body určují, leží také v této rovině.

Důsledek věty 1.5.2.1 (Důsledek věty 1)

Leží-li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.

Věta 1.5.2.2 (Věta 2)

Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.

Důsledek věty 1.5.2.2 (Důsledek věty 2)

Jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné a zároveň jsou různoběžné s rovinou řezu, pak jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.

Věta 1.5.2.3 (Věta 3)

Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, pak procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice.

Důsledek věty 1.5.2.3 (Důsledek věty 3)

Průsečnice rovin dvou sousedních stěn s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě. Dvěma sousedními stěnami se myslí stěny se společnou hranou.

2. Řešené konstrukční úlohy

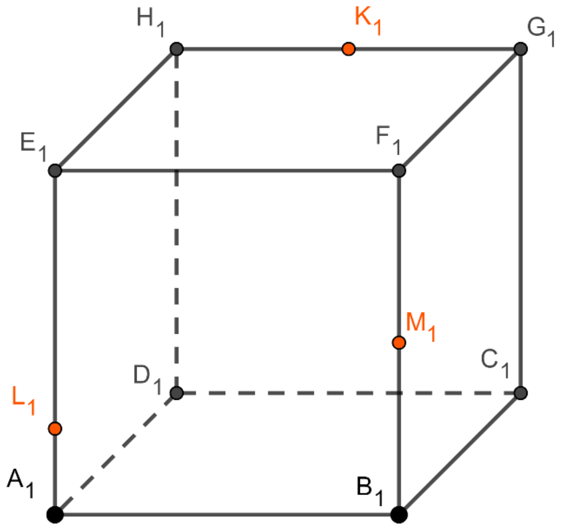
V této druhé části bakalářské práce se zaměřím na řešení konkrétních polohových konstrukčních úloh ve volném rovnoběžném promítání. Pracovní list je složen ze zadání úlohy a jejího řešení. V jednotlivých krocích je popsaný postup řešení společně s odkazy na věty z první části. Poté jsou k příkladu přiloženy odkazy na konstrukci řezu v programu GeoGebra. V tomto programu si může student postupně po jednotlivých krocích označovat zaškrtáváním sestrojení řezu. K příkladu je ještě navíc přidán odkaz na 3D model řezu v aplikaci GeoGebra 3D. V tomto programu může student převést 3D model do rozšířené reality.

2.1 Pracovní úlohy

V postupu řešení pracovních úloh píšeme postup bez dolního indexu bodu. Index geometrických objektů slouží pouze k rozlišení, zda se jedná o objekt v nárysně nebo v 3D grafickém náhledu.

1. příklad

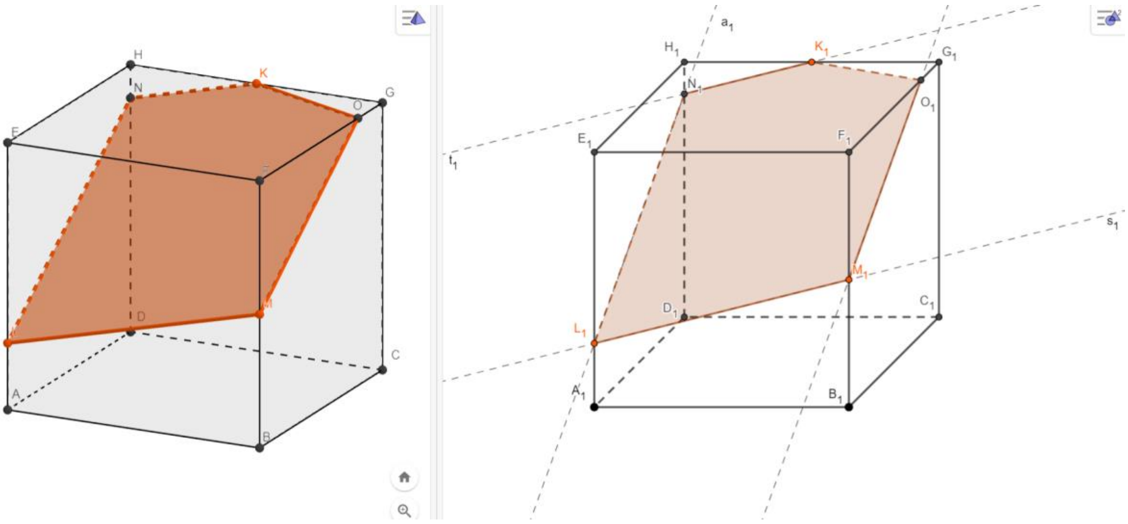
Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany HG, M je středem hrany BF a L leží na hraně AE tak, že $3|AL| = |LE|$.



Obrázek 11: Krychle $ABCDEFGH$ s vyznačenými body KLM dle zadání.

Řešení úlohy:

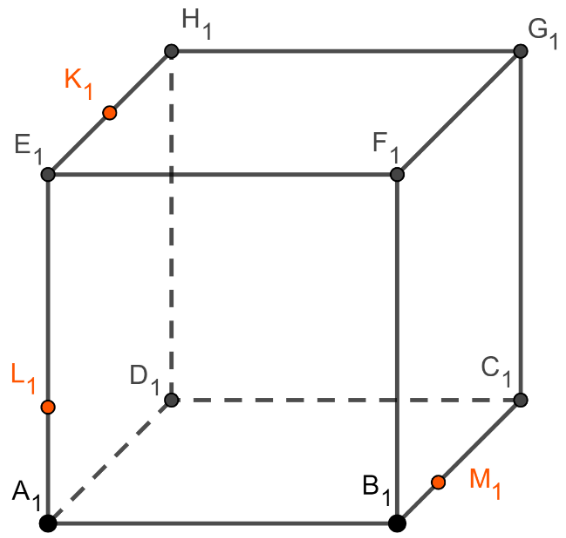
1. Body LM leží v rovině ABE, proto můžeme vyžít věty 1. Body spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
2. Roviny ABC a EFG jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem K vedeme rovnoběžku s přímkou LM. Průsečík rovnoběžky s hranou DH je bod N.
3. Body LN leží ve stejné rovině ADE, můžeme využít věty 1. Body spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
4. Roviny ADE a BCF jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem M vedeme rovnoběžku s přímkou LN. Průsečík rovnoběžky s hranou CG je bod O.
5. Body MO leží ve stejné rovině BCF, můžeme využít věty 1. Body spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
6. Řezem krychle je pětiúhelník $LMOKN$.



Obrázek 12: Řez krychlí $ABCDEFGH$ rovinou KLM. Odkaz na řešený příklad:
https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/snxjh8es.
Kód pro rozšířenou realitu: ***u8atdv9k.***

2. příklad

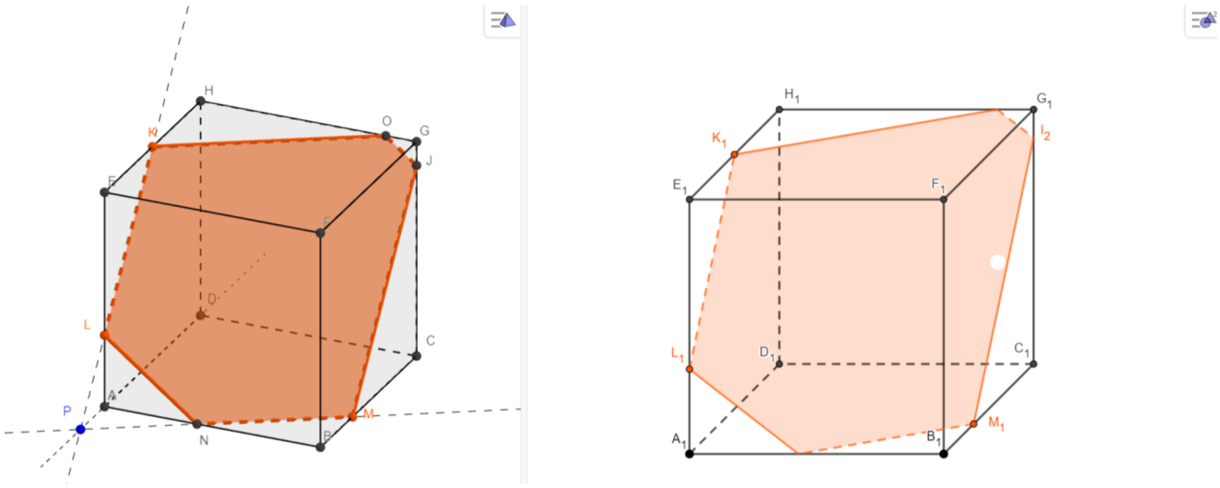
Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany EH, M leží na hraně BC tak, že $2|BM| = |MC|$ a L leží na hraně AE tak, že $2|AL| = |LE|$.



Obrázek 13: Krychle $ABCDEFGH$ s vyznačenými body KLM dle zadání.

Řešení úlohy:

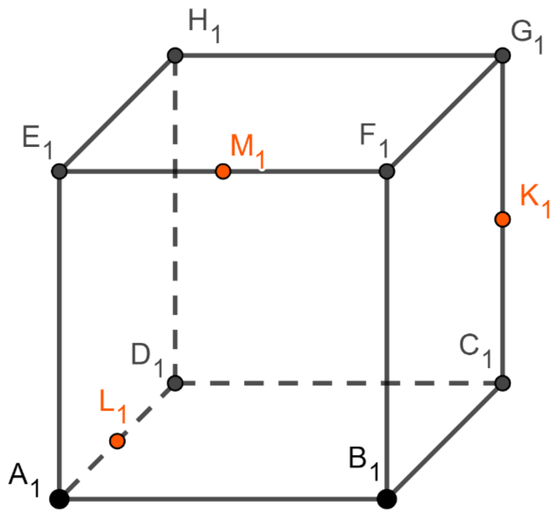
1. Body LK leží v rovině $ADEH$, proto můžeme vyžít věty 1. Body spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
2. Roviny $ADEH$ a $BCFG$ jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem M vedeme rovnoběžku s přímkou LK. Průsečík rovnoběžky s hranou CG je bod J.
3. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ADE, ABC a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod P získáme jako průsečík přímek KL a AD.
4. Body PB vedeme přímku. Průsečík přímky PB a hrany BF získáme bod N.
5. Roviny ABE a CDG jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem J vedeme rovnoběžku s přímkou LN. Průsečík rovnoběžky s hranou GH je bod O.
6. Řezem krychle je šestiúhelník $LMOKNJ$.



Obrázek 14: Řez krychlí $ABCDEFGH$ rovinou KLM. Odkaz na řešený příklad:
https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/htgghbvb.
Kód pro rozšířenou realitu: ***qxqjftgg.***

3. příklad

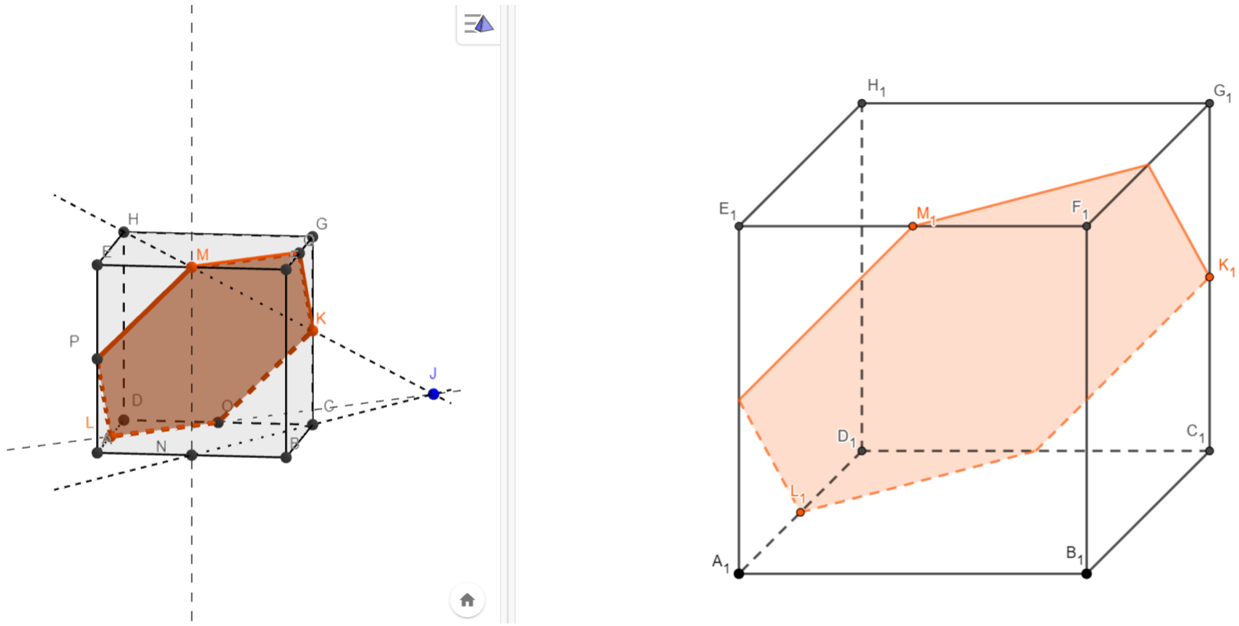
Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany CG, M je středem hrany EF a L je středem hrany AD.



Obrázek 15: Krychle $ABCDEFGH$ s vyznačenými body KLM dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Sestrojíme bod N jako pravoúhlý průmět bodu M do roviny ABC.
2. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, KMN a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod J získáme jako průsečík přímek MK a NC.
3. Body LJ vedeme přímku. Průsečík přímky LJ a hrany CD získáme bod O.
4. Roviny ABE a CDG jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem M vedeme rovnoběžku s přímkou OK. Průsečík rovnoběžky s hranou AE je bod P.
5. Roviny ABC a EFG jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem M vedeme rovnoběžku s přímkou LO. Průsečík rovnoběžky s hranou FG je bod Q.
6. Řezem krychle je šestiúhelník $KLMOPQ$.



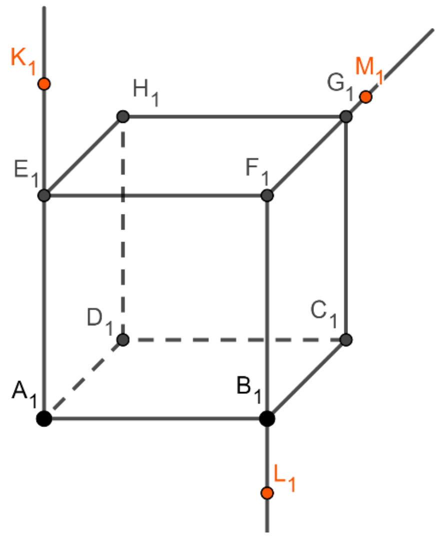
Obrázek 16: Řez krychlí $ABCDEFGH$ rovinou KLM. Odkaz na řešený příklad:

https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/um6fgfme.

Kód pro rozšířenou realitu: ***kwt74bfa.***

4. příklad

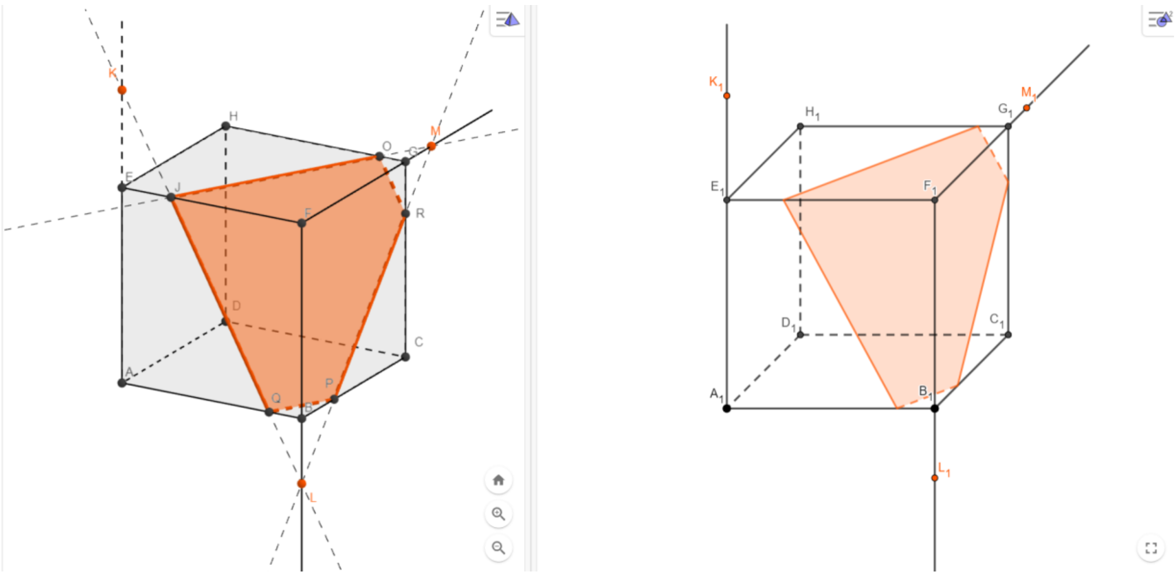
Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K leží na prodloužené hraně AE tak, že $2|EK| = |AE|$, M leží na prodloužené hraně FG tak, že $2|GM| = |FG|$. L leží na prodloužené hraně FB tak, že $2|BL| = |FB|$.



Obrázek 17: Krychle $ABCDEFGH$ s vyznačenými body KLM dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Body KL leží v rovině ABE, proto můžeme vyžít věty 1. Body spojíme úsečkou, která nám protne hrany EF a AB. Průsečík s hranou EF je bod J a průsečík s hranou AB je bod Q.
2. Body ML leží v rovině BCG, proto můžeme vyžít věty 1. Body spojíme úsečkou, která nám protne hrany CG a BC. Průsečík s hranou CG je bod R a průsečík s hranou BC je bod P.
3. Body JO leží v rovině EFG, proto můžeme vyžít věty 1. Body spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
4. Řezem krychle je šestiúhelník $OPRQJ$.



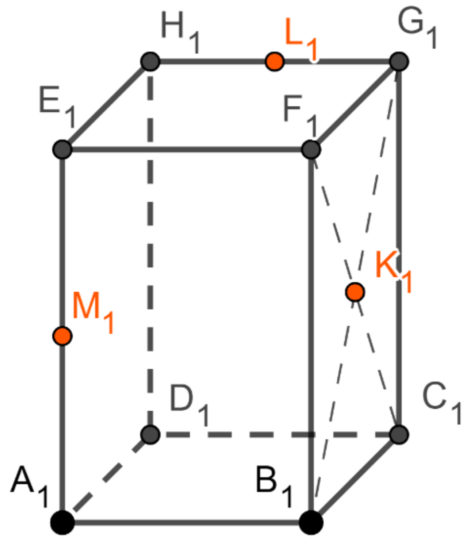
Obrázek 18: Řez krychlí $ABCDEFGH$ rovinou KLM. Odkaz na řešený příklad:

https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/trn8sqa4.

Kód pro rozšířenou realitu: ***krarj5fw.***

5. příklad

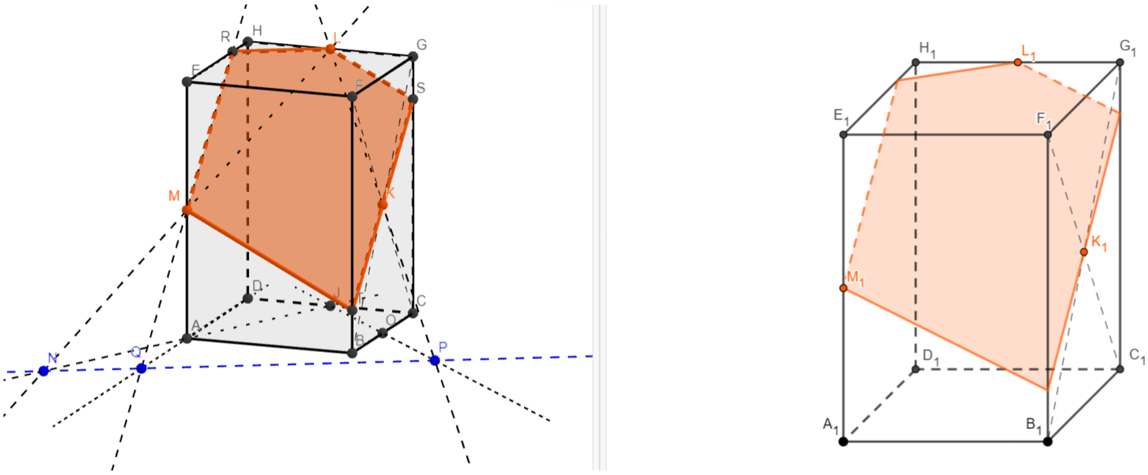
Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým hranolem $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem BG, M je středem hrany AE a L je středem hrany HG.



Obrázek 19: Pravidelný čtyřboký hranol $ABCDEFGH$ s vyznačenými body KLM dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Sestrojíme bod J jako pravoúhlý průmět bodu L do roviny ABC.
2. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, KMJ a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod N získáme jako průsečík přímek ML a AJ.
3. Sestrojíme bod O jako pravoúhlý průmět bodu K do roviny ABC.
4. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, LKO a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod P získáme jako průsečík přímek LK a JO.
5. Body LK vedeme přímku, která nám tvoří průsečnici roviny řezu KLM a roviny podstavy ABC.
6. Bod Q získáme jako průsečík přímek NP a AB.
7. Body QM leží v rovině ADE, proto můžeme vyžít věty 1. Body vedeme přímku, průsečík přímky QM a hrany EH je bod R. Body MR spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
8. Roviny ADE a BCF jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem K vedeme rovnoběžku s přímkou MR. Průsečík rovnoběžky s hranou BF je bod T a průsečík s hranou CG je bod S.
9. Spojíme body TS, SL, LR a MT, které tvoří zbývající strany řezu.
10. Řezem pravidelného čtyřbokého hranolu je pětiúhelník $MTSLR$.



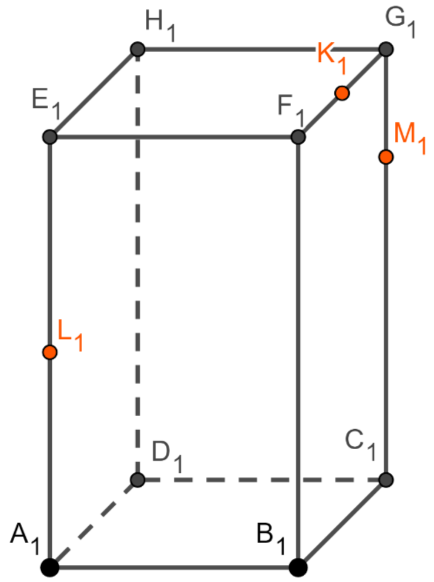
Obrázek 20: Řez pravidelným čtyřbokým hranolem $ABCDEFGH$ rovinou KLM.

Odkaz na řešený příklad: https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/f2kjdqfn.

Kód pro rozšířenou realitu: ***tmmbdx8m.***

6. příklad

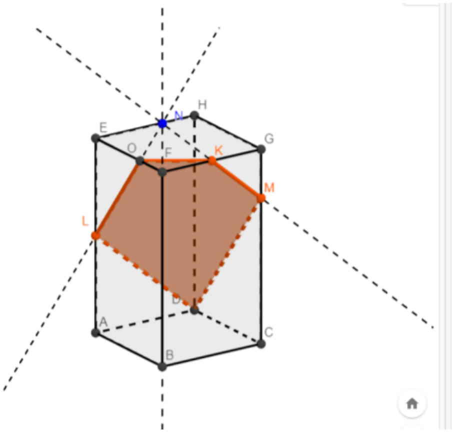
Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým hranolem $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany FG, L je středem hrany AE a M leží na hraně CG tak, že $3|MG| = |CM|$.

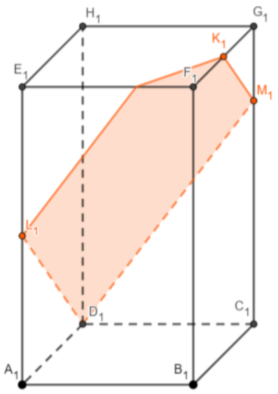


Obrázek 21: Pravidelný čtyřboký hranol $ABCDEFGH$ s vyznačenými body KLM dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Spojením bodů KM úsečkou, získáme část řezu.
2. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny BCG, ABF a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod N získáme jako průsečík přímek MK a BF.
3. Body L, N leží v rovině ABC, proto můžeme vyžít věty 1. Body vedeme přímku, průsečík přímky LN a hrany EF je bod O. Body LO spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
4. Roviny ADE a BCF jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem L vedeme rovnoběžku s přímkou KM. Průsečík rovnoběžky s hranou DH je bod D.
5. Spojíme body OK, LD a DM, které tvoří zbývající strany řezu.
6. Řezem pravidelného čtyřbokého hranolu je pětiúhelník $MTSLR$.





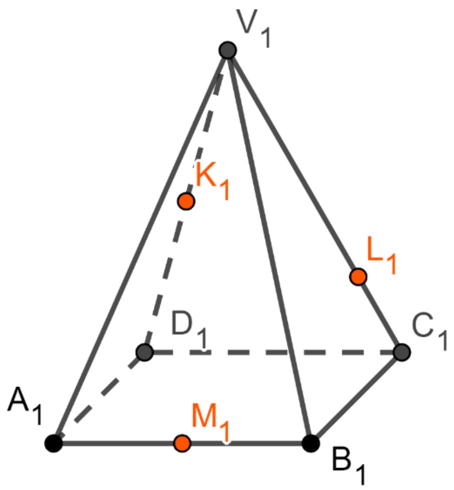
Obrázek 22: Řez pravidelným čtyřbokým hranolem $ABCDEFGH$ rovinou KLM.

Odkaz na řešený příklad: https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/j5qeradf.

Kód pro rozšířenou realitu: ***sa6tmm3u.***

7. příklad

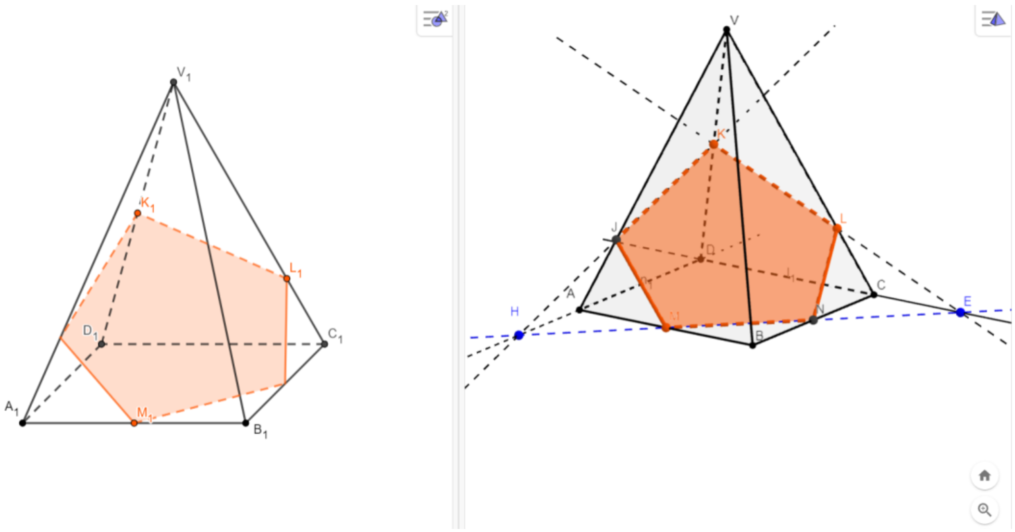
Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$ rovinou KLM, kde K je středem hrany DV, M je středem hrany AB a L leží na hraně CV tak, že $3|CL| = |LV|$.



Obrázek 23: Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s vyznačenými body KLM dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, DCV a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod E získáme jako průsečík přímek KL a DC.
2. Body M, E leží v rovině ABC, proto můžeme vyžít věty 1. Body vedeme přímku, průsečík přímky ME a hrany BC je bod N. Body MN a NL spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
3. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, ADV a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod H získáme jako průsečík přímek ME a AD.
4. Body H, K leží v rovině ABC, proto můžeme vyžít (Věty 1). Body vedeme přímku, průsečík přímky HK a hrany AV je bod J. Body MJ a JK spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
5. Řezem pravidelného čtyřbokého jehlanu je pětiúhelník $MNLKJ$.



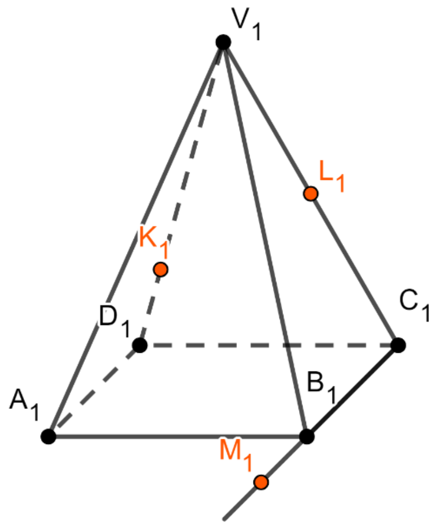
Obrázek 24: Řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDEFGH$ rovinou KLM.

Odkaz na řešený příklad: https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/s5zqpssj.

Kód pro rozšířenou realitu: ***ygjkeeby.***

8. příklad

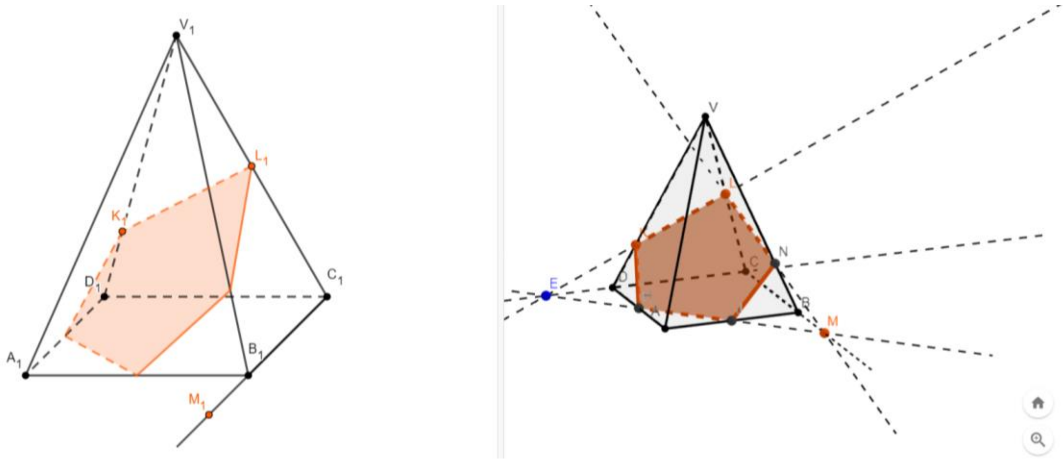
Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$ rovinou KLM, kde L je středem hrany CV, M leží na prodloužené hraně CB tak, že $2|BM| = |BC|$ a K leží na hraně DV tak, že $3|DK| = |KV|$.



Obrázek 25: Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s vyznačenými body KLM dle zadání.

Řešení úlohy:

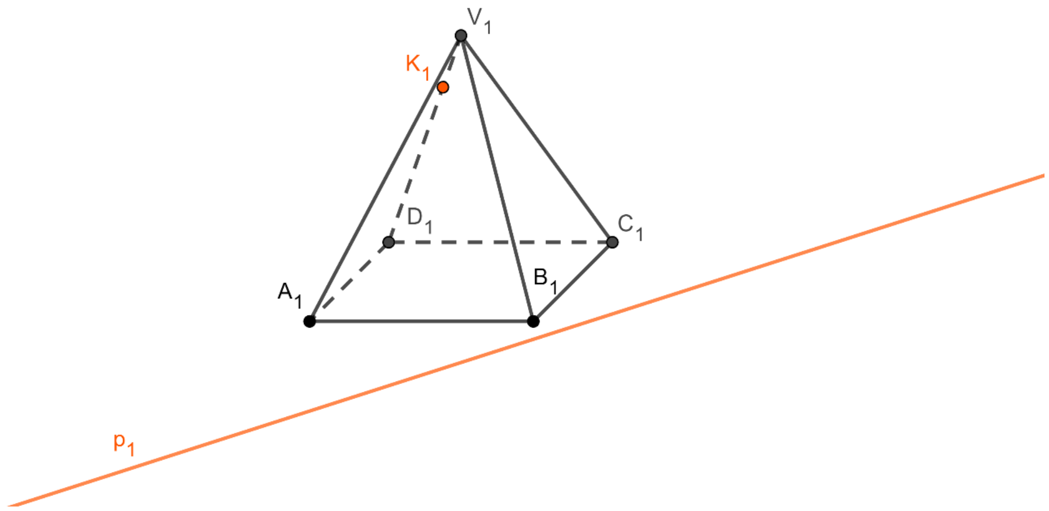
1. Body M, L leží v rovině BCV, proto můžeme vyžít věty 1. Body vedeme přímku, průsečík přímky ML a hrany BV je bod N. Body NL spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
2. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, DCV a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod E získáme jako průsečík přímek KL a DC.
3. Body M, E leží v rovině ABC, proto můžeme vyžít věty 1. Body vedeme přímku, průsečík přímky ME a hrany AD je bod H, průsečík přímky ME a hrany AB je bod J.
4. Body KH, LJ, JN, NL a LK spojíme úsečkami, které tvoří části řezu.
5. Řezem pravidelného čtyřbokého jehlanu je pětiúhelník $KJLHN$.



Obrázek 26: Řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM. Odkaz na řešený příklad:
https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/wzmmzquj.
Kód pro rozšířenou realitu: ***sqxxu6ts.***

9. příklad

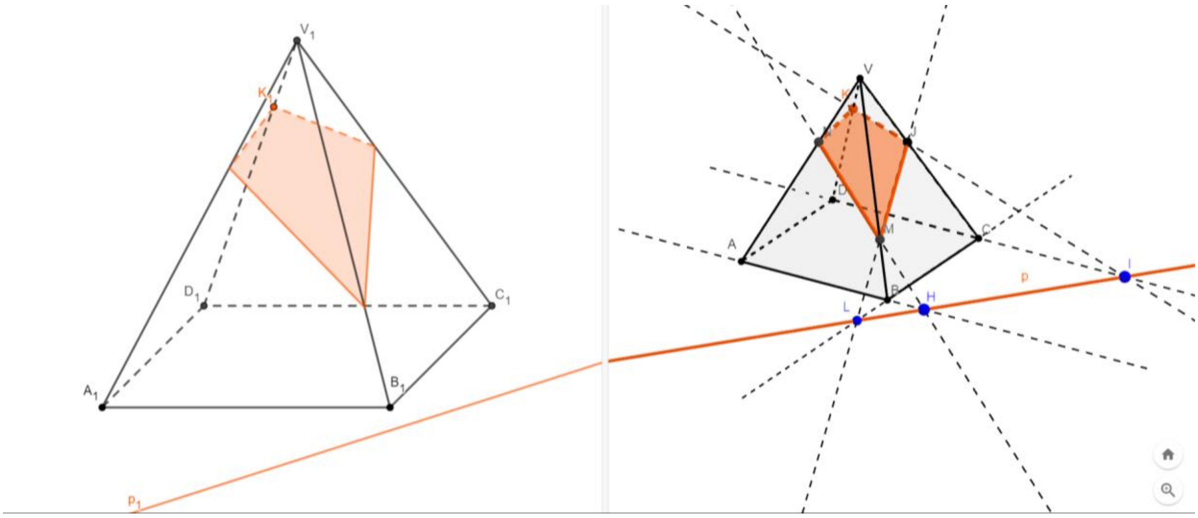
Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$ bodem K a přímkou p, kde bod K leží na hraně DV tak, že $3|KV| = |DK|$.



Obrázek 27: Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s vyznačeným bodem K a přímkou p v rovině ABC dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, DCV a Kp se protínají v jednom bodě. Tento bod I získáme jako průsečík přímek CD a p.
2. Body K, I leží v rovině CDV, proto můžeme vyžít věty 1. Body vedeme přímku, průsečík přímky KI a hrany CV je bod J. Body KJ spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
3. Využijeme (Větu 3) a její důsledek. Roviny ABC, BCV a Jp se protínají v jednom bodě. Tento bod L získáme jako průsečík přímek BC a p.
4. Body L, J leží v rovině BCV, proto můžeme vyžít věty 1. Body vedeme přímku, průsečík přímky LJ a hrany BV je bod M. Body JM spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
5. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, ABV a Mp se protínají v jednom bodě. Tento bod H získáme jako průsečík přímek AB a p.
6. Body H, M leží v rovině ABV, proto můžeme vyžít věty 1. Body vedeme přímku, průsečík přímky HM a hrany AV je bod N. Body MN spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
7. Body N, K spojíme úsečkou, která tvoří části řezu.
8. Řezem pravidelného čtyřbokého jehlanu je čtyřúhelník $KNNJ$.



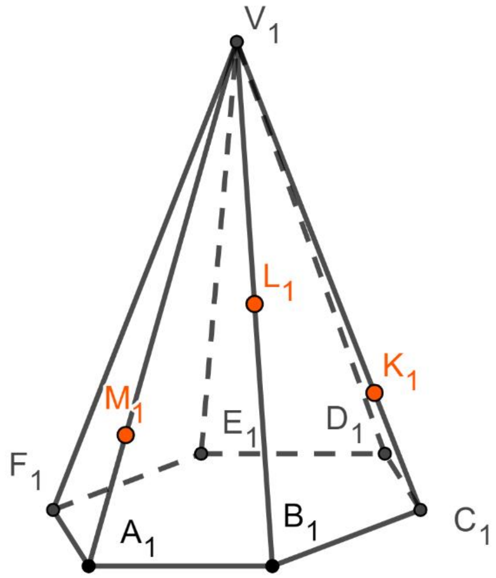
Obrázek 28: Řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDEFGH$ rovinou Kp.

Odkaz na řešený příklad: https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/yfhterfu.

Kód pro rozšířenou realitu: ***ercwfvzr.***

10. příklad

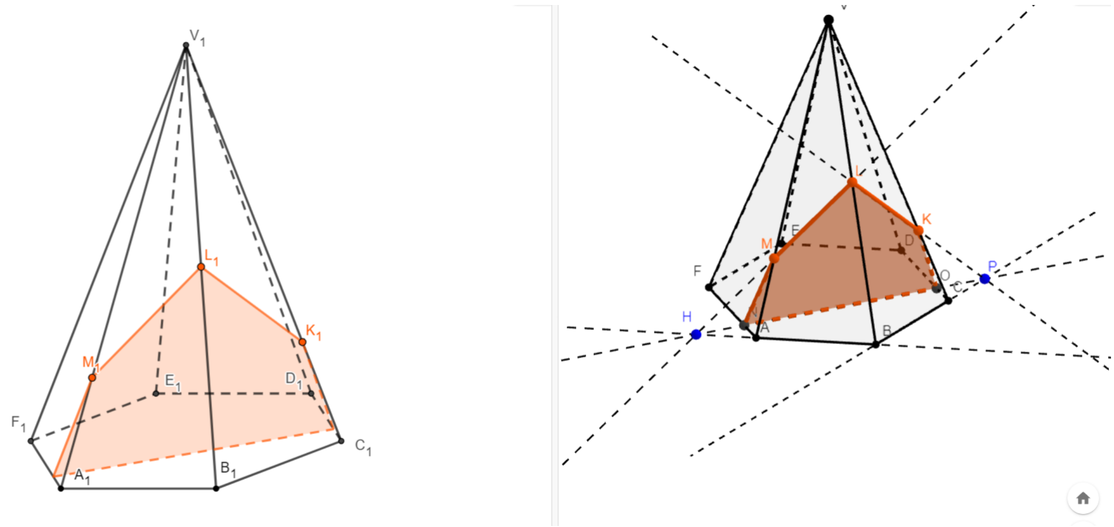
Sestrojte řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou KLM, kde bod K leží na hraně CV tak, že $3|CK| = |KV|$. Bod M leží na hraně AV tak, že $3|AM| = |MV|$ a kde L je středem hrany BV.



Obrázek 29: Pravidelný šestiboký jehlan $ABCDV$ s vyznačeným body KLM dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Body M, L leží v rovině ABV, proto můžeme vyžít věty 1. Body M, L spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
2. Body L, K leží v rovině BCV, proto můžeme vyžít věty 1. Body L, K spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
3. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, AML a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod H získáme jako průsečík přímek ML a AB.
4. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, BCV a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod P získáme jako průsečík přímek KL a BC.
5. Body H, P leží v rovině ABC, proto můžeme vyžít věty 1. Body vedeme přímku, průsečík přímky HP a hrany AF je bod N. Průsečík přímek HP a hrany CD .
6. Úsečky NO, KO a MN tvoří části řezu.
7. Řezem pravidelného šestibokého jehlanu je pětiúhelník $KLMNO$.



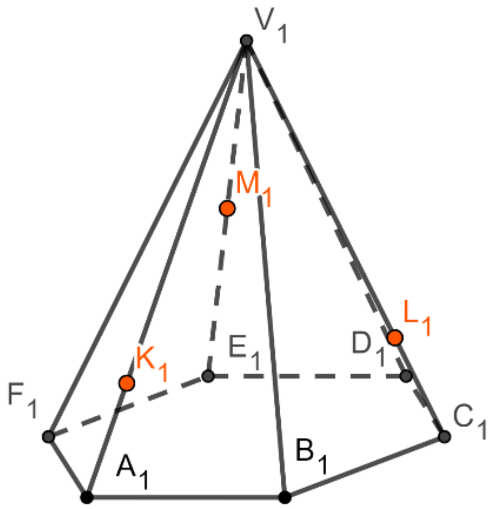
Obrázek 30: Řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou KLM.

Odkaz na řešený příklad: https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/ezxasrrh.

Kód pro rozšířenou realitu: ***gfxhkbnt.***

11. příklad

Sestrojte řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou KLM, kde bod K leží na hraně CV tak, že $3|AK| = |KV|$. Bod L leží na hraně CV tak, že $3|CL| = |LV|$ a kde M je středem hrany EV.

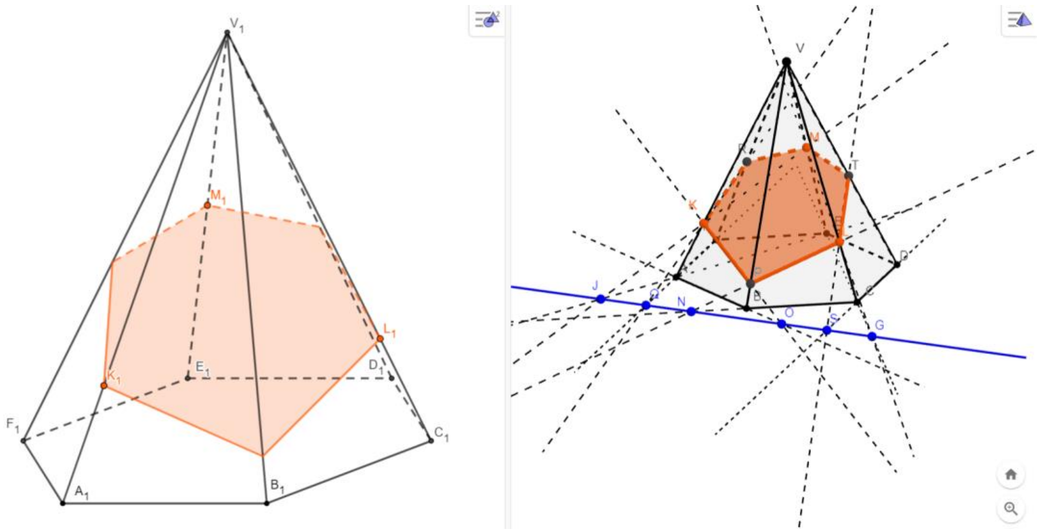


Obrázek 31: Pravidelný šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ s vyznačeným body KLM dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, CLM a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod G získáme jako průsečík přímek EC a ML.
2. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, AKM a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod J získáme jako průsečík přímek AE a KM.
3. Body JG vedeme přímku, která nám tvoří průsečnici roviny řezu KLM a roviny podstavy ABC.
4. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, AFK a Mp se protínají v jednom bodě. Tento bod Q získáme jako průsečík přímek AF a JG.
5. Body QK, leží v rovině AFV, proto můžeme vyžít věty 1. Body QK vedeme přímku, průsečík přímky QK a hrany FV je bod R. Body KR spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
6. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, BCV a Mp se protínají v jednom bodě. Tento bod N získáme jako průsečík přímek BC a JG.

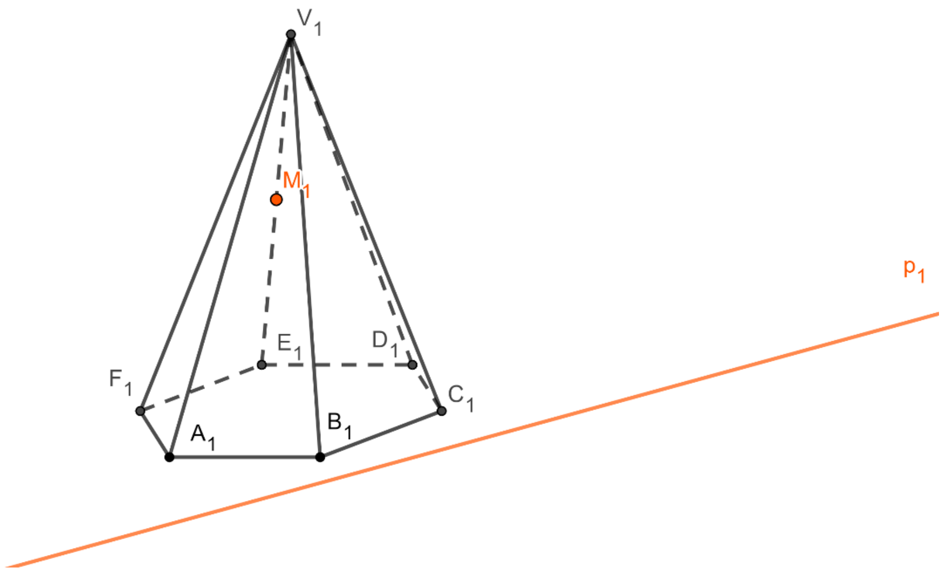
7. Body NL, leží v rovině BCV, proto můžeme vyžít věty 1. Body NL vedeme přímku, průsečík přímky NL a hrany BV je bod P. Body PL spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
8. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, CDV a Mp se protínají v jednom bodě. Tento bod S získáme jako průsečík přímek CD a JG.
9. Body SL leží v rovině CDV, proto můžeme vyžít věty 1. Body SL vedeme přímku, průsečík přímky SL a hrany DV je bod T. Body TL spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
10. Úsečky RM a TM tvoří části řezu
11. Řezem pravidelného šestibokého jehlanu je šestiúhelník $KLMPTR$.



Obrázek 32: Řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou KLM.
Odkaz na řešený příklad: https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/ncgkpxsf.
Kód pro rozšířenou realitu: ***ddgdbrqn.***

12. příklad

Sestrojte řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou Kp, kde bod K leží na hraně DV tak, že $3|KV| = |DK|$.

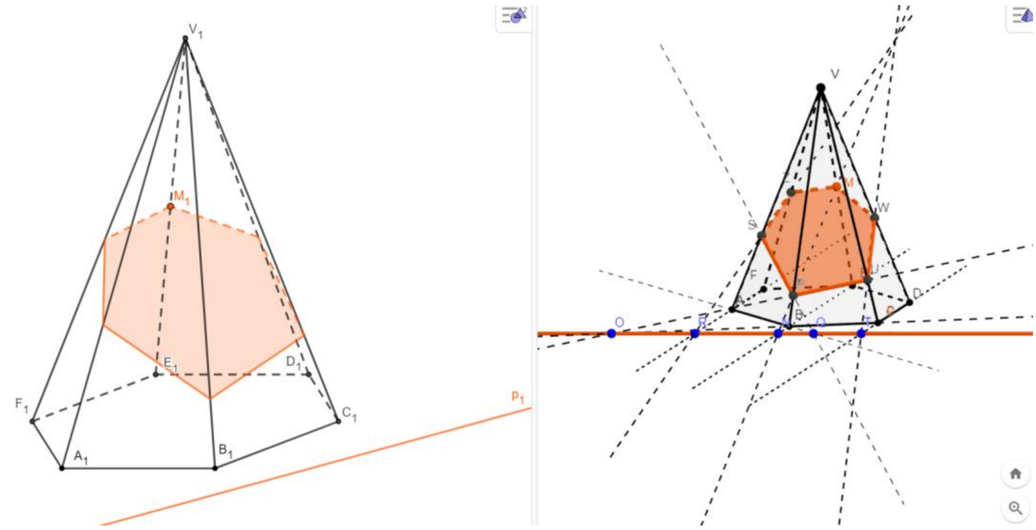


Obrázek 33: Pravidelný šestiboký jehlan $ABCDV$ s vyznačeným bodem K a přímkou p v rovině ABC dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, EBM a Mp se protínají v jednom bodě. Tento bod N získáme jako průsečík přímek EB a p.
2. Body MN, leží v rovině Mp, proto můžeme vyžít věty 1. Body MN vedeme přímku, průsečík přímky MN a hrany BV je bod P.
3. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, BCV a KLM se protínají v jednom bodě. Tento bod O získáme jako průsečík přímek BC a p.
4. Body OP, leží v rovině BCV, proto můžeme vyžít věty 1. Body OP vedeme přímku, průsečík přímky OP a hrany CV je bod U. Body PU spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
5. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, ABV a Mp se protínají v jednom bodě. Tento bod Q získáme jako průsečík přímek AB a p.
6. Body QP, leží v rovině ABV, proto můžeme vyžít věty 1. Body QP vedeme přímku, průsečík přímky QP a hrany AV je bod S. Body PS spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.

7. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, CDV a Mp se protínají v jednom bodě. Tento bod T získáme jako průsečík přímek CD a p.
8. Body TU, leží v rovině CDV, proto můžeme vyžít věty 1. Body TU vedeme přímku, průsečík přímky TU a hrany DV je bod W. Body UW spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
9. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, AFV a Mp se protínají v jednom bodě. Tento bod T získáme jako průsečík přímek AF a p.
10. Body RS leží v rovině AFV, proto můžeme vyžít věty 1. Body RS vedeme přímku, průsečík přímky RS a hrany FV je bod Z. Body SZ spojíme úsečkou, která tvoří část řezu.
11. Úsečky ZM a WM tvoří části řezu
12. Řezem pravidelného šestibokého jehlanu je šestiúhelník $MWUPSZ$.



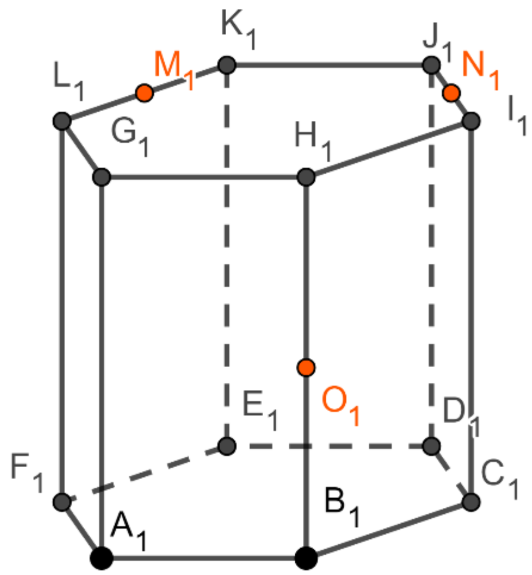
Obrázek 34: Řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou Mp.

Odkaz na řešený příklad: https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/ykzh3s4r.

Kód pro rozšířenou realitu: ***juwdbszf.***

13. příklad

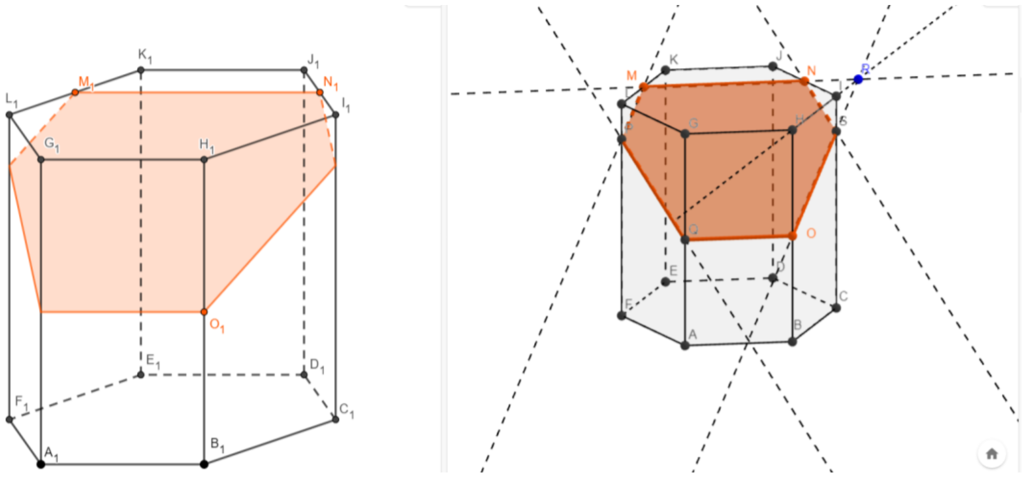
Sestrojte řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO, kde bod M je středem hrany LK. Bod N je středem hrany IJ a bod O je středem hrany BH.



Obrázek 35: Pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFGHIJKL$ s vyznačenými body MNO dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny GHI, MNO a přímka MN se protínají v jednom bodě. Tento bod R získáme jako průsečík přímek MN a HI.
2. Body RO leží v rovině BCI, proto můžeme vyžít věty 1. Body RO vedeme přímku, průsečík přímky RO a hrany CI je bod S. Body SN a SO spojíme úsečkami, které tvoří části řezu.
3. Roviny BCI a FEK jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem M vedeme rovnoběžku s přímkou OS. Průsečík rovnoběžky s hranou FL je bod P.
4. Roviny CDJ a AFG jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem P vedeme rovnoběžku s přímkou NS. Průsečík rovnoběžky s hranou AG je bod Q.
5. Úsečky OQ, QP, PM a MN tvoří části řezu.
6. Řezem pravidelného šestibokého hranolu je šestiúhelník $QOSNMP$.



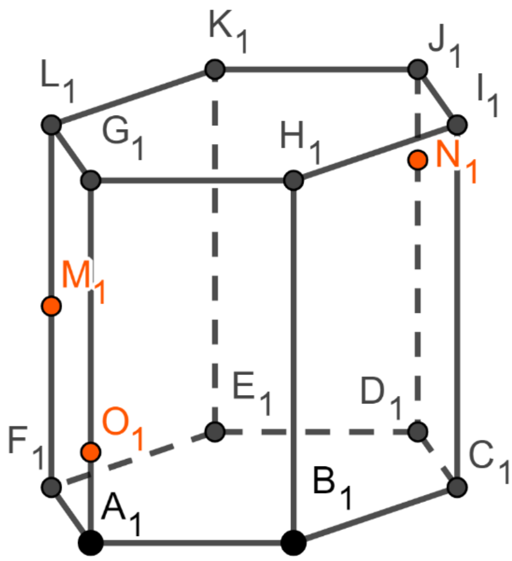
Obrázek 36: Řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO.

Odkaz na řešený příklad: https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/ujvxtaqe.

Kód pro rozšířenou realitu: ***cm54sbwv.***

14. příklad

Sestrojte řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO, kde bod M je středem hrany FL. Bod N leží na hraně DJ tak, že $3|NJ| = |DN|$. Bod O leží na hraně AG tak, že $3|AO| = |OG|$.

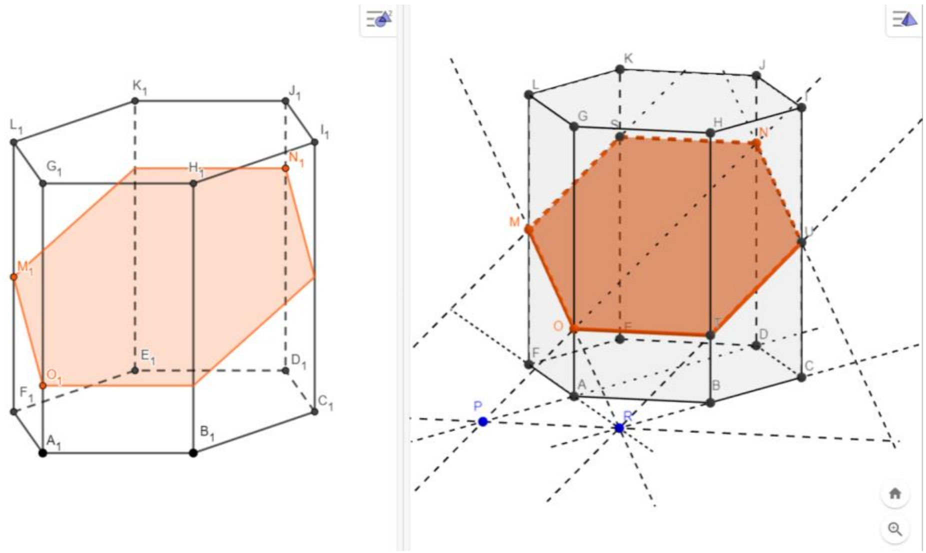


Obrázek 37: Pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFGHIJKL$ s vyznačenými body MNO dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, AFO a MNO se protínají v jednom bodě. Tento bod R získáme jako průsečík přímek AF a MN. Body MO spojíme úsečkou, ta tvoří části řezu.
2. Roviny AFG a CDI jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem N vedeme rovnoběžku s přímkou MN. Průsečík rovnoběžky s hranou CI je bod U.
3. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, ADJ a MNO se protínají v jednom bodě. Tento bod P získáme jako průsečík přímek AD a NO.
4. Body PR vedeme přímku, která nám tvoří průsečnici roviny řezu MNO a roviny podstavy ABC.
5. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, BCI a MNO se protínají v jednom bodě. Tento bod R získáme jako průsečík přímek BC a RU.

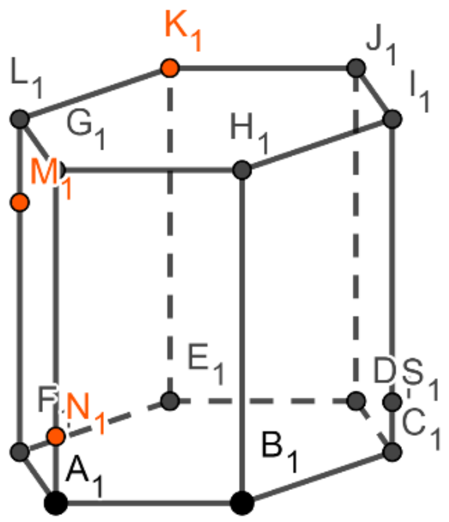
6. Body RU leží v rovině BCI, proto můžeme vyžít věty 1. Body RU vedeme přímku, průsečík přímky RU a hrany BH je bod T. Body TO a TU spojíme úsečkami, které tvoří části řezu.
7. Roviny BCI a FEK jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem M vedeme rovnoběžku s přímkou TU. Průsečík rovnoběžky s hranou EK je bod S.
8. Úsečky MS, SN a NU tvoří části řezu.
9. Řezem pravidelného šestibokého hranolu je šestiúhelník $MNOTUS$.



Obrázek 38: Řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO.
Odkaz na řešený příklad: https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/qku4jdcb.
Kód pro rozšířenou realitu: ***r4mjzkxf.***

15. příklad

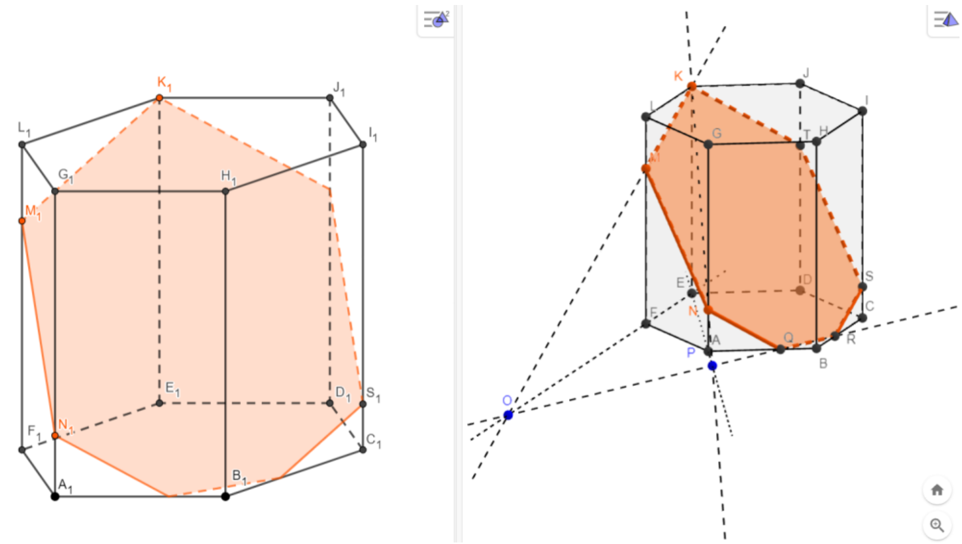
Sestrojte řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO, kde bod M leží na hraně FL tak, že $4|ML| = |FN|$. Bodem K a bodem N, který leží na hraně AG tak, že $4|AN| = |NG|$.



Obrázek 39: Pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFGHIJKL$ s vyznačenými body MNO dle zadání.

Řešení úlohy:

1. Body KM a MN spojíme úsečkami, které tvoří části řezu.
2. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, FEK a MNK se protínají v jednom bodě. Tento bod O získáme jako průsečík přímek FE a MK.
3. Využijeme větu 3 a její důsledek. Roviny ABC, AEK a MNK se protínají v jednom bodě. Tento bod P získáme jako průsečík přímek AE a NK.
4. Body OP vedeme přímku, která nám tvoří průsečnici roviny řezu MNO a roviny podstavy ABC.
5. Body OP leží v rovině podstavy ABC, proto můžeme vyžít věty 1. Body OP vedeme přímku, průsečík přímky OP a hrany AB je bod Q. Průsečík přímky OP a hrany BC je bod R. Body NQ a QR spojíme úsečkami, které tvoří části řezu.
6. Roviny BCI a FEK jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem R vedeme rovnoběžku s přímkou MK. Průsečík rovnoběžky s hranou CI je bod S.
7. Roviny CDI a AFG jsou rovnoběžné, proto můžeme využít věty 2. Bodem S vedeme rovnoběžku s přímkou NM. Průsečík rovnoběžky s hranou DJ je bod T.
8. Úsečky ST, TK a RS tvoří části řezu.
9. Řezem pravidelného šestibokého hranolu je sedmiúhelník $MNKQRST$.



Obrázek 40: Řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNK.

Odkaz na řešený příklad: https://www.geogebra.org/m/h4xgpuvg#material/yekgb5ys.

Kód pro rozšířenou realitu: ***g2ztp3ry.***

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit pracovní listy s řešenými úlohami o řezech hranatých těles pro využití ve výuce na střední škole, které by mohli využít jak učitelé, tak samotní studenti. Pro učitele by byly podkladem pro výuku a studenti by v nich nalezli vhodný studijní materiál.

Z učitelského pohledu vidím přínos své práce v tom, že může posloužit jako vhodný zdroj informací při přípravě učitele na hodinu. Obsahuje typově vhodné příklady, na kterých může učitel předvést aplikaci jednotlivých vět sloužících k sestrojování řezů hranatých těles. Příklady rovněž obsahují popis konstrukce řešení. Součástí práce jsou také pracovní listy, které jsou vytvořeny tak, aby je učitel mohl studentům nakopírovat a rozdat jako samostatnou práci, domácí úkol nebo jako součást písemné prověrky. Pro učitele může zároveň možnost zavedení 3D modelů a rozšířené reality do výuky představovat způsob, jakým může studenty zaujmout a udělat pro ně učivo atraktivnější a zábavnější.

Z pohledu studenta vidím největší přínos práce v možnostech, jakými mohou studentovi pomoci danou problematiku pochopit. V první řadě je tady možnost sledovat okomentovaný postup řešení krok po kroku s uvedenými větami 1,2 nebo 3, které v jednotlivých krocích konstrukce využíváme. Druhou možností je interaktivně označovat zaškrtáváním jednotlivé kroky řešení v programu GeoGebra. Výhodou této možnosti je, že student jasně vidí, který krok řešení konstrukce byl potřeba udělat, jak byl krok proveden a v případě potřeby se pomocí pár kliknutí může vrátí zpět na začátek a úlohu může začít řešit znovu. Třetí možností, kterou tato práce nabízí, je možnost otevřít si vyřešený příklad v aplikaci GeoGebra 3D. Výhodou GeoGebry 3D je schopnost převést sestrojené těleso i s řezem do rozšířené reality pomocí mobilního telefonu. Student má pak příležitost podívat se na těleso jako na 3D objekt v prostoru, a to z různých stran a různých úhlů. Studenti mají často problém s tím, že nejsou schopni představit si objekt v prostoru. Tuto možnost získají zprostředkovaně pomocí aplikace GeoGebra 3D, ve které si daný objekt zobrazí a to jim pomůže rozvíjet jejich prostorovou představivost a orientaci v prostoru.

Konstrukční úlohy odpovídají úlohám, které bývají využity při výuce na střední škole. Úlohy byly vybrány tak, aby se v nich vyskytly jak jednodušší příklady, které namotivují i slabší studenty, tak příklady složitější, které mohou sloužit jako výzva pro nadanější studenty.

Seznam použitých symbolů

Značení převzato z [2].

$A, B, \ldots$	bod $A, B, \ldots$
$p, q, \ldots$	přímka $p, q, \ldots$
$\leftrightarrow AB$	přímka určená body A, B
AB	úsečka s krajními body A, B
$\lvert AB \rvert$	vzdálenost bodů A, B; délka úsečky AB
$\rho, \sigma, \ldots$	rovina $\rho, \sigma, \ldots$
$\leftrightarrow KLM$	rovina určená body K, L, M
$\leftrightarrow Ap$	rovina určená bodem A a přímkou p
α	rovina α
$p \cap q$	průsečík přímek p, q
$\rho \cap \tau$	průsečnice rovin ρ, τ
$\in (\notin)$	je (není) prvkem
$A \in p$	bod A leží na přímce p; bod A je s přímkou p incidentní
$\subset (\not\subset)$	je (není) podmnožinou
$p \subset \rho$	přímka p náleží rovině ρ; přímka p incidentní s rovinou ρ
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$\rho \parallel \tau$	rovina ρ je rovnoběžná s rovinou τ

Seznam použitých pramenů

[1] MACHALA, František, Josef SROVNAL a Miloslava SEDLÁŘOVÁ. *Konstrukční geometrie*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2002. ISBN 80-244-0399-4.

[2] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

[3] *SBÍRKA ÚLOH STEREOMETRIE* [online]. 17. listopadu 12, 779 00 Olomouc [cit. 2023-04-11]. Dostupné z: https://kag.upol.cz/data/upload/17/sbirka_uloh_stereometrie_140916.pdf. Sbírka úloh. Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, Katedra algebry a geometrie.

Pracovní listy

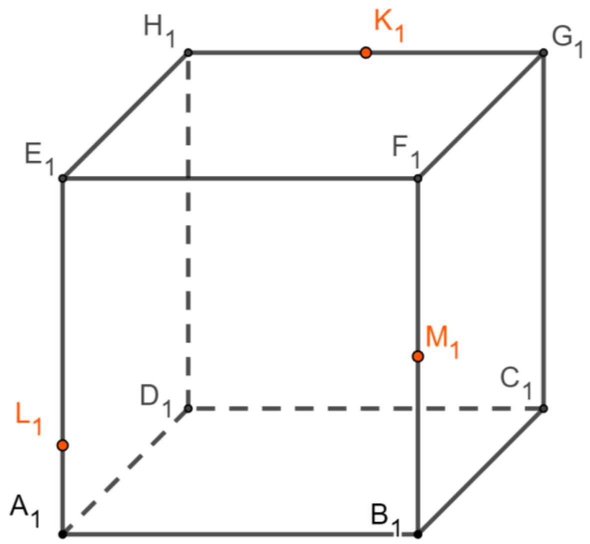
Seznam polohových konstrukčních úloh

1. příklad	Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany HG, M je středem hrany BF a L leží na hraně AE tak, že $3\|AL\| = \|LE\|$.
2. příklad	Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany EH, M leží na hraně BC tak, že $2\|BM\| = \|MC\|$ a L leží na hraně AE tak, že $2\|AL\| = \|LE\|$.
3. příklad	Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany CG, M je středem hrany EF a L je středem hrany AD.
4. příklad	Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K leží na prodloužené hraně AE tak, že $2\|EK\| = \|AE\|$, M leží na prodloužené hraně FG tak, že $2\|GM\| = \|FG\|$. L leží na prodloužené hraně FB tak, že $2\|BL\| = \|FB\|$.
5. příklad	Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým hranolem $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany BG, M je středem hrany AE a L je středem hrany HG.
6. příklad	Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým hranolem $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany FG, L je středem hrany AE a M leží na hraně CG tak, že $3\|MG\| = \|CM\|$.
7. příklad	Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$ rovinou KLM, kde K je středem hrany DV, M je středem hrany AB a L leží na hraně CV tak, že $3\|CL\| = \|LV\|$.
8. příklad	Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$ rovinou KLM, kde L je středem hrany CV, M leží na prodloužené hraně CB tak, že $2\|BM\| = \|BC\|$ a K leží na hraně DV tak, že $3\|DK\| = \|KV\|$.
9. příklad	Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$ bodem K a přímkou p, kde bod K leží na hraně DV tak, že $3\|KV\| = \|DK\|$.
10. příklad	Sestrojte řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou KLM, kde bod K leží na hraně CV tak, že $3\|CK\| = \|KV\|$. Bod M leží na hraně AV tak, že $3\|AM\| = \|MV\|$ a kde L je středem hrany BV.

11. příklad	Sestrojte řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou KLM, kde bod K leží na hraně CV tak, že $3\|AK\| = \|KV\|$. Bod L leží na hraně CV tak, že $3\|CL\| = \|LV\|$ a kde M je středem hrany EV.
12. příklad	Sestrojte řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou Kp, kde bod K leží na hraně DV tak, že $3\|KV\| = \|DK\|$.
13. příklad	Sestrojte řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO, kde bod M je středem hrany LK. Bod N je středem hrany IJ a bod O je středem hrany BH.
14. příklad	Sestrojte řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO, kde bod M je středem hrany FL. Bod N leží na hraně DJ tak, že $3\|NJ\| = \|DN\|$. Bod O leží na hraně AG tak, že $3\|AO\| = \|OG\|$.
15. příklad	Sestrojte řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO, kde bod M leží na hraně FL tak, že $4\|ML\| = \|FN\|$. Bodem K a bodem N, který leží na hraně AG tak, že $4\|AN\| = \|NG\|$.

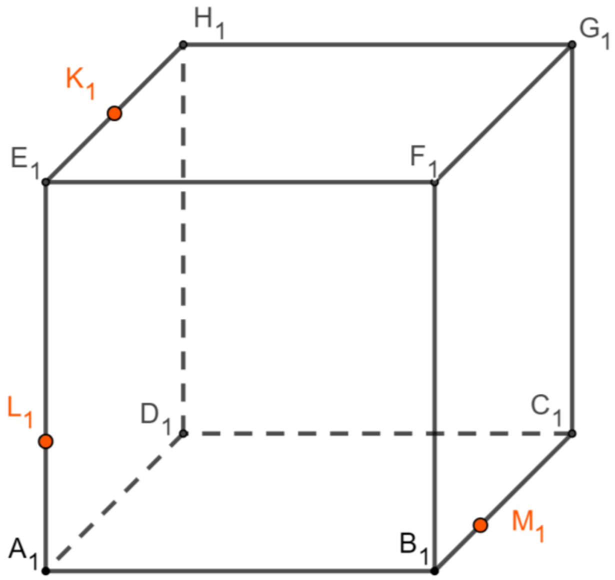
1. příklad

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany HG, M je středem hrany BF a L leží na hraně AE tak, že $3|AL| = |LE|$.



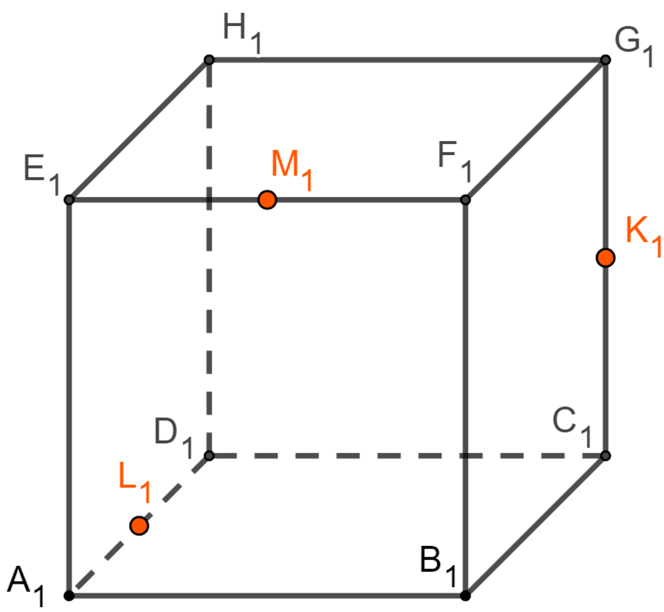
2. příklad

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany EH, M leží na hraně BC tak, že $2|BM| = |MC|$ a L leží na hraně AE tak, že $2|AL| = |LE|$.



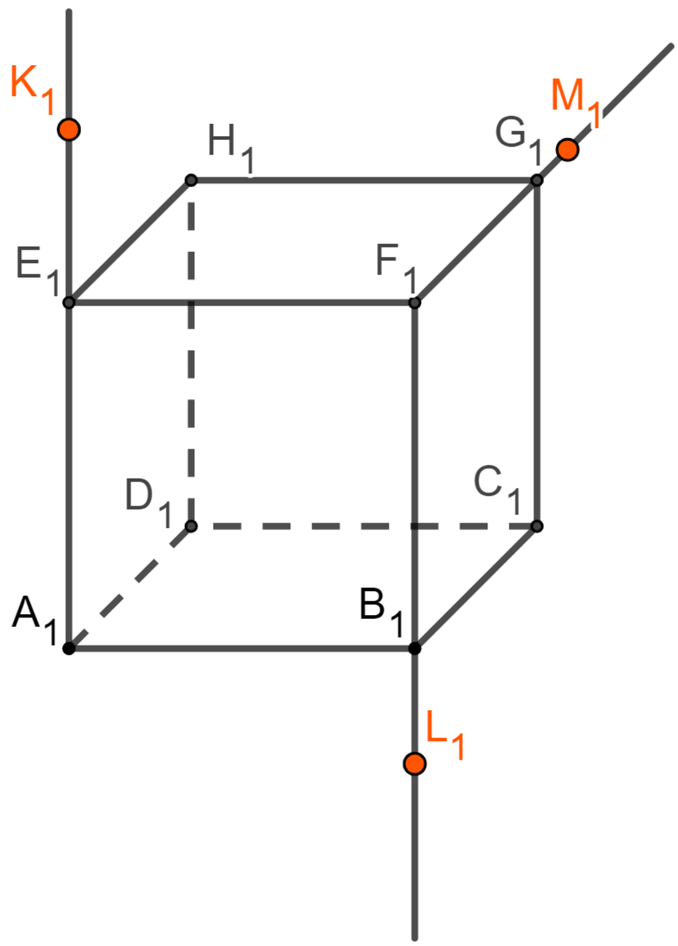
3. příklad

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany CG, M je středem hrany EF a L je střed hrany AD.



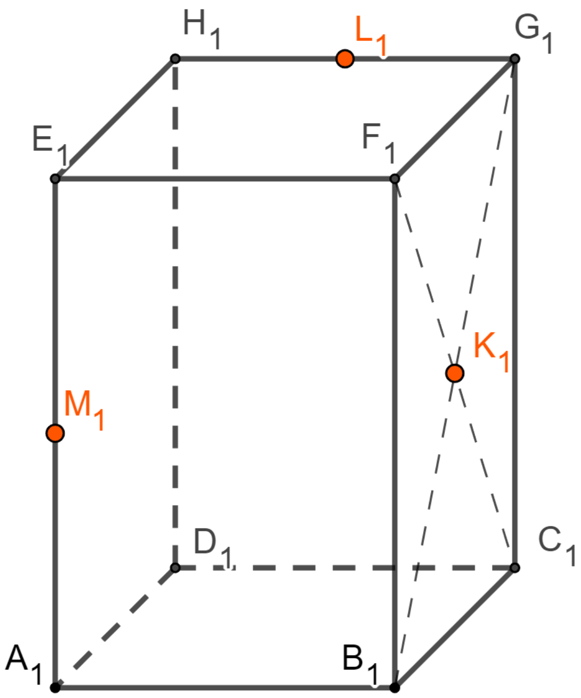
4. příklad

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K leží na prodloužené hraně AE tak, že $2|EK| = |AE|$, M leží na prodloužené hraně FG tak, že $2|GM| = |FG|$. L leží na prodloužené hraně FB tak, že $2|BL| = |FB|$.



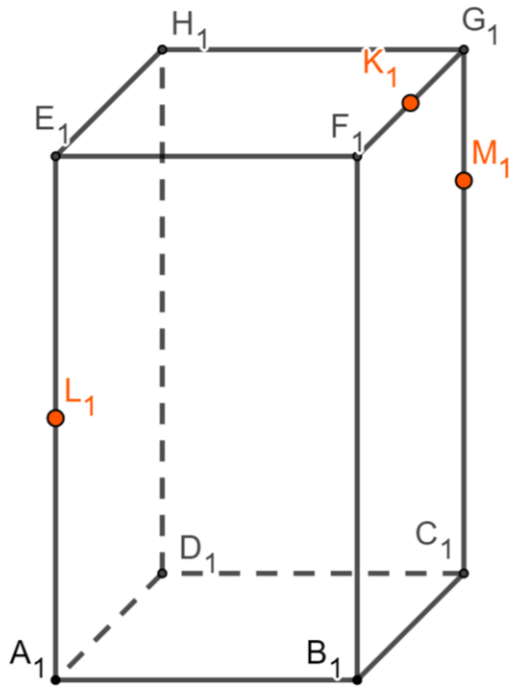
5. příklad

Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým hranolem $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem BG, M je středem hrany AE a L je středem hrany HG.



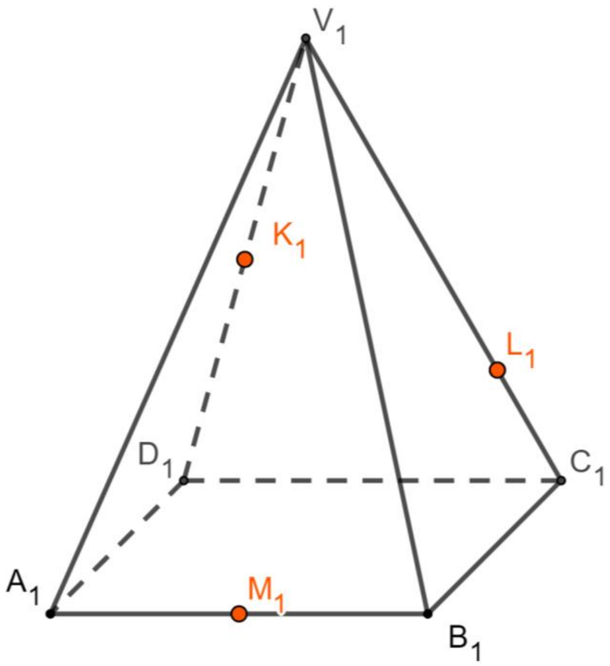
6. příklad

Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým hranolem $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde K je středem hrany FG, L je středem hrany AE a M leží na hraně CG tak, že $3|MG| = |CM|$.



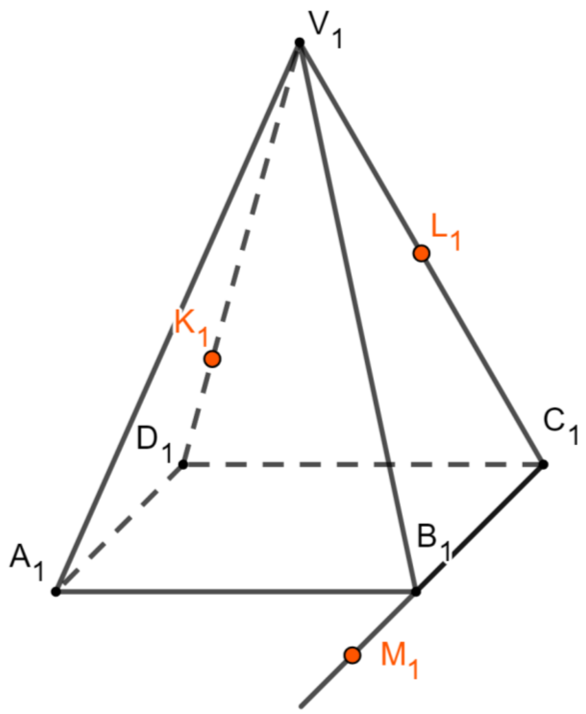
7. příklad

Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$ rovinou KLM, kde K je středem hrany DV, M je středem hrany AB a L leží na hraně CV tak, že $3|CL| = |LV|$.



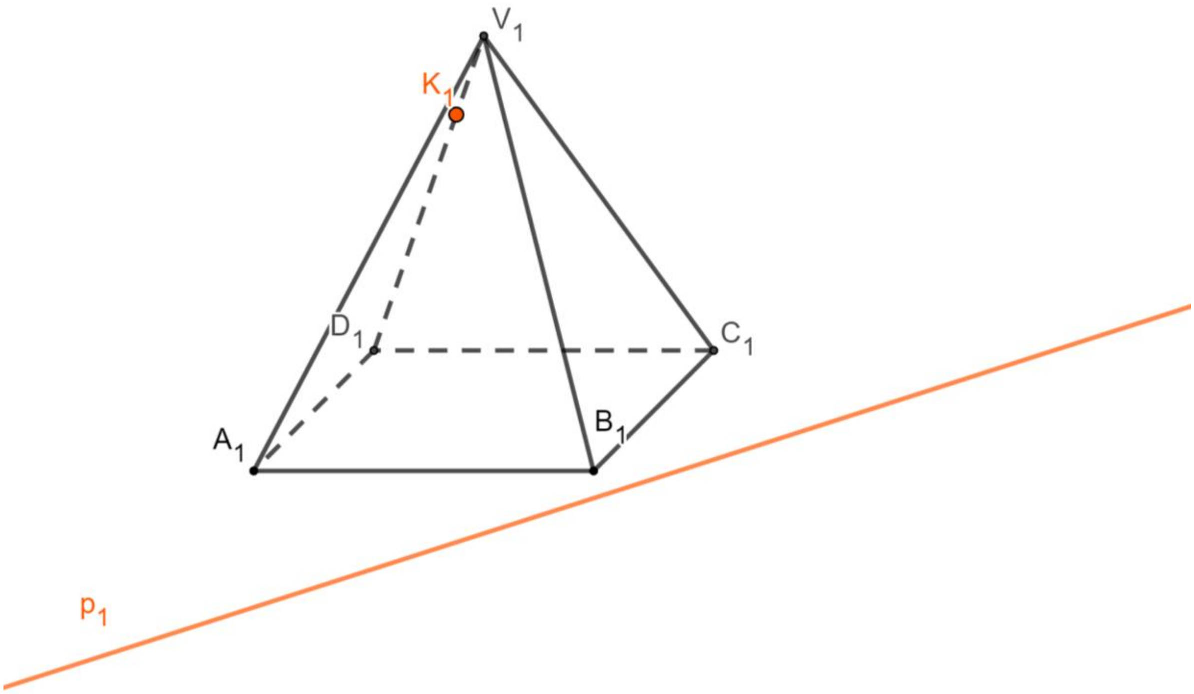
8. příklad

Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$ rovinou KLM, kde L je střed CV, M leží na prodloužené hraně CB tak, že $2|BM| = |BC|$. a K leží na hraně DV tak, že $3|DK| = |KV|$.



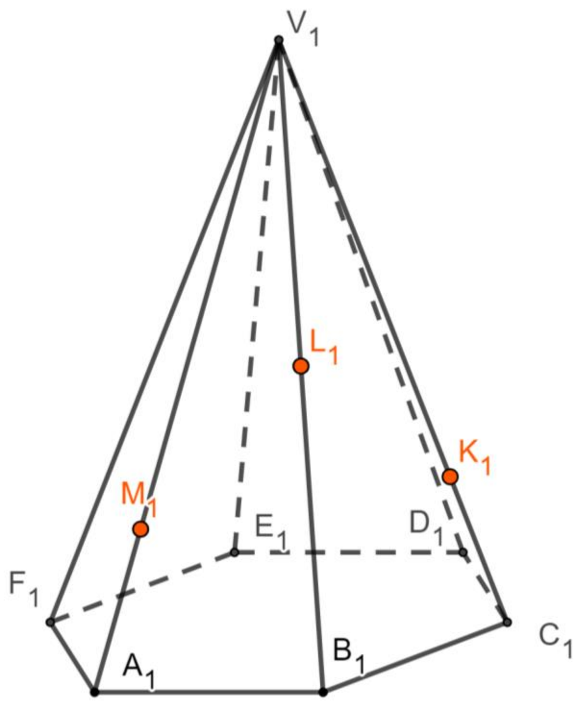
9. příklad

Sestrojte řez pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$ bodem K a přímkou p, kde bod K leží na hraně DV tak, že $3|KV| = |DK|$.



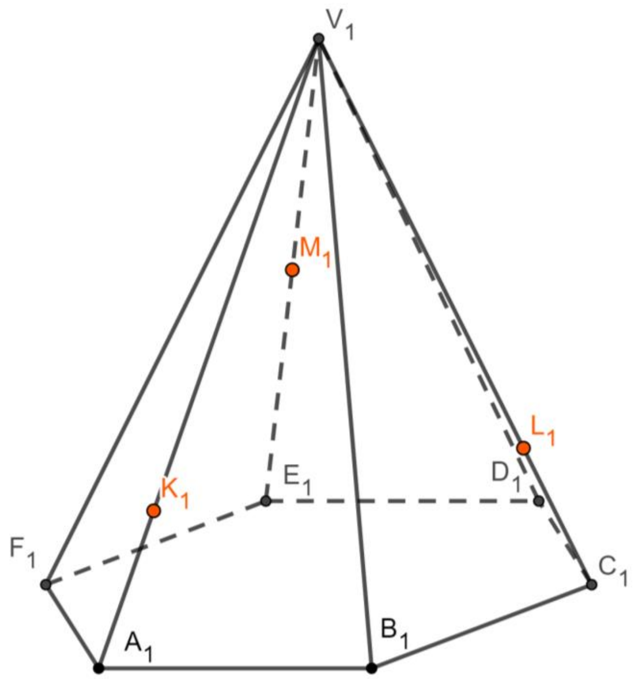
10. příklad

Sestrojte řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou KLM, kde bod K leží na hraně CV tak, že $3|CK| = |KV|$. Bod M leží na hraně AV tak, že $3|AM| = |MV|$ a kde L je středem hrany BV.



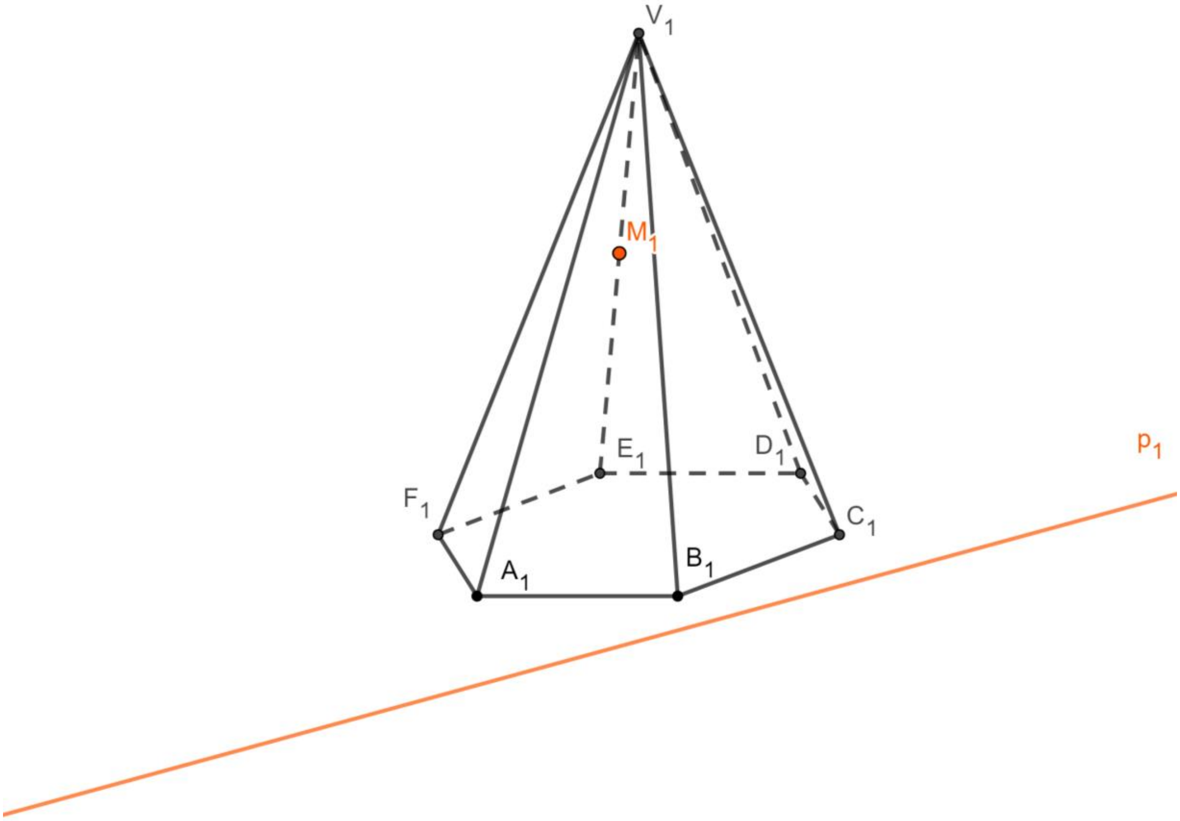
11. příklad

Sestrojte řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou KLM, kde bod K leží na hraně CV tak, že $3|AK| = |KV|$. Bod L leží na hraně CV tak, že $3|CL| = |LV|$ a kde M je středem hrany EV.



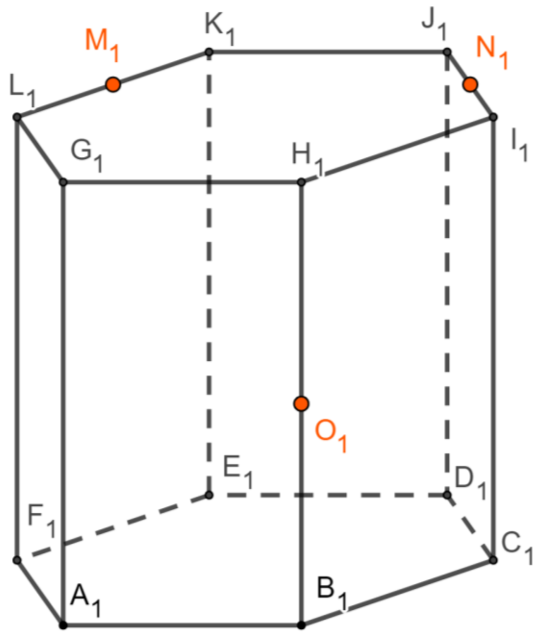
12. příklad

Sestrojte řez pravidelným šestibokým jehlanem $ABCDEFV$ rovinou Kp, kde bod K leží na hraně DV tak, že $3|KV| = |DK|$.



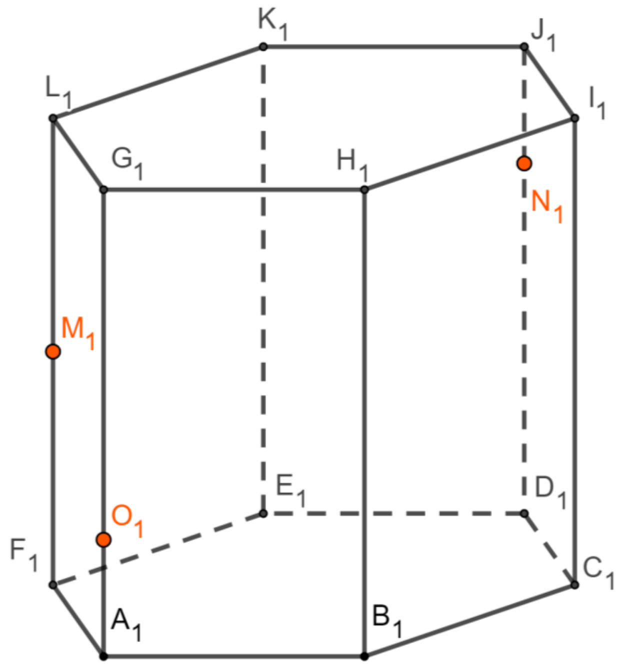
13. příklad

Sestrojte řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO, kde bod M je středem hrany LK. Bod N je středem hrany IJ a bod O je středem hrany BH.



14. příklad

Sestrojte řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO, kde bod M je středem hrany FL. Bod N leží na hraně DJ tak, že $3|NJ| = |DN|$. Bod O leží na hraně AG tak, že $3|AO| = |OG|$.



15. příklad

Sestrojte řez pravidelným šestibokým hranolem $ABCDEFGHIJKL$ rovinou MNO, kde bod M leží na hraně FL tak, že $4|ML| = |FN|$. Bodem K a bodem N, který leží na hraně AG tak, že $4|AN| = |NG|$.