



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ ÚSTAV  
MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

# NAPĚŤOVÁ, DEFORMAČNÍ A SPOLEHLIVOSTNÍ ANALÝZA SVAŘOVANÉ RÁMOVÉ KONSTRUKCE

STRESS, DEFORMATION AND SAFETY ANALYSIS OF THE WELDED FRAME CONSTRUCTION

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. JIŘÍ KRÁL

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

prof. RNDr. Ing. JAN VRBKA, DrSc., dr. h. c.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2012/2013

## **ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**

student(ka): Bc. Jiří Král

kteřý/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### **Napěťová, deformační a spolehlivostní analýza svařované rámové konstrukce**

v anglickém jazyce:

#### **Stress, deformation and safety analysis of the welded frame construction**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Výpočtové modelování napjatosti a deformace svařované konstrukce rámu přetáčení palet pomocí metody konečných prvků (MKP) programem ANSYS, případně jiným. Podrobnější analýza v oblasti svařovaných spojů. Posouzení spolehlivosti dle příslušných norem. Případný návrh konstrukčních úprav.

Cíle diplomové práce:

Výpočtové stanovení napjatosti, deformace a spolehlivosti svařované rámové konstrukce se zaměřením na oblast svárů. Posouzení vlivu hustoty svárů a případně jejich velikosti na napjatost a deformaci. Výpočet tuhosti konstrukce.

Seznam odborné literatury:

Janiček,P.,Ondráček,E.,Vrbka,J.,Burša,J.: Mechanika těles. Pružnost a pevnost I. CERM, 2004

Ondráček,E.,Vrbka,J.,Janiček,P.,Burša,J.: Mechanika těles. Pružnost a pevnost II. CERM, 2006

Madenci,E.,Güven,I.: The finite element method and applications in engineering using ANSYS.

Springer, 2006

ČSN 050120

Podklady fy. TAJMAC-ZPS, Zlín

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ing. Jan Vrbka, DrSc., dr. h. c.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 19.11.2012

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.  
Děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá vytvořením výpočtového modelu svařence pro určení napjatosti a deformace této konstrukce. Cílem této práce je posouzení předkládaných svarů a případná úprava jejich velikosti a konfigurace. Dále se zabývá otázkou, zda lze porovnat napětí vypočtená za pomoci norem a hodnoty získané za pomoci metody konečných prvků.

## **Abstract**

Diploma thesis deals with creating of computational model of welded frame to perform strain-stress analysis. Thesis aims at verification of welded joints and their possible changes. The next goal is to compare stresses obtained from calculation with respect to welding standard and FEM analysis.

## **Klíčová slova**

rám, deformačně-napěťová analýza, koutové svary, Ansys, MKP, mezní stav, spolehlivost

## **Keywords**

frame, strain-stress analysis, fillet welds, Ansys, FEM, failure theory, reliability

## **Bibliografická citace**

KRÁL, J. Napěťová, deformační a spolehlivostní analýza svařované rámové konstrukce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 43 s. Vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Ing. Jan Vrbka, DrSc., dr. h. c..

## Čestné prohlášení

Tímto prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s využitím uvedených pramenů a literatury.

V Brně: .....

.....

podpis

## **Poděkování**

Zde bych chtěl poděkovat svému vedoucímu práce prof. RNDr. Ing. Janu Vrbkovi, DrSc., dr. h. c, za jeho připomínky a cenné rady. Sem také patří poděkování všem, kteří mi věřili, přestože já ztrácel naději.

# Obsah

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Úvod .....</b>                           | <b>2</b>  |
| <b>2. Problémová situace .....</b>             | <b>3</b>  |
| 2.1. Popis řešeného rámu.....                  | 4         |
| <b>3. Systém podstatných veličin .....</b>     | <b>5</b>  |
| <b>4. Metody řešení, použitý software.....</b> | <b>6</b>  |
| <b>5. Výpočtový model.....</b>                 | <b>7</b>  |
| 5.1. Model geometrie .....                     | 7         |
| 5.2. Model materiálu.....                      | 9         |
| 5.3. Model vazeb a zatížení .....              | 10        |
| <b>6. Řešení.....</b>                          | <b>11</b> |
| 6.1. Metoda konečných prvků.....               | 11        |
| 6.1.1. Princip MKP .....                       | 11        |
| 6.1.2. Variační formulace MKP.....             | 12        |
| 6.2. Spolehlivost .....                        | 14        |
| 6.2.1. MS pružnosti .....                      | 14        |
| 6.3. Varianty řešení .....                     | 16        |
| 6.3.1. Průběžné svary .....                    | 16        |
| 6.3.2. Přerušované svary – varianta a) .....   | 22        |
| 6.3.3. Přerušované svary – varianta b) .....   | 25        |
| 6.4. Zhodnocení.....                           | 26        |
| <b>7. Návrh svarů dle platných norem .....</b> | <b>28</b> |
| 7.1. Napětí v koutovém svaru .....             | 28        |
| 7.2. Podmínky pevnosti.....                    | 32        |
| <b>8. Srovnání MKP s normami .....</b>         | <b>33</b> |
| 8.1. Tahové namáhání čelních svarů .....       | 34        |
| 8.2. Tahové namáhání bočních svarů .....       | 39        |
| 8.3. Namáhání krutem .....                     | 41        |
| <b>9. Závěr.....</b>                           | <b>43</b> |
| <b>10. Seznam použitých zdrojů .....</b>       | <b>44</b> |



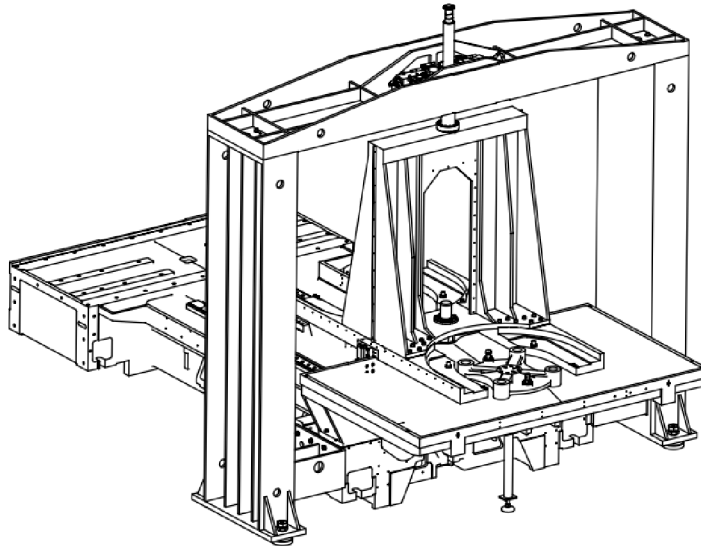
## 1. Úvod

Zadání této práce vychází z průmyslu, konkrétně od firmy TAJMAC-ZPS. Cílem této práce je provést napěťově-deformační analýzu svařované konstrukce. V hledáčku zájmu pak budou zejména svary. K cíli práce povedou dvě části. V té první bude samotné ověření svarů za pomoci MKP. Podle všeho u dodané dokumentace existují pochybnosti o správnosti návrhu svarů, takže se pokusím odpovědět na to, zda lze tyto svary použít nebo je změnit. Případně jak tyto svary pozměnit, aby byly použitelné. Hodnocení rámu provedu vzhledem k možnému dosažení mezního stavu pružnosti. Dále posoudím dva způsoby zatížení. Jeden bude oboustranný představující dvě palety s výrobky a poté pouze jednostranné.

Druhá část je pak věnována také svarům, tentokrát z pohledu norem. Normy uvažují určité předpoklady, proto se pokusím odpovědět na to, zda lze vzájemně porovnávat napětí získaná z MKP a z výpočtů respektujících normy. Pro tento postup vytvořím jednoduchý výpočtový model, na který lze snadno aplikovat vztahy z dostupných norem. Tentýž pak použiji v Ansysu a provedu deformačně-napěťovou analýzu.

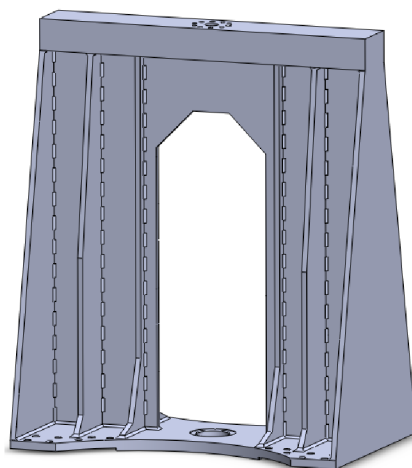
## 2. Problémová situace

Objektem řešení mé práce je rám přetáčení palet, od firmy TAJMAC-ZPS Zlín. Rám přetáčení je jednou ze součástí většího celku stroje.



*Obr. 1: Celkový pohled na sestavu stroje.*

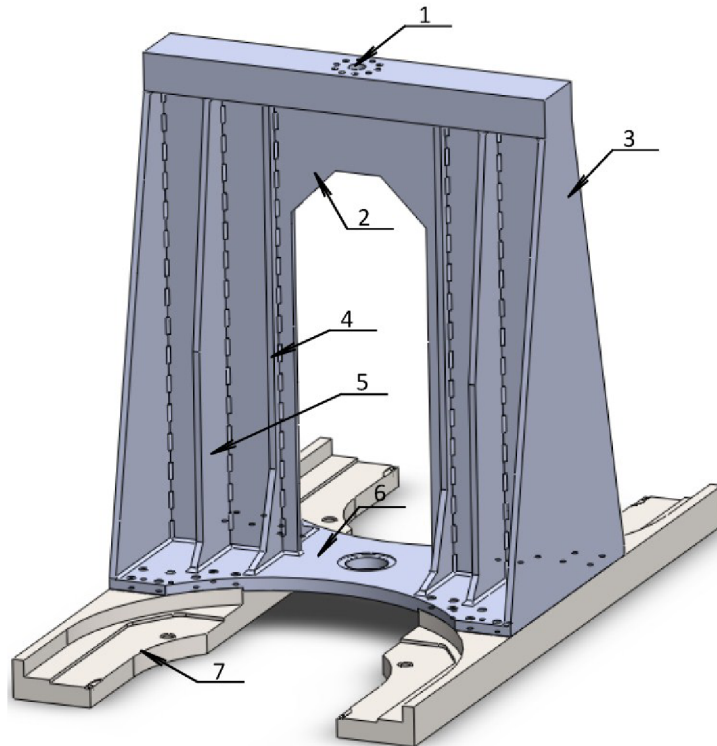
Na obrázku níže je pak pohled na samotný rám, který se skládá z několika ocelových vzájemně svařených dílců. Součástí dodaných podkladů je i návrh svarů, které mám posoudit vzhledem ke statickému zatížení a případně navrhnout změnu jejich parametrů. Původní návrh svarů byl proveden pomocí platných norem a dále byl vytvořen model geometrie pro kontrolu pomocí metody MKP. Ovšem výsledky byly podle všeho značně odlišné od výsledků získaných při využití teorie popsané v příslušných normách. Dalším úkolem je tedy pokusit se vysvětlit tyto nesrovnalosti a říci, kterými výsledky se řídit.



*Obr. 2: Rám přetáčení palet.*

## 2.1. Popis řešeného rámu

Rám jako takový se skládá z celkem 15 částí, nosníku, 10 žebér, která jsou z plechů stejného materiálu a tloušťky a spodní desky, ke které jsou připevněny dva nosiče palet. Celková výška rámu včetně nosičů je 1675mm, šířka 1250mm, hloubka i s nosiči pak 2170mm.



Obr. 3: Pozice jednotlivých částí.

| pozice | název    | počet kusů | materiál |
|--------|----------|------------|----------|
| 1      | nosník   | 1          | 11 523.0 |
| 2      | přepážka | 1          | 11 523.1 |
| 3      | žebro    | 2          | 11 523.1 |
| 4      | žebro    | 4          | 11 523.1 |
| 5      | žebro    | 4          | 11 523.1 |
| 6      | deska    | 1          | 11 523.1 |
| 7      | nosič    | 2          | 12 050.1 |

Tab. 1: Vlastnosti jednotlivých částí

Zatížení rámu je realizováno přes nosiče palet, na kterých může být 3220kg respektive 2 x 3220kg, kdy 720kg představuje hmotnost palety a 2500kg pak maximální hmotnost obrobku. Další zatížení je dáno vlastní tíhou rámu, která je přibližně 1061kg.

### 3. Systém podstatných veličin

Při řešení jakéhokoliv problému v běžném životě se člověk musí rozhodnout, jaké veličiny je třeba brát do úvahy a které je možné vzhledem k danému problému zanedbat. S využitím systémového [1] přístupu lze na *modelovém objektu*  $\Omega$  vytvořit *systém podstatných veličin*  $\Sigma(\Omega)$ . Tyto veličiny jsou rozčleněny na devět podmnožin  $S_0 - S_1$ :

- **S<sub>0</sub> – veličiny popisující okolí objektu**

Obecně jsou to veličiny popisující pracovní prostředí objektu. V mém případě by mohla přicházet do úvahy teplota

- **S<sub>1</sub> – veličiny popisující objekt, tedy jeho strukturu, topologii**

Celková struktura objektu je dána výkresem svařence, který popisuje umístění jednotlivých částí objektu.

- **S<sub>2</sub> – vazby objektu s okolím a na nich probíhající interakce**

Rám je vázán s okolím, tedy s celou skupinou stroje pomocí hřídele elektromotoru, který zajišťuje otáčení rámu.

- **S<sub>3</sub> – aktivace objektu z okolí**

Aktivace zde probíhá naložením palet s obrobky na nosiče, které jsou připojené pomocí předepjatých šroubů. Potom je nutné uvažovat krouticí moment od elektromotoru a také vlastní tíhu celého rámu.

- **S<sub>4</sub> – ovlivnění objektu z okolí**

Reálně sem patří zbytková napětí vzniklá svařováním. Ve výpočtovém modelu je neuvažuji, proto bude S<sub>4</sub> prázdná veličina.

- **S<sub>5</sub> – veličiny popisující vlastnosti jednotlivých prvků objektu**

Sem lze zařadit parametry popisující rozměry jednotlivých částí rámu, jejich materiálové vlastnosti, mechanické zpracování jednotlivých částí.

- **S<sub>6</sub> – veličiny popisující procesy probíhající na objektu**

Vzhledem k tomu, že mě zajímá napjatost v objektu a nikoliv procesy, které tuto napjatost způsobují, nebude tato množina obsahovat žádné veličiny.

- **S<sub>7</sub> – veličiny popisující chování objektu**

Při řešení mě zajímá napjatost a deformace, které jsou popsány pomocí složek tenzoru napjatosti resp. posuvy a natočeními.

- **S<sub>8</sub> – veličiny popisující důsledky chování objektu**

Důsledkem napětí a deformace může být překročení daných mezních stavů.

## 4. Metody řešení, použitý software

Tato práce se, z hlediska formulace problému, týká řešení problému přímého. Pro přímý problém platí, že vstupem do algoritmu řešení jsou některé z množin  $S_0 - S_5$ . V mém případě jsou známy topologie, vazby, aktivace modelu, materiálové charakteristiky. Výstupem jsou pak množiny  $S_6 - S_7$ . To znamená, že budu zjišťovat napětí, deformace a s tím související možné dosažení okamžitého mezního stavu. Pro řešení práce je použito přístupu, který se nazývá modelování. V tomto případě se pak jedná o modelování výpočtové. Modelovým objektem [1] je pak matematická teorie, která popisuje napjatost a deformaci v řešené konstrukci. Kvůli složitosti dané teorie jsem pak zvolil výpočtové řešení dané teorie s pomocí počítače. Jako výpočtový software pak využiji služeb Ansysu Workbench, který mám možnost využít ve škole. Pro výpočtový software jsem pak musel vytvořit model geometrie. Pro jeho tvorbu jsem využil 3D modeláře SolidWorks, ve kterém jsem vytvořil jednotlivé dílce dle dodané výkresové dokumentace.

## 5. Výpočtový model

Pro použité výpočtové modelování je třeba vytvořit příslušný výpočtový model. Tento model se bude skládat z vícera dílčích modelů:

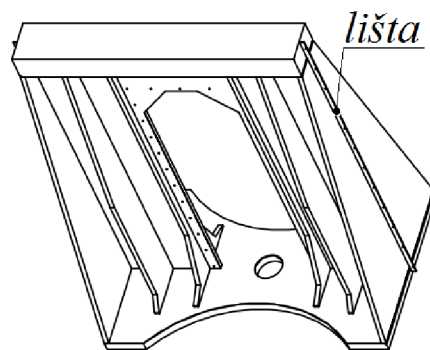
- model geometrie
- materiálový model
- model vazeb

V následujících podkapitolách uvedu vlastnosti a postup tvorby jednotlivých modelů.

### 5.1. Model geometrie

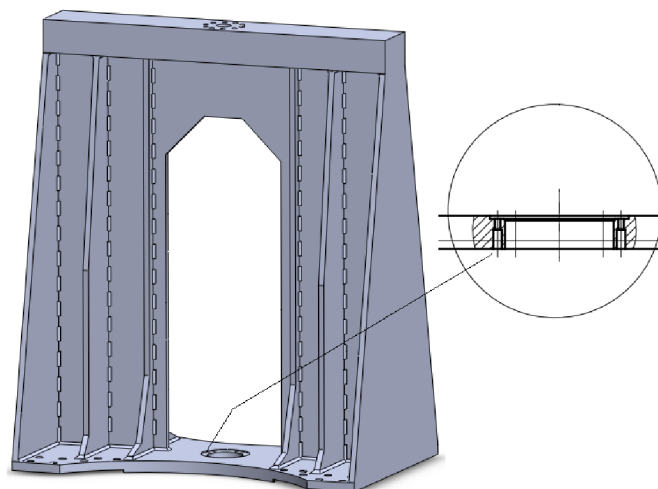
Zadání práce je směřováno především na svary a na to, jaký vliv má jejich konfigurace na napjatost. Proto jsem vytvořil nejprve tři konfigurace, kdy jedna obsahovala svary průběžné a zbylé dvě pak různé typy svarů přerušovaných.

Díky orientaci na svary, bylo také možné zanedbat několik tvarových detailů, které přímo nesouvisely se svary. Na boku rámu jsem zanedbal lištu, viz obr. níže.



Obr. 4: Zanedbaná lišta.

Dále jsem zjednodušil závěs na nosníku, kde jsem zanedbal drážku pro pero a také závitové díry jsou vymodelovány pouze jako čistě válcové bez závitů. Obdobně je to u desky, kde jsem kolem otvoru zanedbal závitové díry úplně.

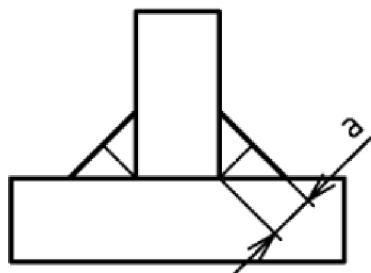


Obr. 5: Zanedbané závity pro uchycení čepu.

Další detaily jsem zanedbal na nosiči palet zejména proto, že díky své velikosti znesnadňovaly tvorbu sítě.

- **tloušťka svaru**

Je to charakteristický rozměr, který je nazýván více způsoby. V mém případě budu tento rozměr nazývat jako tloušťka svaru. Je to výška, většinou rovnoramenného, trojúhelníku, který lze vepsat do průřezu svaru. Tato tloušťka je brána jako nosný, nejmenší nebo nebezpečný průřez, ve kterém se dle norem určuje únosnost svaru. Tato terminologie je stejná jako zde [8], [3]

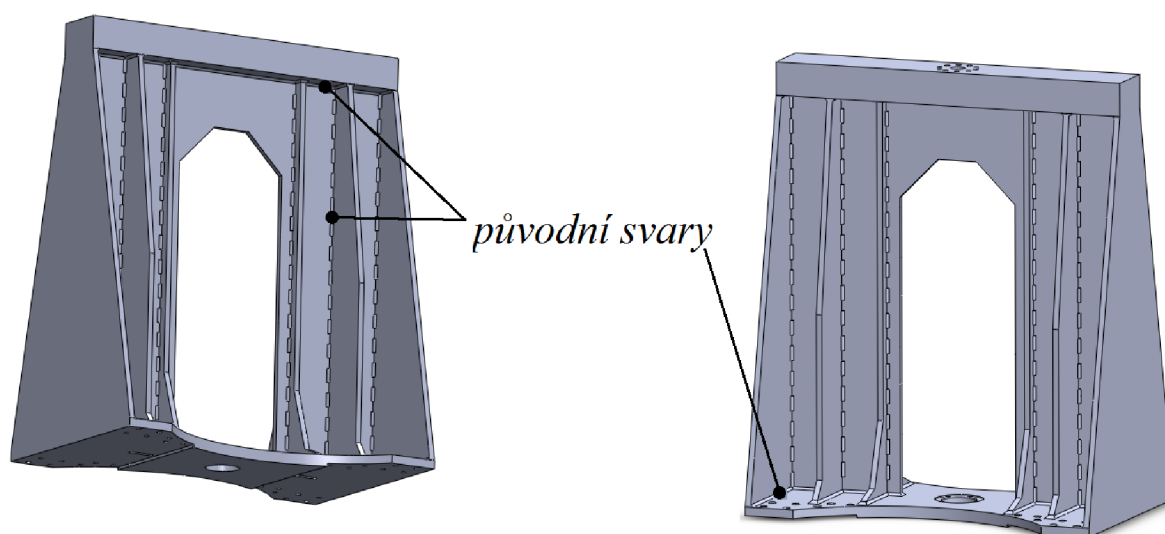


Obr. 6: Tloušťka svaru.

- **průběžné svary**

Součástí zadávací dokumentace byla výpočtová zpráva, podle které byly nejvíce namáhané svary spojující žebra s deskou a nosníkem. V místech připojení žebra k nosníku je však poměrně málo místa na vytvoření přerušovaných svarů, takže zde ponechám původní svary a uvidím, jaké získám výsledky. Stejně tak pro první model geometrie ponechám průběžné svary u připojení žebra k desce. Střídavé přerušované svary připojující žebra k přepážce nechám taktéž beze změny. Tyto svary ani není vhodné nahrazovat průběžnými svary z důvodů lepšího rozložení vnitřních pnutí způsobených svařováním.

*Tloušťka všech svarů bude  $a = 6\text{mm}$ .*

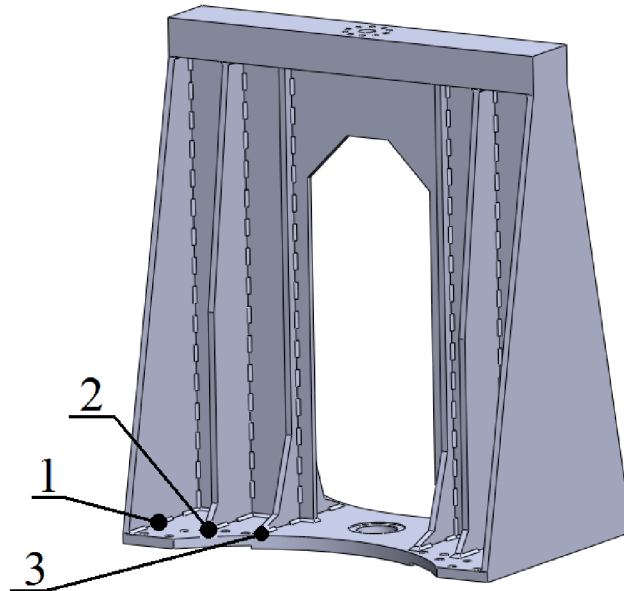


Obr. 7: Ponechané koutové svary.

### • přerušované svary

Druhý model se liší tím, že v místech připojení žeber k desce jsem použil svary přerušované, což je v podstatě jediné místo, kde dává smysl uvažovat o záměně průběžných svarů za přerušované. Pro přerušované svary jsem vytvořil dva modely geometrie s rozdílnou hustotou svarů a stejnou tloušťkou  $a = 6\text{mm}$ .

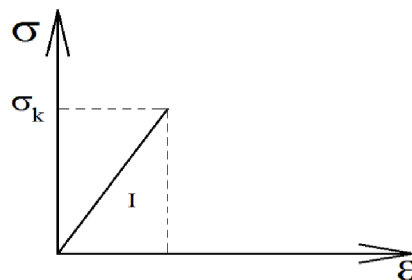
1. a) 3x90 (60)  
b) 3x70 (90)
2. a) 2x90 (55)  
b) 2x70 (95)
3. a) 2x80 (40)  
b) 2x60 (80)



Obr. 8: Místa změn přerušovaných svarů.

## 5.2. Model materiálu

V problému apriori předpokládám, že nedojde k překročení meze kluzu a tím k dosažení mezního stavu pružnosti. Model je uvažuji jako homogenní izotropní kontinuum, které je lineárně pružné. Podle obrázku níže se tedy budu pohybovat v oblasti I, která definuje v tělese vznik pouze pružných deformací.



Obr. 9: Aproximace části tahového diagramu do meze kluzu.

Ted' ke konkrétním materiálům. V celé soustavě jsou použity dva druhy ocelí, 12 050 na nosiče palet, 11 523 v základním stavu na nosník a ve vyžíhaném stavu na zbytek konstrukce. U svarů předpokládám stejnou pevnost jako pro základní materiál.



Materiálové charakteristiky jsem převzal z daných norem [5], [6] s tím, že pro ocel 11 523 jsem vytvořil pouze jeden model, u něhož hodnoty odpovídají stavu po žitání.

|        | $\sigma_k$ [MPa] | $\sigma_m$ [MPa] | $E$ [MPa] | $\mu$ [-] |
|--------|------------------|------------------|-----------|-----------|
| 11 523 | 345              | 490 <sup>1</sup> | 210000    | 0,3       |
| 12 050 | 355              | 600              | 210000    | 0,3       |

Tab. 2: Materiálové charakteristiky.

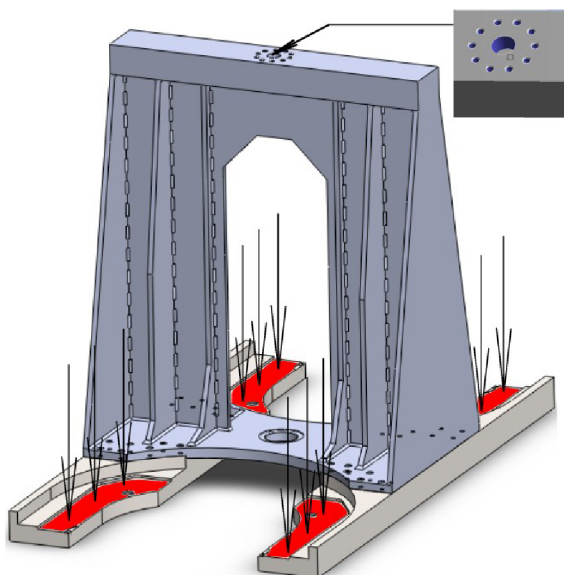
### 5.3. Model vazeb a zatížení

Vazby nebo též okrajové podmínky (OP) jsou pro funkčnost výpočtového modelu nezbytné. Tyto podmínky lze rozdělit do dvou kategorií, a to na silové a deformační. Deformační mi definují natočení a posuvy modelu v prostoru. Silové pak představují zatížení silami, momentem a případně objemovými silami jako je vlastní tíha modelu. Deformační podmínku v mém modelu zastupuje vetknutí značené v Ansysu jako *fixed support*. Tato je realizována u nosníku a představuje uchycení k hřídeli elektromotoru, na obrázku níže naznačena modře. Silové podmínky jsou zastoupeny silou představující zatížení paletami s výrobky, momentem vyvozeným elektromotorem při otáčení rámu a také objemovou silou představující vlastní tíhu modelu.

Silové OP: síla: 32200N respektive 2x32200N  
moment: 4400Nm  
vlastní tíha: 10610N

Pro silové OP jsem použil dva modely, kde v prvním jsou zatíženy obě strany nosičů palet a ve druhém je zatížení pouze jednostranné.

Všechny OP jsou zadány v jednom kroku a jejich průběh je lineární.



Obr. 10: Vazby modelu geometrie.

<sup>1</sup> Dle normy ČSN 41 1523 je  $\sigma_m$  uvedeno v intervalu (490 - 630)MPa.

## 6. Řešení

Jak jsem uvedl v kapitole 4, jako způsob řešení jsem vybral výpočtové modelování. Modelem je v tomto případě matematická teorie pružnosti. Ze školy znám základy prosté pružnosti, nicméně její aplikace na úlohu takového rozměru a komplikovaného tvaru jako je zde, se mi jeví jako neřešitelná. Proto jsem zvolil numerické řešení s využitím počítače. V současné době existuje vícero numerických metod, já však zvolil metodu konečných prvků (MKP), anglicky FEM (finite element method), se kterou jsem se reálně dostal na škole do kontaktu. Tato metoda je implementována v programovém prostředí Ansysu, který je zde mým pomocníkem.

### 6.1. Metoda konečných prvků

Teorie pružnosti, vychází z toho, že z objektu vždy „vytkneme“ prvek (element) jehož rozměry jsou považovány za nekonečně malé (infinitesimální) a s tímto elementem pracujeme. Takový prvek může v pružnosti být jedno, dvoj, nebo trojnásobně elementární<sup>2</sup> [2]. Stejně tak MKP pracuje s prvky, jenže, na rozdíl od pružnosti, jejich velikost už není nekonečně malá. S tím také koresponduje název této metody, ať už anglický nebo český ekvivalent, vyjadřující právě konečnou velikost prvku.

#### 6.1.1. Princip MKP

Nejprve začnu trochu ze široka. Z hlediska pružnosti je řešení mého problému řešením tzv. přímého problému pružnosti. Výstupem tohoto problému jsou hodnoty posuvů a napětí, kterých je celkem 15 (3 posuvy, 6 přetvoření, 6 napětí). Tyto neznámé parametry jsou pak vzájemně provázány rovnicemi obecné pružnosti, kterými jsou:

#### rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z = 0 \quad (6.3)$$

#### geometrické rovnice

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6.4), (6.5), (6.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6.7), (6.8), (6.9)$$

---

<sup>2</sup> Elementárním je dle Pružnosti myšlen rozměr, jehož velikost se limitně blíží nekonečně malé hodnotě [2].

## konstitutivní vztahy

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (6.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (6.11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (6.12)$$

K tomu se sluší dodat, že tyto vztahy platí pro oblast malých lineárně pružných deformací, díky čemuž jsou rovnice výrazně jednodušší.

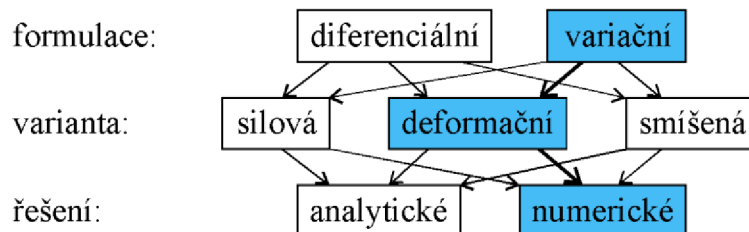
Vzájemným dosazováním těchto rovnic pak získám nezávislé parametry. Které to budou, pak záleží na daném typu úlohy. Podle toho, které parametry budou nezávislé, se pak přístup k úlohám nazývá jako:

deformační – nezávislé jsou posuvy

silový – nezávislá jsou napětí

smíšený – nezávislé jsou posuvy i napětí

Pokud bych chtěl tento postup řešit analyticky, s největší pravděpodobností bych toho byl schopen tak maximálně pro jednoduchá tělesa řešená v Pružnosti. Proto se s rozvojem počítačů začaly rozmáhat i numerické metody, které umožňují řešení výše popsaného problému i na složitých úlohách. Obecně lze říci, že numerické metody převádí problém hledání spojitých funkcí na problém, kdy se hledá konečný počet parametrů diskretizující tento problém. Z hlediska formulace, varianty a samotného řešení lze získat následující schéma.



Obr. 11: Schéma řešení problémů pružnosti, převzato z [9].

Právě modře vyznačená cesta pak představuje moji cestu k řešení. Mnou použitá MKP je v Ansysu definována jako variační metoda s deformačním přístupem.

### 6.1.2. Variační formulace MKP

U deformační varianty, která jest mojí variantou, je základem Lagrangeův variační princip. Ten je například v [9] formulován takto: „Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udílejí celkové potenciální energii  $\Pi$  stacionární hodnotu.“

Celková potenciální energie  $\Pi$  je dána jako

$$\Pi = W - P \quad (6.13)$$

kde  $W$  je energie napjatosti tělesa a  $P$  je potenciál vnějšího zatížení.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV \quad P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{o} \cdot dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dS \quad (6.14), (6.15)$$

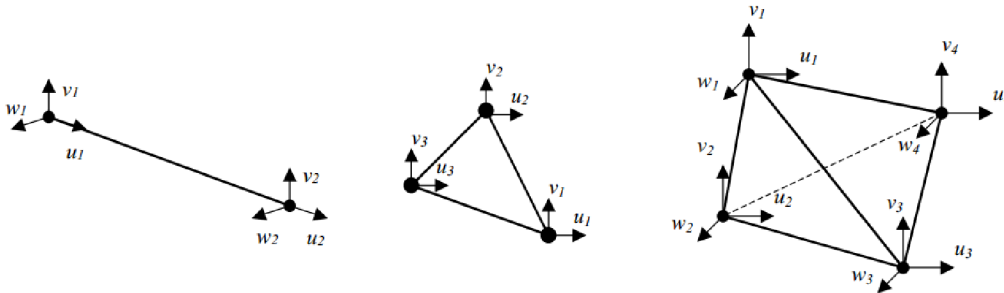
Jednotlivé matice ve vztazích (6.14), (6.15) pak představují matice napětí  $\boldsymbol{\sigma}^T$ , matice přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , matice posuvů  $\mathbf{u}^T$ , matice objemových sil  $\mathbf{o}$ , matice plošného zatížení  $\mathbf{p}$ . Potenciální energie  $P$  pak závisí na nekonečném počtu hodnot, kterými jsou dány posuvy  $u, v, w$ . Proto se posuvy aproximují pomocí tzv. bázových funkcí

$\tilde{u}_i, \tilde{v}_j, \tilde{w}_k$ , [9]. Tvar posuvů je pak následující

$$u = \sum_{i=1}^l a_i \cdot \tilde{u}_i \quad v = \sum_{j=1}^m b_j \cdot \tilde{v}_j \quad w = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \tilde{w}_k \quad (6.16), (6.17), (6.18)$$

Takto zavedené posuvy se použijí v rovnici pro funkcionál (6.13). Použitím podmínky pro stacionární hodnotu pak získám soustavu rovnic, ze které lze vyřešit neznámé parametry  $a_i - c_n$ .

Jak jsem uvedl dříve, základem MKP je „rozdělení“ kontinua na konečné prvky.



Obr. 11: Příklady elementů použitých v MKP

Na obrázku výše jsou vidět některé prvky používané v MKP. Výše uvedené aproximované posuvy jsou zadány ve vrcholech těchto elementů. Tyto elementy se od sebe liší nejen tvarem (rovinné, prostorové), ale také tvarem bázových funkcí. Ty mohou být lineární, kvadratické nebo mohou být tvořeny polynomy vyšších řádů. Tyto principy lze tedy uplatnit u libovolně složitých těles. Algoritmus pak vede na řešení základní rovnice MKP [9].

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (6.19)$$

kde  $\mathbf{U}$  je globální matice posuvů,  $\mathbf{K}$  je globální matice tuhosti a  $\mathbf{F}$  globální matice zatížení. Jak napovídá název, matice obsahují parametry ze všech uzlů konečnoprvkové sítě. Díky tomu jsou poměrně rozsáhlé, takže jejich řešení je možné v podstatě pouze za pomoci počítače.

Pokud aplikuji variační princip na rovnici (6.19), pak získám právě základní rovnici MKP.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U} = 0 \Rightarrow KU = F \quad (6.20)$$

Při řešení rovnice (6.19) se ukáže důležitost správného modelu vazeb. Aby byla úloha numericky řešitelná, musí být předepsáno minimálně tolik okrajových podmínek, aby bylo zamezeno pohybu tělesa v prostoru jako celku. Pokud to není splněno, matice budou singulární a výpočet pak havaruje. Samozřejmě více okrajových podmínek je možné předepsat.

## 6.2. Spolehlivost

Pojem spolehlivost je poměrně obšírný pojem. Pro konkrétní definice je třeba hledat v normách. V případě mé úlohy se jedná o deformačně napěťovou analýzu, u kterých se spolehlivost řeší ve vztahu k nějakému meznímu stavu.

Posouzení spolehlivosti konstrukce využiji mezní stav (MS) pružnosti. Jedná se o tzv. okamžitý mezní stav, kde je spolehlivost chápána jako bezpečnost [1]. Její míra je určována pomocí koeficientu bezpečnosti (součinitele bezpečnosti). Obecně je koeficient dán jako poměr mezní hodnoty parametru k hodnotě provozní. Zbývá tedy definovat tyto hodnoty.

### 6.2.1. MS pružnosti

Tohoto mezního stavu je dosaženo v případě, že napjatost v součásti odpovídá mezi kluzu  $\sigma_k$ . V tomto stavu vzniknou v součásti první plastické deformace, které zůstanou i po odtižení součásti a vytvoří tak zbytková napětí. Pro popis vzniku MS pružnosti je zapotřebí mezní podmínky. Ty se nazývají podmínky plasticity. Já jsem ve své úloze vybral jednu konkrétní, a to *HMH*.

#### Podmínka plasticity HMH

Obecně lze podmínku plasticity vyjádřit ve tvaru

$$F_K(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \{L_K\}) = 0 \quad (6.21)$$

kde  $F_K$  je daná podmínka a  $\{L_K\}$  je množina mezních parametrů. V mém případě bude mezním parametrem  $\sigma_{kt}$ , tedy mez kluzu v tahu. Z tvaru obecné podmínky je vidět, že závisí na třech hlavních napětích, tedy je možné ji určit pro obecnou prostorovou napjatost. Problém je v tom, že napětí  $\sigma_{kt}$  se určuje z tahové zkoušky, při které vzniká pouze jednoosá napjatost. Proto se pro porovnání používá zvláštní funkce nazývaná redukované napětí  $\sigma_{red}$  nebo též ekvivalentní či fiktivní. Jeho přesnou definici lze najít v [2], [1]. Zjednodušeně řečeno redukované napětí „redukuje“ obecnou trojosou napjatost na jednoosou tak, aby bylo možné jej používat pro určení prosté bezpečnosti. Tvrzení, že mezní hodnotou je mez kluzu není úplně správné. Při prostém zatěžování dojde k meznímu stavu, pokud hodnota smykového napětí  $\tau_p$  v určité rovině  $r$  dosáhne mezní hodnoty  $\tau_M$ .

Potom má podmínka tvar

$$F_K(\tau_\rho, \tau_M) = 0 \quad (6.22)$$

Maximální smykové napětí  $\tau_\rho$  lze vyjádřit pomocí hlavních napětí.

Potom lze (6.22) přepsat jako

$$F_K(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|, \tau_M) = 0 \quad (6.23)$$

Smykové napětí  $\tau_M$  je materiálovou charakteristikou, při níž dochází k dosažení mezního stavu. Při jednoosé zkoušce k tomu dochází při dosažení meze kluzu, takže (6.23) má tvar

$$F_K(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|, \sigma_k) = 0 \quad (6.24)$$

Otázka tedy zní. Jaká je rovina, ve které působí smykové napětí  $\tau_M$ ? Pro podmínku plasticity HMM je to rovina oktaedrická. Oktaedrické napětí v této rovnici je dáno následovně

$$\tau_{OK} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (6.25)$$

Když uvážím, že tento vztah platí i pro jednoosou napjatost, kdy  $\sigma_1 = \sigma_k$ ;  $\sigma_2, \sigma_3 = 0$ , pak lze z předchozího vztahu získat

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (6.26)$$

Vztah (6.26) představuje mezní podmínku mezního stavu. V provozním stavu pak bude mít redukované napětí tvar

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (6.27)$$

S takto daným redukovaným napětím (6.27) lze tedy definovat součinitel bezpečnosti jako následující podíl.

$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red}} \quad (6.28)$$

Na závěr musím dodat, že tyto vztahy (podrobněji uvedené v [1], [2]) platí jen a pouze pro případ prosté pružnosti. To znamená, že zatěžovací a přetěžovací dráhy jsou lineární. To je v souladu s připomínkou u modelu vazeb, ve které říkám, že zadané silové podmínky mají lineární průběh.

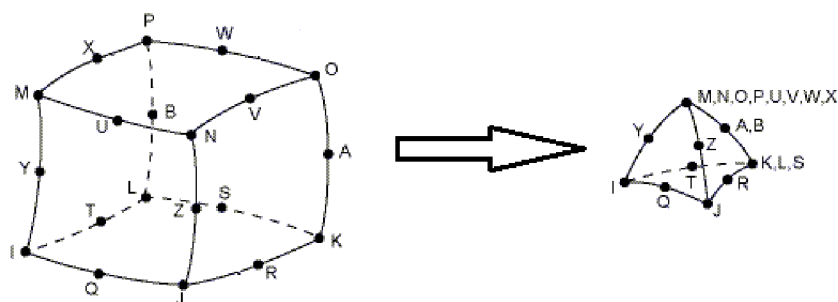
Zmiňované redukované napětí se v Ansysu pro podmínku HMM jmenuje *ekvivalent stress* [10].

### 6.3. Varianty řešení

Po představení způsobu řešení jsou na řadě řešení samotné. V této kapitole se budu zabývat třemi modely geometrie, které jsem popsal v kapitole 5.1.

#### 6.3.1. Průběžné svary

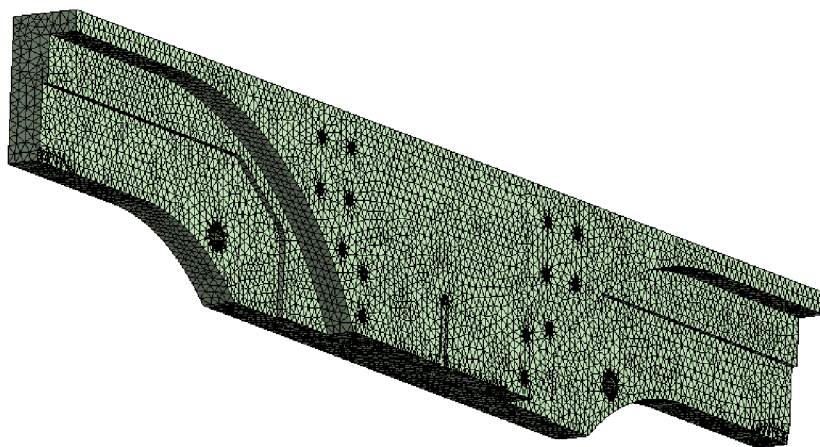
Jako první bylo třeba vytvořit na modelu geometrie síť prvků. Samotná konstrukce bez uvážení svarů je topologicky i geometricky poměrně jednoduchá. Protože je práce zaměřená na svary, jsou taktéž vymodelovány, což tvorbu sítě komplikuje. Kvůli tomu jsem zvolil síť, jejímž základním prvkem je kvadratický čtyřstěn. Není to samostatný prvek, nýbrž je degenerovaným tvarem šestistěnu.



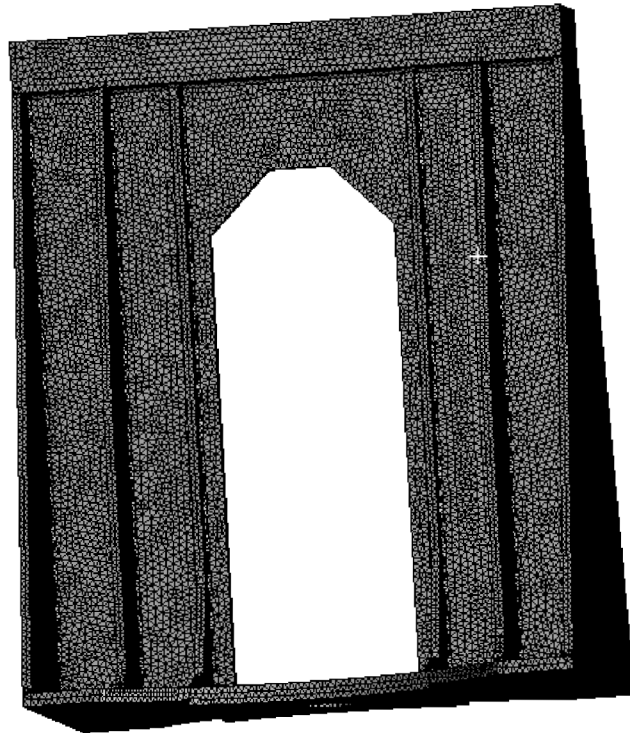
Obr. 12: Základní šestistěn s degenerovaným tvarem prvku.

Z obrázku je patrné, že čtyřstěn má 10 uzlů, v nichž jsou neznámými parametry posuvy  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Bázové funkce tohoto prvku nejsou lineární, ale vyššího řádu. Délku hrany prvku jsem nastavil na  $15\text{mm}$ . Chování pak na *soft*, což znamená, že program nemusí striktně dodržovat zadaných  $15\text{mm}$ .

Následně jsem vytvořil síť nosičů palet. Kvůli vzájemnému napojení sítě jsem i na něm musel zvolit čtyřstěn jako základní prvek s velikostí hrany  $15\text{mm}$ . I přes relativně hrubé nastavení, se celá síť skládá z 864 049 elementů a 1 338 755 uzlů, což je poměrně dost. Proto jsem se rozhodl dále síť nezjemňovat a počkat na první výsledky. Podle nich jsem použil lokální zjemnění sítě.



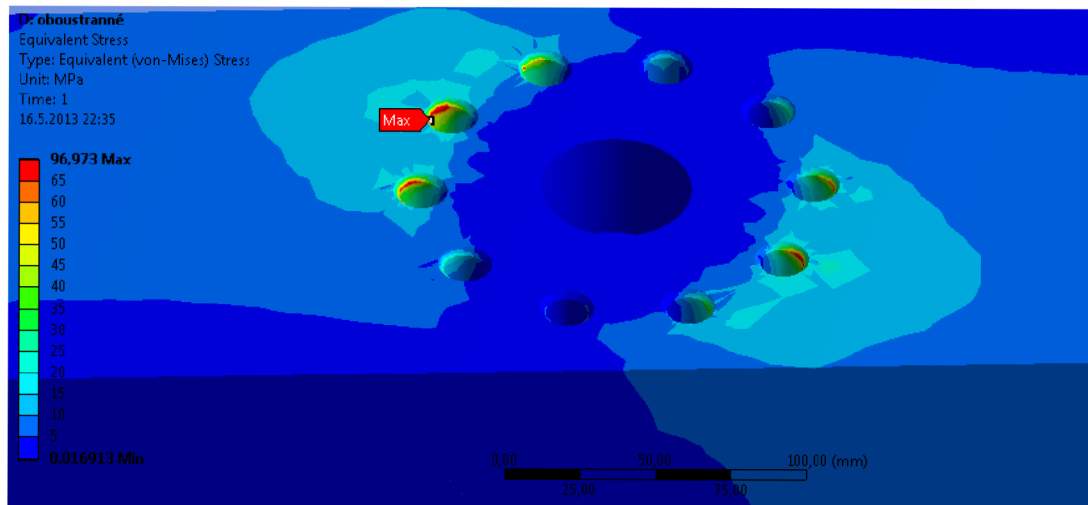
Obr. 13: Síť nosiče palet.



Obr. 14: Síť rámu.

### Oboustranné zatížení

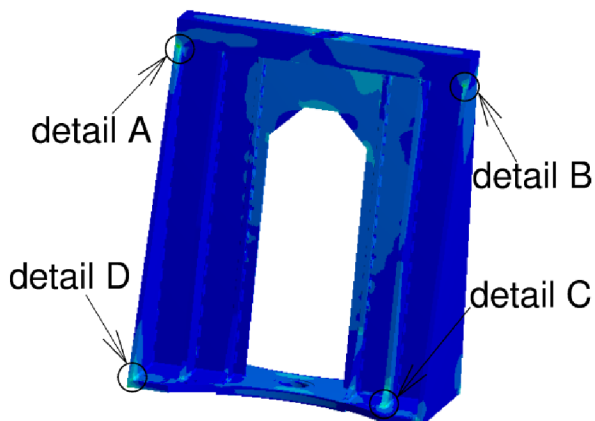
Jak jsem uvedl, k vyhodnocení budu využívat ekvivalentního napětí, které je definované dle (6.27). Poměrně velká hodnota napětí se vyskytla v místě vetknutí, což je pochopitelné. Dále se však tímto místem zabývat nebudu a zaměřím se pouze na svary.



Obr. 15: Napětí v místě vetknutí.



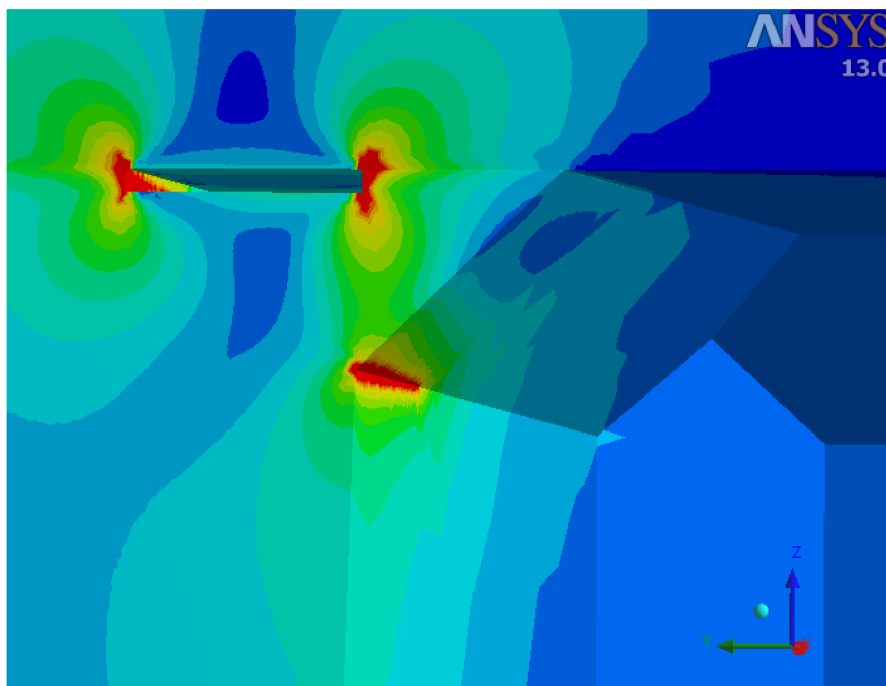
Z pohledu svarů lze na konstrukci nalézt čtyři oblasti, ve kterých ve větší koncentraci napětí. Tyto místa jsem označil jako detaily A, B, C, D.



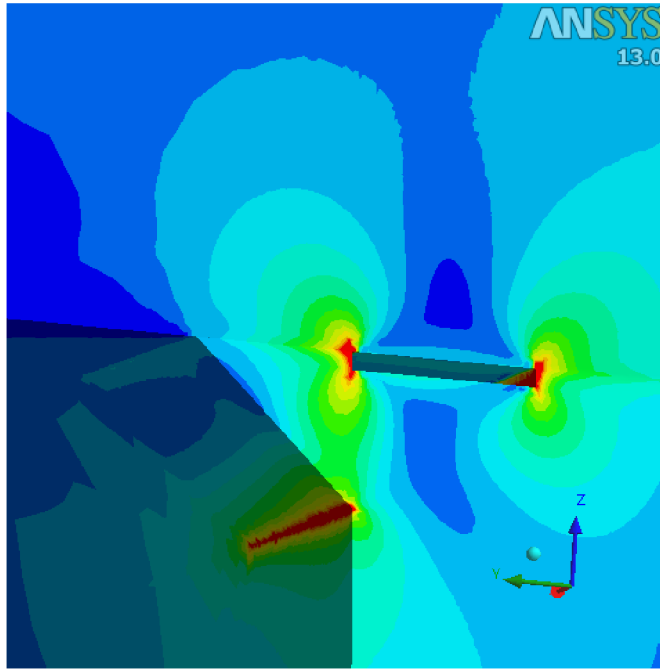
*Obr. 16: Místa s koncentracemi napětí.*

Zde jsem uvedl pouze čtyři místa, ale díky symetrickému zatížení lze stejná místa s koncentracemi nalézt i druhé straně rámu.

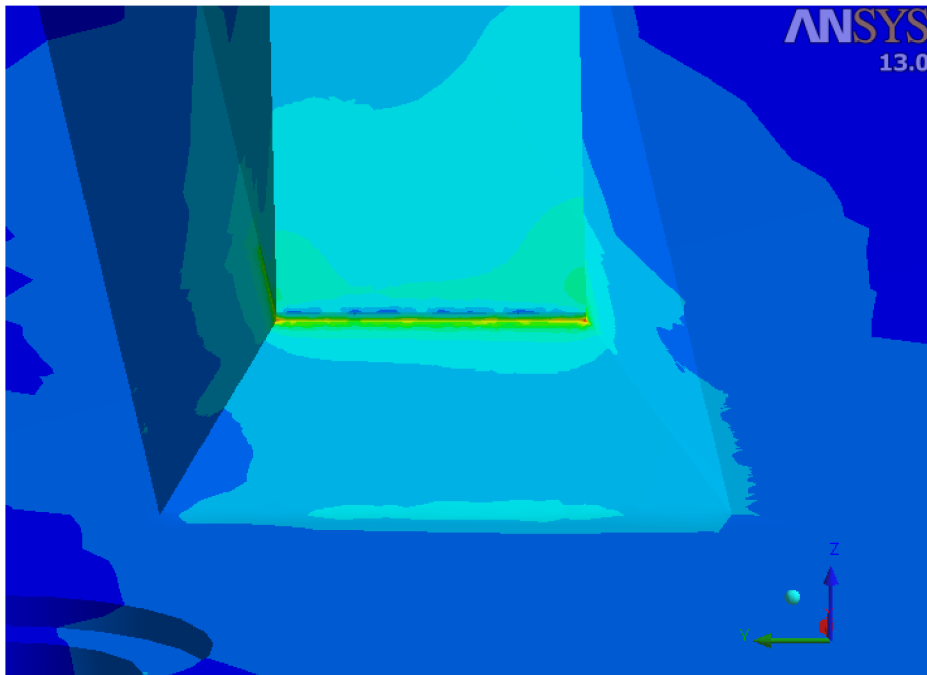
V uvedených detailech jsem musel zjemnit síť. Důvodem je to, že příliš velké prvky nedokáží správně zachytit extrémní napětí. Na následujících obrázcích jsou uvedeny detailní pohledy na vybraná místa.



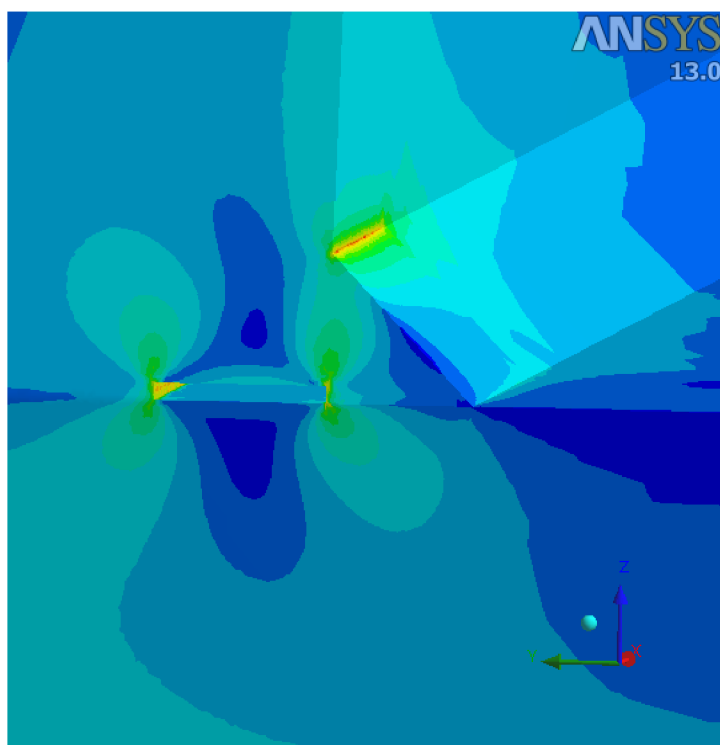
*Obr. 17: Detail A.*



*Obr. 18: Detail B.*



*Obr. 19: Detail C.*



Obr. 20: Detail D.

Z uvedených obrázků je patrné, že nejhorší situace je u detailů A, B. Zejména pak u paty svaru a v místě kořene svaru. V případě kořene svaru je tato situace umocněna způsobem, jakým je model geometrie vytvořen. Vzhledem k tomu, že ve všech inkriminovaných místech jsou ostré hrany, vytvořil jsem model, ve kterém jsem použil zaoblení s poloměrem  $2\text{mm}$ . Pro porovnání uvedu přibližné hodnoty před i po využití zaoblení.

|          | Napětí před zaoblením [MPa] | Napětí po zaoblení [MPa] |
|----------|-----------------------------|--------------------------|
| Detail A | 90                          | 79 (-11)                 |
| Detail B | 85                          | 72 (-13)                 |
| Detail C | 63                          | (45)                     |
| Detail D | 66                          | 45 (-21)                 |

Tab. 3: Porovnání napětí

Předně musím dodat, že u detailu D se mi nepodařilo vytvořit zaoblení tak, aby Ansys vytvořil použitelnou síť. Nicméně z obrázku je patrné, že nejvyšší hodnoty platí pro místa přechodu svaru kolem žebra. Okolní hodnoty jsou výrazně nižší, proto hodnota v závorce. U detailu C už došlo, díky zaoblení, k očekávanému poklesu velikosti napětí. Stejně tak tomu je u detailů A, B. Zde už není pokles napětí tak výrazný.

Pokud uvážím spolehlivost tak, jak jsem uvedl v kapitole 6.2., pak  $\sigma_{red}$  bude reprezentováno hodnotou  $79MPa$ .

$$k_K = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red}} = \frac{345}{79} = 4,36 \quad (6.29)$$

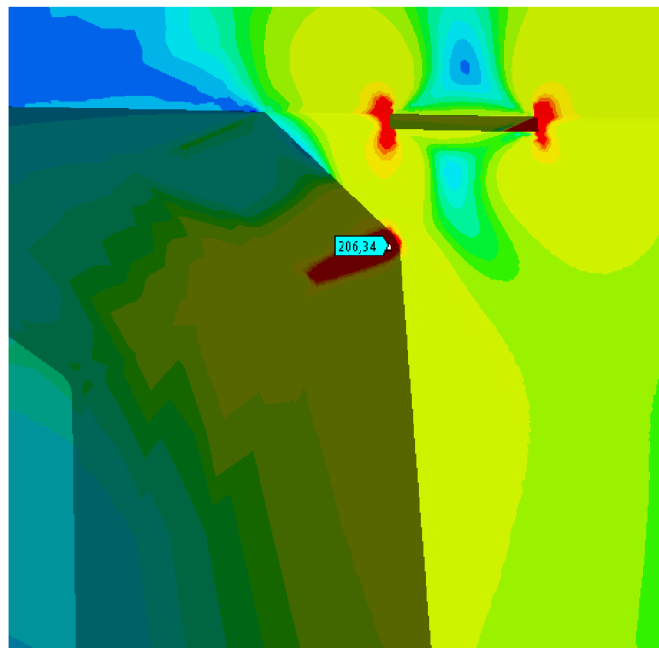
Pokud by bylo možné technologicky zajistit, aby byl zaoblen přechod svaru do základního materiálu, pak bude bezpečnost dostatečná a tato konfigurace by měla být plně funkční.

I pro případ, kdy toto nebude možné, by měla být funkčnost rámu zajištěna, viz. níže.

$$k_K = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red}} = \frac{345}{90} = 3,83 \quad (6.30)$$

### Jednostranné zatížení

Vzhledem ke koncepci rámu je jasné, že se může objevit stav, kdy bude zatížena pouze jedna strana. Pro takový stav vykazuje nejvyšší napětí detail A nebo B, záleží na smyslu momentu.



Obr. 21: Detail B při jednostranném zatížení.

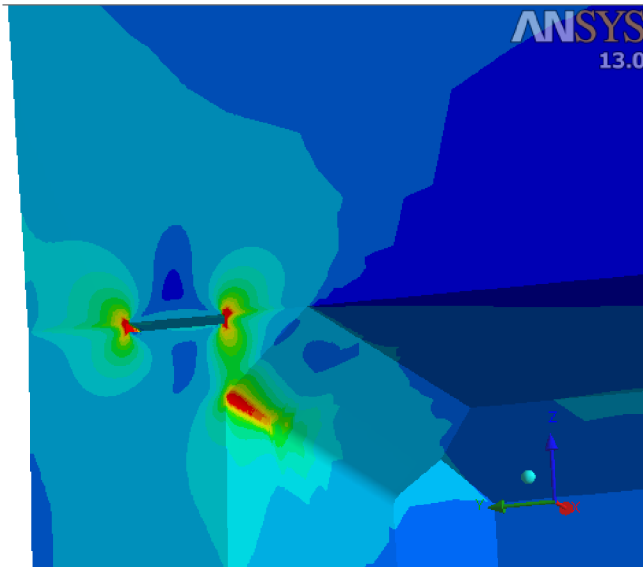
Z obrázku je patrné, že napětí u paty svaru přesahuje  $200MPa$ . Pro tento stav se spolehlivost blíží hodnotě 1,5, která je obecně dána normou [4].

$$k_K = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red}} = \frac{345}{206} = 1,67 \quad (6.31)$$

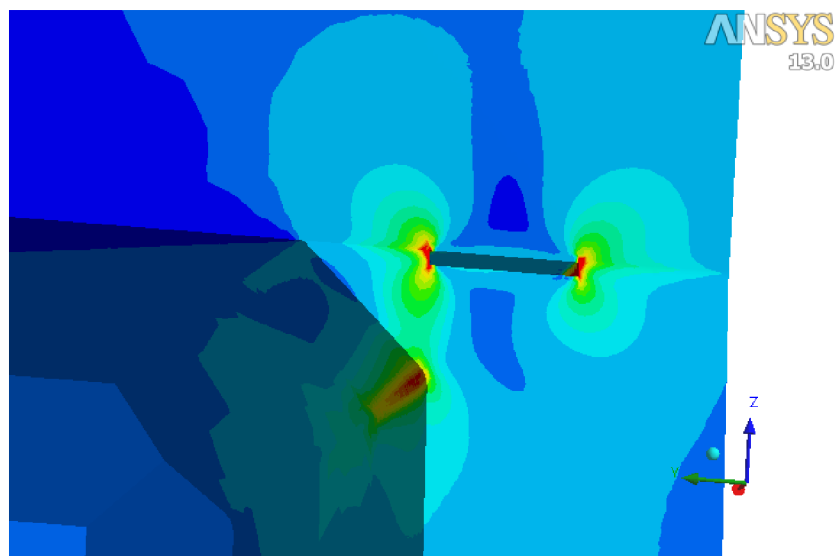
Na druhou stranu musím dodat, že nemám k dispozici celou dokumentaci. Z výkresu sestavy je vidět, že v otvoru desky je otočný čep, který fixuje spodní část rámu k dalším částem stroje. Já tuto fixaci ve vazbách neuvažuji. Z tohoto důvodu nelze jednostranné zatížení ve výše realizovaném smyslu brát v úvahu. Proto v dalším průběhu nebudu uvažovat tento způsob zatížení.

### 6.3.2. Přerušované svary – varianta a)

Tato varianta se od předchozí liší tím, že v oblastech, dle obr. 8 značených jako 1, 2, 3 jsou přerušované svary. Zde lze očekávat, že v oblasti detailu A, B budou hodnoty stejné respektive velmi blízké. Napětí by se mělo změnit pouze v oblastech detailů C, potažmo D.

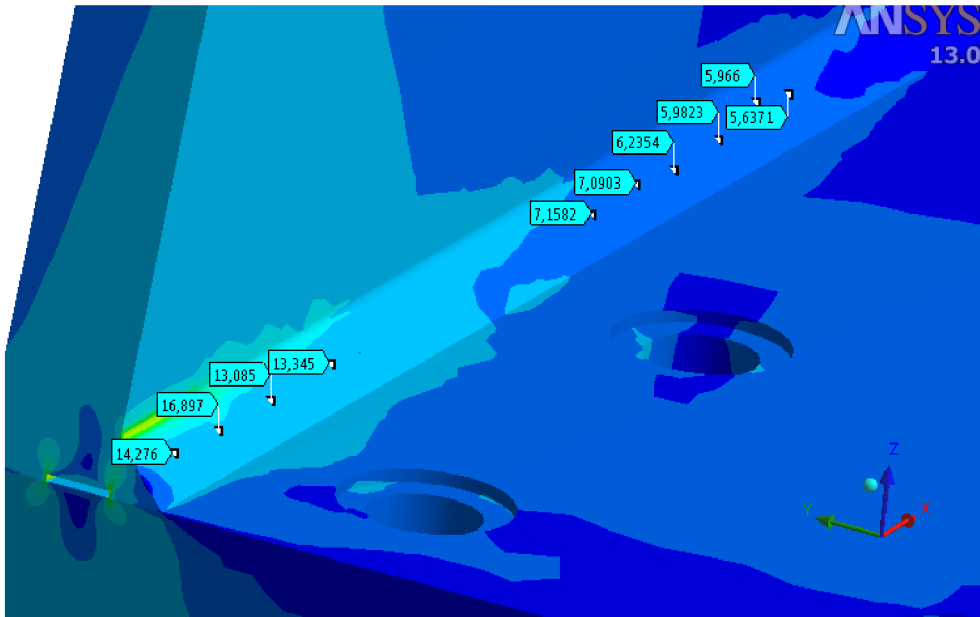


Obr. 22: Detail A.

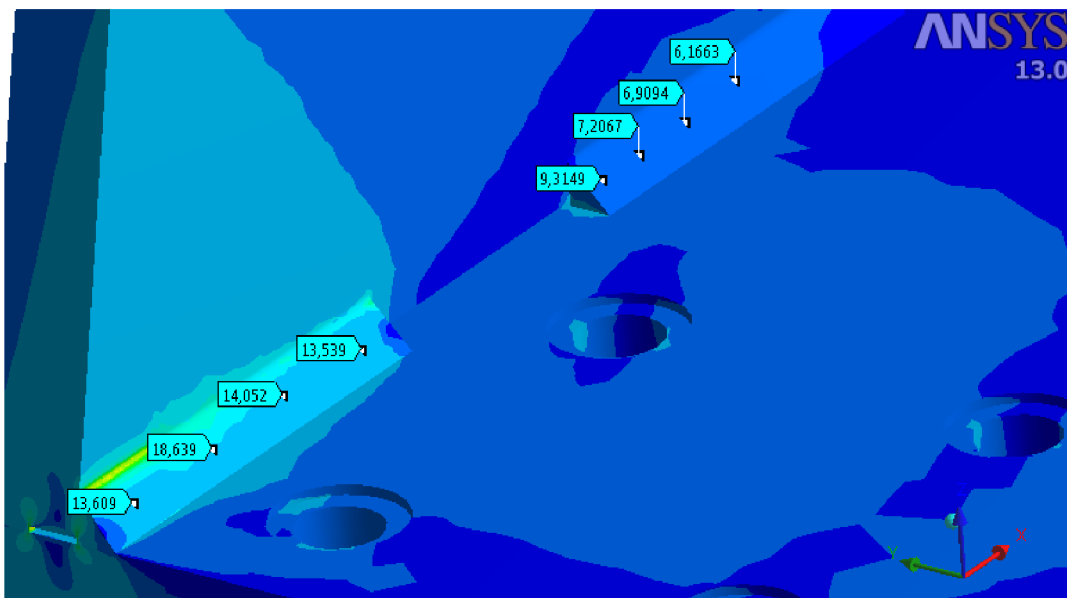


Obr. 23: Detail B.

Skutečně se potvrdilo, že v oblasti detailů A, B nedošlo k nějaké výrazné změně napětí.

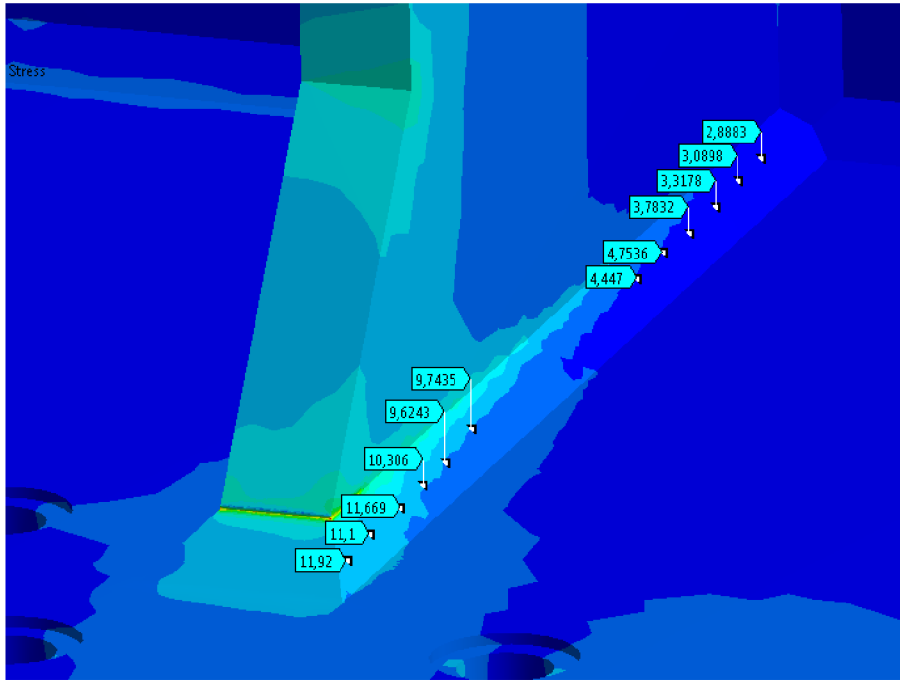


Obr. 24: Detail D s orientačními hodnotami napětí, průběžné svary.

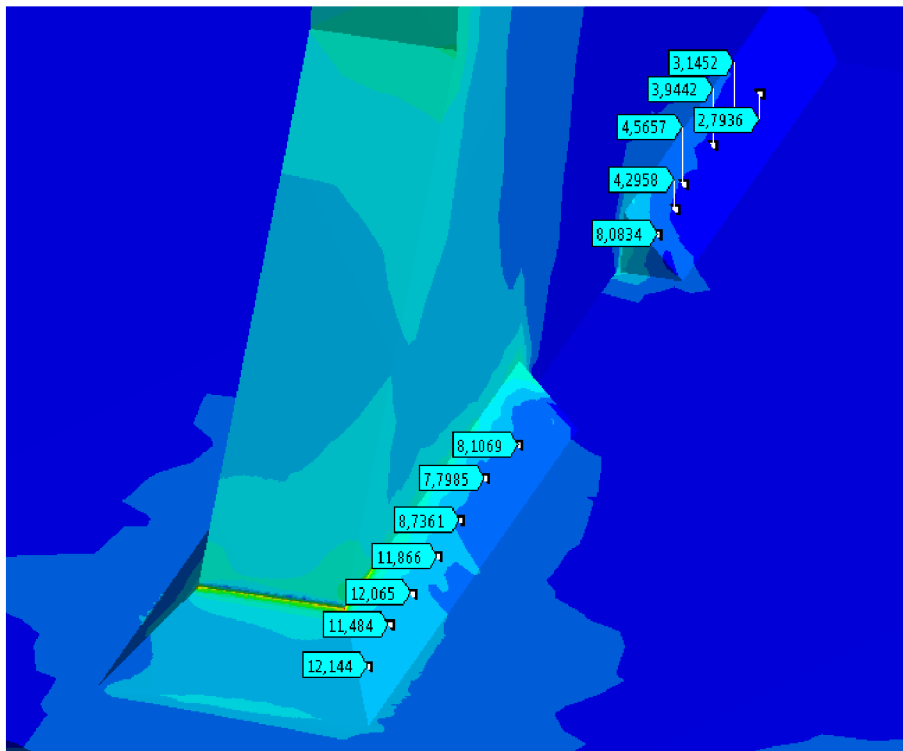


Obr. 25: Detail D s orientačními hodnotami napětí, varianta a).

Přesto, že jsem očekával mírné zvýšení napětí v oblasti D ve srovnání s průběžnými svary, výsledek je téměř shodný. Jediná místa, kde se více odlišuje napětí na okrajích jednotlivých svarových „housenek“. Jinak je nárůst v řádu jednotek  $MPa$ . Stejně tak je tomu u detailu C, kde jsou změny minimální.



Obr. 26: Detail C s orientačními hodnotami napětí, průběžné svary.



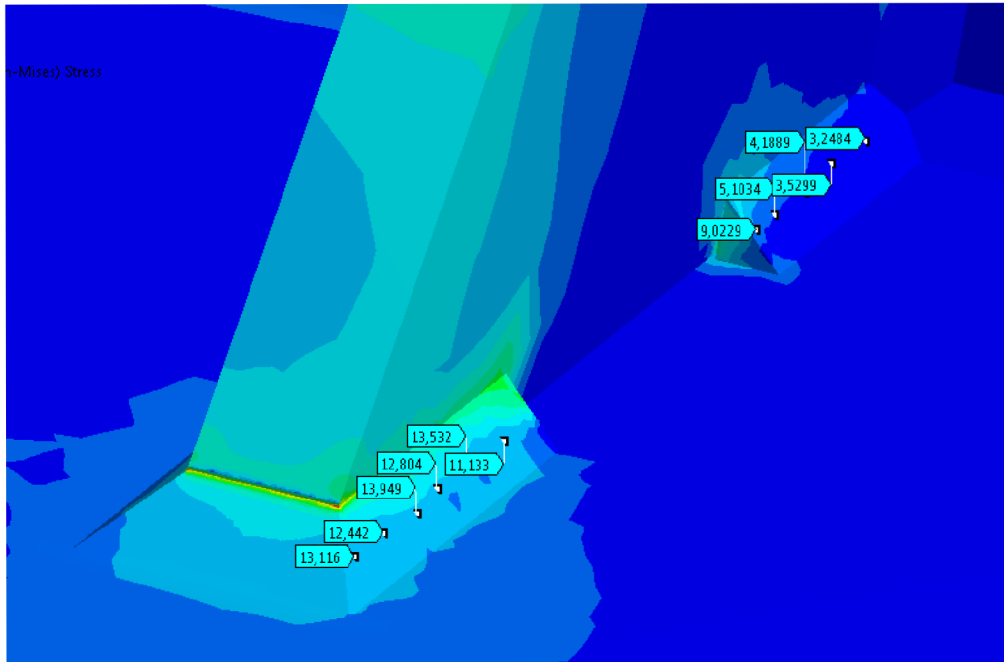
Obr. 27: Detail C s orientačními hodnotami, varianta a).

Bezpečnost u varianty a) tedy zůstane stejná jako pro průběžné svary.

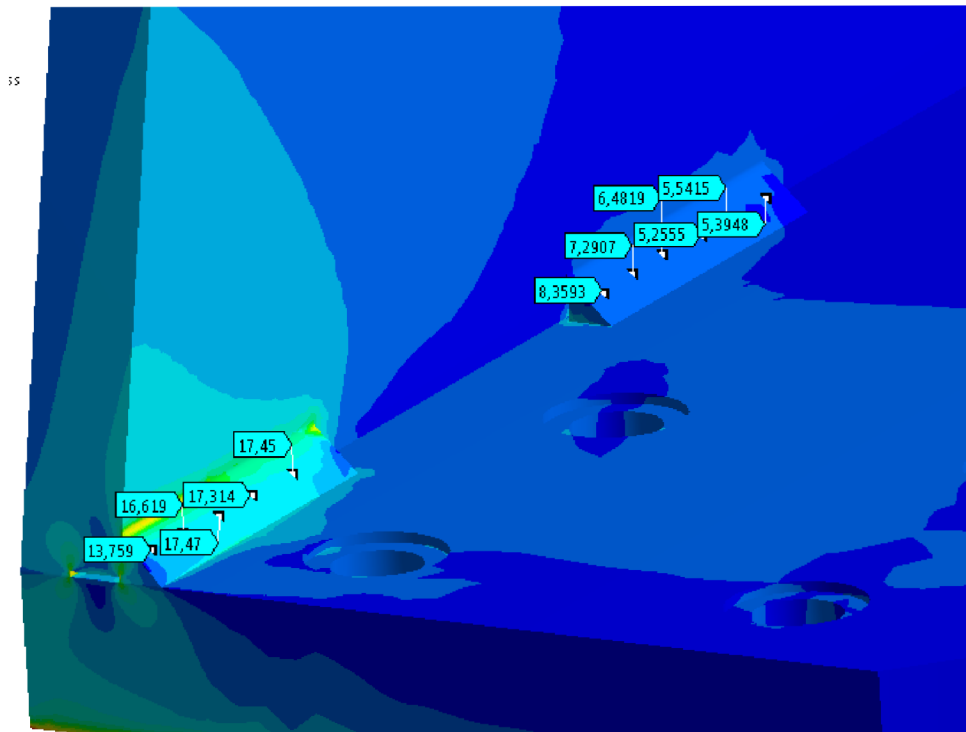
$$k_K = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red}} = \frac{345}{79} = 4,36 \quad \text{resp.} \quad k_K = \frac{345}{90} = 3,83 \quad (6.32), (6.33)$$

### 6.3.3. Přerušované svary – varianta b)

Proti průběžným svarům už by měl být u detailů C, D patrný rozdíl, protože je jejich délka již výrazně zmenšena.



Obr. 28: Detail C s orientačními hodnotami, varianta b).



Obr. 29: Detail D s orientačními hodnotami napětí, varianta b).



Situace je tu obdobná. Největší napětí je stále u detailu A potažmo B u přechodu svaru do základního materiálu. Při porovnání obrázků je patrné, že u detailů C, B se na tělech svarů zvýšilo napětí. Nicméně to není natolik zásadní, takže bezpečnost bude dána jako v případě průběžných svarů.

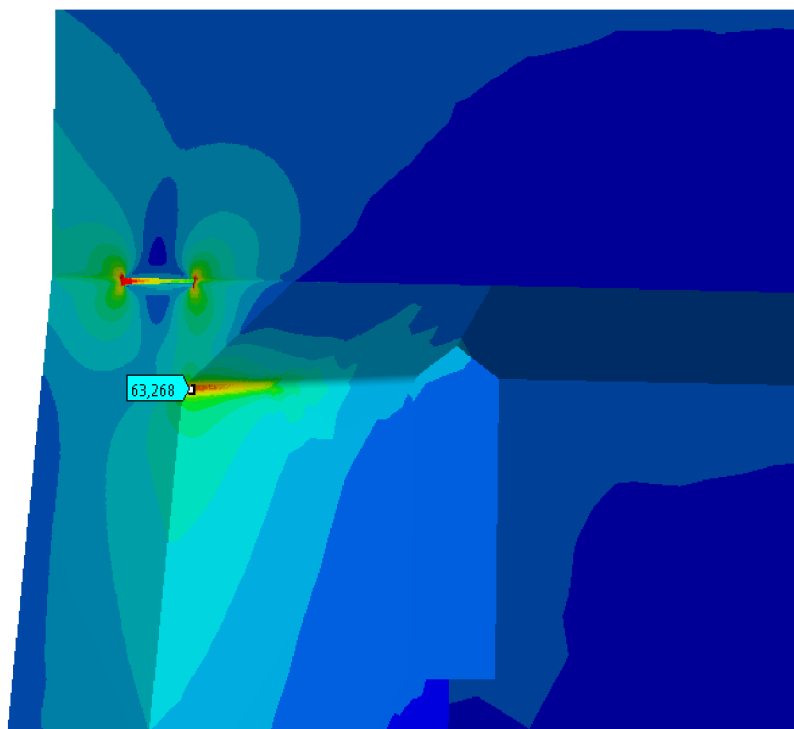
$$k_K = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red}} = \frac{345}{79} = 4,36 \quad \text{resp.} \quad k_K = \frac{345}{90} = 3,83 \quad (6.34), (6.35)$$

#### 6.4. Zhodnocení

Všechny tři zmíněné varianty jsou vzhledem ke způsobu posuzování použitelné. Z toho samozřejmě plyne, že původní průběžné svary jsou, dle mého názoru, bez problému použitelné. Pokud by ale bylo třeba zvýšit spolehlivost, pak lze doporučit zvýšení tloušťky svarů. Pro svary tloušťky  $a = 10\text{mm}$  u detailů A, B, C dojde k poměrně významnému snížení napětí u přechodu svaru do základního materiálu. To však platí pouze v případě zaoblení tohoto přechodu. Pokud je ponechána ostrá hrana, k snížení tento způsob nevede, viz tabulka.

|          | Napětí před zaoblením<br>[MPa] | Napětí po zaoblení<br>[MPa] |
|----------|--------------------------------|-----------------------------|
| Detail A | 91                             | 63                          |
| Detail B | 82                             | 56                          |
| Detail D | 50                             | 39                          |

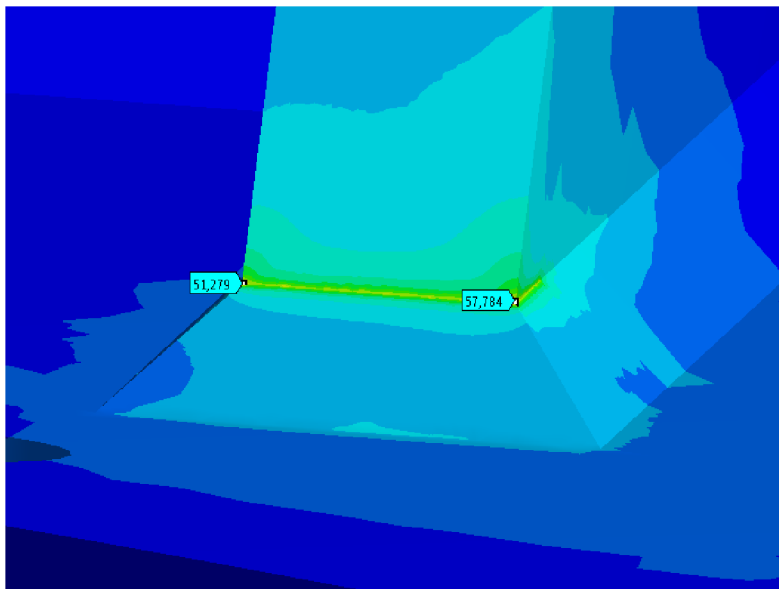
Tab. 4: Hodnoty napětí pro svary tloušťky 10mm



Obr. 30: Detail A s orientační hodnotou napětí, zaoblený přechod,  $a = 10\text{mm}$ .

Můj model geometrie, včetně modelu vazeb je docela zjednodušený. Podle výpočtové zprávy, kterou jsem měl k dispozici [11], byl vytvořen komplexní model včetně nosného rámu, na kterém je uložen elektromotor. Deformace se pak částečně realizovala v tomto rámu, což vedlo k dalšímu snížení napětí v horní části rámu. Můj model je tedy spíše extrémní situace.

Samostatnou kapitolou je potom detail C. Zde napětí zůstávalo stejné pro všechny varianty řešení. Tím jak je model vytvořen, vznikl zde malý schod. Ten jsem poté drobnou úpravou odstranil, ale extrémní hodnoty zde, sice menší, přetrvaly.



*Obr. 31: Orientační hodnoty napětí u paty žebra.*

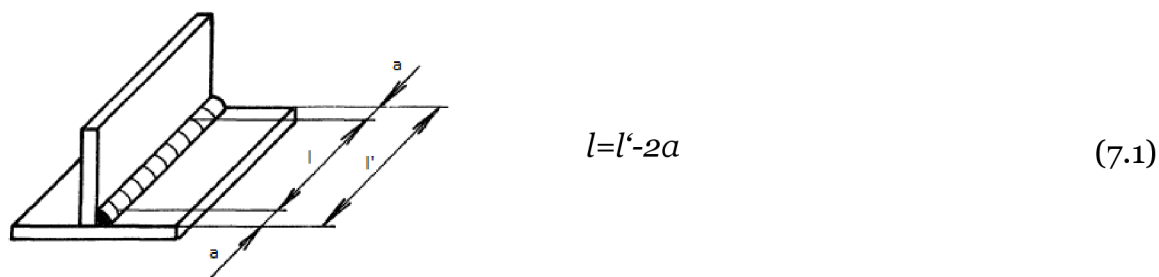
## 7. Návrh svarů dle platných norem

V první řadě musím poznamenat, že se budu zabývat pouze koutovými svary, protože sestava, až na čtyři poloviční „V“ svary, obsahuje pouze svary koutové.

V dnešní době jsou platné dvě normy, podle kterých lze stanovit únosnost, ČSN 05 0120 a ČSN EN 1993-1-8 spadající do velké skupiny s názvem Eurokód 3.

### • délka svaru

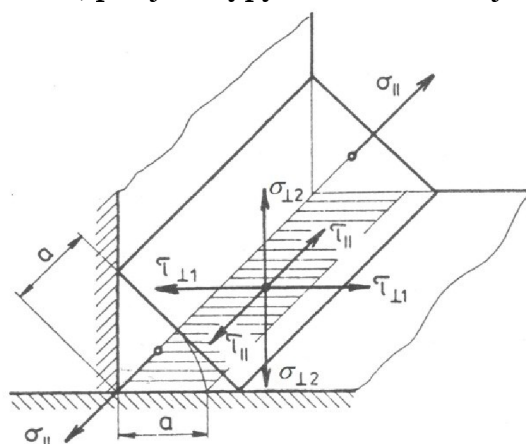
Je to délka  $l$ , někdy označovaná jako výpočtová, ve které má daný svar plný průřez. Většinou se uvažují počáteční a koncové krátery, kde plný průřez není dodržen. Pak se výpočtová délka uvažuje následovně:



Obr. 32: Výpočtová délka svaru, převzato z [4].

### 7.1. Napětí v koutovém svaru

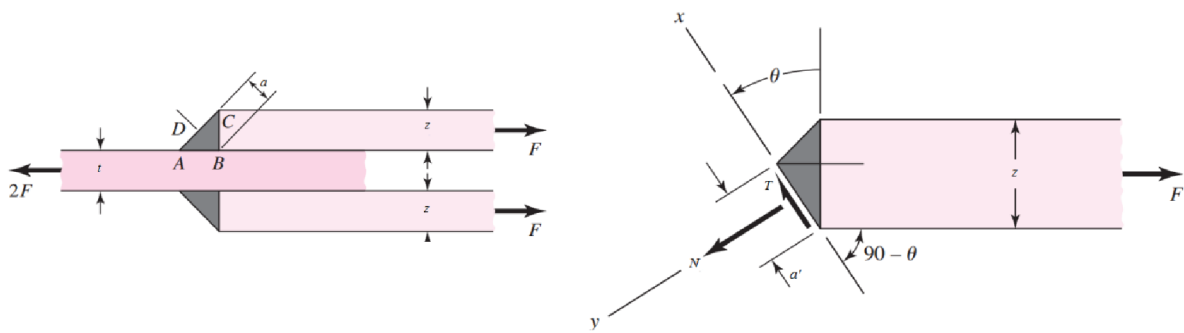
Dle způsobu namáhání a konfigurace svaru může ve spoji vznikat normálové a smykové napětí s respektive  $t$ . Na obr. 6 je vyobrazen spoj s různými typy napětí, jimž se budu dále věnovat a uvedu, pro jaké typy zatížení vznikají.



Obr. 33: Druhy napětí ve svarovém spoji, převzato z [7].

### • čelní koutové svary

S pomocí základních vztahů lineární pružnosti byla odvozena maximální smyková napětí  $\tau$  a normálová napětí  $\sigma$ , která působí v průřezu svarového spoje. Na následujícím obrázku je čelní spoj a z něho uvolněná část, pro kterou pak uvedu odvození maximálních napětí.



Obr. 34: Čelní koutový svar a jeho uvolněná část, převzato z [8].

Na základě rovnováhy budou síly T, N následující

$$N = F \cdot \cos \varphi \quad (7.2)$$

$$T = F \cdot \sin \varphi \quad (7.3)$$

Dále je třeba určit průřez  $a'$ , v závislosti na úhlu  $\varphi$ . To lze pomocí sinové věty, kdy výsledný vztah je pak následující

$$a' = \frac{z}{\sin \varphi + \cos \varphi} \quad (7.4)$$

S využitím předchozích rovnic pak budou mít vztahy pro nominální napětí  $\tau$ ,  $\sigma$  následující podobu

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{N}{a'l} = \frac{F}{zl} (\cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \quad (7.5)$$

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{T}{a'l} = \frac{F}{zl} (\sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi). \quad (7.6)$$

Vztahy pro maximální napětí pak získáme tak, že rovnice (7.5), (7.6) derivujeme podle  $\varphi$  a ty pak položíme rovny nule, abychom získali extrémní hodnotu těchto rovnic. Ta se vyskytuje při hodnotě  $\varphi = 67,5^\circ$  a extrémní hodnoty pak mají tvar

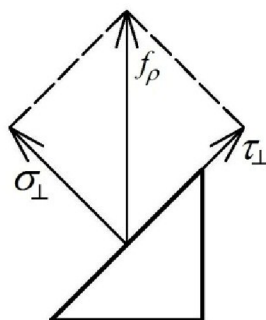
$$\tau_{MAX} = \frac{1,207 \cdot F}{zl} \quad (7.7)$$

$$\sigma_{MAX} = \frac{0,5 \cdot F}{zl} \quad (7.8)$$

Z toho je patrné, že extrémy takto odvozených napětí leží jinde, než v nosném průřezu. Ten je však z hlediska navrhování nejdůležitější, protože právě napětí v něm působící se využívají k hodnocení únosnosti svarů. Dle normy ČSN 050120 se v průřezu uvažuje pouze napětí  $\tau_{\perp}$ , jehož velikost je dána následujícím vztahem.

$$\tau_{\perp} = \frac{T}{S} = \frac{F}{a \cdot l} = \frac{\sqrt{2} \cdot F}{zl} \approx \frac{1,414 \cdot F}{zl} \quad (7.9)$$

Takové úvahy však z hlediska pružnosti nejsou zcela korektní. Pokud povedu řez právě nosným průřezem svaru, pak bude uvolněný řez stran napětí vypadat následovně.



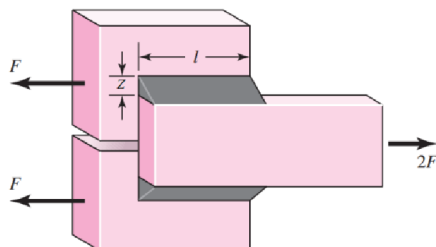
Obr. 35: uvolněný nosný průřez.

Výše uvedenému vztahu (7.9) pak odpovídá napětí, které jsem označil jako  $f_p$ . Za předpokladu rovnoměrného rozložení napětí budu uvažovat  $\sigma_{\perp} = \tau_{\perp}$  a jejich velikost bude

$$\tau_{\perp} = \sigma_{\perp} = \frac{f_p}{\sqrt{2}} \quad (7.10)$$

#### • boční koutové svary

Pro boční svary je charakteristické, že směr zatížení je rovnoběžný s nosným průřezem, zatímco u čelních je směr zatížení kolmý. Tedy v případě zatížení tahem.



Obr. 36: Boční koutové svary zatížené tahem, převzato z [8].

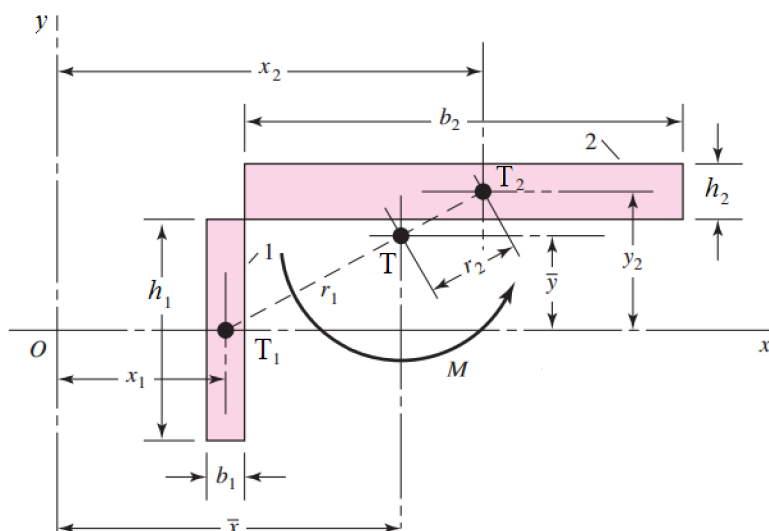
Stejně jako u čelních svarů, tak i zde se uvažuje v nosném průřezu pouze smykové napětí značené jako  $\tau_{\parallel}$  dle obr. 6. Uvažovaný vztah je shodný s (7.9) a je tedy roven

$$\tau_{\parallel} = \frac{T}{S} = \frac{F}{a \cdot l} = \frac{\sqrt{2} \cdot F}{z \cdot l} \approx \frac{1,414 \cdot F}{z \cdot l} \quad (7.11)$$

Vztahy uvedené pro boční a čelní svary platí pouze pro namáhání tahem respektive tlakem a také předpokládají rovnoměrné rozložení napětí v nosném průřezu.

#### • svary namáhané krutem

Při namáhání krutem se vychází ze vztahů lineární pružnosti stejně jako v předchozích případech. Jedinou změnou proti předchozím typům je to, že nosný průřez se sklopí do roviny připojení a pak se vyšetřují smyková napětí v něm působící. Pro příklad skupiny svarů dle obr. 10 uvedu postup výpočtu smykového napětí.



Obr. 37: Sklopené průřezy skupiny svarů namáhaných krutem, převzato z [8].

Výchozí vztah pro smykové napětí je následující

$$\tau = \frac{M \cdot r}{J_p} \quad (7.12)$$

kde  $M$  je krouticí moment,  $r$  představuje největší vzdálenost od těžiště dané skupiny svarů a  $J_p$  je kvadratický moment průřezu celé skupiny svarů.

Relativně nejobtížnější je pak zjištění  $J_p$ , kdy je třeba nejprve vypočítat průřezové charakteristiky  $J_x, J_y$  pro jednotlivé sklopené průřezy. Vzhledem k tomu, že se jedná o dva obdélníky, budou vztahy k těžištím  $T_1, T_2$  následující

$$J'_{x1} = \frac{b_1 h_1^3}{12}, J'_{y1} = \frac{h_1 b_1^3}{12}, J'_{x2} = \frac{b_2 h_2^3}{12}, J'_{y2} = \frac{h_2 b_2^3}{12}. \quad (7.13), (7.14), (7.15), (7.16)$$

Dále se určí polární momenty k jednotlivým těžištím, tedy

$$J'_{p1} = J'_{x1} + J'_{y1}, J'_{p2} = J'_{x2} + J'_{y2}. \quad (7.17), (7.18)$$

Potom je třeba určit těžiště skupiny svarů.

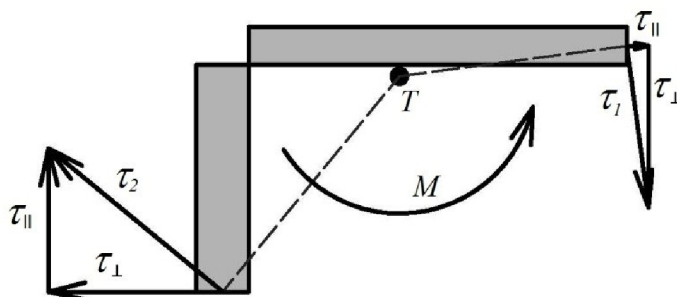
$$\bar{x} = \frac{\sum S_i x_i}{S}, \bar{y} = \frac{\sum S_i y_i}{S} \quad (7.19), (7.20)$$

Díky tomu jsem schopen určit vzdálenosti  $r_1, r_2$ , které jsou potřebné pro použití Steinerovy věty na polární momenty  $J'_{p1}, J'_{p2}$ .

$$J_{p1} = J'_{p1} + S_1 r_1^2, J_{p2} = J'_{p2} + S_2 r_2^2 \quad (7.21), (7.22)$$

Hledaný polární moment  $J_p$  ve vztahu (7.12) je pak dán součtem předchozích rovnic (7.21), (7.22). Na obrázku níže jsou pak zobrazeny vektory smykových napětí pro daný příklad. Pokud by byl moment vyvozen silou, bylo by třeba uvažovat i smykové napětí vznikající od posouvající síly.

Vzhledem k tomu, že se v nosném průřezu uvažují pouze napětí kolmá na podélnou osu svaru, respektive s ní rovnoběžná, je třeba výsledné vektory rozložit do příslušných směrů.



Obr. 38: Vektory smykových napětí.

Při pohledu na obr. 6 je jasné, že jediné napětí, které jsem neuvedl v této kapitole je napětí  $\sigma_{\parallel}$ . Toto napětí nevystupuje v žádných výpočtech a jeho vliv se zcela zanedbává.

## 7.2. Podmínky pevnosti

U prvně jmenované se zanedbává vliv napětí  $\sigma_{\perp}$  s výjimkou těch, které se používají pro spojení pásnice a stojiny nosníku, tzv. krční svary. Srovnávací napětí má tvar

$$\tau_s = \sqrt{\left(\frac{\tau_{\perp}}{\alpha_{\tau_{\perp}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\parallel}}{\alpha_{\tau_{\parallel}}}\right)^2} \quad (7.23)$$

kde  $\tau_{\perp}$ ,  $\tau_{\parallel}$  jsou příslušná napětí a  $\alpha_{\tau_{\perp}}$ ,  $\alpha_{\tau_{\parallel}}$  jsou převodní součinitele, jejichž hodnota závisí na způsobu zhotovení svaru. Napětí  $\tau_s$  pak musí vyhovovat podmínce

$$\tau_s \leq \beta \frac{\sigma_{kt}}{n}, \quad (7.24)$$

kde  $\beta$  je součinitel tloušťky svaru,  $\sigma_{kt}$  je mez kluzu spojovaných součástí a  $n$  je návrhový součinitel.

Pro Eurokód 3 má srovnávací napětí tvar

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + 3(\tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2)}. \quad (7.25)$$

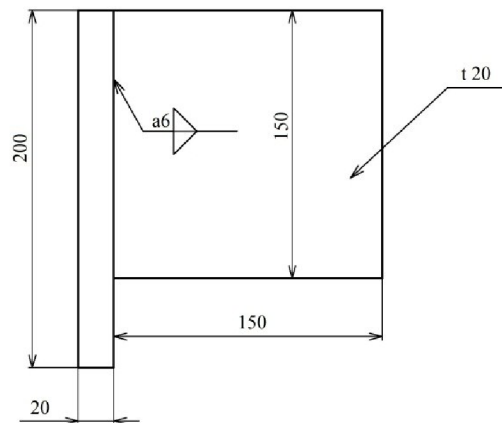
Tento vztah je v podstatě obdobou redukovaného napětí dle HMM pro kombinované namáhání a na rozdíl od předchozí normy musí vyhovět dvěma podmínkám

$$\sigma_s \leq \frac{f_u}{\beta_w \cdot \gamma_{M2}} \quad \wedge \quad \sigma_{\perp} \leq \frac{0,9 f_u}{\gamma_{M2}}, \quad (7.26), (7.27)$$

kde  $f_u$  je mez pevnosti svařovaných součástí,  $\gamma_{M2}$  je návrhový součinitel a  $\beta_w$  je korelační koeficient, jehož hodnota závisí na druhu použitých ocelí, respektive na jejich pevnosti.

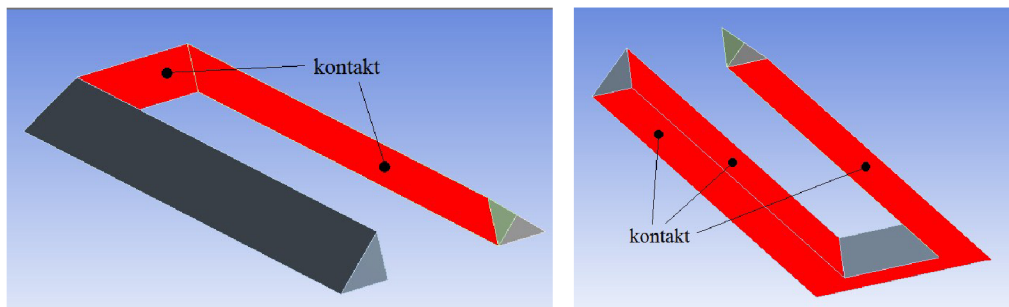
## 8. Srovnání MKP s normami

V kapitole 6 jsem hodnocení provedl vzhledem k meznímu stavu pružnosti. Dle tohoto jsem usoudil, že původní návrhy, tak jsem je dostal k rukám, jsou zcela vyhovující. Do tohoto návrhu však není zahrnuto hodnocení únosnosti podle předchozí kapitoly. Zde se tedy pokusím odpovědět, jestli lze z metody MKP získat napětí odpovídající vztahům z norem. Pro tento výpočet jsem si zvolil jednoduchý model geometrie uvedený na obrázku níže.



Obr. 39: Model geometrie.

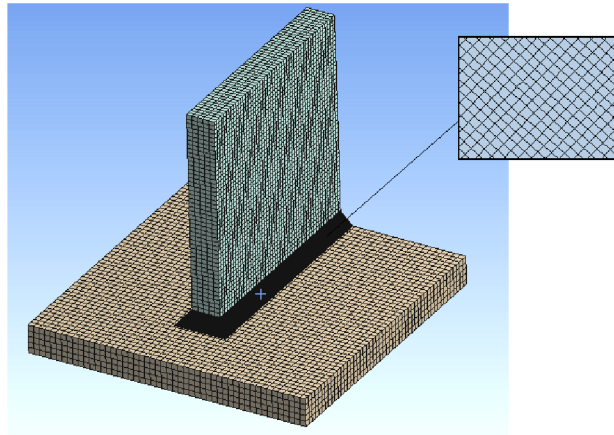
Tento model jsem proti rámu vytvořil ze tří samostatných součástí, podstavy, žebra a samotného tělesa svarů. Díky jednoduchosti jsem tedy mohl vytvořit spojení více odpovídající realitě. Podstava a žebro jsou spojeny pomocí svaru za pomoci kontaktů. Tím pádem mi odpadla mezera vytvořená v kořeni svaru u řešeného rámu.



Obr. 40: Kontaktní plochy na tělese svaru.

Díky tomuto řešení jsem byl schopen vytvořit na podstavě a žebře pravidelnou síť tvořenou hexagonálními prvky s délkou hrany  $5\text{mm}$ . Je výchozí prvek, z něhož je odvozen element použitý u síťe rámu. Síť svaru je z hexagonálních prvků a z odvozených degenerovaných tvarů s délkou hrany  $0,5\text{mm}$ . Síť je tedy tvořena 647 537 uzly a 157 711 prvky.





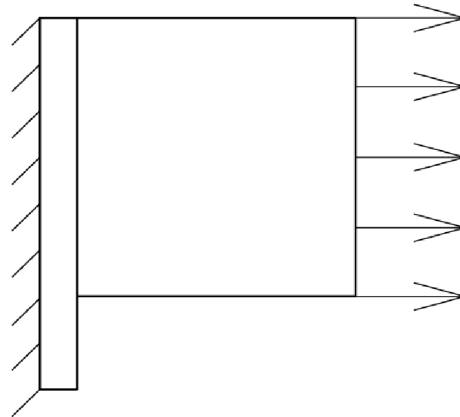
Obr. 41: Síť modelu geometrie.

### 8.1. Tahové namáhání čelních svarů

Teoretická hodnota smykového napětí, které svar přenáší je dána vztahem (8.1).

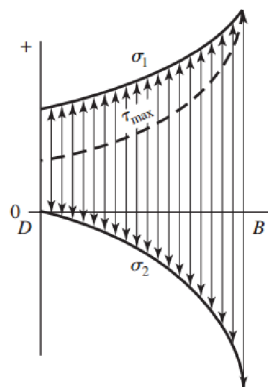
- délka svaru:  $l = 288\text{mm}$
- síla  $F = 30000\text{N}$
- tloušťka svaru  $a = 6\text{mm}$

$$\tau_{\perp} = \frac{F}{S} = \frac{30000}{288 \cdot 6} = 17,36\text{MPa} \quad (8.1)$$



Obr. 42: Schéma zatížení modelu.

Vzhledem k tomu, že analytické určení smykového napětí je v podstatě nemožné, vychází se z předpokladu, že smykové napětí působící v nosném průřezu (8.1) je rozloženo rovnoměrně. Tento předpoklad je však hodně nepřesný. Už roku 1937 publikovali Salakian a Claussen průběh napětí v nosném průřezu s použitím fotoelasticimetrie [8].



Obr. 43: Průběh napětí v nosném průřezu svaru, převzato z [8].

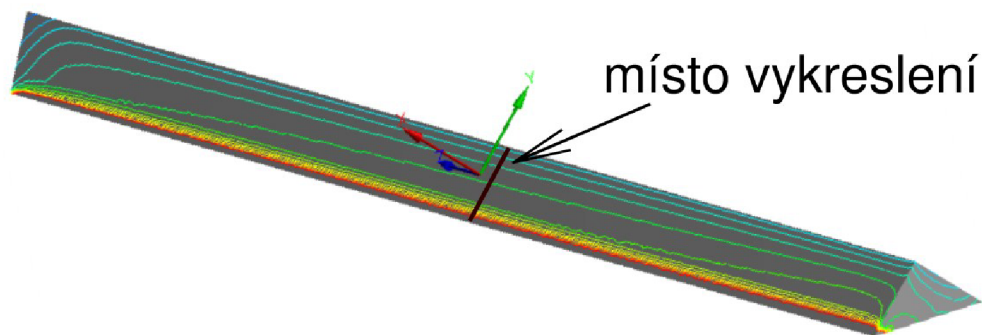
Z předchozího obrázku je patrné, že, co do velikosti, je normálové napětí poměrně významné. Pokud tedy budu uvažovat rozložení jako na obrázku 35, pak určení k napětí  $\sigma_{\perp}$  budu potřebovat normálovou složku  $F_n$ .

$$F_n = \frac{F}{\sqrt{2}} = 21213N \quad (8.2)$$

Napětí dle jednoduchého vztahu bude

$$\sigma_{\perp} = \frac{F_n}{S} = 12,27MPa \quad (8.3)$$

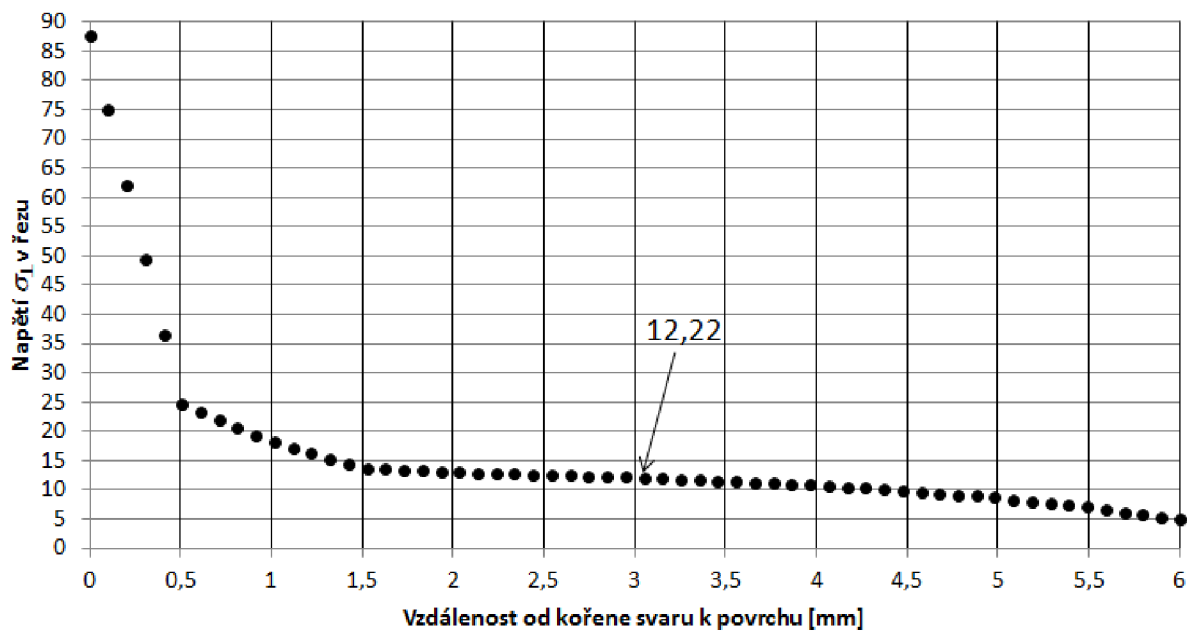
Z předpokladu, že smykové napětí je v průřezu je rovnoměrně rozložené, lze usuzovat, že by tomu tak mohlo být i pro napětí  $\sigma_{\perp}$ . Na obrázku níže je vidět, že tomu tak není ani v nejmenším.



Obr. 44: Napětí v řezu  $\sigma_{\perp}$ , zobrazení pomocí isolinií.

U kořene svaru vzniká poměrně výrazná koncentrace. Okraje svaru taktéž k rovnoměrnosti nepřispívají. Proto jsem se rozhodl vybrat napětí ve středu průřezu.

### Průběh napětí v řezu svaru



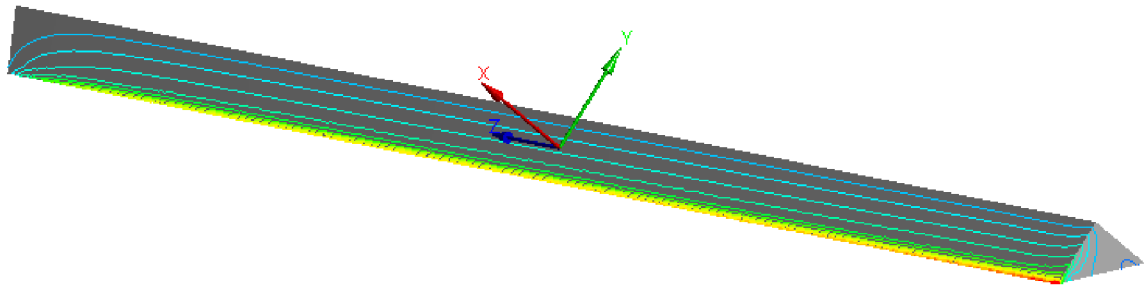
Graf 1: Napětí v nosném průřezu svaru

Z grafu je patrné, že ve vzdálenosti 3mm od kořene svaru je napětí  $\sigma_{\perp} = 12,22MPa$ . Tato hodnota se velmi blíží k teoretické hodnotě dle (8.3). Přesnost je do jisté míry dána volbou vzdáleností od krajů. Dle isolinií by na levé straně vycházelo ve středu průřezu nižší, naopak na pravém okraji by bylo vyšší.

Jiná situace nastane u smykového napětí  $\tau_{\perp}$ . Pokud vyjdu z obrázku 35, pak je jasné, že napětí t by mělo být stejně velké jako s, protože sklon nosného průřezu je  $45^{\circ}$ . Podle toho je stejná tečná i normálová složka síly, takže

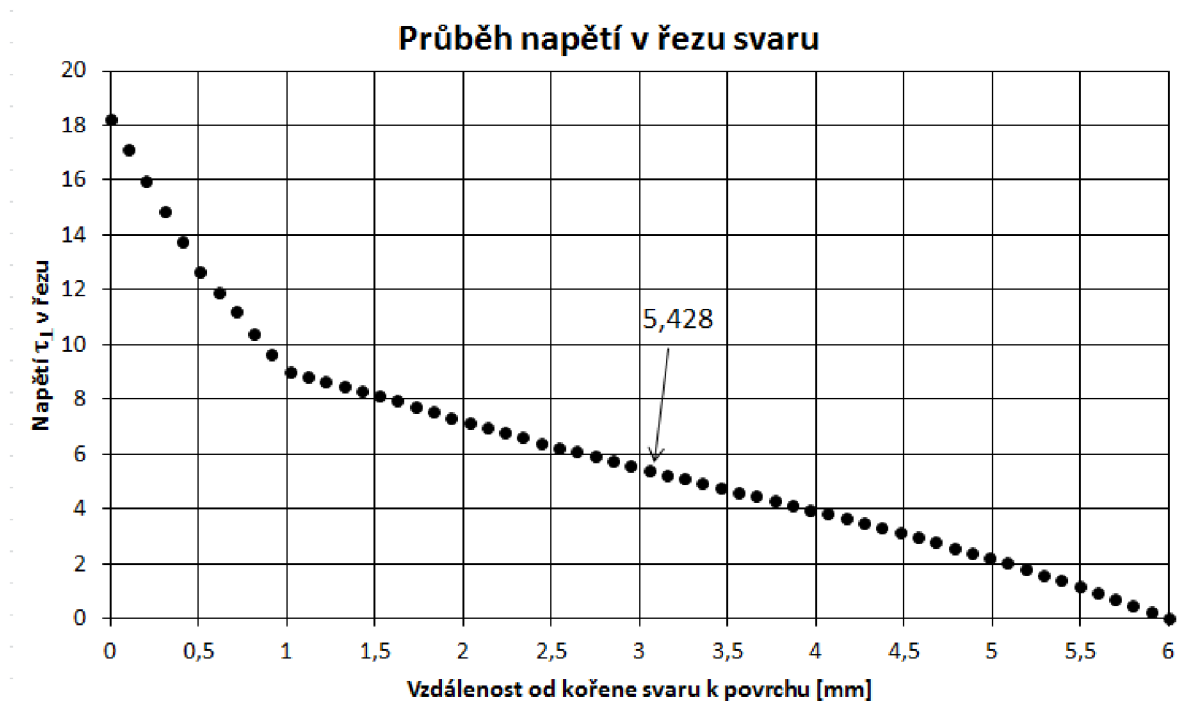
$$F_t = \frac{F}{\sqrt{2}} = 21213N \quad \tau_{\perp} = \frac{F_t}{S} = \frac{21213}{288 \cdot 6} = 12,27MPa \quad (8.4), (8.5)$$

Pokud uvážím následný souřadnicový systém, pak napětí  $\tau_{\perp}$  by mělo být  $\tau_{xy}$ .



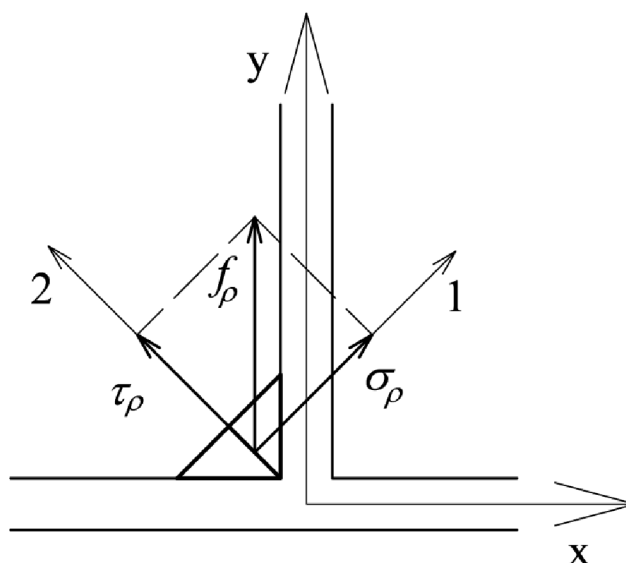
Obr. 45: Napětí v řezu  $\tau_{xy}$ , zobrazení pomocí isolinií.

Je vidět, že průběh napětí je podobný se  $\sigma_{\perp}$ . Pro vyhodnocení jsem vybral stejné místo jako předtím.



Graf 2: Průběh napětí v nosném průřezu

Z grafu je patrné, že buď jsou mé úvahy mylné nebo napětí  $t$  neodpovídá napětí  $t_{\perp}$ . Proto zkusím vypočítat napětí v řezu dle vztahů z Pružnosti [2] za pomoci napětí z Ansysu.



Obr. 46: Předpokládané rozložení napětí v nosném průřezu.

K tomu potřebuji směrové vektory směrů 1, 2 resp.  $\{\alpha\}$ ,  $\{\beta\}$ .

$$\{\alpha\} = [\cos \varphi \ \sin \varphi]^T, \quad \{\beta\} = [-\sin \varphi \ \cos \varphi]^T \quad (8.6), (8.7)$$

Pro případ na obr. 46 bude dle [2] rovinná napjatost dána tentorem  $T_{\sigma}$ .

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

Normálové napětí  $\sigma_{\rho}$  a smykové napětí  $\tau_{\rho}$  v rovině  $r$  budou následující.

$$\sigma_{\rho} = \{\alpha\}^T [T_{\sigma}] \{\alpha\} \quad (8.9)$$

$$\tau_{\rho} = \{\beta\}^T [T_{\sigma}] \{\alpha\} \quad (8.10)$$

Po rozepsání vztahů (8.9), (8.10) získám.

$$\sigma_{\rho} = [\cos \varphi \ \sin \varphi] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

$$\tau_{\rho} = [-\sin \varphi \ \cos \varphi] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

Výsledné vztahy po úpravě (8.11), (8.12) budou mít následující tvary.

$$\sigma_{\rho} = \sigma_x \cos^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi \quad (8.13)$$

$$\tau_{\rho} = -\sigma_x \sin \varphi \cos \varphi - \tau_{xy} \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi \quad (8.14)$$

Hodnoty napětí z Ansysu jsou  $\sigma_x = 2,78MPa$ ,  $\tau_{xy} = 3,89MPa$ ,  $\sigma_y = 13,64MPa$  a z geometrie svaru je jasné, že  $\varphi = 45^\circ$ . Po dosazení do (8.13), (8.14) získám

$$\tau_\rho = 5,43MPa \quad (8.15)$$

$$\sigma_\rho = 12,1MPa \quad (8.16)$$

Výše uvedený obrázek je nakreslen pro teoretický stav. Z rovnic (8.15), (8.16) je patrné, že obecné napětí  $f_\rho$  nemá předpokládaný směr. Pro směr dle obr. 46 by musely být hodnoty  $\tau_\rho$  a  $\sigma_\rho$  stejné.

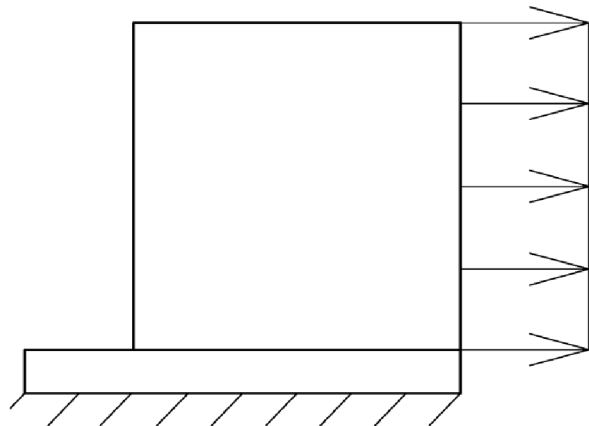
Z předchozích hodnot je patrné, že ve svaru je podstatně odlišná napjatost, než jaká je předpokládána. Dalším předpokladem, který není splněn proti normám, je rovnoměrnost napětí v nosném průřezu. Z předcházejících grafů a obrázků lze říci, že napětí dle vztahů z norem a Ansysu není možné porovnávat.

## 8.2. Tahové namáhání bočních svarů

Model je stejný, jen způsob zatížení je odlišný, takže parametry jsou stejné jako u předchozího výpočtu a napětí bude  $\tau_{\parallel}$ .

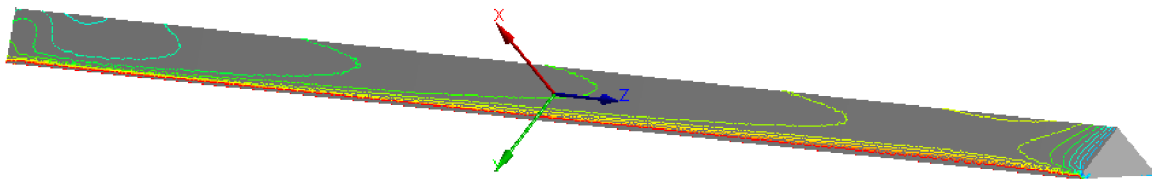
- délka svaru:  $l = 288\text{mm}$
- síla  $F = 30000\text{N}$
- tloušťka svaru  $a = 6\text{mm}$

$$\tau_{\parallel} = \frac{F}{S} = \frac{30000}{288 \cdot 6} = 17,36\text{MPa} \quad (8.17)$$



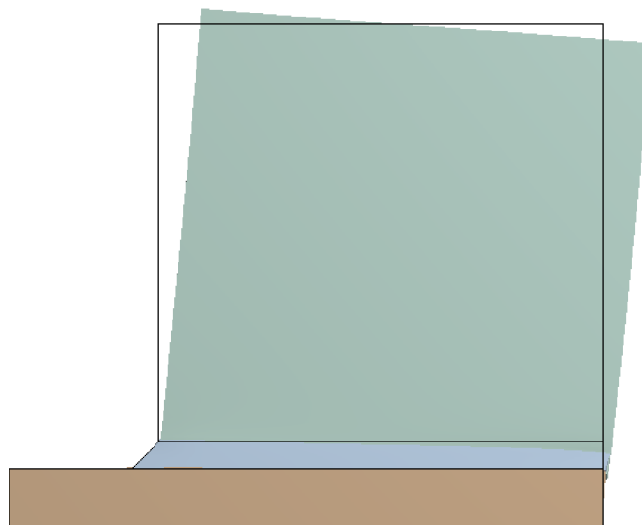
Obr. 47: Schéma zatížení modelu.

Zde by měla být situace proti předchozímu namáhání jednodušší. Zde je předpoklad o působení napětí pouze ve směru osy svaru pochopitelná. Pokud vezmu v úvahu řez na obr. 44 a stejnou orientaci souřadnicových os, pak napětí ve směru osy bude  $\tau_{xz}$ .



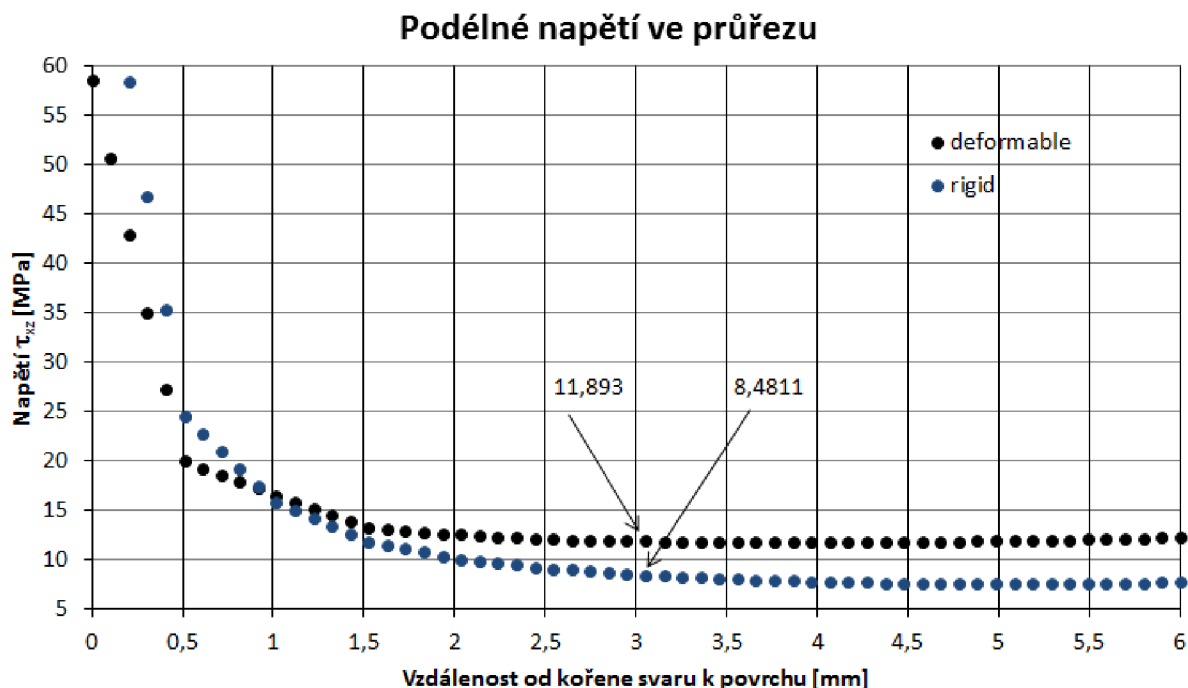
Obr. 48: Napětí  $\tau_{xz}$  v nosném průřezu svaru.

Na obrázku je situace, kdy napětí rosté zleva doprava. Zde je zřejmě na vině ohyb. Ten vzniká jako důsledek způsobu zatížení modelu, viz. obr. níže.



Obr. 49: Deformovaný tvar žebra.

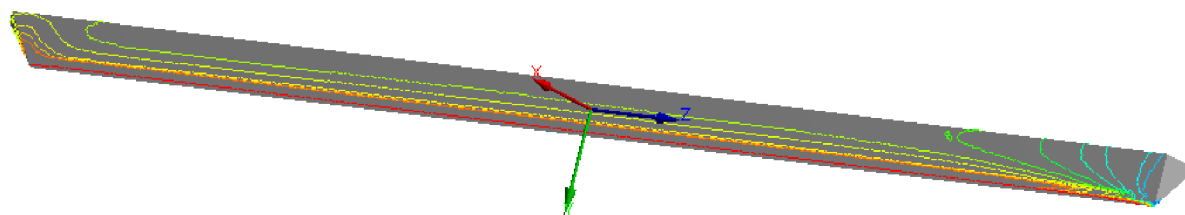
Pokud si vezmu v úvahu stejné místo jako u předchozího modelu, pak zde napětí vypadá následovně (černé hodnoty – deformable).



Graf 2: Podélné napětí v průřezu

Hodnota napětí je tedy přibližně  $12\text{MPa}$ . Tato hodnota je však s přihlédnutím k obrázku 48 vcelku nevypovídající, protože posunem vlevo či vpravo lze snadno získat rozdílné hodnoty.

Proto jsem tentýž model upravil tak, že zatížené žebro má nastavené chování jako rigid, tudíž nedochází k jeho deformaci. Tím bych měl eliminovat ohyb.



Obr. 50: Průběh napětí při rigid chování žebra.

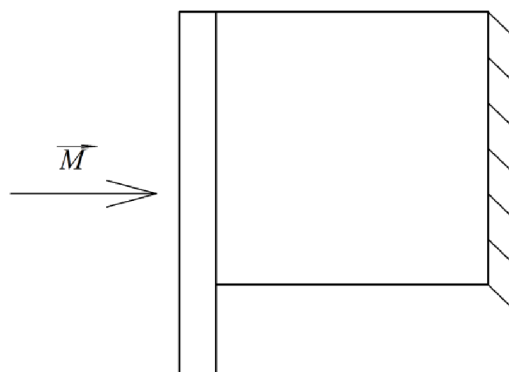
Z obrázku 50 je vidět, že z průběhu napětí byl odstraněn vliv ohybu. Tím se mi ale snížila i hodnota napětí. Ve stejném místě bude hodnota okolo  $8\text{MPa}$ . Ta ještě vzdálenější hodnotě vypočtené ve vztahu (8.17).

Napětí rovnoběžné s osou svaru lze tedy určit v Ansysu ale, stejně jako předtím, jej nelze srovnávat s hodnotou vycházející ze vztahu (8.17).

### 8.3. Namáhání krutem

Zde je situace asi nejsložitější. Výpočet je u mého modelu poměrně jednoduchý, pro se složitostí konstrukce stává velmi obtížný.

- délka svaru:  $l = 288\text{mm}$
- moment  $M = 500\text{Nm}$
- tloušťka svaru  $a = 6\text{mm}$



Obr. 51: Zatížení modelu.

Dle postupu z kapitoly 7 vypočtu maximální smykové napětí. Pro zjednodušení jsem neuvažoval krátkou část svaru, kdy se svar vrací na druhou stranu žebra.

Jako první jsou třeba polární momenty k osám obou svarů.

$$J'_{x1} = J'_{x2} = \frac{150^3 \cdot 6}{12} = 1687500\text{mm}^4 \quad (8.18)$$

$$J'_{y1} = J'_{y2} = \frac{6^3 \cdot 150}{12} = 2700\text{mm}^4 \quad (8.19)$$

Součtem pak získám polární momenty

$$J'_{p1} = J'_{p2} = J'_{x1} + J'_{y1} = 1690200\text{mm}^4 \quad (8.20)$$

Polární moment je třeba určit pro těžiště skupiny svarů.

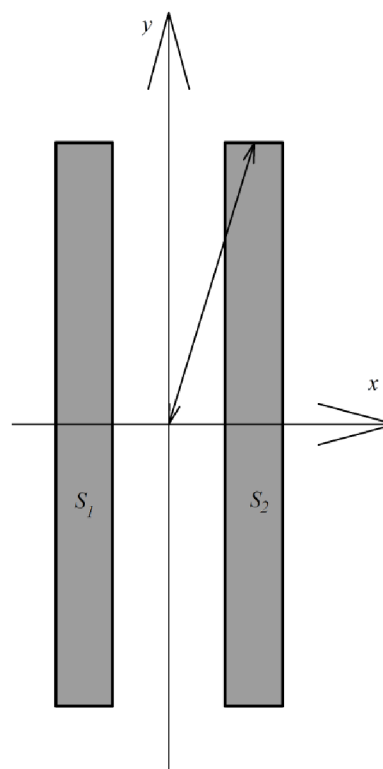
$$J_{p1} = J_{p2} = J'_{p1} + S_1 \cdot r_1^2 = 2050200\text{mm}^4 \quad (8.21)$$

Největší vzdálenost od těžiště svarů bude  $r = 77,62\text{mm}$ .

Maximální smykové napětí je poté

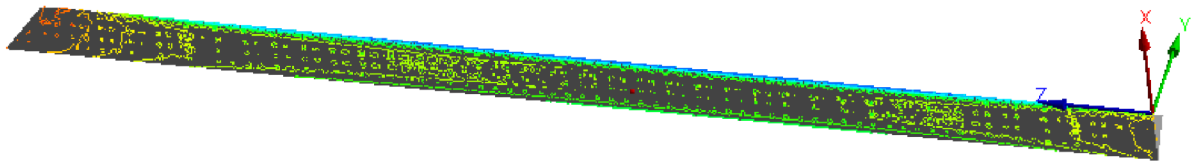
$$\tau_{MAX} = \frac{M \cdot r}{J_{p1} + J_{p2}} = 9,46\text{MPa} \quad (8.22)$$

Obr. 52: Sklopené průřezy svarů.

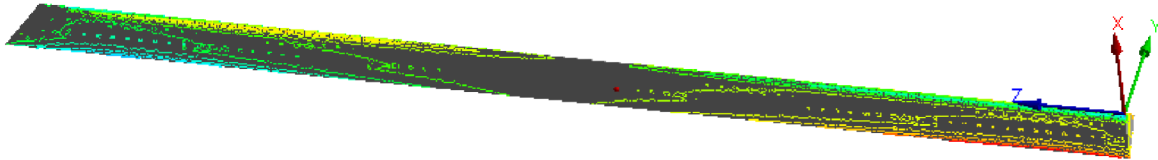


Napětí rovnoběžná respektive kolmá na podélnou osu svary budou  $\tau_{\parallel} = 9,36\text{MPa}$ ,  $\tau_{\perp} = 1,32\text{MPa}$ . Výpočet jednoduchý ale přenesení do Ansysu bude problematické. Smykové napětí totiž působí ve v průřezu, který se sklopí do roviny připojení. V tomto případě bude rovina připojení na povrchu, ke kterému je přivařeno žebro.





Obr. 53: Napětí  $\tau_{yz}$ .



Obr. 54: Napětí  $\tau_{xy}$ .

Sklopený průřez by tedy měl být na spodní straně svaru. Jak je vidět z předchozích dvou obrázků napětí kolmé  $\tau_{xy}$  respektive  $\tau_{yx}$  mají hodně neurčitý průběh. To je dáno tím, že je to v místě kontaktní dvojice. Pro tento způsob namáhání by byl zřejmě zapotřebí jiný model. Svary by pravděpodobně musely tvořit se spojovanými tělesy jeden celek tak, jako u modelu rámu. Z tohoto důvodu nelze určit z řezu věrohodné napětí. Proto také není možné porovnání hodnot.

## 9. Závěr

V první části jsem porovnal dvě konfigurace přerušovaných svarů se svary průběžnými. Jak se dalo očekávat, při použití přerušovaných svarů docházelo ke zvýšení napětí ve svarech, ale toto zvýšení nebylo tak velké, jak jsem očekával. Výstupem z této části je tedy doporučení, že původní svary jsou v pořádku a dle mého názoru použitelné. Pro průběžné svary jsem vytvořil variantu, u které byla v nejvíce namáhaných místech zvětšena tloušťka svarů na *10mm*. Ta ukázala, že při zaoblení přechodu svaru do základního materiálu dojde k výraznému snížení napětí. Všechny tyto poznatky vychází z oboustranného zatížení rámu. Pokud jsem rám zatížil pouze na jedné straně, pak došlo ke značnému nárůstu napětí. To bylo způsobeno změnou typu namáhání. Tento zátěžný stav však není zcela vypovídající, protože nemám správné okrajové podmínky modelu. Nicméně je zajímavé vidět, jak se změní napětí při změně způsobu namáhání. Tolik první část práce, která byla tou jednodušší. V té druhé je pak porovnání zda lze napětí uváděná v normách srovnat s nějakým ekvivalentem zjištěným z MKP. Podle mého názoru nelze tyto dva postupy srovnávat. Jak je vidět, porovnání není možné ani u takových jednoduchých modelů, tím méně pak na komplikovanějších úlohách, kde se obtížně určuje přesný způsob namáhání. Ve výsledcích je vidět, že některá napětí si vzájemně odpovídají. Tato skutečnost je dána vhodnou volbou místa vyhodnocení. Z toho plyne, že jsem schopen získat z Ansysu napětí, jehož hodnota odpovídá výpočtu. To dělá tento způsob porovnání nepoužitelným, protože volba místa závisela na mé vůli, což není zcela objektivní. Proto se mi jeví vzájemné porovnávání výpočtů dle norem a MKP jako ne zcela adekvátní. Pokud je možné použít na posouzení svarů výpočty dle norem, nechtě je použít tento způsob. Ovšem většina konstrukcí je značně komplikovaná, takže přichází na řadu MKP. Zde se poté projeví silné vrubové účinky, které v konstrukci svary způsobují. Tyto účinky nejsou v normě uvažovány. Z tohoto důvodu jsou také normy, co do velikosti napětí, poměrně konzervativní. Je to dáno tím, že musím být schopen navrhnout svar s dostatečnou spolehlivostí. Hodnocení spolehlivosti jsem provedl vůči meznímu stavu pružnosti, kdy zatížení jsem uvažoval jako kvazistatické. Vzhledem k určení rámu by bylo dobré také provést kontrolu vůči vzniku únavových lomů. Zde by bylo vhodné uvažovat nízkocyklovou únavu.

## 10. Seznam použitých zdrojů

- [1] JANČEK, Přemysl *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: hledání souvislostí: učební texty*. 1. vyd. Brno: CERM, 2007, 1234s. ISBN 978-80-7204-555-6.
- [2] JANÍČEK P., ONDRÁČEK E., VRBKA J., BURŠA J.: *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. 3. přeprac. vydání. Brno: CERM, 2004, 287s. ISBN 80-214-2592-X
- [3] ČSN EN 1993-1-8. *Eurokód 3: Navrhování ocelových konstrukcí – Část 1 – 8: Navrhování styčníků*. Praha: Český normalizační institut, 2006. 128s. Třídící znak 73 1401.
- [4] ČSN 05 0120. *Výpočet svarových spojů strojních konstrukcí*. Praha: Český normalizační institut. 33s
- [5] ČSN 41 1523. *Ocel 11 523*. Praha: Český normalizační institut, 1994. 20s.
- [6] ČSN 41 2050. *Ocel 12 050*. Praha: Český normalizační institut. 16s.
- [7] BOHÁČEK, František. *Části a mechanismy strojů I, Zásady konstruování, Spoje*. Brno: PC-DIR, 1997. 319s. ISBN 80-214-0886-3
- [8] SHIGLEY J. E., MISCHKE C. R., BUDYNAS R. G.: *Konstruování strojních součástí*. Brno: VUTIUM, 2010. ISBN 978-80-214-2629-0
- [9] PETRUŠKA Jindřich. *Počítačové metody mechaniky II*. Dostupné z <http://www.umt.fme.vutbr.cz/cz/studium/studijni-materialy.html>.
- [10] ANSYS Multiphysics, Release 13. Product help
- [11] VINKLÁREK Jiří. *Rám přetáčení palet H80 přerušovaný svar*. [Zlín]: Tajmac-ZPS, 21. 1. 2009. Výpočtová zpráva