UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Teorie her v ekonomii

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Kristýna Holly**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2018

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Kristýna Holly

Název práce: Teorie her v ekonomii

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2018

Abstrakt: Teorie her jako samostatná vědní disciplína se zabývá konfliktními rozhodovacími situacemi. Modely matematické teorie her se snaží nejen analyzovat konfliktní situace, ale pomocí vhodně zvolených matematických modelů a výpočtů se snaží najít optimální strategii pro účastníky takových konfliktů. V této práci jsou po úvodním stručném seznámení a nahlédnutí do historie teorie her přehledně popsány základy této teorie. Postupně se seznamujeme se základními pojmy a definicemi, dělením her podle různých kriterií a s modely rozhodovacích situací. V poslední kapitole jsou podrobněji představeny antagonistické hry, jejich metody řešení, které jsou doplněny i o příklady jejich použití.

Klíčová slova: Konfliktní situace, hráč, antagonistická hra, maticová hra, strategie, výplatní funkce, sedlový bod, optimální strategie

Počet stran: 41

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Kristýna Holly

Title: Theory of Games in Economics

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

The year of presentation: 2018

Abstract: Theory of games as an independent science discipline deals with conflicting decision situations. Models of mathematical game theory try not only to analyse conflicting situations but to find an optimal strategy for participants in such conflicts using appropriately chosen mathematical models and computations. In this work, after the initial brief introduction and insight into the theory of games, the basics of this theory are described. We gradually get acquainted with the basic concepts and definitions, the division of games according to various criteria and the models of decision situations. In the last chapter, antagonistic games are presented, along with the methods for their solution, and are supplemented with examples of their use.

Key words: Conflict situation, player, antagonistic game, matrix game, strategy, payroll, saddle point, optimal strategy

Number of pages: 41

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych poděkovala paní Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D. za spolupráci, ochotu a cenné rády při vedení mé bakalářské práce. Také bych chtěla poděkovat rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu mého studia podporovali.

Úvod

Cílem této bakalářské práce je blíže se seznámit s teorií her jako samostatnou vědní disciplínou, analyzující konfliktní rozhodovací situace, se kterými se můžeme setkat kdekoliv, kde dochází ke střetu zájmů. Původně byla teorie her označována za disciplínu matematickou, v dnešní době ale nachází uplatnění i v běžném životě.

Matematická teorie her je jako vědní disciplína velmi rozsáhlá. Proto se v této práci zaměříme pouze na základní teoretické poznatky. Podrobně se budeme věnovat antagonistickým hrám a jejich aplikaci v příkladech.

Celou práci lze rozdělit do tří částí. V první části se nejprve seznámíme s touto matematickou disciplínou a jejím stručným historickým vývojem. Představíme si i některé osobnosti matematické teorie her.

Ve druhé části si vysvětlíme základní definice a pojmy z oblasti teorie her. Získáme přehled o základních vlastnostech strategií a klasifikujeme si hry do skupin podle různých kritérií.

Poslední nejobsáhlejší část této práce je věnována antagonistickým hrám. Podrobněji si vysvětlíme základní definice a vlastnosti týkající se těchto her. Tyto teoretické poznatky pak aplikujeme na příkladech. Na závěr této kapitoly se zmíníme o využití maticových her v ekonomii a ukážeme si toto využití na jednoduchém příkladu.

Kapitola 1

Teorie her

Teorie her je disciplína aplikované matematiky, která je současně zahrnovaná i do teorie rozhodování a operačního výzkumu. Teorie her analyzuje široké spektrum konfliktních rozhodovacích situací s více účastníky. Pojem „hra“ má v moderním pojetí teorie her velmi obecný význam. Nezahrnuje pouze salonní hry, jako jsou šachy či poker, ale obecně vyjadřuje jakoukoli konfliktní situaci. Teorie her je aplikována v různých oblastech lidské činnosti od ekonomie, přes politologii až po sociologii a biologii. Tato různorodost poukazuje na univerzalitu modelů vyvinutých v rámci teorie her a také představuje zdroj pro tvorbu nových modelů, které by lépe zachytily zvláštnosti z aplikačních oblastí.

V základních rozhodovacích situacích obvykle předpokládáme, že subjekt volí mezi různými akcemi, které může provádět na základě daných pravidel hry, bez ohledu na to, jestli svým rozhodnutím vyvolá nějaké protiopatření okolí. Důležité je si uvědomit, že výsledek, který dosáhne hráč v dané hře, nezávisí čistě jen na akcích provedených daným hráčem, ale je také určen akcemi, které provedli ostatní hráči.

1.1. Stručná historie teorie her

Teorie her je jako samostatná vědní disciplína velmi mladá. Základy této matematické teorie byly položeny Johnem von Neumannem a Oskarem Morgensternem v roce 1944 vydáním publikace „Theory of Games and Economic Behavior[9].

Její historie však sahá mnohem dále.

První zmínky o teorii her se objevují v dopisech, které napsal James Waldegrave francouzskému matematikovi Pierre Raymond de Montmortrovi v roce 1713. James Waldegrave v nich popsal minimaxovou smíšenou strategii, kterou využil pro stanovení řešení tehdy populární karetní hry le Her pro 2 hráče [12]. Jeho cílem bylo nalézt takovou strategii, která by maximalizovala pravděpodobnost hráčova vítězství, bez ohledu na to jakou strategií zvolí protihráč.

V dalším století, v roce 1838 byla francouzským matematikem a filozofem Antoinem Augustinem Cournotem vydána kniha „Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth“, která obsahovala základní principy používané později v teorii her. V této publikaci Cournot zvažoval duopoly a představil řešení, které je dnes známe jako Nashův rovnovážný stav. Přesto, že Cournotova analýza je obecnější než Waldegravova, teorie her reálně neexistovala jako vědní obor, dokud John von Neumann nepublikoval sérii článků v roce 1928.

John von Neumann je považován za zakladatele teorie her. Jeho veškerou práci v oblasti teorie her shrnul v knize „ Theory of Games and Economics Behaviour [9], kterou vydal společně s Oscarem Morgensternem v roce 1944. Von Neumann v knize popsal metodu k nalezení řešení pro hry s konstantním součtem pro dva hráče, kterou považujeme za tehdejší velký průlom. Během předchozích let se výzkum teorie her zaměřoval převážně na teorii kooperativních her více hráčů (volby a volební procedury).

V 50. letech 20. století se teorie her začala bouřlivě rozvíjet. Nerozvíjela se pouze jako samostatná vědní disciplína, ale expandovala i do oborů jako je filozofie, biologie, ekonomie a politická věda.

Více o tom, kde byla teorie her aplikovaná v praxi je možné se dočíst v [8], [5],[2] a [10].

Kapitola 2

Předmět teorie her

Teorie her se zabývá řešením konfliktních rozhodovacích situací. S rozhodovacími situacemi se setkáme v běžném životě, kdekoli kde dochází ke střetu zájmů.

2.1. Základní pojmy teorie her

Teorie her se původně zabývala salonními hrami (např. šachy, poker). S tím souvisí poněkud odlišné pojmy, než na které jsme v ekonomii zvyklí. Pracujeme s následujícími pojmy:

Hra - každá konfliktní rozhodovací situace, určuje pravidla a podmínky, na základě kterých hráči volí své strategie. Všichni hráči musí být plně informováni.

Hráč - aktivní účastník dané hry, který svojí volbou může ovlivnit její výsledek.

Racionální (inteligentní) hráč - hráč, který se snaží maximalizovat svoji výhru.

Indiferentní (neinteligentní) hráč - hráč, kterého výsledek hry nezajímá. Tito hráči mají náhodný charakter.

Strategie - volba účastníka hry. Množina všech strategií určitého hráče se nazývá prostor strategií tohoto hráče.

Výplata hráče - kvantitativně vyjádřený výsledek hry. Výplata hráče je vždy závislá na volbě strategií všech hráčů, lze ji tedy vyjádřit jako funkci uvažovaných strategií. Předpis pro zisk v závislosti na zvolené strategii se nazývá **výplatní funkce hráče** [3].

Konfliktní rozhodovací situace musí splňovat určité podmínky:

- Musí být splněn minimální počet účastníků, tj. hra musí mít alespoň dva hráče.
- Aspoň jeden z hráčů musí být hráč inteligentní.
- Účastníci rozhodovací situace znají své i soupeřovi alternativy.
- Každý z účastníků volí svoji strategii z množiny možných strategií nezávisle na tom, jakou strategii volí jeho protivník.

Poznámka 1 *Za indiferentního účastníka považujeme přírodu nebo nějakou instituci. Za inteligentního hráče pak fyzickou osobu, právnickou osobu nebo skupinu lidí se stejným zájmem. Není-li v zadání určeno, jestli se jedná o indiferentního účastníka, pokládáme všechny účastníky za účastníky racionální.*

2.2. Klasifikace her podle různých kriterií

Konfliktních rozhodovacích situací je několik druhů. Je rozdíl v tom, jestli chceme najít nejlepší strategii, jak porazit soupeře nebo jestli hledáme například nejlevnější formu úvěru u banky. V obou případech dochází ke střetu zájmů, ale je zřejmé, že v druhém případě nejde o vzájemnou likvidaci [7].

Hry můžeme rozdělit do několika skupin z různých třídících hledisek. Tato rozdělení jsem čerpala z [3].

Konfliktní rozhodovací situace můžeme dělit podle počtu účastníků na **hry dvou hráčů** a **hry více hráčů**. Hry dvou hráčů se používají k popisu matematických modelů jednoduchých her, které se pak dále zobecňují. Hry více hráčů popisují chování lidi v koalici.

Dalším kritériem pro klasifikaci her je součet výplat všech hráčů, kde rozlišujeme hry s konstantním součtem a nekonstantním součtem. Hry s konstantním součtem nazýváme **antagonistické hry**, kterými se budeme podrobně zabývat ve třetí kapitole, a hry s nekonstantním součtem nazýváme jako **neantagonistické hry**. U neantagonistických konfliktů dále ještě rozlišujeme **kooperativní a nekooperativní hry**. Kde záleží na tom, jestli spolu hráči mohou spolupracovat a dohodnout se na strategii nebo ne.

Z hlediska počtu strategií dělíme hry na **konečné a nekonečné**. Konečné hry jsou takové hry, kde každý hráč má jen konečný počet strategií. V případě, že alespoň jeden z hráčů má nekonečný počet všech možných strategií, jedná se o hru nekonečnou.

Podle informace, kterou mají hráči k dispozici rozlišujeme **hry z úplnou informací** a **hry s neúplnou informací**.

Podle informací o důsledku volby dělíme hry na **deterministické a stochastické**. U deterministických her zvolíme-li strategii,víme přesně kolik vyhrajeme v závislosti na tom, jakou strategii zvolí protihráč. Prostřednictvím stochastických her vstupuje do hry náhoda. Zvolíme-li danou strategii, náš zisk je náhodná veličina s nějakým rozdělením pravděpodobnosti [3].

Podle počtu hraných her dělíme hry na hry řešené v **ryzích strategiích** a na hry řešené ve **smíšených strategiích**. Rozlišujeme situaci, kdy budeme hrát hru jen jednou a situaci, kdy budeme hru opakovat a jednotlivé strategie volit s určitou pravděpodobností.

Posledním kritériem podle kterého klasifikujeme hry je kritérium racionality hráčů. Hry dělíme na hry **racionálních hráčů** a tzv. **hry hrané proti přírodě**. Předpokládáme, že u her hraných proti přírodě je jeden hráč indiferentní.

2.3. Modely rozhodovacích situací

K popisu rozhodovacích situací využijeme prostředky matematické analýzy. Budeme rozlišovat tři základní modely:

1. Hra v normální tvaru

2. Hra ve tvaru charakteristické funkce

3. Hra v explicitním tvaru

Inspirací pro následující matematické modely mi byly [7] a [8].

Hra v normální tvaru

Základním matematickým modelem konfliktů je **hra v normálním tvaru**. Abychom hru mohli zapsat tímto způsobem, musí splňovat následující požadavky. Musíme vědět kdo je účastníkem hry, jaké jsou strategické možnosti účastníků a jakou výhru mohou získat při volbě každé z jejich strategií.

Následně si uvedeme definici pro zápis hry N hráčů v normálním tvaru.

Definice 2.3.1 *Nechť N je přirozené číslo udávající počet hráčů, $N \geq 2$ a $Q = \{1, 2, \ldots, N\}$ je množina všech hráčů. Nechť X_i je neprázdná množina všech strategií i-tého hráče. Nechť $M_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N \to \mathbb{R}$ je výherní funkce i-tého hráče, která přiřazuje hráči i hodnotu $M_i(\boldsymbol{x})$ pro každou strategii $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$.*
Uspořádanou $(2N{+}1)$-tici množiny $\{Q; X_1, \ldots, X_N; M_1(\boldsymbol{x}), \ldots, M_N(\boldsymbol{x})\}$ nazýváme hrou N hráčů v normálním tvaru [8].

Číslo $M_i(\boldsymbol{x})$ nazýváme výhrou *i-tého* hráče při strategiích $\boldsymbol{x}$. Funkce $M_i(\boldsymbol{x})$ se nazývá výplatní funkcí *i-tého* hráče.

Hra ve tvaru charakteristické funkce

V některých konfliktech je pro účastníky výhodné spolupracovat. Spolupráce vede ke zlepšení jejich výsledku v konfliktní situaci. Takové spolupracující skupiny nazýváme **koalice**. Pro posouzení síly a výhodnosti těchto kooperujících skupin je nutné znát celkovou hodnotu výhry koalice. Funkce, která každé z potenciálně možných koalic přiřazuje její celkovou možnou výhru se nazývá charakteristická funkce hry [7]. Konfliktní situace, která je dána charakteristickou funkcí se nazývá **hra ve tvaru charakteristické funkce**.

Definice 2.3.2 *Nechť N je přirozené číslo označující počet hráčů, $N \geq 2$ a $Q = \{1, 2, ..., N\}$ je množina všech hráčů. Podmnožiny množiny Q nazveme koalice. Charakteristickou funkcí hry s množinou hráčů Q nazveme množinovou funkci v* *definovanou na množině všech podmnožin množiny Q, pro kterou platí $v(\emptyset) = 0$ a pro všechny vzájemně disjunktní dvojice $Q_1, Q_2 \subset Q$ platí $v(Q_1 \cup Q_2) \geq v(Q_1) + v(Q_2)$. Dvojice $\{Q, v\}$ nazveme hra N hráčů ve tvaru charakteristické funkce.* [8]

Jednodušeji si můžeme charakteristickou funkci definovat podle [7] jako množinovou funkci, tj. funkci, která množinám hráčů (koalicím) přiřazuje jejich možné celkové výhry, tedy reálná čísla.

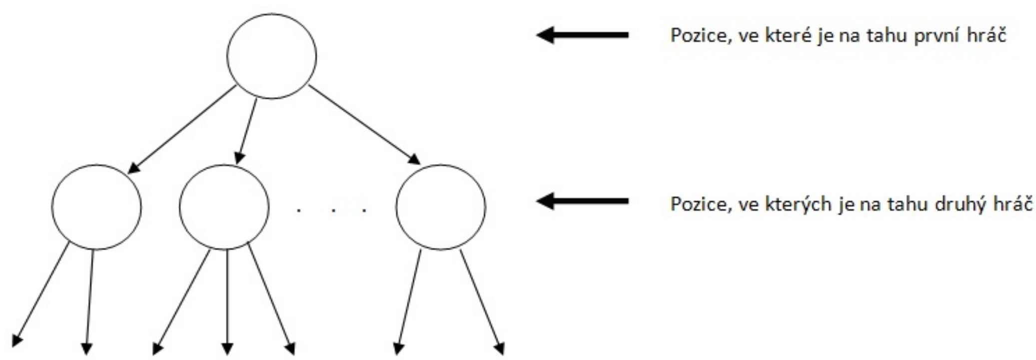
Je zřejmé, že pro zápis hry v charakteristickém tvaru potřebujeme znát počet všech účastníků konfliktu a výherní funkci pro všechny potenciální vytvořené koalice, tj. charakteristickou funkci.

Hra v explicitním tvaru

V případě hry v normálním tvaru a hry ve tvaru charakteristické funkce jsme uvažovali, že hráči vybírají vhodnou strategii současně, bez ohledu na pořadí. U hry v explicitním tvaru na pořadí záleží. Hráči vybírají své strategie postupně. Výběry strategií se nazývají **tahy**. K popisu všech tahů hry se používá graf, který nazýváme **strom hry**.

Z důvodu složitosti matematické definice zápisu hry v explicitním tvaru si ji nebudeme uvádět. Uvedeme si jen zjednodušený zápis pomocí stromu hry, který je uvedený v následujícím obrázku 2.1.

Graf, tj. strom hry, je dán uzly a hranami, který tyto uzly spojují. Jedná se tedy o souvislý graf bez cyklů [10].



Obrázek 2.1: Hra v explicitním tvaru

Typickým příkladem her, které můžeme zapsat v explicitním tvaru, jsou hry deskové, jako šachy nebo dáma. Stejně tak sem patří i karetní hry.

Použité značení

Pro srozumitelnou interpretaci naší teorie si zavedeme následující značení:

Q množina všech hráčů

X prostor strategií 1. hráče

Y prostor strategií 2. hráče

x strategie prvního hráče (máme-li hru s konečným počtem m strategií prvního hráče, můžeme značit x_i, kde $i = 1, ..., m$)

y strategie druhého hráče (máme-li hru s konečným počtem n strategií druhého hráče, můžeme značit y_j, kde $j = 1, ..., n$)

$M_1(x, y)$ výplatní funkce prvního hráče

$M_2(x, y)$ výplatní funkce druhého hráče

Kapitola 3

Antagonistické hry

Matematickým modelem antagonistické hry je hra dvou inteligentních hráčů, kteří se dělí o pevnou částku, tzv. o svoji výhru. Tato pevná částka je konstantní a označujeme ji písmenem K. Nezáleží na tom, jakou strategii si hráči zvolí, to co jeden hráč získá, druhý ztratí.

Antagonistická hra se dá definovat i pomocí výplatní funkce. V případě antagonistických her je možné omezit se na jednu výplatní funkci, protože pro všechna $x \in X$, $y \in Y$ platí

$$M_1(x, y) = -M_2(x, y) + K.$$

Známe-li hodnotu výplatní funkce prvního hráče $M_1(x, y)$ a číslo K, známe i hodnotu výplatní funkce druhého hráče $M_2(x, y)$.

V případě antagonistických her uvažujeme, že oba účastníci hry jsou inteligentní a každý z nich se snaží najít nejlepší řešení. Na základě těchto vlastností zavedeme pojem optimální strategie.

Optimální strategie je taková situace, kdy každý hráč hledá svoji strategii takovou, aby si pro každou strategii svého protihráče zajistil největší možnou výhru, resp. nejnižší možnou prohru [2]. O strategiích, které jsou definovány na základě toho principu, říkáme, že jsou to **strategie rovnovážného typu**. Přesněji jsou optimální strategie hráčů uvedeny v následující definici:

Definice 3.1 *Nechť*

$$\{Q = \{1, 2\}; X, Y; M_1(x, y), M_2(x, y)\} \tag{3.1}$$

je hra s konstantním součtem. Optimální strategií hráče 1 v této hře nazveme takovou strategii $\overline{x} \in X$, ke které existuje strategie $\overline{y} \in Y$ tak, že

$$M_1(x, \overline{y}) \leq M_1(\overline{x}, \overline{y}); M_2(\overline{x}, y) \leq M_2(\overline{x}, \overline{y}) \tag{3.2}$$

pro všechna $x \in X$, $y \in Y$. Strategii $\overline{y}$ potom nazveme optimální strategií hráče 2.

Je-li

$$\{Q = \{1, 2\}; X, Y; M(x, y)\} \tag{3.3}$$

hra s nulovým součtem, můžeme nerovnosti (3.2) zapsat ve tvaru

$$M(x, \overline{y}) \leq M(\overline{x}, \overline{y}) \leq M(\overline{x}, y) \tag{3.4}$$

.

Dvojici strategií $(\overline{x}, \overline{y})$ s vlastnostmi požadovanými v (3.2), popř. v (3.4) nazveme řešením úlohy v normálním tvaru (3.1), popř. (3.3). U her s nulovým součtem se číslo $M(\overline{x}, \overline{y})$ nazývá cena hry [6].

Následující věta ukazuje, že je možné se u her s konstantním součtem omezit pouze na případ, kdy $K = 0$.

Věta 3.1 *Nechť (3.1) je hra s konstantním součtem, $K \neq 0$. Potom $\overline{x}, \overline{y}$ jsou optimální strategie ve hře (3.1) tehdy a jen tehdy, jsou-li $\overline{x}, \overline{y}$ optimální strategie ve hře s nulovým součtem (3.3), kde $M(x, y) = M_1(x, y) - M_2(x, y)$.*

Důkaz této věty je uveden v [6, str.46].

3.1. Maticová hra

Antagonistický konflikt dvou inteligentních hráčů, pro které existuje pouze konečný počet možných strategií se nazývá tzv. **maticová hra**. Podle [4] je hlavním úkolem teorie maticových her objasnit, podle jakých pravidel mají hráči provést své volby tak, aby maximalizovali své výhry, případně minimalizovali své ztráty.

Teorie konečného antagonistického konfliktu je již dnes uzavřenou disciplínou dovedenou na hranici dokonalosti. Nelze očekávat žádné nové významnější výsledky.

Definice 3.1.1 *Konečnou hru s nulovým součtem*

$$\{Q = \{1,2\}; X = \{1,2,...,m\}, Y = \{1,2,...,n\}; M(i,j) = a_{ij}, i \in X, j \in Y\}, \tag{3.5}$$

kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

*je daná matice, nazveme **maticovou hrou*** [6].

Strategie x a y budeme v souvislosti s maticovými hrami označovat indexy i $(= x)$ a j $(= y)$, abychom zachovali obvyklé značení prvků vystupujících v matici. Matice (3.6) se nazývá **maticí hry**. Maticová hra je jí zcela určena.

Jak najít optimální strategii hráčů v maticové hře?

Existuje-li v matici **A** prvek a_{ij}, který je nejmenší na řádku a současně největší ve sloupci, můžeme tuto uspořádanou dvojici (i, j) nazvat optimální strategií. Tato optimální strategie se nazývá také **sedlový bod** matice **A**. Sedlový bod určuje cenu hry a strategie hráčů. Prvek i je strategií hráče 1 a prvek j strategií hráče 2.

Pokud matice, která určuje maticovou hru má sedlový bod, je nalezení rovnovážné situace velmi jednoduché. V případě, kdy sedlový bod neexistuje, je situace komplikovanější. Musíme najít jiný matematický model pro tento konflikt, pomocí něhož najdeme optimální strategii.

Zavedeme si matematický model, který udává pro každou strategii $i \in X$ a každou strategii $j \in Y$ pravděpodobnost, se kterou musí být zvolena. Opět uvažujeme model hry v normálním tvaru s konečným počtem možných strategií. Takto nově vzniklý prostor strategií budeme zapisovat do kulatých závorek.

Definice 3.1.2 *Nechť (3.5) je daná maticová hra. Hru dvou hráčů s nulovým součtem, jejíž prostory strategií jsou*

$$(X) = \{x^T = (x_1, ..., x_m); \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x \geq 0\}, \tag{3.7}$$

$$(Y) = \{y^T = (y_1, ..., y_n); \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, y \geq 0\} \tag{3.8}$$

a výplatní funkce

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T \boldsymbol{A} y$$

nazveme smíšeným rozšířením maticové hry (3.5).

Prvkům z prostorů X, Y se říká **strategie**, prvkům z prostorů $(X), (Y)$ se říká **smíšené strategie**. Smíšená strategie hráče 1 je tedy rozložení pravděpodobností na prostoru ryzích strategií X. Ryzí strategie jsou však také současně prvky prostoru (X), neboť např. smíšená strategie tvaru $(1, 0, ..., 0)$ vlastně říká, že s pravděpodobností 1 (s jistotou) zvolíme $i = 1$ a volba ostatních ryzích strategií má pravděpodobnost 0 [6].

V literatuře [5] je uvedeno, že o smíšených rozšířeních maticových her platí tato důležitá (tzv. základní věta teorie maticových her):

Věta 3.1.1 *Smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení.*

Důkaz můžeme najít v literatuře [5], [6], popř. [7].

3.2. Metody řešení maticových her

Metod pro hledání rovnovážných strategií antagonistických her je několik. Pro hledání rovnovážných strategií u maticových her si uvedeme tři metody. Nejuniverzálnější metodou je převod na úlohu lineárního programování, která se řeší postupy operační analýzy. Další dvě metody jsou vhodné pro speciální typy úloh. Metoda hledání sedlového bodu je jednou z nejjednodušších metod. Pomocí této metody hledáme rovnovážnou strategii ve strategiích čistých. Další metodou je metoda grafická, kterou je možné použít v případě, neexistuje-li čistá strategie a hráč 1 má pouze dvě možné strategie. Volba nejefektivnější metody zcela záleží na typu hry.

Metody hledání rovnovážných strategií:

- Hledání sedlového bodu
- Převod na úlohu lineárního programování
- Grafická metoda

3.2.1. Hledání sedlového bodu

Jednou z nejjednodušších metod je metoda hledání sedlového bodu. Existuje-li v matici rovnovážný bod v čistých strategiích, existuje v matici prvek, který je nejmenší na řádku a současně největší ve sloupci. Takto vzniklý prvek se nazývá sedlový bod matice hry. Prakticky výpočet provedeme následovně: označíme si největší prvek ve sloupci symbolem $\overbrace{}$ a současně nejmenší prvek v řádku podtrhneme. Nalezneme-li prvek, který je současně nejmenší v řádku a největší ve sloupci, nalezneme zmiňovaný sedlový bod, tedy rovnovážnou situaci.

Příklad 3.2.1.1 *Nechť hra dvou hráčů je popsaná maticí*

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Najděte sedlový bod matice.

Řešení příkladu:

Symbolem $\overbrace{}$ si označíme největší prvek ve sloupci a podtržením označíme nejmenší prvek v řádku. Prvek, který je nejmenší v řádku a současně největší ve sloupci se nazývá sedlový bod (prvek označený oběma symboly).

$$\begin{pmatrix} \overbrace{7} & 0 & \underline{-2} & 3 \\ 1 & \underline{-3} & 0 & 1 \\ 3 & \overbrace{3} & \overbrace{\underline{2}} & \overbrace{4} \\ 4 & 1 & 1 & \underline{-1} \end{pmatrix}$$

Sedlový bod je situace (3,3). Kde první číslo nám označuje řádek a druhé sloupec. Tato rovnovážná situace nastane v případě, že si první hráč zvolí strategii x_3 a druhý hráč strategii y_3.

Sedlový bod nemusí vždy existovat. Ukážeme si na následujícím příkladu.

Příklad 3.2.1.2 *Najděte sedlový bod matice:*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení příkladu:

Opět si označíme nejmenší prvky v řádcích a největší prvky ve sloupcích.

$$\begin{pmatrix} 3 & \underline{-1} & 0 & 2 \\ \overbrace{5} & \underline{0} & \overbrace{4} & 1 \\ 2 & \overbrace{3} & \underline{1} & \overbrace{3} \end{pmatrix}$$

Hra nemá řešení v čistých strategiích, protože ve hře dané touto maticí neexistuje sedlový bod. Budeme hledat řešení ve strategiích smíšených.

3.2.2. Převod na úlohu lineárního programování a řešení této úlohy pomocí programu Excel Řešitel

Rovnovážné strategie u maticových her je možné určit převodem na úlohu lineárního programování.

Uvažujme maticovou hru s maticí v obecném tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a vektory pravděpodobností pro hráče 1 a hráče 2:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m), \quad x_1 + ... + x_m = 1, \quad x_i \geq 0, \quad pro\ \forall\ i \in \{1, ..., m\},$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n,) \quad y_1 + ... + y_n = 1, \quad y_j \geq 0, \quad pro\ \forall\ j \in \{1, ..., n\}.$$

Za předpokladu, že matice **A** má všechny prvky kladné, můžeme maticovou hru převést na úlohu lineárního programování. Pokud matice **A** nemá všechny prvky kladné, platí následující věta:

Věta 3.2.2.1 *Pro rovnovážné situace v maticové hře platí, že rovnovážné strategie smíšeného rozšíření maticové hry se nemění, přičteme-li ke každému prvku matice hry kladné nebo záporné číslo k. Cena hry s takto pozměněnou maticí je c+k, kde c je cena původní hry.* [8]

Podle [8] a [3] si uvedeme postup pro odvození výpočtu maticové hry převodem na úlohu lineárního programování:

Pomocí následující soustavy nerovnic lze vyjádřit požadavek, aby optimální strategie hráče 1 tomuto hráči zajistila výhru nejméně v hodnotě ceny výhry c, ať už hráč 2 volí jakoukoliv ze svých strategií:

$$c = \min_{j \in \{1,2,...,n\}} (a_{1j} \cdot x_1 + a_{2j} \cdot x_2 + ... + a_{mj} \cdot x_m) \tag{3.9}$$

$$c \leq a_{1j} \cdot x_1 + a_{2j} \cdot x_2 + ... + a_{mj} \cdot x_m \qquad pro \ \forall \ j \in \{1, 2, ..., n\}$$

Očekávána hodnota výhry prvního hráče tedy neklesne pod číslo c, pokud se hráč 1 bude řídit mechanismem výběru popsaným vektorem $(x_1, ..., x_m)$.

Obě strany nerovnic vynásobíme odpovídajícím y_j:

$$y_1 \cdot c \leq y_1 \cdot (a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 + ... + a_{m1} \cdot x_m)$$
$$y_2 \cdot c \leq y_2 \cdot (a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{m2} \cdot x_m)$$
$$\vdots$$
$$y_n \cdot c \leq y_n \cdot (a_{1n} \cdot x_1 + a_{2n} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_m)$$

Součet všech nerovnic:

$$(y_1 + y_2 + ... + y_n) \cdot c \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot a_{ij} \cdot y_j = x^T \mathbf{A} y$$

Pro výraz $(y_1 + y_2 + ... + y_n)$ platí, že $(y_1 + y_2 + ... + y_n) = 1$.
Obě strany výchozích nerovnic $c \leq a_{1j} \cdot x_1 + a_{2j} \cdot x_2 + ... + a_{mj} \cdot x_m$ vydělíme číslem c:

$$1 \leq a_{1j} \cdot \frac{x_1}{c} + a_{2j} \cdot \frac{x_2}{c} + ... + a_{mj} \cdot \frac{x_m}{c} \qquad j = 1, ..., n.$$

Zavedeme substituci $p_i = \frac{x_i}{c}$, $i = 1, ..., m$ a účelovou funkci $p_1+p_2+...+p_m = \frac{1}{c}$

$$1 \leq a_{1j} \cdot p_1 + a_{2j} \cdot p_2 + ... + a_{mj} \cdot p_m, \quad j = 1, ..., n$$

Problém se převede na problém lineárního programování:

První hráč chce minimalizovat hodnotu účelové funkce s cílem získat co největší výhru:

$$\min \left(\frac{1}{c}\right) = \min \ p_1 + p_2 + ... + p_m$$

za podmínek

$1 \leq a_{1j} \cdot p_1 + a_{2j} \cdot p_2 + ... + a_{mj} \cdot p_m$, kde $j = 1, 2, ...n$ a $p_i = \frac{x_i}{c}$ $\quad p_i \geq 0$.

Analogicky provedeme odvození pro druhého hráče. Ten chce hodnotu účelové funkce maximalizovat proto, aby jeho prohra byla co nejmenší:

$$\max \left(\frac{1}{c}\right) = \max \ q_1 + q_2 + ... + q_n$$

za podmínek

$1 \leq a_{i1} \cdot q_1 + a_{i2} \cdot q_2 + ... + a_{in} \cdot q_n$, kde $i = 1, 2, ..., m$ a $q_j = \frac{y_j}{c}$ $\quad q_i \geq 0$. Je-li c výhra prvního hráče, pak je to i prohra hráče druhého. Očekávaná prohra druhého hráče nesmí být větší než cena hry, ať už první hráč volí kteroukoli ze svých strategií.

Maximalizační problém, který je řešením maticové hry pro hráče 2 je duálním problémem k minimalizační úloze hráče 1.

K řešení úlohy lze využít i různé matematické softwary jako např. Matlab, Microsoft Office Excel, Tomlab a další. Mezi nejdostupnější softwarové nástroje patří funkce Řešitel, která je součástí Microsoft Office Excel. Použití této funkce si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 3.2.2.1 *Převeďte maticovou hru popsanou maticí* $\boldsymbol{A}$ *na úlohu lineárního programování a úlohu vyřešte. Pro výpočet použijte program Microsoft Excel, funkci Řešitel.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

***Řešení příkladu**: V matici A se objevují záporné prvky, přičtením čísla 2 získáme matici hry pouze s prvky kladnými.*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

***Úloha lineárního programování z hlediska prvního hráče**:*

$$\min \quad p_1 + p_2$$

za podmínek:

$$4p_1 + 5p_2 \geq 1$$

$$p_1 + 2p_2 \geq 1$$

$$6p_1 + 3p_2 \geq 1$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$$

***Úloha lineárního programování z hlediska druhého hráče**:*

$$\max \quad q_1 + q_2 + q_3$$

za podmínek:

$$4q_1 + q_2 + 6q_3 \leq 1$$

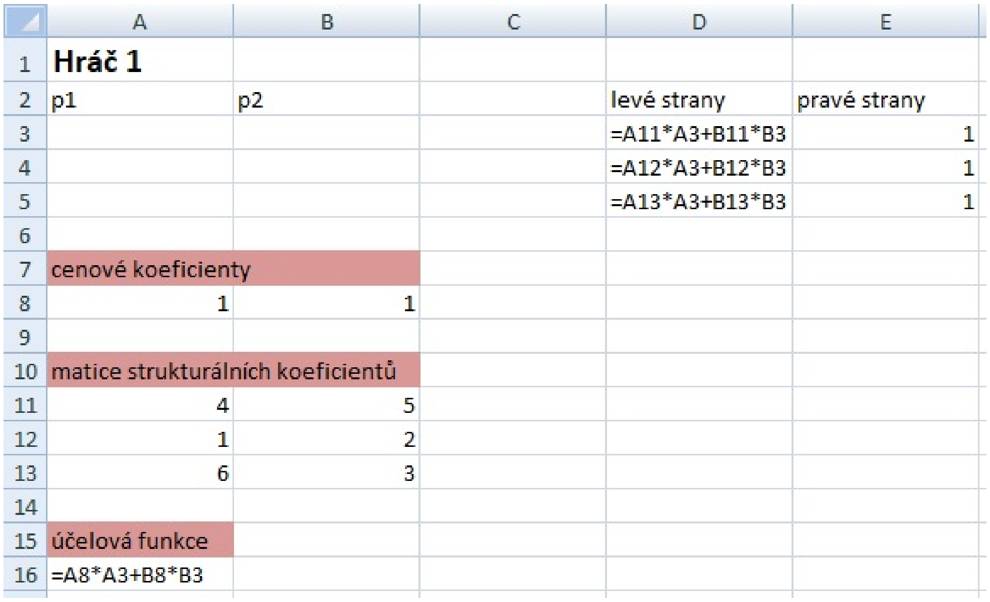
$$5q_1 + 2q_2 + 3q_3 \leq 1$$

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0$$

Řešení úlohy lineárního programování pomocí funkce Řešitel:

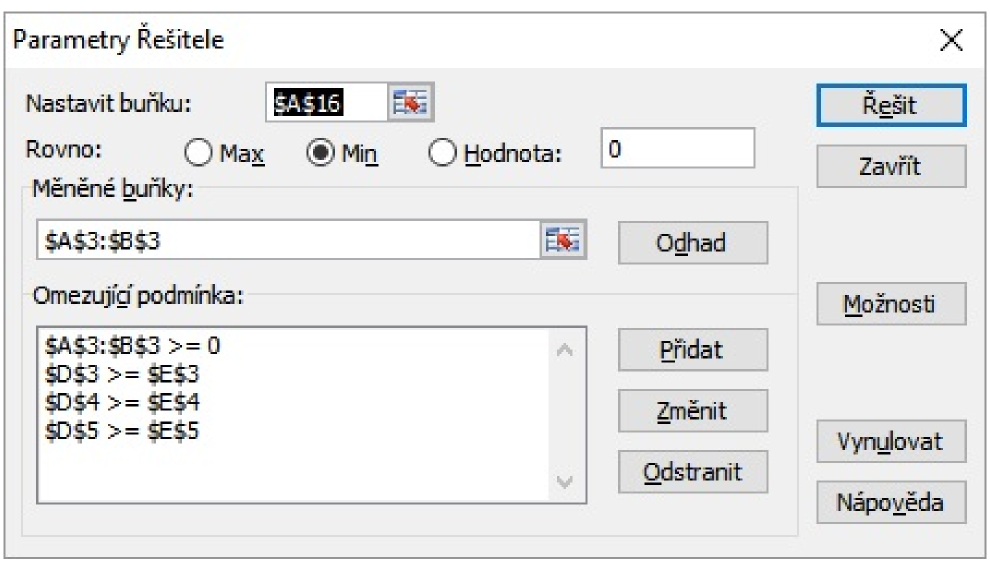
Pro řešení daného příkladu si připravíme následující tabulku. Zkontrolujeme, že odkazy ve vzorcích ukazují na buňky s daty. Očekávané hodnoty p_1 *a* p_2 *budou vypočítány v buňkách A3 a B3 a hodnota účelové funkce v buňce A16.*

*V horní liště programu Excel vybereme záložku **data** a zvolíme funkci Řešitel. Doplníme požadované údaje:*



	A	B	C	D	E
1	**Hráč 1**				
2	p1	p2		levé strany	pravé strany
3				=A11*A3+B11*B3	1
4				=A12*A3+B12*B3	1
5				=A13*A3+B13*B3	1
6					
7	cenové koeficienty				
8	1	1			
9					
10	matice strukturálních koeficientů				
11	4	5			
12	1	2			
13	6	3			
14					
15	účelová funkce				
16	=A8*A3+B8*B3				

Obrázek 3.1: Požadované údaje doplněné do tabulky v Excelu



Obrázek 3.2: Řešitel pro prvního hráče

Výsledek se zobrazí v námi připravené tabulce:

	A	B	C	D	E
1	**Hráč 1**				
2	p1	p2		levé strany	pravé strany
3	0	0,5		2,5	1
4				1	1
5				1,5	1
6					
7	cenové koeficienty				
8	1	1			
9					
10	matice strukturálních koeficientů				
11	4	5			
12	1	2			
13	6	3			
14					
15	účelová funkce				
16	0,5				

Obrázek 3.3: Výsledná tabulka pro prvního hráče

Řešením této úlohy první hráče jsou hodnoty $p_1 = 0$, $p_2 = 0,5$, *hodnota účelové funkce je* $0,5$. *Původní matice* $\boldsymbol{A}$ *nemá všechny prvky kladné, proto jsme museli přičíst konstantu. Předchozí řešení úlohy, tedy není řešením původní matice* A. *Musíme jej dopočítat pomocí zavedené substituce* $p_i = \frac{x_i}{c}$, $i = 1, ..., m$ *a účelovou funkci* $p_1 + p_2 = \frac{1}{c}$.

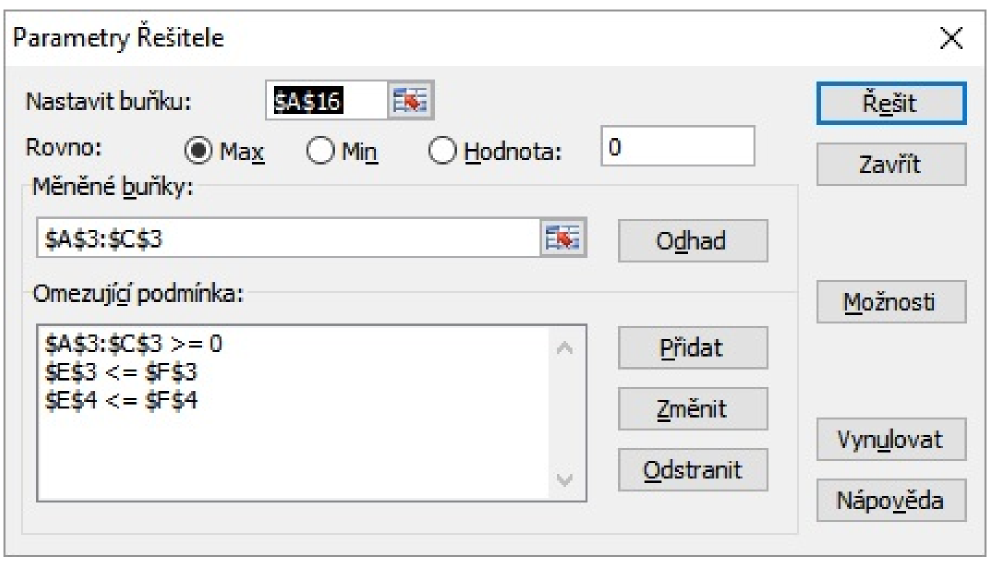
Dosazením hodnot p_1 *a* p_2 *do účelové funkce* $p_1 + p_2 = \frac{1}{c}$ *získáme hodnotu účelové funkce* $c + k$, *která je rovna* 2. *Odečtením konstanty* $k = 2$, *získáme hodnotu původní účelové funkce, která je rovna* 0. *Stejným způsobem získáme hodnoty* x_1 *a* x_2. *Řešením původní matice* $\boldsymbol{A}$ *jsou tedy hodnoty* $x_1 = 0$ *a* $x_2 = 1$ *a hodnota účelové funkce je* 0.

Analogicky řešíme úlohu hráče 2. Připravená tabulka:

	A	B	C	D	E	F
1	**Hráč 2**					
2	q1	q2	q3		levé strany	pravé strany
3					=A11*A3+B11*B3+C11*C3	1
4					=A12*A3+B12*B3+C12*C3	1
5						
6						
7	cenové koeficienty					
8	1	1	1			
9						
10	matice strukturálních koeficientů					
11	4	1	6			
12	5	2	3			
13						
14						
15	účelová funkce					
16	=A8*A3+B8*B3+C8*C3					

Obrázek 3.4: Požadované údaje doplněné do tabulky v Excelu

Požadované údaje nástroje Řešitel:



Obrázek 3.5: Řešitel pro druhého hráče

Výsledná tabulka:

	A	B	C	D	E	F
1	**Hráč 2**					
2	q1	q2	q3		levé strany	pravé strany
3	0	0,5	0		0,5	1
4					1	1
5						
6						
7	cenové koeficienty					
8	1	1	1			
9						
10	matice strukturálních koeficientů					
11	4	1	6			
12	5	2	3			
13						
14						
15	účelová funkce					
16	0,5					

Obrázek 3.6: Výsledná tabulka pro druhého hráče

Hodnota účelové funkce prvního hráče se musí rovnat hodnotě účelové funkce druhého hráče. V daném příkladě je hodnota účelové funkce $0,5$*. Výsledné hodnoty úlohy druhého hráče jsou* $q_1 = 0$, $q_2 = 0,5$ *a* $q_3 = 0$.
Opět je nutné řešení této úlohy přepočítat pro původní matici $\boldsymbol{A}$*. Řešení úlohy dopočítáme pomocí zavedené substituce* $q_i = \frac{y_j}{c}$, $j = 1, ..., n$ *a účelové funkce* $q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{c}$.
Řešením původní matice $\boldsymbol{A}$ *jsou hodnoty* $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ *a* $y_3 = 0$ *a hodnota účelové funkce je* 0.

Cílem každého z hráčů je získat co největší výhru pomocí vhodně zvolené strategie a zajistit tak prohru ostatních hráčů.
Inspirací k řešení tohoto příkladu mi byla literatura [8].

3.2.3. Grafická metoda

Máme-li maticovou hru ve tvaru $2 \times n$ nebo $m \times 2$, tj. jeden z hráčů vybírá pouze ze dvou strategií, můžeme ji řešit grafickou metodou. Řešení pak zakreslujeme do soustavy souřadnic.

Maticová hra typu $2 \times n$

Předpokládejme, že maticová hra daná maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \dots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; \dots \; a_{2n} \end{pmatrix}$$

nemá sedlový bod.
Hledáme optimální smíšené strategie $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, pro které platí:

$x_1 + x_2 = 1$, $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$; $x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$, $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $y_j \in \langle 0, 1 \rangle$.

Uvažujeme funkce

$$M_j(x_1) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 = (a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Tyto funkce interpretují střední hodnotu výhry prvního hráče, resp. prohry druhého hráče, v případě, že druhý hráč zvolí $j - tou$ strategii. Druhý hráč bude volit takovou strategii, kde střední hodnota prohry je nejmenší.
Graficky znázorníme části těchto přímek pro $x_1 \in \langle 0, 1 \rangle$.

Cílem druhého hráče je minimalizovat svoji prohru (resp. minimalizovat výhru prvního hráče). Zavedeme funkci:

$$M(x_1) = \min_j \quad M_j(x_1),$$

kde $M(x_1)$ je minimální prohra druhého hráče v případě, že první hráč použije mechanismus volby popsaný rozdělením (x_1, x_2).

Cílem prvního hráče je maximalizovat svoji výhru vhodnou volbou hodnoty x_1. Hledáme hodnotu x_1^* takovou, že

$$M(x_1^*) = \max_{x_1} \quad M(x_1).$$

Řešením hry je pak

$$v = M(x_1^*),\ X = (x_1^*, 1 - x_1^*),$$

kde písmenem v označujeme cenu hry první hráče, resp. střední hodnotu výhry prvního hráče.

Hodnoty $y_1, y_2, \ldots, y_n$ určíme pomocí matice soustavy lineárních rovnic tak, že budeme hledat nenulové hodnoty y_k, y_l, které odpovídají přímkám $M_k(x_1)$ a $M_l(x_1)$ a protínají se v bodě (x_1^*, v).

Řešíme soustavu rovnic, kde hledáme hodnoty y_k a y_l:

$$a_{1k} \cdot y_k + a_{1l} \cdot y_l = v$$

$$a_{2k} \cdot y_k + a_{2l} \cdot y_l = v.$$

Ať už zvolí první hráč variantu k nebo l, bude očekávaná prohra druhého hráče rovna číslu v. Označme si matici této soustavy písmenem B.
Dále víme, že podle **Cramerova pravidla** musí platit:

$$y_k = \frac{(a_{2l} - a_{1l}) \cdot v}{det(B)} \qquad y_l = \frac{(a_{1k} - a_{2k}) \cdot v}{det(B)}.$$

Zároveň víme, že platí:

$$a_{1k} \cdot x_1^* + a_{2k} \cdot x_2^* = v$$

$$a_{1l} \cdot x_1^* + a_{2l} \cdot x_2^* = v,$$

kde

$$x_1^* = \frac{(a_{2l} - a_{2k}) \cdot v}{det(B)}$$

$$x_2^* = \frac{(a_{1k} - a_{1l}) \cdot v}{det(B)}.$$

Střední hodnota výhry prvního hráče je rovna v, ať už druhý hráč zvolí strategii k nebo l.
Odtud:

$$\frac{det(B)}{v} = \frac{a_{2l} - a_{2k}}{x_1^*}, \qquad \frac{det(B)}{v} = \frac{a_{1k} - a_{1l}}{x_2^*},$$

tj.

$$\frac{a_{2l}-a_{2k}}{x_1^*}=\frac{a_{1k}-a_{1l}}{x_2^*}=\frac{a_{1k}-a_{1l}}{1-x_1^*}.$$

$$(a_{2l}-a_{2k})\cdot(1-x_1^*)=(a_{1k}-a_{1l})\cdot x_1^*$$

$$a_{2l}-a_{2k}-x_1^*\cdot(a_{2l}-a_{2k})=x_1^*(a_{1k}-a_{1l})$$

$$a_{2l}-a_{2k}=x_1^*\cdot(a_{1k}-a_{1l}+a_{2l}-a_{2k})$$

$$x_1^*=\frac{a_{2l}-a_{2k}}{(a_{1k}-a_{1l}+a_{2l}-a_{2k})}.$$

Srovnáme hodnoty pro x_1^*:

$$\frac{(a_{2l}-a_{2k})\cdot v}{det(B)}=\frac{a_{2l}-a_{2k}}{(a_{1k}-a_{1l}+a_{2l}-a_{2k})}.$$

Ze srovnání plyne:

$$\frac{det(B)}{v}=a_{1k}-a_{1l}+a_{2l}-a_{2k}\equiv a.$$

Potom:

$$x_1=\frac{a_{2l}-a_{2k}}{a},\qquad x_2=\frac{a_{1k}-a_{1l}}{a},$$

$$y_k=\frac{a_{2l}-a_{1l}}{a},\qquad y_l=\frac{a_{1k}-a_{2k}}{a}.$$

Inspirací pro toto odvození mi byla literatura [11].

Příklad 3.2.3.1 *Řešte maticovou hru s maticí* $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4&7\\9&6&3\end{pmatrix}$.

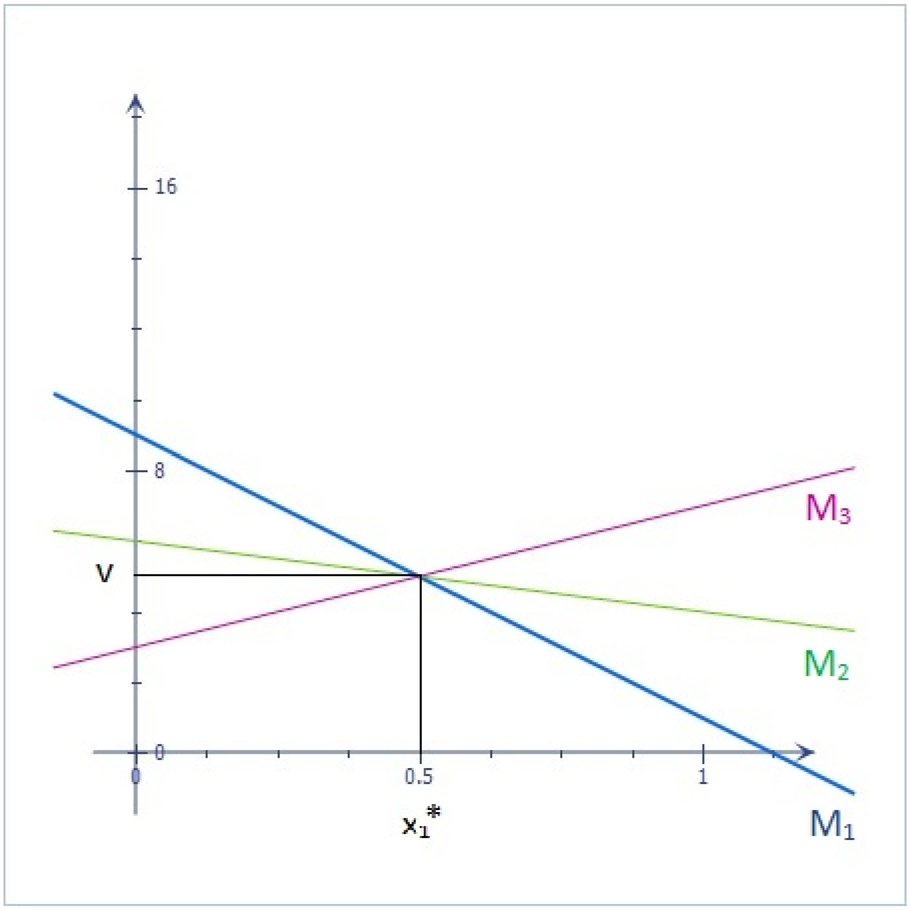
Daná maticová hra nemá sedlový bod. Budeme ji řešit graficky.

Následující přímky zakreslíme do grafu maticové hry:

$$M_1(x_1)=1x_1+9x_2=-8x_1+9,$$

$$M_2(x_1)=4x_1+6x_2=-2x_1+6,$$

$$M_3(x_1)=7x_1+3x_2=\quad 4x_1+3.$$



Obrázek 3.7: Grafické řešení dané maticové hry

Maximum funkce $M(x_1)$ nabývá v průsečíku přímek $M_1 \cap M_3$. Proto $y_2 = 0$. Nemá smysl volit strategii 2, protože druhý hráč by tak ještě více ztratil. Tudíž hledáme správnou "rovnováhu"pouze mezi strategiemi 1 a 3.
Ostatní složky určíme řešením matice soustavy lineárních rovnic:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Optimální strategie obou hráčů a cena hry jsou:

$$X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad Y = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \qquad v = 5.$$

Maticová hra typu $m \times 2$

Maticová hra typu $m \times 2$ se řeší analogicky.
Předpokládejme, že maticová hra daná maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$$

nemá sedlový bod.
Hledáme optimální smíšené strategie $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m), Y = (y_1, y_2)$, pro které platí $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1, y_1 + y_2 = 1; x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2 \geq 0$.
Uvažujeme funkce

$$M_i(y_1) = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 = (a_{i1} - a_{i2})y_1 + a_{i2}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Graficky znázorníme části těchto přímek pro $y_1 \in \langle 0, 1 \rangle$.

Zavedeme funkci:

$$M(y_1) = \max_i \quad M_i(y_1).$$

Cílem druhého hráče je minimalizovat svou prohru (resp. maximalizovat svoji výhru) vhodnou volbou hodnoty y_1.
Hledáme tedy hodnotu y_1^* takovou, že

$$M(y_1^*) = \min_{y_1} \quad M(y_1).$$

Řešením hry je pak

$$v = M(y_1^*),\ Y = (y_1^*, 1 - y_1^*).$$

Hodnoty $x_1, x_2, \ldots x_m$ určíme stejným způsobem jako u matice typu $2 \times n$.
Inspirací proto odvození řešení maticové hry tyu $m \times 2$ mi opět byla literatura [11].

Příklad 3.2.3.1 *Řešte maticovou hru s maticí* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

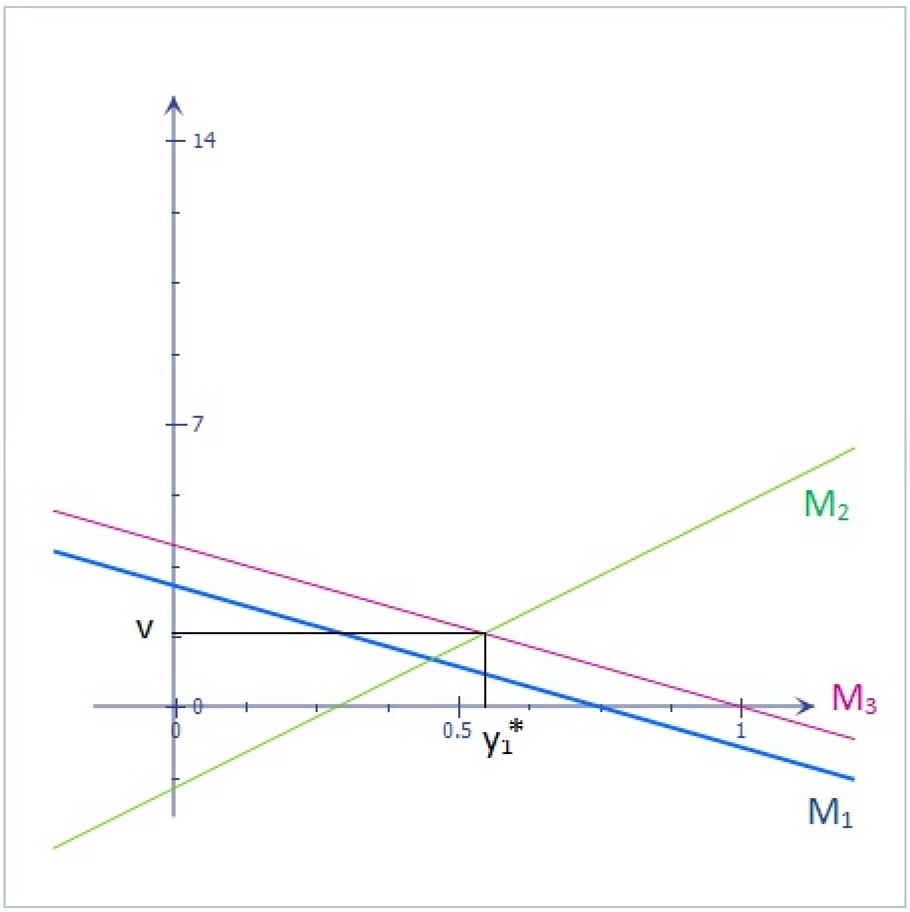
Daná maticová hra nemá sedlový bod. Budeme ji řešit graficky.

Následující přímky zakreslíme do grafu maticové hry:

$$M_1(y_1) = -1y_1 + 3y_2 = -4y_1 + 3,$$

$$M_2(y_1) = \ 5y_1 - 2y_2 = \quad 7y_1 - 2,$$

$$M_3(y_1) = \qquad\quad 4y_2 = \ -4y_1 + 4.$$



Obrázek 3.8: Grafické řešení dané maticové hry

Maximum funkce $M(y_1)$ nabývá v průsečíku přímek $M_2 \cap M_3$. Proto $x_1 = 0$. Ostatní složky určíme řešením maticové hry s maticí

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Optimální strategie obou hráčů a cena hry jsou:

$$X = \left(0, \frac{4}{11}, \frac{-7}{11}\right), \qquad Y = \left(\frac{6}{11}, \frac{5}{11}\right), \qquad v = \frac{20}{11}.$$

3.3. Využití maticových her v ekonomii

V úvodní kapitole této práce jsme si uvedli, že obecně teorie her analyzuje široké spektrum konfliktních rozhodovacích situací, se kterými se setkáváme každý den v běžném životě.

Teorie her se nezabývá pouze salonními hrami, ale je aplikovaná i v různých oblastech jako je ekonomie, sociologie, psychologie a další. V této krátké kapitole se zaměříme na využití teorie her v ekonomii, konkrétně využití maticových her v ekonomii.

Veškeré podnikatelské subjekty denně čelí nejrůznějším konfliktním rozhodovacím situacím, ve kterých se snaží dosáhnout svých podnikových cílů. Mezi tyto cíle patří maximalizace zisku, minimalizace nákladů, zvyšování tržního podílu, maximalizace tržní hodnoty apod. Svá rozhodnutí volí v závislosti na chování ostatních účastníků rozhodovací situace [1]. Účastníky těchto rozhodovacích situací mohou být jiné podniky, stát a nebo náhodné mechanismy jako tržní poptávka, inflace, daňová sazba, ...).

Uvedeme si jednoduchý příklad využití maticové hry v ekonomii. Inspirací pro tento příklad mi byla [2].

Příklad 3.3.1 *Představíme si jednoduchou situaci, máme dva managery ve firmě, kteří si konkurují. Vedení firmy dalo těmto manažerům dva úkoly. Odměna za první úkol A je 40 000 Kč a za druhý úkol B je 25 000 Kč.*
Oba manažeři jsou nuceni se rozhodnout, jak úkoly vyřešit. Každý z nich chce získat větší odměnu než ten druhý. Oba mohou pracovat na jednom (i stejném) úkolu nebo se mohou rozhodnout pro spolupráci.
Výsledek prvního managera závisí na jeho rozhodnutí, ale také na rozhodnutí managera druhého. Situaci můžeme zapsat do následující tabulky. V první části ta-

bulky jsou odměny prvního managera a v druhé části tabulky jsou odměny druhého managera.

Úkoly A a B	Odměny prvního managera			Odměny druhého managera		
	A	B	A i B	A	B	A i B
A	20 000 Kč	40 000 Kč	25 000 Kč	20 000 Kč	25 000 Kč	40 000 Kč
B	25 000 Kč	12 500 Kč	40 000 Kč	40 000 Kč	12 500 Kč	52 500 Kč
A i B	40 000 Kč	52 500 Kč	32 500 Kč	25 000 Kč	40 000 Kč	32 500 Kč

Obrázek 3.9: Tabulka odměn obou managerů

Pokud budou oba manageři pracovat na stejném úkolu (tedy spolupracovat), musí si rozdělit odměnu na půl.
Cílem jejich rozhodnutí je získat více než druhý. Do následující tabulky si zapíšeme výsledek pro prvního managera v případě, že oba spolupracují na prvním úkolu. Výsledek pro druhého managera bude přesně opačný.

Úkoly A a B	Odměny prvního managera		
	A	B	A i B
A	0 Kč	15 000 Kč	-15 000 Kč
B	-15 000 Kč	0 Kč	-12 500 Kč
A i B	15 000 Kč	12500	0

Obrázek 3.10: Tabulka hodnot pro prvního managera

Hra zapsaná v tabulce 3.10 se nazývá ***hra s nulovým součtem****.*
Z teorie, kterou jsme si uvedli v kapitole o maticových hrách vyplývá to, že výplaty hráčů jsou opačné. Znamená to, že to, co získá jeden, druhý ztratí. V této situaci není možná dohoda hráčů.

Při volbě rozhodnutí vycházíme z předpokladu antoginismu obou hráčů. Každý z managerů volí své strategie podle odpovědi protihráče a vybírá tu strategii, která mu přinese nejlepší výsledek.

Vhodnou volbu strategií obou managerů určíme pomocí pravidla minimaxu a maximinu.

Nejlepší strategii prvního managera získáme nalezením maximinové výplaty, tj.

$$\max\{\min(0, 15000, -15000); \min(-15000, 0, -12500); \min(15000, 12500, 0)\} = 0$$

Nejlepší strategii druhého managera získáme nalezením minimaxové výplaty, tj.

$$\min\{\max(0, -15000, 15000); \max(15000, 0, 12500); \max(-15000, -12500, 0)\} = 0$$

Oba tedy musí zvolit strategii ***A i B****, jinak bude jejich odměna menší než odměna druhého. Přestože si oba konkurují a chtějí každý sám získat co nejvíce, je pro ně v této situaci nejlepší spolupracovat, vyřešit oba úkoly a rozdělit si obě dvě odměny.*

Závěr

Cílem práce bylo se seznámit s teorií her jako samostatnou vědní disciplínou, která se zabývá konfliktními rozhodovacími situacemi, se kterými se setkáváme kdekoli, kde dojde ke střetu zájmů. Teorie her je velmi rozsáhlá matematická teorie. Z důvodu omezeného rozsahu této práce jsem se mohla zaměřit pouze na její část, kterou tedy byly antagonistické hry.

Na začátku práce jsme se seznámili s teorií her jako matematickou disciplínou a s jejím stručný historickým vývojem. Představili jsme si i některé osobnosti matematické teorie her.

V druhé části práce jsme si vysvětlili základní pojmy a definice z oblasti teorie her. Získali jsme přehled o základních vlastnostech strategií a klasifikovali jsme si hry do skupin podle různých kritérií.

V poslední a současně nejobsáhlejší části této práce jsme se věnovali antagonistickým hrám. Podrobněji jsme si vysvětlili základní definice a vlastnosti týkající se těchto her. Seznámili jsme se se třemi metodami řešení maticových her a získané teoretické poznatky jsme aplikovali na příklady. Na závěr jsme si uvedli využití maticových her v ekonomii a interpretovali jsme jej na jednoduchém příkladu.

Tato práce pro mě byla přínosná, neboť jsem díky ní získala širší povědomí o rozhodovacích situacích. Obohatila jsem si své znalosti matematické teorie her. V neposlední řadě jsem se také naučila využívat funkci Řešitel, která je součástí MS Excel a také jsem využila doplňku MS Word - Mathematics, ve které jsem vytvářela grafy.

Literatura

[1] Doubravová, H.: *Využití teorie her při řešení konfliktních situací.* České Budějovice, 2007. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. [online]. Dostupné z: https://theses.cz/id/tvv0ry/downloadPraceContent_adipIdno_7980, [cit. 15. 4. 2018]

[2] Fialová, M.: *Teorie her jako téma pro matematický seminář.* Brno, 2007. Diplomová práce. Masarykova univerzita v Brně. [online]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/246561/pedf_c/Diplomova_prace_-_teorie_her.doc, [cit. 12. 2. 2018]

[3] Frieb, J.: *Teorie her 1.* [online]. Dostupné z: http://www2.ef.jcu.cz/~jfrieb/prednasky_komplet/skriptaRM_TH.pdf, [cit. 25. 2. 2018]

[4] Kolektiv autorů: *Ekonomické aplikace teorie her.* Praha: Dům techniky ČSVTS, 1985.

[5] Maňas, M.: *Teorie her a její ekonomické aplikace.* 1.vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1983.

[6] Maňas, M.: *Teorie her a optimální rozhodování.* 1.vydání. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, n.p., 1974

[7] Maňas, M.: *Teorie her a konflikty zájmů.* 1. vydání. Praha: Vysoká škole ekonomická v Praze, 2002. ISBN 80-245-0450-2

[8] Mielcová, E.: *Teorie her a ekonomické rozhodování.* 1.vydání. Ostrava: X-MEDIA servis s.r.o., 2012. ISBN 978-80-7248-763-9

[9] Neumann, J. von- Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic behaviour.*1.vydání. Princeton: Princeton University Press, 1944.

[10] Nováková, K.: *Teorie her v ekonomické praxi.* Pardubice, 2010. Bakalářská práce. Univerzita Pardubice. [online]. Dostupné z: http://docplayer.cz/4955870-Teorie-her-v-ekonomicke-praxi.html [cit. 26. 2. 2018]

[11] Šmerek, M.: *Operační výzkum - Teorie her*. [online]. Dostupné z: https://moodle.unob.cz/pluginfile.php/35531/mod_resource/content/2/OV_T18.pdf [cit.20. 3. 2018]

[12] Le her, dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Le_Her, [cit. 12. 2. 2018].