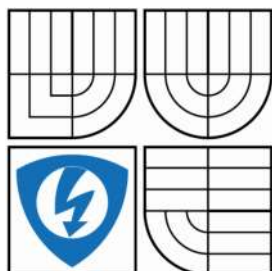


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ

ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

## MĚŘENÍ IONIZUJÍCÍHO ZÁŘENÍ

MEASUREMENT OF IONIZING RADIATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

ONDŘEJ PODOLSKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. PETR BENEŠ, Ph.D.

BRNO 2015

# OIGINÁLNÍ ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ / BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá měřením ionizujícího záření. Cílem měření je ověřit metody pro měření statistických parametrů zdrojů ionizujícího záření a ověření závislosti koeficientu útlumu na hustotě. Úvodní část obsahuje charakteristiku ionizujícího záření, jeho stínění interakci s okolím a detekci. Dále se práce zaměřuje na popis vybraných statistických rozložení a jejich testování. V závěru práce se zabývá praktickým ověřováním metod měření, které mohou v budoucnu sloužit jako laboratorní úlohy do výuky.

## **Klíčová slova**

Ionizující záření, radioaktivní záření, útlum ionizujícího záření, koeficient útlumu, hmotnostní koeficient útlumu, absorpce záření beta, statistické rozložení radioaktivního rozpadu, Poissonovo rozložení radioaktivního rozpadu, ověřování Poissonova rozdělení, radioaktivita, interakce ionizujícího záření

## **Abstract**

The bachelor's thesis deals with measuring of ionizing radiation. The aim is to verify the measurement methods for measuring statistical parameters of ionizing radiation sources and verification of attenuation coefficient depending on density. The first contains characteristic of ionizing radiation, shielding, detection and interaction with the environment. The thesis also focuses on the description and testing of selected statistical distributions. In conclusion deals with the practical verifications of measuring methods which may be used as a laboratory exercises in the future.

## **Keywords**

Ionizing radiation, radioactive rays, attenuation of ionizing radiation, attenuation coefficient, mass attenuation coefficient, absorption of beta radiation, statistical distribution of radioactive decay, Poisson distribution of radioactive decay, Poisson dispersion test, radioactivity, interaction of ionizing radiation

### **Bibliografická citace:**

PODOLSKÝ, O. Měření ionizujícího záření. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2015. 50s. Vedoucí bakalářské práce byl doc. Ing. Petr Beneš, Ph.D.

## **Prohlášení**

„Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma Měření ionizujícího záření jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

V Brně dne: **22. května 2015**

.....  
podpis autora

## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Petru Benešovi, Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

V Brně dne: **22. května 2015**

.....  
podpis autora

# Obsah

1	Ionizační záření.....	9
1.1	Co je ionizační záření.....	9
1.2	Druhy ionizačního záření .....	9
1.2.1	Rozdělení podle typu částice .....	9
1.2.2	Rozdělení záření podle způsobu ionizace.....	12
1.3	Zdroje ionizačního záření.....	12
1.4	Interakce ionizujícího záření s okolím .....	14
1.4.1	Ztráty energie těžkých částic při průletu hmotou .....	14
1.4.2	Ztráty energie částic $\beta$ při průletu hmotou.....	15
1.4.3	Průlet záření $\gamma$ hmotou.....	16
1.5	Stínění ionizujícího záření.....	17
1.6	Detekce ionizujícího záření .....	18
1.6.1	Rozdělení detektorů podle časového průběhu detekce.....	18
1.6.2	Rozdělení detektorů podle principu detekce .....	19
1.6.3	Rozdělení detektorů podle komplexnosti měřené informace .....	19
1.7	Veličiny charakterizující zdroje záření.....	20
2	Statistické zpracování dat .....	22
2.1	Vybraná rozdělení pravděpodobnosti.....	22
2.1.1	Normální (Gaussovo) rozdělení.....	22
2.1.2	Poissonovo rozdělení.....	23
2.1.3	Exponenciální rozdělení .....	24
2.2	Statistické vlastnosti radioaktivního rozpadu.....	25
2.3	Ověřování Poissonova rozdělení pomocí $\chi^2$ .....	26
2.4	Konstrukce histogramu.....	30
3	Návrh a realizace měření .....	32
3.1	Měření závislosti koeficientu útlumu na hustotě.....	32
3.1.1	Zadání.....	32
3.1.2	Teoretický popis.....	32
3.1.3	Postup.....	33
3.2	Ověření statistických parametrů zdrojů ionizujícího záření .....	37
3.2.1	Zadání.....	37
3.2.2	Teoretický popis.....	37
3.2.3	Postup.....	38
4	Závěr.....	47

# ÚVOD

Ionizující záření bylo objeveno koncem 19. století, kdy německý fyzik W. C. Roentgen objevil paprsky záření X. Od té doby se v oblasti radioaktivity uskutečnilo mnoho dalších významných objevů. Ionizační záření je součástí každodenního života a je využíváno v mnoha aplikacích od medicíny, energetiku, fyzice, průmyslu až třeba po zemědělství.

Hlavním cílem mé bakalářské práce je ověřit, zda se radioaktivní rozpad řídí podle Poissonovy statistiky a zjistit, jak je útlum ionizujícího záření závislý na hustotě látky kterou záření prochází.

V teoretické části se nejprve budu věnovat obecnému popisu radioaktivity, její detekce a stínění a teorií ověřování rozložení pomocí testů dobré shody. Praktická část bude zaměřena především na měření počtu částic, které projdou materiálem o různých tloušťkách a hustoty. Pomocí numerického testu bude poté následovat ověření, zda se počet registrovaných částic řídí podle Poissonova nebo normálního (Gaussova) rozložení.



# 1 IONIZAČNÍ ZÁŘENÍ

## 1.1 Co je ionizační záření

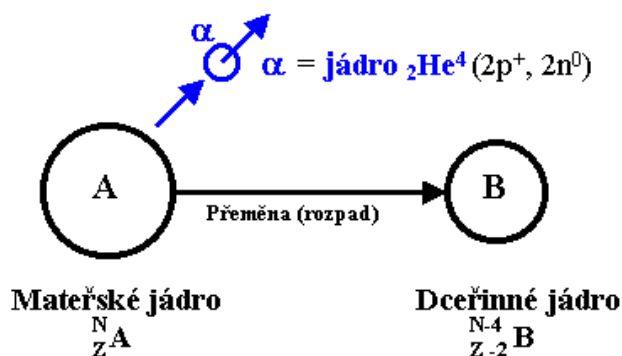
Ionizační záření je takové záření, jehož kvanta mají tak vysokou energii, že jsou schopna ionizovat a excitovat atomy nebo molekuly ozářených látek. Při excitaci dochází k předání energie záření elektronům atomu látky, které se po přijetí této energie přesunou na vyšší energetickou hladinu. Stav těchto excitovaných atomů není trvalý a elektron se po nějaké době vrátí na původní nižší energetickou hladinu, přičemž rozdíl energií těchto hladin se vyzáří pomocí kvanta elektromagnetického záření – fotonu. Při procesu ionizace tato kvanta částic vyrážejí elektrony z elektronových obalů atomů, a tím se z elektricky neutrálních atomů nebo molekul stávají elektricky nabitě částice – ionty. Toto záření také vzniká vzájemným působením částic nebo fotonů a atomových jader a při samovolném rozpadu atomových jader nestabilních nuklidů při radioaktivní přeměně. Vlastnosti ionizačního záření jsou různé a jsou určeny konkrétním zdrojem, který jej emituje. [1]

## 1.2 Druhy ionizačního záření

Jak už bylo zmíněno výše, druhů ionizačních záření existuje více. Dělí se hlavně podle typu částic, které tuto ionizaci vyvolávají, a to na alfa záření ( $\alpha$ ), beta záření ( $\beta$ ), záření gama ( $\gamma$ ), neutronové záření a rentgenové (RTG, někdy taky označováno jako X) záření. Dále jej můžeme rozdělit podle způsobu ionizace na přímo a nepřímo ionizující.

### 1.2.1 Rozdělení podle typu částice

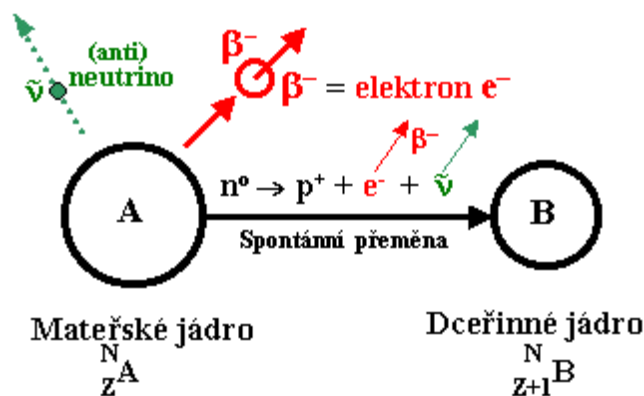
Záření  $\alpha$ : Jako částice alfa se označuje jádro hélia  ${}^4\text{He}$ . Záření  $\alpha$  je tedy proud rychle letících jader hélia, které tvoří dva protony a dva neutrony a označují se  $\text{He}^{2+}$ . Alfa částice jsou, v porovnání s ostatními částicemi ionizačního záření, nejtěžší a mají největší náboj. Vzhledem k tomu, že to jsou částice s nenulovou klidovou hmotností, nemohou se pohybovat rychlostí světla, ale pouze nižšími rychlostmi. Na ztrátě energie takto těžké částice se nejvíce podílí ionizace prostředí, kterým se tato částice pohybuje. Příčinou je její velký kladný náboj, který při průletu částice prostředím silně ionizuje ostatní atomy, čímž se ale také rychle brzdí. Menší rychlost – oproti jiným druhům záření – a rychlé ztrácení rychlosti má za důsledek krátký dolet a malou pronikavost – několik cm (v plynech). Toto záření se vyskytuje pouze u nejtěžších jader (urany, transurany).[1][2][3]



Obrázek 1.1 – Mechanismus vyzáření částice  $\alpha$  [3]

Záření  $\beta$ : Záření beta je tvořeno proudem částic, kterými jsou elektrony nebo pozitrony – antičástice k elektronu. Stejně jako částice  $\alpha$  mají částice  $\beta$  nenulovou klidovou hmotnost a taky se tedy nemohou pohybovat rychlostí světla. Jelikož stejně jako  $\alpha$  i částice  $\beta$  nesou elektrický náboj a tudíž je možné je rovněž ovlivňovat elektrickým polem. Záření  $\beta$  můžeme rozdělit na dvě záření  $\beta^+$  a  $\beta^-$  podle náboje částice, která je emitována. Ve srovnání s částicemi alfa jde o relativně malé a lehké částice a jejich schopnost ionizace je výrazně nižší než u záření  $\alpha$ . I proto má také větší pronikavost, která se pohybuje v řádech metrů (v plynech). Je to nejčastěji se vyskytující záření. [1][3][4]

Záření  $\beta^-$  vzniká při jaderné přeměně jádra atomu a následné emitaci elektronu. Toto se děje u jader s přebytkem neutronů, kde se některý neutron přemění na elektron, proton a neutrino. Proton je vázán v jádře a vytvořený elektron z jádra vylétá – částice  $\beta^-$ .

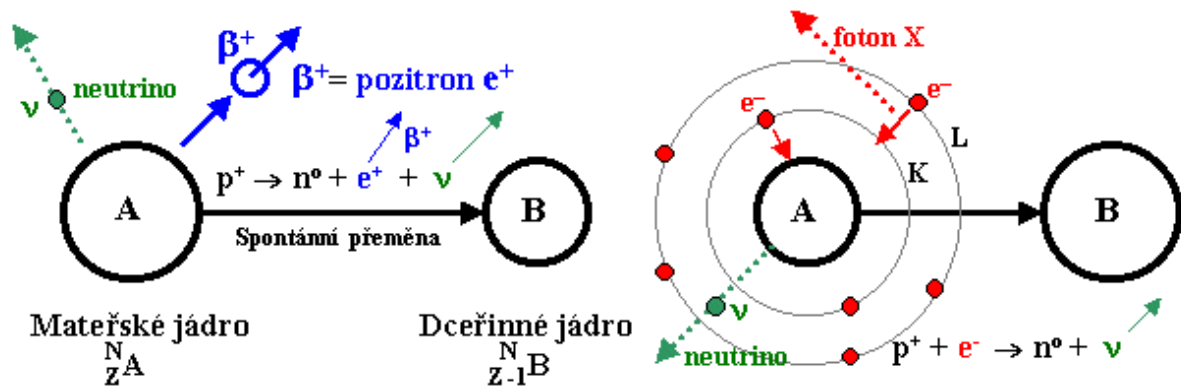


Obrázek 1.2 – Mechanismus vyzáření částice  $\beta^-$  [3]

Na záření  $\beta^+$  se podílí antičástice k elektronu, což je pozitron. Tento typ radioaktivity se opět nevyskytuje u všech radionuklidů, ale jen u těch, u kterých je protonů v jádře více než neutronů. Některý z těchto přebytečných protonů se přemění na pozitron, neutron a neutrino. Neutron zůstává v jádře, kde je vázán jadernými silami, zatímco pozitron z tohoto jádra vyletí jako částice  $\beta^+$ .

Mezi radioaktivitu  $\beta$  (interagují částice  $\beta$  – elektrony, pozitrony) se také řadí tzv. elektronový záchyt. Elektronový záchyt nastává u jader s přebytkem protonů. Při tomto

procesu přebytečný proton vtáhne elektron z elektronového obalu atomu do jádra, kde se s ním sloučí a tím vznikne neutron a neutrino. Na původní místo po elektronu přeskočí elektron z vyšší energetické hladiny. Změna hladiny má za následek vyzáření kvanta fotonů odpovídající velikosti rozdílů energií těchto hladin, známé jako rentgenové záření. Jedná se o elektromagnetické záření o vlnových délkách  $10^{-8}$  až  $10^{-12}$  m. Záření vlnové délky větší než 0,1 nm se označuje jako měkké a menší než 0,1 nm se označuje jako tvrdé rentgenové záření. Jeho ionizační schopnost je menší než u  $\alpha$  i  $\beta$  záření. Elektronový záchyt je jediným druhem radioaktivní přeměny jádra, na kterém se podílí i elektronový obal atomu. [1][2][3]



Obrázek 1.3 – Mechanismus vyzáření částice  $\beta^+$  (vlevo) a elektronový záchyt (vpravo) [3]

Záření  $\gamma$ : Na rozdíl od záření  $\alpha$  a  $\beta$  je záření  $\gamma$  vysokoenergetické elektromagnetické záření s velmi krátkou vlnovou délkou ( $10^{-11}$  až  $10^{-13}$  m), ve formě fotonů s velice velkou energií. Záření  $\gamma$  většinou vzniká společně se zářením  $\alpha$ , nebo  $\beta$ , kdy po vyzáření  $\alpha$  či  $\beta$  částice může být atom excitován. Podobně jako u rentgenového záření, které vzniká deexcitací elektronů v atomovém obalu, tak se i excitované jádro snaží dostat na nižší energetickou úroveň, na kterou může přejít vyzářením fotonu gama záření. Jelikož toto záření má vysokou energii, tudíž je velice pronikavé a je označováno jako tvrdé záření. Jeho schopnost ionizovat je opět menší než u  $\alpha$  a  $\beta$  záření. [2][3][7]

Neutronové záření: Jedno z dalších záření je záření neutronové. Jak již jeho název napovídá, jde o záření kvant neutronů. Vzniká při jaderném štěpení nebo fúzi, jejichž následkem je uvolnění volných neutronů z atomů a vzniku záření. Neutronové záření je považováno za nejtvrďší záření a má schopnost vyvolat radioaktivitu u většiny látek, na které dopadá. [3]

Kosmické záření: Jako kosmické záření označujeme záření s vysokou rychlostí přicházející z kosmu a dopadající do zemské atmosféry. Tvoří jej hlavně protony (85 - 90%) a jádra hélia (až 14%). Zbytek tvoří elektrony, jádra jiných atomů a jiné elementární částice. Součástí kosmického záření jsou i vysokoenergetické fotony záření gama. Rozlišujeme tři složky kosmického záření: galaktické, sluneční a záření radiačních (van Allenových) pásů země. První zmíněné galaktické záření pochází z hlubokých oblastí vesmíru, je složeno

převážně z protonů, jader hélia a těžších jader ostatních prvků a elektronů. Druhé, sluneční záření, je důsledkem především sluneční aktivity. Je z 99% tvořeno protony a těžší nabitě částice prakticky neobsahuje. Radiační pásy jsou tvořeny protony a elektrony, které zachytí magnetické pole Země v určitých vzdálenostech od jejího povrchu. [2][8]

## 1.2.2 Rozdělení záření podle způsobu ionizace

Podle způsobu ionizace dělíme ionizační záření na přímo ionizující a nepřímo ionizující.

U přímo ionizujícího záření interagují částice nesoucí elektrický náboj, tj.  $\alpha$  a  $\beta^+$  - částice s kladným nábojem nebo  $\beta^-$  - částice se záporným nábojem. Tyto částice při průletu kolem atomu mohou svým nábojem vytrhávat elektrony z jeho atomového obalu a tím jej ionizovat.

Oproti tomu nepřímo ionizující záření je takové, při kterém interagují částice bez elektrického náboje – fotony, neutrony. Fotony, v případě elektromagnetického záření, při průchodu látkou uvolňují částice s elektrickým nábojem, kterým předají energii dostačující k tomu, aby tyto uvolněné částice byly schopny excitovat nebo ionizovat ostatní atomy. Mezi nepřímo ionizující proto můžeme zařadit  $\gamma$  a RTG záření. U neutronů je tomu jinak. Neutrony jsou jako fotony elektricky neutrální a samovolně se  $\beta$  rozpadem rozpadají na protony a elektrony, elektricky nabitě částice, které následně způsobí sekundární ionizaci.

Druhy interakcí jsou detailněji popsány v části Interakce ionizujícího záření s okolím.

## 1.3 Zdroje ionizačního záření

Zdrojů ionizačního záření je mnoho. Základním rozdělením je rozdělení podle jejich původu. Dělí se na zdroje umělé a přírodní.

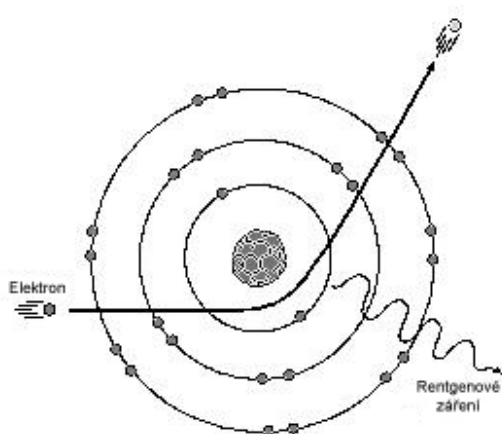
### Umělé zdroje

Mezi tyto zdroje patří všechny zdroje vytvořené lidskou činností. Jsou to umělé radionuklidy, rentgenka, jaderné reaktory, urychlovače, jaderné zbraně, radiofarmaka atp.

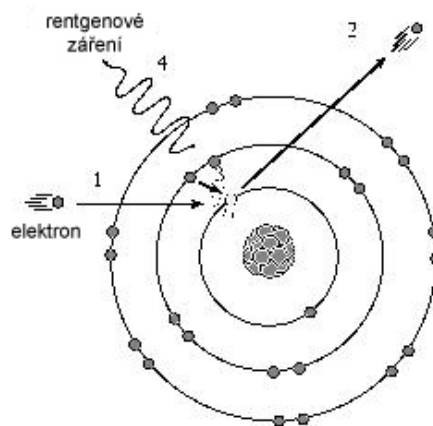
Při přeměnách radionuklidů se uvolňuje ionizační záření různého druhu. Například částice  $\alpha$  – jádra  $^4\text{He}$  – jsou emitovány těžkými radionuklidy, jako je například americium  $^{241}\text{Am}$ . Jak již bylo popsáno výše, dolet a pronikavost alfa částic jsou malé a tudíž nejsou v praktických aplikacích často využívány. Již častěji aplikované jsou zářiče emitující záření  $\beta$ . K zářičům beta částic patří například prvky  $^{90}\text{Y}$ ,  $^{89}\text{Sr}$ ,  $^{32}\text{P}$ ,  $^{131}\text{I}$  aj. Tyto zářiče můžeme použít například v medicíně, kde nacházejí uplatnění v léčbě nádorových a dalších onemocnění.

V rentgenkách vzniká rentgenové (RTG) záření, a to tak, že elektrony z katody jsou urychlené vysokým napětím směrem k anodě. Dopadem na anodu je buzeno elektromagnetické záření. Rozlišuje se záření brzdové a charakteristické. Brzdové rentgenové záření vzniká při změně rychlosti pohybu elektronu v elektromagnetickém poli atomů anody. Při průchodu elektronu blízko jádra atomu je tímto kladným jádrem elektron přitahován, což vede k jeho zpomalení a změně jeho dráhy. Rozdíl rychlostí a jemu odpovídající energie, je

vyzářena ve formě záření (Obrázek 1.4). Charakteristické rentgenové záření je emitováno při přechodu elektronu v materiálu anody z excitovaného elektronového obalu atomu na nižší energetickou hladinu. Rozdíl energií se opět vyzáří ve formě RTG záření (Obrázek 1.5). Rentgenky jsou jediným zdrojem rentgenového záření v radiodiagnostice, kde se využívá hlavně brzdného záření.



**Obrázek 1.4 – Vznik brzdného RTG záření [5]**



**Obrázek 1.5 – Vznik charakteristického RTG záření [5]**

Dalším zástupcem umělých zdrojů ionizačního záření jsou jaderné reaktory. V reaktorech probíhá řízené štěpení jader nejčastěji uranu  $^{235}\text{U}$  ve směsi s  $^{238}\text{U}$  a také ve formě oxidů (např.  $\text{UO}_2$ ), méně potom s plutoniem  $^{239}\text{Pu}$ . Uran je sice přírodní radionuklid, ale bez přispění člověka by nebyl v reaktorech tak mohutným zdrojem ionizujícího záření. Proto je pro toto použití zařazen do umělých zdrojů. Jaderné reaktory jsou zdroje velkého množství neutronů a gama záření. Podle použití je lze rozdělit do tří skupin. První skupinou jsou výzkumné a experimentální reaktory, pomocí kterých se provádí experimenty napříč obory fyziky, techniky a medicíny. Druhým typem jsou transmutační reaktory pro výrobu radionuklidů pro použití v lékařství a jiných oborech vědy. Třetím druhem jsou energetické reaktory, sloužící k výrobě tepelné a elektrické energie ať už v jaderných elektrárnách, velkých lodích či jaderných ponorkách.

Významnými zdroji ionizačního záření jsou také urychlovače částic. V urychlovačích se proti sobě urychlují dva svazky nabitých částic až na rychlosti blízké rychlosti světla. Po dosažení požadované kinetické energie částic se tyto paprsky částic nechají srazit a tím se vytváří nové částice a záření, které se poté zkoumají. Jelikož jsou částice urychlovány na vysoké rychlosti a tak dosáhnou velké energie, využívá se tohoto procesu především k tvoření elektronových párů, které si přiblížíme v následující kapitole. Existují lineární a kruhové urychlovače. [2][3][4][8]

### Přírodní zdroje

V přírodě se kromě stabilních prvků vyskytují radioaktivní prvky přírodního původu. Jsou to radionuklidy, které můžeme rozdělit podle jejich původu a vzniku na tři skupiny: radionuklidy primární, sekundární a kosmogenní.

Primární radionuklidy vznikaly spolu se stabilními prvky v raném vesmíru při formování Sluneční soustavy. Na zemi nyní jsou již ale jen ty radionuklidy, které mají velmi dlouhý poločas rozpadu. Nejrozšířenějším prvkem v přírodě je draslík  $^{40}\text{K}$ , který se beta<sup>-</sup>rozpadem rozpadá z větší části na argon  $^{40}\text{Ar}$  a menší částí na vápník  $^{40}\text{Ca}$  prostřednictvím elektronového záchytu. Argon i vápník jsou stabilní, takže rozpad dále nepokračuje. Asi nejvýznamnějšími primárními radionuklidem je uran  $^{238}\text{U}$  a  $^{235}\text{U}$ . Hlavním využitím uranu je jeho použití jako štěpného materiálu, ale využívá se například i do průbojných střel. Uran se dále alfa rozpadem přeměňuje na další prvky jako aktinium (Ac), francium (Fr), polonium (Po) nebo olovo (Pb).

Jako sekundární radionuklidy se označují produkty primárních radionuklidů, rozpadající se podle svých rozpadových řad. Z toho vyplývá, že již zmíněné prvky Ac, Fr, Po a Pb, jsou sekundárními radionuklidy uranu. Dalším radionuklidem běžně vyskytujícím se v přírodě je například thorium  $^{232}\text{Th}$  a radium  $^{226}\text{Ra}$ .

Poslední kosmogenní radionuklidy vznikají průběžně jadernými reakcemi při průchodu vysokoenergetického kosmického záření (jeho sekundární složky) zemskou atmosférou. Nejvíce zastoupen je radiouhlík  $^{14}\text{C}$  a tritium  $^3\text{H}$ , ve velmi malých množstvích pak např. beryllium  $^{7,10}\text{Be}$ , fosfor  $^{32}\text{P}$ , síra  $^{35}\text{S}$ , chlór  $^{36}\text{Cl}$ . [4]

## 1.4 Interakce ionizujícího záření s okolím

Při šíření záření prostorem se částice záření a její okolí vzájemně ovlivňují. Každá částice má určitou svou energii, která se při průchodu částice látkou zmenšuje. Způsob, jakým tuto energii ztratí, závisí na jejím druhu. K největším ztrátám energie dochází v případech, kdy se jedná o těžké částice, jako jsou částice  $\alpha$ , protony, elektrony či fotony. U všech druhů záření můžeme také sledovat průchod částic bez vzájemné interakce. To znamená, že částice záření volně proletí mezi atomy látky. S tímto jevem se častěji setkáváme u tvrdého záření a u látek v okolí s nižší hustotou.

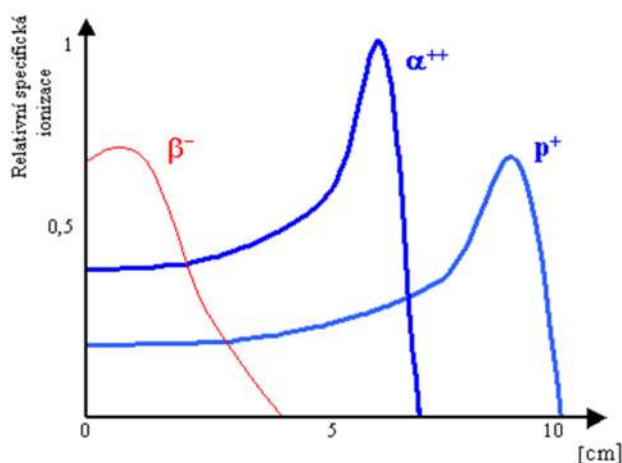
### 1.4.1 Ztráty energie těžkých částic při průletu hmotou

U těžkých částic vznikají ztráty jejich energie

- ionizací
- rozptylem
- buzením brzdného napětí.

Ionizace okolních atomů je hlavním důvodem ztráty energie. Jelikož  $\alpha$  částice mají relativně vysoký elektrický náboj, tak na své dráze velmi účinně vytrhávají elektrony z atomových obalů atomů látky, kterou se pohybují. Tyto velké síly působící na elektrony ale také rychle brzdí letící  $\alpha$  částici, a to má za následek malou pronikavost a malý dolet. Schopnost ionizace  $\alpha$  částicemi se s klesající rychlostí zvětšuje a maxima dosahuje těsně před zastavením. Spolu s porovnáním s ostatními druhy záření je tato skutečnost zobrazena na obrázku 1.6. [1]

Další ztrátu energie způsobuje pružný a nepružný rozptyl. Do kategorie pružný rozptyl patří procesy, při nichž nedochází k přeměně kinetické energie na jiný druh energie. Může to být situace, kdy částice narazí do jiné letící částice a obě po srážce pokračují v letu v jiném směru. Dalším případem je působení Coulombových sil na letící částici, která je jimi bržděna a vychylována z původního směru letu. Naopak u nepružného rozptylu k přeměně kinetické energie dochází. Do této kategorie můžeme zařadit například emise kvant záření, excitaci nebo deexcitaci. K nepružnému rozptylu je potřeba vyšších energií než k pružnému rozptylu. Z radiačního hlediska je důležité, že při nepružném rozptylu vzniká sekundární ionizující záření.



**Obrázek 1.6 - Braggovy křivky hloubkové závislosti specifické ionizace na dráze částice beta, alfa a protonu. [8]**

K buzení brzděného napětí dochází při průchodu rychlých nabitých částic hmotou, kdy vlivem Coulombické interakce s obaly a jádry atomů dochází k jejich rozptylu a energetický rozdíl částice se vyzáří ve formě elektromagnetického záření. [8]

### 1.4.2 Ztráty energie částic $\beta$ při průletu hmotou

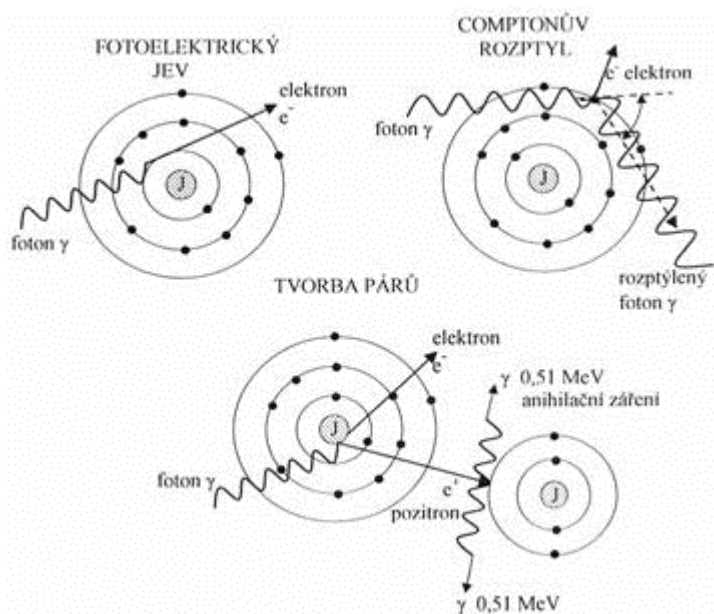
Podobně jako u částice  $\alpha$ , tak i u  $\beta$  částice se ionizace výrazně podílí na ztrátě energie při průletu hmotou. Zatímco buzení brzděného napětí se u těžkých částic na ztrátě energie podílí jen nepatrně, u částic  $\beta$ , zejména při vyšších energiích, tvoří tyto ztráty podstatnou část. Navíc, pokud jsou součástí záření kladně nabitá pozitrony ( $\beta^+$  částice), připisuje se těmto ztrátám i produkce záření vznikající při anihilaci s elektronem. V neposlední řadě ztrácí  $\beta$  částice energii rozptylem. [1]

### 1.4.3 Průlet záření $\gamma$ hmotou

Hlavní způsoby vzájemného působení  $\gamma$  záření s absorpční látkou jsou popsány následujícími třemi jevy. Grafické znázornění těchto jevů je na obrázku 1.7.

#### 1.4.3.1 Fotoelektrický jev

Fotoelektrický jev je jedním ze tří hlavních způsobů interakce  $\gamma$  záření s elektronovým obalem. K tomuto jevu dochází tehdy, když letící foton předá veškerou svou energii elektronu atomu absorbující látky a zanikne. Při nárazu do elektronu foton ztrácí svou energii vyražením elektronu z atomového obalu ve formě ionizační práce při ionizaci a předáním své zbylé kinetické energie tomuto elektronu. Jelikož se atom poté nachází v excitovaném stavu, vyzáří při deexcitaci tvrdé záření (viz např. kap. Co je ionizační záření), které může dále ionizovat. Nejvíce ionizační práce je potřeba při uvolňování elektronu z hladiny nejbližší jádru. Pro ostatní hladiny platí, že čím víc je elektronová vrstva vzdálena od jádra, tím je potřeba menší ionizační práce. Pravděpodobnost tohoto jevu klesá s rostoucí energií a narůstá s narůstajícím atomovým číslem absorpčního materiálu. [1][6]



Obrázek 1.7 – Interakce gama záření [6]

#### 1.4.3.2 Comptonův jev

Druhou možností interakce je Comptonův jev (někdy také nazýván Comptonův rozptyl). I tady jde o srážku kvant fotonů s elektronem, při čemž je zapotřebí vyšších energií než u fotoelektrického jevu. Kvantum fotonů nárazem do volného nebo slabě vázaného elektronu ztratí pouze určitou část své energie, která se rozdělí mezi foton a elektron. Foton nárazem odrazí elektron pod určitým úhlem a pokračuje dále v letu jako rozptýlené záření. Ztrátou energie se navíc zmenší i jeho vlnová délka. Úhel odrazu fotonu je závislý na velikosti energie, kterou předal elektronu. Čím větší energii foton elektronu předá, tím více se



odchýlí z původního směru. Odražený a urychlený elektron se pak následně se může podílet na sekundární ionizaci. [6][8]

### 1.4.3.3 Tvoření elektronových párů

Pokud do látky vnikne foton RTG nebo gama záření s vysokou energií (větší než 1,022MeV), může nastat jev, který se nazývá tvoření elektronových párů. Tvoření párů elektronů se může dít buď v blízkosti atomového jádra, nebo v poli elektronů. Při průletu fotonu kolem atomového jádra se může tento foton elektromagnetickou interakcí se silným Coulombovým polem jádra přeměnit na dvojici částic elektron a pozitron. Po zbrzdění (stejný mechanismus jako  $\beta^-$  rozpad) ze vzniklého páru elektron-pozitron zůstává v látce elektron a pozitron zanikne anihilací s některým z jiných elektronů, čímž vzniknou dva fotony elektromagnetického záření, které se od sebe rozletí opačnými směry, každý s energií 511keV. Pravděpodobnost vytvoření těchto párů je přímo závislá na velikosti náboje interagujícího jádra. [8]

## 1.5 Stínění ionizujícího záření

### Záření $\alpha$

Záření  $\alpha$  lze odstínit velmi jednoduše. Alfa částice ve vzduchu doletí jen několik centimetrů a díky jeho malé pronikavosti je můžeme odstínit například papírem nebo tenkou hliníkovou fólií. Ve většině aplikací se nemusí zvlášť stínit, protože při stínění jiného záření se automaticky odstíní i  $\alpha$  záření.

### Záření $\beta$

Záření  $\beta^-$  se oproti záření  $\beta^+$  stíní jednodušeji a stačí k tomu lehké materiály jako hliník nebo plexisklo, nejlépe v kombinaci s tenkou olověnou vrstvou. Ta se uplatňuje při stínění brzdného elektromagnetického záření vznikající ve stínícím materiálu.

Pro stínění  $\beta^+$  záření je, kromě tenké vrstvy lehkého materiálu, potřeba použít i poměrně silnou vrstvu olova. Tato vrstva odstiňuje tvrdé gama záření, které vzniká při anihilaci pozitronů  $\beta^+$  s elektrony  $e^-$ .

Stínění  $\beta$  záření pouze olovem není příliš vhodné, protože v něm vzniká tvrdé a intenzivní brzdné záření a pro celkové odstínění bychom museli použít zbytečně silnou vrstvu.

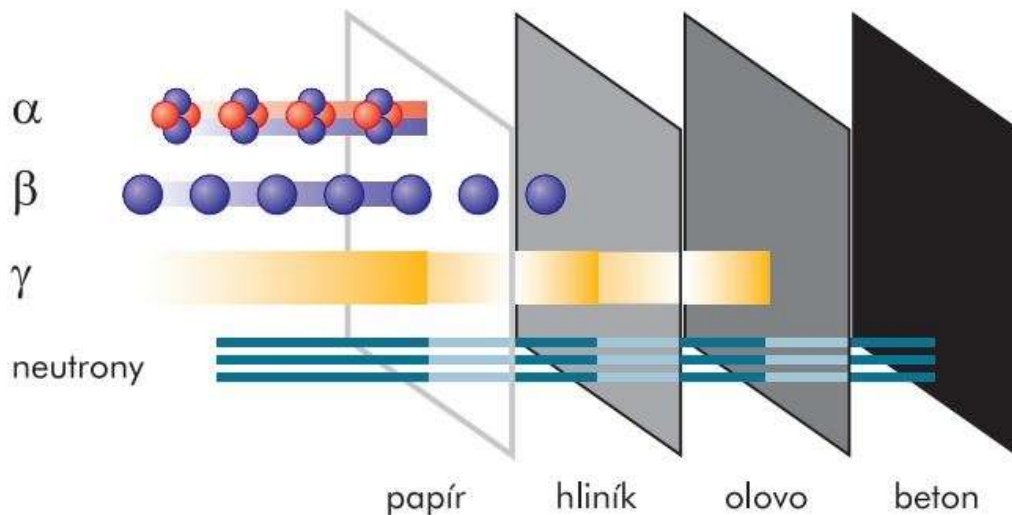
### Záření $\gamma$

Pro stínění tohoto záření jsou nejlepší materiály s velkou hustotou a vysokým protonovým číslem, jako je olovo, baryt nebo wolfram. Běžně se používají olověné vložky, olovnaté sklo (vysokým obsahem kysličníku olova v tavenině) nebo barytové omítky.

### Neutronové záření

Ze zde uvedených druhů záření je odstínění neutronového záření nejsložitější. Je to proto, že neutrony, na rozdíl od  $\alpha$  a  $\beta$  částic, neinteragují s elektronovým obalem atomů

absorbující látky, ale pouze s jejich jádry, ale za to velmi silně. Chceme-li stínit rychlé neutrony, je nejprve potřeba tyto neutrony zpomalit a poté je pohltit vhodným absorbérem. Nejúčinnější zpomalovače neutronů jsou například látky bohaté na vodík, kde neutrony ztrácí svou energii pružným rozptylem. Jsou to například parafin nebo plasty. Takto zpomalené neutrony se zachytávají pomocí vhodných jader atomů, jako jsou kadmium, bór, či indium. Následně je potřeba stínit záření gama vznikající při absorpci, například vrstvou olova. [8]



*Obrázek 1.8 - Průnik záření různými materiály [19]*

## 1.6 Detekce ionizujícího záření

Jestliže je ionizující záření okem neviditelné, tak abychom se vůbec mohli přesvědčit o jeho existenci, musíme jej umět nějakým způsobem detekovat, a to pomocí příslušných fyzikálních metod a vhodné přístrojové techniky. Kromě "zviditelnění" nám detekce umožňuje zkoumat vlastnosti tohoto záření a využívat jej v řadě aplikací. Byla vyvinuta řada detektorů ionizujícího záření, které (kromě společného základního jevu, kterým jsou ionizační účinky záření) využívají různých principů a technických konstrukcí. Tato kapitola čerpá z literatury [9].

### 1.6.1 Rozdělení detektorů podle časového průběhu detekce

#### Kontinuální detektory

Tento druh detektoru poskytuje průběžnou informaci o okamžité hodnotě záření či kvant ionizujícího záření. Odezva takového detektoru by měla být úměrná okamžité intenzitě záření. Přestane-li být detektor ozařován, signál na jeho výstupu poklesne na nulu či na hodnotu pozadí.

#### Kumulativní detektory

Vyhodnocením výsledku měření kumulativním detektorem se získá údaj o celkové hodnotě ozáření za celou dobu, po kterou mu byl detektor vystaven.

## 1.6.2 Rozdělení detektorů podle principu detekce

Podle principu detekce dělíme detektory ionizačního záření na:

### Fotografické detektory

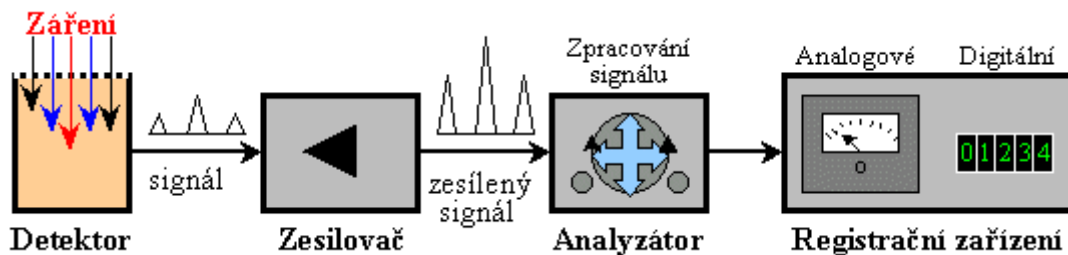
Jsou založeny na fotochemických účincích záření (filmové dozimetry, rtg filmy, jaderné emulze), nebo využívající fotografické zobrazení stop částic v určitém prostředí.

### Materiálové detektory

Tyto detektory jsou založeny na změně vlastností určitých látek (barva, složení, objem) působením ionizujícího záření. Díky jejich nízké citlivosti jsou použitelné pouze pro vysoké intenzity záření či dlouhodobou kumulativní detekci.

### Elektronické detektory

U tohoto druhu se část energie záření převádí na elektrický proud nebo impulzy, které se zesilují a posléze vyhodnocují v elektronických aparaturách. Do této skupiny se řadí ionizační komory, Geigerův-Müllerův (GM) detektor, scintilační a polovodičové detektory.



*Obrázek 1.9 - Základní blokové schéma elektronického detektoru [9]*

## 1.6.3 Rozdělení detektorů podle komplexnosti měřené informace

### Detektory záření

Provádějí pouze registraci interakcí kvant částic s detektorem. Udávají pouze intenzitu záření bez informace o druhu a energii. Do této skupiny detektorů patří filmové dozimetry, ionizační komory, GM detektory.

### Spektrometry ionizujícího záření

Spektrometry měří nejen intenzitu či počet kvant záření, ale i energii kvant záření a příp. jeho další charakteristiky. Výsledkem je většinou energetické spektrum  $N = N(E)$  zachycující graficky závislost četnosti kvant  $N$ , čili intenzity záření, na energii  $E$ . Spektrum tedy vyjadřuje energetické rozložení (relativní zastoupení) kvant zkoumaného záření.

### Zobrazovací detektory

Zobrazují prostorové rozložení intenzity záření. Nejjednodušším (dříve používaným) zobrazovacím detektorem je fotografický film. V RTG diagnostice se též používala

luminiscenční stínítka, která byla později doplněna zesilovači obrazu a příp. elektronickým zpracováním. Nyní se používají multidetektorové systémy prostorově vhodně rozmístěných detektorů, které poskytují informace o místech dopadu záření, nebo o úhlech, z nichž záření přilétá.

### Dráhové detektory částic

Tyto detektory pracují na principu vyhodnocování nebo zviditelňování dráhy pohybu částic. A to na základě materiálových efektů – fotochemických reakcí, kondenzace kapiček z páry nebo vznik bublinek v přehřáté kapalině, nebo elektronicky složitými systémy velkého množství prostorově rozmístěných detektorů, polovodičových nebo ionizačních komor.

## 1.7 Veličiny charakterizující zdroje záření

### Aktivita – A [ Bq ]

Tato veličina udává počet částic v radionuklidu, které se přemění (rozpadnou) za jednotku času. Jednotkou je Bq – becquerel – jehož rozměr je  $[s^{-1}]$  a znamená, že za 1 sekundu došlo k jedné radioaktivní přeměně. V praxi se proto využívají spíše její násobky (kBq, MBq atd.) Aktivita radionuklidu závisí na jeho hmotnosti a není konstantní, ale klesá s časem podle vztahu

$$A_t = A_0 e^{-\frac{0,693}{T}t} \quad [\text{Bq}] \quad (1)$$

Kde  $A_0$  počáteční aktivita radionuklidu v čase  $t = 0\text{s}$  [ Bq ]

$A_t$  aktivita radionuklidu v čase  $t$  [ Bq ]

$T$  poločas přeměny radionuklidu [ s ]

Pro lepší informaci o zdroji můžeme aktivitu vztáhnout k jiné jednotce například  $\text{kg}$ ,  $\text{m}^2$  nebo  $\text{m}^3$ . Získáme tak například hmotnostní aktivitu  $\text{Bq}\cdot\text{kg}^{-1}$ , plošnou  $\text{Bq}\cdot\text{m}^{-2}$  či objemovou aktivitu  $\text{Bq}\cdot\text{m}^{-3}$ . V literatuře se můžeme setkat i se starší jednotkou curie (Ci), přičemž  $1\text{Ci} = 3,7\cdot 10^{10}\text{Bq}$ .

### Energie emitovaných částic

Jednotka udává energii emitovaných částic, což charakterizuje radionuklid, protože na energii výrazně závisí vlastnosti vyzařovaného záření – ionizace, dolet apod. Jednotkou energie bývá joule (J), ale v oblasti částicových věd se z důvodu malých energií používá jednotka eV – elektronvolt – přičemž platí  $1\text{eV} = 1,602\cdot 10^{-19}\text{J}$ . V praxi se opět většinou používají její násobky (keV, MeV, GeV atd.).

### Přeměnová konstanta – $\lambda$ [ $s^{-1}$ ]

Konstanta udávající relativní rychlost rozpadu radionuklidu, vyjadřuje pravděpodobnost jaderné přeměny, která je charakteristická pro každé jádro radionuklidu.

### Poločas přeměny – T ( $T_{1/2}$ ) [ s, min, h, r ]

Je to doba, za kterou počet atomů radionuklidu klesne na polovinu původního počtu atomů. Následující tabulka 1-1 obsahuje příklady radionuklidů s jejich poločasy rozpadů. Radionuklidy použité při měření jsou zvýrazněny. Citováno z literatury [7].

**Tabulka 1-1: Příklady poločasu rozpadu některých radionuklidů [2]**

Prvek	Izotop	Poločas rozpadu
Beryllium	$^8\text{Be}$	$6,7 \cdot 10^{-17}$ s
Polonium	$^{212}\text{Po}$	0,3 $\mu\text{s}$
Thorium	$^{223}\text{Th}$	0,9 sekundy
Francium	$^{223}\text{Fr}$	22 minut
Síra	$^{35}\text{S}$	87,5 dní
Kobalt	$^{60}\text{Co}$	5,27 let
Tritium	$^3\text{H}$	12,36 let
Stroncium	$^{90}\text{Sr}$	29,1 let
Cesium	$^{137}\text{Cs}$	30,17 let
Uhlík	$^{14}\text{C}$	5 730 let
Uran	$^{235}\text{U}$	710 milionů let
Draslík	$^{40}\text{K}$	1,26 miliard let
Bismut	$^{209}\text{Bi}$	cca $1,9 \times 10^{19}$ let

## 2 STATISTICKÉ ZPRACOVÁNÍ DAT

### 2.1 Vybraná rozdělení pravděpodobnosti

Rozdělení náhodných veličin se používají jako modely pravděpodobností při popisu konkrétních praktických problémů. V následující kapitole budou popsána vybrána diskrétní rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin. V této kapitole je citováno z literatury [10], [11], [12], [13] a [15].

#### 2.1.1 Normální (Gaussovo) rozdělení

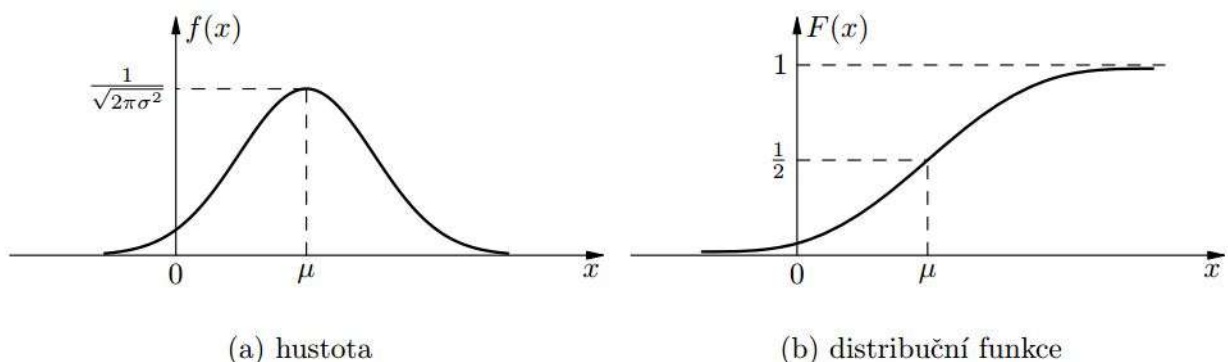
Jedná se o nejznámější model rozdělení spojitě náhodné veličiny, které se používá v technické praxi. Veličinu řídicí se podle normálního rozložení můžeme označit jako  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Při opakovaném měření jedné veličiny za stejných podmínek se na výsledku podílejí náhodné vlivy, které se obvykle řídí tímto rozdělením. Normálně rozdělená náhodná veličina vzniká složením různých, náhodných složek, vlivů a veličin, které jsou na sobě nezávislé, kterých je větší počet a každá z nich ovlivňuje výslednou veličinu jen malým příspěvkem.

Její hustota pravděpodobnosti nabývající hodnot  $x$  pro  $x \in (-\infty; \infty)$  má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2)$$

Kde  $\mu = E(x)$  představuje střední hodnotu a  $\sigma = D(x)$  rozptyl. Abychom výpočet zjednodušili, transformujeme náhodnou veličinu  $X$  na normovanou veličinu  $Z$ , kde

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (3)$$



Obrázek 2.1 - Hustota a distribuční funkce  $N(\mu, \sigma^2)$  [15]

## 2.1.2 Poissonovo rozdělení

Fakt, že se náhodná veličina řídí Poissonovým rozdělením, můžeme zapisovat  $X \sim Po(\lambda)$ . Náhodná veličina má Poissonovo rozložení s parametrem  $\lambda$ , pokud její pravděpodobnostní funkce má tvar

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (4)$$

Kde  $x$  je diskrétní náhodná veličina nabývající hodnot  $0, 1, \dots, k$ . Jak můžeme vidět, Poissonovo rozložení je charakterizováno pouze jednou konstantou  $\lambda$ , přičemž platí  $\lambda > 0$ . Proto jej nazýváme parametrickým rozložením. Frekvenční funkce  $p(x)$  udává apriorní (teoretické, předem dané) pravděpodobnosti jednotlivých hodnot. Pokud známe frekvenční funkci, můžeme stanovit pravděpodobný počet výskytů určité hodnoty  $x$  v souboru  $N$  pokusů. To by mělo odpovídat tomuto vzorci

$$n = Np(x) \quad (5)$$

Známe-li pravděpodobnostní funkci i pravděpodobný počet výskytů  $x$ , můžeme zjistit nejpravděpodobnější počty výskytů nahodilé veličiny  $x$ . Ty získáme tak, že dosadíme do rovnice (5) výraz (4)

$$n = N \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \quad (6)$$

Frekvenční funkce (4) dává úplnou informaci o statistickém souboru, ale pro lepší orientaci volíme jednodušší charakteristiky souboru. Nejčastěji to jsou střední hodnota a rozptyl. U diskrétní nahodilé veličiny  $x$  je střední hodnota  $E(x)$  definována vztahem

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \quad (7)$$

a rozptyl hodnot kolem střední hodnoty  $D(x)$  vztahem

$$D(x) = \sum_{x=0}^{\infty} [x - E(x)]^2 p(x) \quad (8)$$

U Poissonova rozdělení, jako u jediného pravděpodobnostního rozdělení, platí, že jeho střední hodnota je stejná s rozptylem

$$D(x) = E(x) = \lambda \quad (9)$$

Rozptyl i střední hodnotu ve frekvenční funkci (4) reprezentuje konstanta  $\lambda$ .

Pokud je náhodnou veličinou počet výskytů sledovaného jevu v určitém časovém intervalu  $\Delta t$ , platí následující skutečnosti

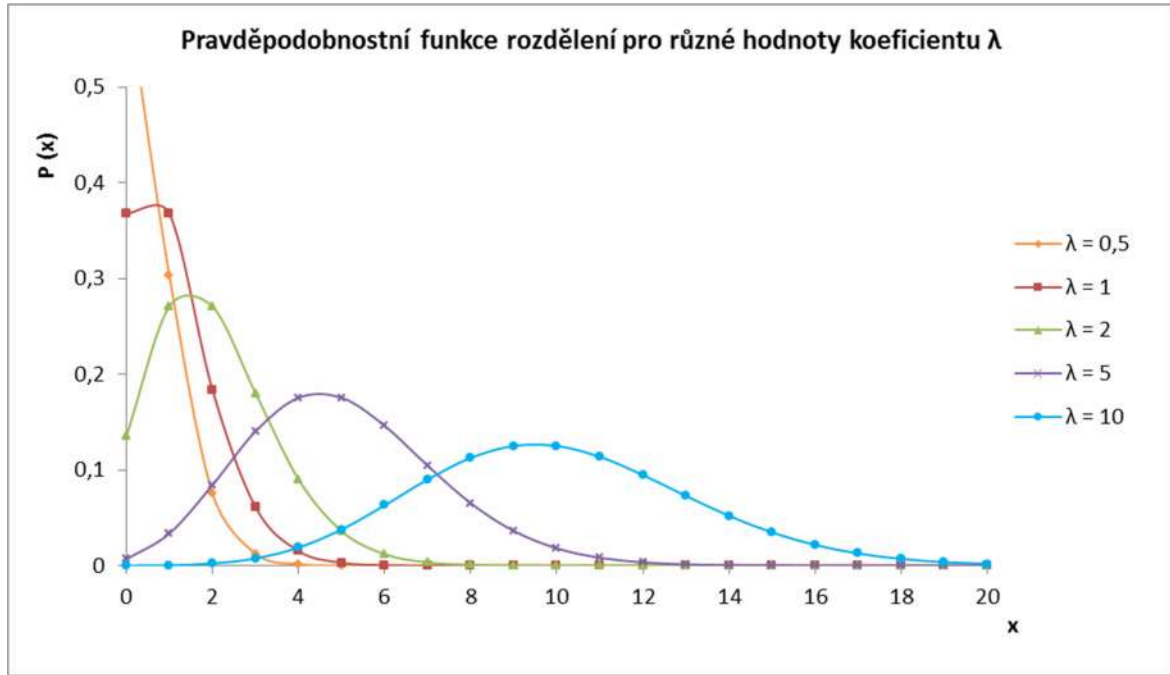
- Jev může nastat v jakémkoliv časovém okamžiku
- Počet výskytu jevu během časového intervalu závisí pouze na jeho délce, nikoliv na jeho počátku nebo na tom kolikrát sledovaný jevu nastal před jeho počátkem.

- Pravděpodobnost, že jev nastane více než jednou v intervalu délky  $t$ , konverguje k nule rychleji než  $t$ .

Odhad parametru  $\lambda$  se provádí podle vzorce (10), kde  $n$  je celkový rozsah souboru,

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{x=0}^k n_x x}{n} \quad (10)$$

z něhož je vidět, že  $\lambda$  odpovídá aritmetickému průměru. Na následujícím grafu je vidět tvar pravděpodobnostní a distribuční funkce Poissonova rozdělení pro různé hodnoty  $\lambda$ . Jak si můžeme všimnout pro malé hodnoty  $\lambda$  je toto rozdělení nesymetrické.



Obrázek 2.2 – Pravděpodobnostní funkce pro  $Po(\lambda)$ ,  $\lambda = 0,5, 1, 2, 5, 10$

Pokud současně působí dvě náhodné veličiny mající Poissonovo rozdělení, jedna s parametrem  $\lambda_1$  a druhá s  $\lambda_2$ , výslednou pravděpodobnostní funkci můžeme zapsat jako

$$p(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^x}{x!} \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (11)$$

### 2.1.3 Exponenciální rozdělení

Toto rozdělení úzce s Poissonovým rozdělením úzce souvisí. Jestliže Poissonovo rozdělení se používá k modelaci pravděpodobnosti počtu náhodných dějů za určitou dobu, exponenciálním rozdělením modelujeme dobu do výskytu tohoto děje, neboli dobu mezi jednotlivými událostmi. Jedná se o spojitou veličinu a hodnota sledované veličiny může teoreticky nabývat jakéhokoli kladného čísla. Náhodnou veličinu s exponenciálním rozdělením označujeme  $X \sim E(\lambda)$ , její hustota je



$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (12)$$

a její distribuční funkce je

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (13)$$

## 2.2 Statistické vlastnosti radioaktivního rozpadu

Počet  $\Delta M$  atomů radionuklidu, které se za dobu  $\Delta t$  ( $\Delta t$  volíme podstatně kratší než poločas rozpadu  $T$  radionuklidu) rozpadly je této době přímo úměrný, dále je přímo úměrný také počtu atomů radionuklidu  $M$ . Úbytek počtu atomů  $M$  radionuklidu představuje  $\Delta M$  a má tedy zápornou hodnotu. Označíme-li konstantu úměrnosti  $\lambda$ , můžeme vztah mezi  $M$  a  $\Delta M$  za sledovanou dobu popsat rovnicí

$$-\Delta M = \lambda M \Delta t \quad (14)$$

Konstantu  $\lambda$  označujeme jako přeměnovou konstantu s jednotkou [ $s^{-1}$ ]. Pokud budeme předpokládat, že její konečné přírůstky jsou nekonečně malé, z předchozí rovnice získáme diferenciální rovnici, jejíž matematické řešení je ve tvaru

$$M = M_0 e^{-\lambda t} \quad (15)$$

kde  $M_0$  je počáteční počet atomů radionuklidu před započítáním sledování a  $M$  je počet atomů téhož radionuklidu po uplynutí doby  $t$ . Tento vztah se nazývá přeměnový zákon. Doba, za kterou se počet atomů radionuklidu zmenší na polovinu původní hodnoty, nazýváme poločas rozpadu –  $T$ . Tato doba se u různých radionuklidů liší a má hodnotu od zlomků sekund až po miliony let. Poločas rozpadu můžeme znázornit rovnicí

$$\frac{1}{2} M_0 = M_0 e^{-\lambda T} \quad (16)$$

Přeměnovou konstantu  $\lambda$  lze poté za pomoci poločasu rozpadu  $T$  vyjádřit jako

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T} \quad (17)$$

Z uvedených skutečností se může zdát, že při měření stejné hodnoty  $\Delta M$  během doby  $\Delta t$  bychom měli získat stejný výsledek. Radioaktivní přeměna nestabilních jader má ale náhodný charakter. Každý atom radionuklidu má určitou pravděpodobnost  $p$ , že se během doby měření  $\Delta t$  přemění. Protože pravděpodobnost rozpadu během doby  $T$ , je  $p = 0,5$ , je pro podstatně menší  $\Delta t$  také pravděpodobnost radioaktivního rozpadu podstatně menší.

Radioaktivní rozpad má následující vlastnosti:

1. K rozpadu atomu může dojít v libovolném časovém okamžiku a nelze přesně určit okamžik rozpadu.

- Počet rozpadlých atomů je úměrný délce zvoleného časového intervalu.
- Jelikož vždy sledujeme jen určitý druh radioaktivní přeměny, nemůže dojít k rozpadu jednoho atomu vícekrát než jednou.

Jelikož jsou toto předpoklady i pro Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti, můžeme tedy říci, že se radioaktivní rozpad řídí touto Poissonovou statistikou a měla by mít i stejnou pravděpodobnostní funkci, viz rovnice (4). Jestli jsou rozložení pravděpodobnosti naměřených hodnot a rozložení pravděpodobnostní funkce shodná je možné ověřit. Metod ověřování shody je více a asi nejpoužívanější je metoda  $\chi^2$  (metoda Chí-kvadrát).

## 2.3 Ověřování Poissonova rozdělení pomocí $\chi^2$

Postup ověření rozdělení se známými parametry je převzat z literatury [16].

Prvním krokem, který musíme s naměřenými daty provést je rozdělit je určitým způsobem do skupin (např. skupinové rozdělení četností). Tímto tříděním získáme tzv. experimentální četnosti ( $n_{e,j}$ ) pro jednotlivé třídy.

Uvažujme nyní teoretické Poissonovo rozdělení, které budeme považovat za model pro náš výběr. Toto modelové rozdělení si stejným způsobem jako naměřená data rozdělíme a tím získáme v jednotlivých třídách četnosti, které budeme označovat jako očekávané četnosti, označované  $n_{o,j}$ .

Smyslem tohoto testu shody je v tom, že sledujeme a hodnotíme rozdíly mezi jednotlivými experimentálními a očekávanými četnostmi, tj. rozdíly  $n_{e,j} - n_{o,j}$ . Za nulovou hypotézu – tvrzení, které obvykle vyjadřuje „žádný neboli nulový rozdíl“ mezi testovanými soubory dat – v tomto případě je předpoklad, že s  $n_{e,j}, n_{o,j}$  liší jen náhodně.

Kritériem zavedeným pro tento test shody

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_{e,j} - n_{o,j})^2}{n_{o,j}} \quad (18)$$

kde  $k$  je počet skupin, do kterých jsme sledovaný soubor dat rozdělili. Tomuto kritériu náleží  $\chi^2$  rozdělení a  $\nu = k - 1$  stupňů volnosti. Hodnoty kritických hodnot pro jednotlivé rozdělení jsou uvedeny v příloze 1.

Při použití tohoto testu je potřeba respektovat podmínky, za kterých jej lze použít. Pokud při třídění do dvou tříd (tj.  $k = 2$ ,  $\nu = 1$ ) je některá očekávaná četnost ( $n_{o,j}$ ) menší než 5, nemá být použito  $\chi^2$  testu. Při  $k > 2$ , tj. při  $\nu = 1$ , nemá být více než 20 % všech očekávaných četností menších než 5 a žádná nesmí být menší než 1. Abychom splnili uvedené požadavky, můžeme v některých případech sloučit dvě nebo více tříd do jedné, ale současně nesmíme narušit smysl řešeného úkolu.

Následuje postup při testování shody experimentálních a očekávaných četností pomocí  $\chi^2$ -testu:

- Zvolíme hladinu významnosti – tímto termínem se označuje pravděpodobnost chyby I. druhu, což je chybné rozhodnutí učiněno poté, co test odmítne pravdivou nulovou hypotézu ( $H_0$ )

2. Naměřená data a modelové rozložení rozdělíme do zvolených skupin
3. Stanovíme hodnoty očekávaných četností v jednotlivých skupinách
4. V každé skupině vypočítáme a sečteme všechny rozdíly mezi četnostmi podle rovnice (18)
5. Z tabulky v příloze 1 vyhledáme příslušnou kritickou hodnotu  $\chi^2_P$  pro  $\nu = k - 1$  stupňů volnosti
6. Nulovou hypotézu  $H_0$  – shodu mezi  $n_{e,j}$  a  $n_{o,j}$  – zamítáme, jestliže vypočítaná hodnota  $\chi^2$  je větší než kritická hodnota  $\chi^2_P$ .

Zde by bylo ještě vhodné zmínit, že 95% kvantil odpovídá kritické hodnotě pro 5% hladinu významnosti a analogicky 99% kvantil kritické hodnotě pro 1% hladinu významnosti.

Postup popsaný výše platí pro případy testování hypotéz o shodě při známých parametrech. Jestliže chceme testovat hypotézy s neznámými parametry, což je i rozložení pravděpodobnosti radioaktivního rozpadu, musíme použít složitější výpočet. Tento test je s předešlým principiálně analogický, ale protože pravděpodobnosti jednotlivých náhodných jevů  $p_1, \dots, p_k$  určitého rozdělení závisí na některých neznámých parametrech  $a_1, \dots, a_m$ , tak musíme tyto neznámé parametry nějak odhadnout. Jak určit neznámé parametry a jak rozhodnout o hypotézách si ukážeme v této kapitole. Test Poissonova rozdělení pro neznámé parametry je citován z literatury [13] a [17].

Mějme tedy výběr  $X_1, \dots, X_n$  z nějakého rozdělení na množině nezáporných celých čísel a chceme ověřit hypotézu  $H_0$ , že se výběr řídí Poissonovým rozdělením  $Po(\lambda)$ , přičemž parametr  $\lambda$  neznáme.

Opět si nejprve zvolíme hladinu významnosti  $\alpha$  a následně rozdělíme výběr do skupin. Vhodně volíme čísla  $r \geq 0$  a  $k \geq 3$ . Do první třídy zařadíme ty veličiny, které jsou menší nebo rovny  $r$ . Další třídy jsou postupně tvořeny samostatnými hodnotami  $r+1, r+2, \dots, r+k-2$ . Poslední třída obsahuje hodnoty větší nebo rovné číslu  $r+k-1$ . Tímto postupem vytvoříme  $k$  tříd, jejichž četnosti označíme  $X_r, X_{r+1}, \dots, X_{r+k-1}$ .

Pravděpodobnost  $q_i$ , že tento zvolený soubor odpovídá Poissonovu rozložení s parametrem  $\lambda$  a nabývá hodnoty  $i$  je dána vztahem:

$$q_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Pravděpodobnosti jednotlivých tříd jsou potom

$$p_r = \sum_{i=0}^r q_i, \quad p_i = q_i \text{ pro } i = r+1, \dots, r+k-2, \quad (20)$$

$$p_{r+k-1} = \sum_{i=r+k-1}^{\infty} q_i$$

Přitom  $p_i = p_i(\lambda)$ , neboť tyto pravděpodobnosti závisí na parametru  $\lambda$ . Ten je ale, jak už bylo zmíněno, neznámý, a proto se ho pokusíme odhadnout. Užitím vztahu

$$\frac{dq_i}{d\lambda} = \left(\frac{i}{\lambda} - 1\right) q_i \quad (21)$$

a rovnice

$$\sum_{i=1}^k \left( \frac{X_i}{p_i(a)} \cdot \frac{\partial p_i(a)}{\partial a_j} \right) = 0 \quad (22)$$

ze kterých po úpravě získáme

$$\lambda = \frac{1}{n} \left[ X_r \frac{\sum_{i=0}^r i q_i}{\sum_{i=0}^r q_i} + \sum_{i=r+1}^{r+k-2} i X_i + X_{r+k-1} \frac{\sum_{i=r+k-1}^{\infty} i q_i}{\sum_{i=r+k-1}^{\infty} q_i} \right] \quad (23)$$

která se řeší iteračně. Můžeme si všimnout, že prostřední člen (23) se po provedení  $1/n$  rovná přibližně výběrovému průměru (24), v němž chybí první a poslední člen. Tento průměr

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=r}^{r+k-1} i X_i \quad (24)$$

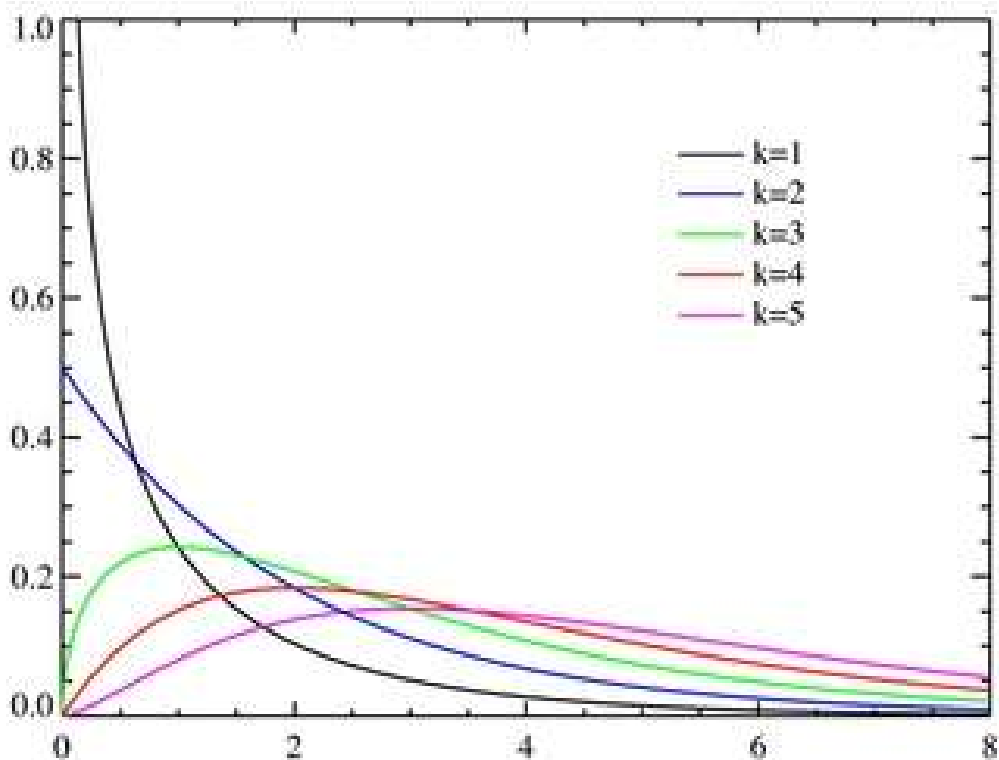
můžeme použít jako hledaný parametr  $\lambda$ ,  $\lambda = \hat{\lambda}$ . Jelikož mu ale chybí dva členy (první a poslední), nevíme, jak je tento odhad přesný. Pokud bychom chtěli  $\lambda$  upřesnit můžeme to udělat pomocí rovnice (23). Jako počáteční aproximaci  $\lambda_0$  dosadíme výběrový průměr (24), dále jej dosadíme do (19), vypočteme pravděpodobnosti  $q_i$ , které použijeme pro výpočet další aproximace  $\lambda_l$ . Tento postup opakujeme tak dlouho, než dosáhneme požadované přesnosti.

Nyní se dostáváme k výpočtu hodnoty kritéria, která je dána vztahem

$$\chi^2 = \sum_{i=r}^{r+k-1} \frac{[X_i - np_i(\hat{\lambda})]^2}{np_i(\hat{\lambda})} \quad (25)$$

a platí-li hypotéza o tom, že výběr pochází z Poissonova rozdělení, má  $\chi^2$  veličina asymptoticky Chí-kvadrát rozdělení o  $k - 1$  stupních volnosti. Je-li pak vypočítaná hodnota kritéria  $\chi^2 \geq \chi_{k-1}^2(\alpha)$ , hypotézu  $H_0$  na hladině významnosti  $\alpha$  zamítáme a můžeme říci, že daný výběr nepochází z Poissonova rozdělení.

Předpokládejme tedy, že chceme ověřit, jestli námi naměřené data mají Poissonovo rozdělení a to při  $\alpha = 5\%$  a při 2 stupních volnosti, kterým odpovídá modrá křivka na *Obrázek 2.3*. Uvedeným postupem dospějeme například k výsledku, že veličina má  $\chi^2 = 7,21$  a z přílohy 1 zjistíme hodnotu kvantilu Chí-kvadrát  $\chi_{2; 0,95}^2 = 5,991476$  (hodnota na ose x), což je kritickou hodnotou pro námi zvolené  $\alpha$ . Hodnoty  $\chi^2$  větší než tato kritická hodnota při  $\alpha = 5\%$  nám říkají, že testovaný soubor dat má menší pravděpodobnost, že se bude řídit Poissonovým rozložením, než  $5\%$ , tudíž tento soubor dat nepovažujeme za soubor řídicí se podle Poissonova rozložení.



Obrázek 2.3 - distribuční funkce  $\chi^2$  pro různý počet stupňů volnosti  $k$  [18]

Jednou z dalších metod ověřování Poissonova rozložení je metoda vycházející ze skutečnosti, že střední hodnota i rozptyl tohoto rozložení jsou stejné. Při této metodě se využívá toho, že výběrový průměr (26) je nestranným odhadem střední hodnoty

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n iX_i \quad (26)$$

a výběrový rozptyl

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) \quad (27)$$

je nestranným odhadem rozptylu. Jelikož jsou si tyto dvě charakteristiky rovny, princip tohoto testu využívá předpokladu, že jejich podíl se bude rovnat jedné, nebo se této hodnotě alespoň přibližovat. V praxi se ale přímo tento podíl nepoužívá a místo něj se uvažuje veličina s Poissonovým rozložením, která kolísá okolo hodnoty  $n-1$  a je dána vztahem

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\bar{X}} \quad (28)$$

a ta má přibližně  $\chi_{n-1}^2$  rozložení. Pokud dostaneme

$$Q \leq \chi_{n-1}^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \text{ nebo } Q \geq \chi_{n-1}^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \quad (29)$$

zamítáme hypotézu  $H_0$ , že testovaný výběr  $X_1, \dots, X_n$  pochází z Poissonova rozdělení. Ke shodě s limitním rozdělením je třeba zajistit, aby průměr  $\bar{X}$  nebyl příliš malý a mělo by tedy platit  $\bar{X} \geq 5$ .

## 2.4 Konstrukce histogramu

Histogram je grafické znázornění intervalového rozložení četností. Je to sloupcový graf se sloupci stejné šířky, která vyjadřuje šířku intervalu, a výškou vyjadřující četnost určité sledované veličiny v daném intervalu. Konstrukce histogramu je popsána následujícími kroky:

Postup konstrukce histogramu [14]:

1. Určení rozpětí naměřených hodnot –  $R$

Rozpětí vypočteme z maximální a minimální hodnoty naměřených dat

$$R = X_{imin} - X_{imax} \quad (30)$$

2. Stanovení počtu intervalů (tříd) –  $k$

Počet a šíře intervalu ovlivňuje míru „ostrosti“ zobrazení statistického intervalu. Není vhodné, aby počet tříd byl příliš malý anebo příliš velký. Při malém počtu intervalů získáme pouze velmi hrubou představu o rozložení dat a naopak při velkém počtu intervalů se zase histogram stává méně přehledným. Proto se v některé literatuře doporučuje, aby počet výsledných tříd byl 5-20 podle množství zobrazovaných dat. Počet intervalů se určuje z celkového počtu vybraných dat  $n$  a jedním ze způsobů určení počtu tříd  $k$  je pomocí Sturgesova pravidla, podle kterého platí

$$k \doteq 1 + 3,3 \log n \quad (31)$$

Možností určení počtu intervalů je více, a podle jiných zdrojů můžeme k výpočtu počtu tříd  $k$  použít například i následující vzorce

$$k \doteq \sqrt{n} \quad (32)$$

$$k \leq 5 \log n \quad (33)$$

3. Stanovení šířky intervalů –  $h$

Po stanovení počtu intervalů se podle vzorce (34) určí šířka intervalů.

$$h = \frac{R}{k} \quad (34)$$

4. Sestavení tabulky četností

V tomto kroku se připraví formulář pro třídění hodnot analyzovaného statistického souboru a záznam dalších potřebných výpočtů.

5. Stanovení hranic intervalů

Nyní je potřeba pomocí šířky intervalů  $h$  stanovit horní a dolní hranici jednotlivých intervalů, musíme ale zajistit, aby hodnota  $X_{imin}$  ležela v prvním intervalu a hodnota  $X_{imax}$  ležela v posledním intervalu.

6. Stanovení třídních znaků

Třídní znaky zastupují hodnoty, které jsou zařazeny do  $i$ -ho intervalu při výpočtech statistických charakteristik. Jestliže jsou hranice intervalu stanoveny tak, jak je uvedeno v předchozím kroku 5, pak je možné hodnotu třídního

znaku vypočítat tak, že sečteme krajní hodnoty daného intervalu a dělíme dvěma.

7. Přiřazení dat intervalům

Přiřazení dat intervalům se provádí pomocí čárkovací metody, kdy se ke každému intervalu přiřazuje hodnota počtu výskytu jednotlivých dat náležící tomuto intervalům.

8. Sestrojení vlastního histogramu

Na osu  $x$  vynášíme hranice intervalů a jim odpovídající zjištěné četnosti vynášíme na osu  $y$ .

## 3 NÁVRH A REALIZACE MĚŘENÍ

V následující části jsou popsány principy měření s ionizujícím zářením a realizace úloh ve formě protokolů. Pro praktickou část této práce byly zvoleny experimenty vedoucí k určení koeficientu útlumu ionizujícího záření v závislosti na hustotě materiálů a ověření jeho pravděpodobnostního rozložení. Úlohy vycházejí z laboratorních úloh společnosti PHYWE [20], [21].

### 3.1 Měření závislosti koeficientu útlumu na hustotě

#### 3.1.1 Zadání

1. Stanovení závislosti počtu pulzů jako funkci tloušťky stínící přepážky, při použití různých materiálů těchto přepážek – sklo, tvrdý papír, lepenka, fólie, textit a sololit.
2. Stanovení závislosti koeficientu útlumu na hustotě použitých materiálů

#### 3.1.2 Teoretický popis

K provedení této úlohy budeme potřebovat následující:

- Přípravek s GM trubicí a čítačem
- Zdroj ionizujícího záření –  $^{90}\text{Sr}$ ,  $\beta$  zářič X89-101 (102) – viz příloha 2
- Vzorok stínících přepážek z materiálů různé hustoty

Útlum proudu částic ionizujícího záření je závislý jak na tloušťce materiálu, kterým prochází, tak i na jeho plošné hustotě. Tento útlum v materiálu můžeme ověřit pomocí detektoru záření (GM trubice s čítačem) a materiálů, jímž záření prochází, a je dán vztahem

$$\Delta I = \Delta I_0 e^{-\mu x} \quad [\text{s}^{-1}\text{m}^{-2}] \quad (35)$$

kde  $\Delta I$  je intenzita záření po průchodu vrstvou materiálu za jednotku času  $[\text{s}^{-1}\text{m}^{-2}]$

$\Delta I_0$  je intenzita záření bez stínící přepážky za jednotu času  $[\text{s}^{-1}\text{m}^{-2}]$

$\mu$  je součinitel útlumu  $[\text{m}^{-1}]$

$x$  je tloušťka vrstvy absorbujícího materiálu  $[\text{m}]$

Součinitel útlumu můžeme odvodit z (35)

$$\mu = \frac{\ln \frac{\Delta I_0}{\Delta I}}{x} \quad [\text{mm}^{-1}] \quad (36)$$

Známe-li tloušťky a hustoty materiálu, kterým toto záření prochází, lze zkoumat závislost

$$\Delta I = \Delta I_0 e^{-\mu_m x \rho} \quad [\text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (37)$$



vycházející z výrazu (35). Intenzitu záření můžeme vyjádřit počtem impulzů  $N$  GM trubice s čítačem, takže intenzita  $\Delta I$  odpovídá počtu pulzů  $N$  ( $\Delta I_0$  hodnotě  $N_0$ ). Z výrazu pro absorpci (37) můžeme odvodit výraz k určení hodnoty hmotnostního útlumu pro jednotlivé materiály, který má tvar

$$\mu_m = \frac{\ln \overline{N_0} - \ln \overline{N}}{x\rho} = \frac{\ln \frac{N_0}{N}}{x\rho} \quad [\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}] \quad (38)$$

a z exponentů v (35) a (37) je možné odvodit, že

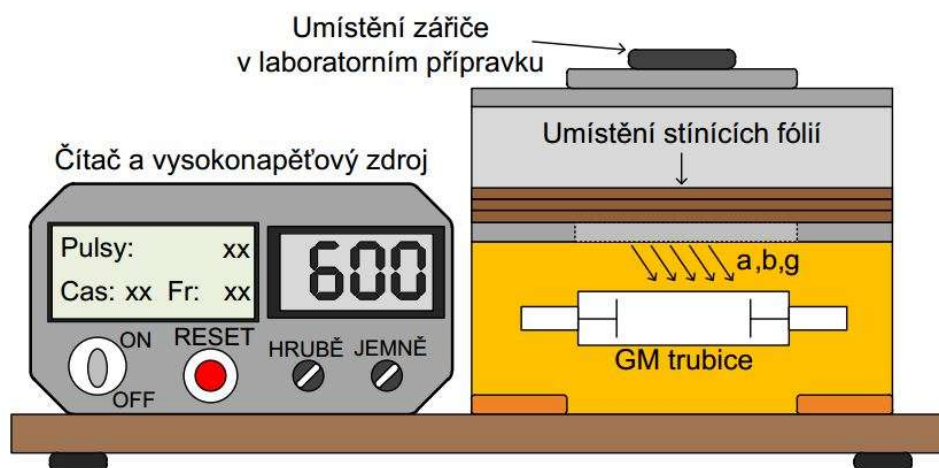
$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} \quad [\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}] \quad (39)$$

Hodnoty hustot spočítáme pomocí vztahu

$$\rho = \frac{m}{x \cdot h \cdot l} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (40)$$

### 3.1.3 Postup

Sestavení experimentu je zobrazeno na obrázku 3.1. Aparatura obsahuje přípravku s GM trubicí, k níž je připojen vysokonapěťový zdroj a čítač. Po zapnutí přípravku nastavíme na zdroji přibližně 600V a na patřičné místo umístíme zdroj  $\beta$  záření, u kterého lze lépe, než u záření  $\gamma$ , závislost útlumu na hustotě pozorovat. V našem případě byly hodnoty impulzů měřeny při  $U = 605\text{V}$ , doba jednoho cyklu měření byla 60s. Resetováním resetovacím tlačítkem spouštíme čítač a po uběhnutí nastavené doby měření odečítáme hodnoty impulzů.



Obrázek 3.1 - sestavení experimentu

#### 1. Stanovení závislosti počtu pulzů jako funkci tloušťky stínící přepážky

Nejprve bylo naměřeno 150 hodnot přirozeného radiačního pozadí, ze kterých byl vypočten aritmetický průměr  $N_p$ , který bude využit později. Poté byly měřeny počty pulzů  $N$  při nestíněné GM trubicí, tj. bez jakéhokoliv absorbujícího materiálu. Po naměření těchto hodnot byly mezi zářič a detekující trubicí přidávány stínící přepážky nejprve jednoho materiálu a poté i ostatních materiálů. Pro jedno měření byly ale vždy použity materiály

jednoho druhu, při čemž se měnila jeho tloušťka. Jako stínící materiály byly použity: fólie, textit, tvrdý papír, sololit, lepenka a sklo. Pro každý materiál bylo pro větší přesnost naměřeno  $n = 15$  hodnot, které byly zprůměrovány. Hodnoty naměřených pulzů pro měření bez i se stínícím materiálem jsou uvedeny, pro každý materiál zvlášť, v příloze 3. V tabulce 3-1 jsou uvedeny vypočtené průměrné hodnoty pulzů a hodnoty opravené o průměrnou hodnotu radiačního pozadí, která byla  $N_p = 22 \text{ pulzů/min}$ . Průměrný počet pulzů při měření bez stínící přepážky byl po opravě o radiační pozadí  $N_0 = 30\,657$ .

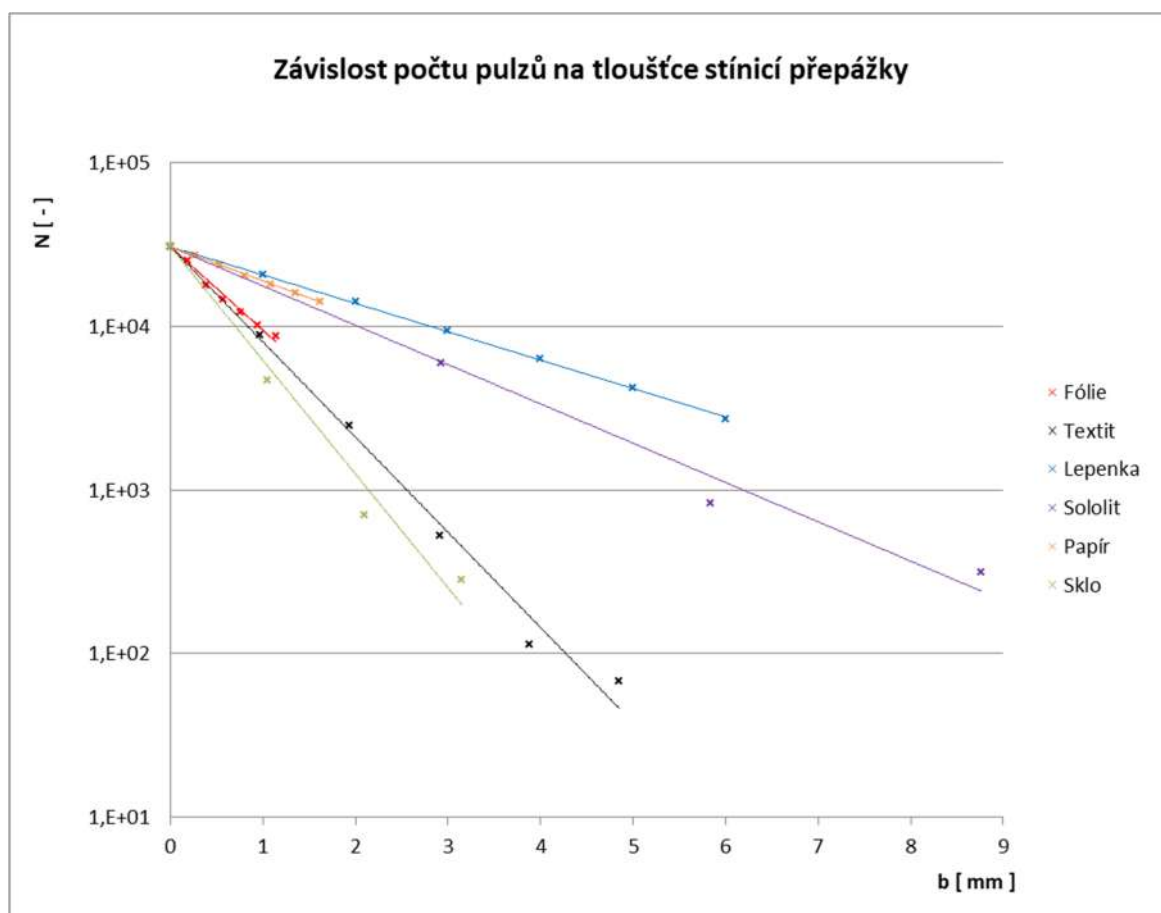
Výpočet opravené hodnoty  $N_C$  pro fólii  $x = 0,19 \text{ mm}$  pro tabulku 3-1

$$N_C = N - N_p = 25\,294 - 22 = 25\,272 \text{ pulzů/min}$$

Jestliže hodnoty  $N$  pro jednotlivé materiály vyneseme na logaritmickou osu (osa  $y$ ) v závislosti na jejich tloušťkách  $x$ , získáme průběhy odpovídající obrázku 3.2, kde každá křivka odpovídá jednomu materiálu. Proložení hodnot lineární spojnicí získáme grafické vyjádření rovnice (35), což dokazuje její platnost. Tyto rovnice jsou uvedeny v tabulce 3-2 a jsou seřazeny od nejmenší hodnoty koeficientu po největší.

**Tabulka 3-1: Průměrné hodnoty pulzů odpovídající tloušťkám jednotlivých materiálů**

Fólie			Textit			Papír		
x	N	$N_C$	x	N	$N_C$	x	N	$N_C$
[ mm ]	[puls/min]	[puls/min]	[ mm ]	[puls/min]	[puls/min]	[ mm ]	[puls/min]	[puls/min]
0,19	25 294	25 272	0,97	8 920	8 898	0,27	27 286	27 264
0,38	17 797	17 775	1,94	2 493	2 471	0,54	23 614	23 592
0,57	14 521	14 499	2,91	543	521	0,81	20 501	20 479
0,76	12 115	12 093	3,88	136	114	1,08	18 063	18 041
0,95	10 206	10 184	4,85	89	67	1,35	16 049	16 027
1,33	8 691	8 669				1,62	14 257	14 235
Sololit			Lepenka			Sklo		
x	N	$N_C$	x	N	$N_C$	x	N	$N_C$
[ mm ]	[puls/min]	[puls/min]	[ mm ]	[puls/min]	[puls/min]	[ mm ]	[puls/min]	[puls/min]
2,92	6 013	5 991	1	20 837	20 815	1,05	6 013	5 991
5,84	850	828	2	14 066	14 044	2,1	850	828
8,76	334	312	3	9 426	9 404	3,15	334	312
			4	6 313	6 291			
			5	4 209	4 187			
			6	2 731	2 709			



Obrázek 3.2 - Graf závislosti počtu pulzů na tloušťce stínící přepážky

Tabulka 3-2: Rovnice spojnic trendu z grafu na obrázku

Lepenka	$y = 30\,657e^{-0,399}$
Papír	$y = 30\,657e^{-0,474}$
Sololit	$y = 30\,657e^{-0,547}$
Fólie	$y = 30\,657e^{-1,174}$
Textit	$y = 30\,657e^{-1,298}$
Sklo	$y = 30\,657e^{-1,6}$

## 2. Stanovení závislosti koeficientu útlumu na hustotě pro použité materiály

Exponenty v rovnicích v tabulce 3-2 určují sklon jednotlivých křivek a porovnáním těchto rovnic s výrazem (35) je možné si odvodit, že právě tento exponent reprezentuje hodnotu koeficientu útlumu  $\mu$ . Pro stanovení závislosti  $\mu = f(\rho)$  je potřeba znát i hustoty daných materiálů. Ty můžeme odečíst z tabulek, nebo si je spočítáme pomocí vzorce (40) z rozměrů a hmotností vzorků. Tabulka 3-3 obsahuje zjištěné vlastnosti vzorků a vypočítané hodnoty hustot.

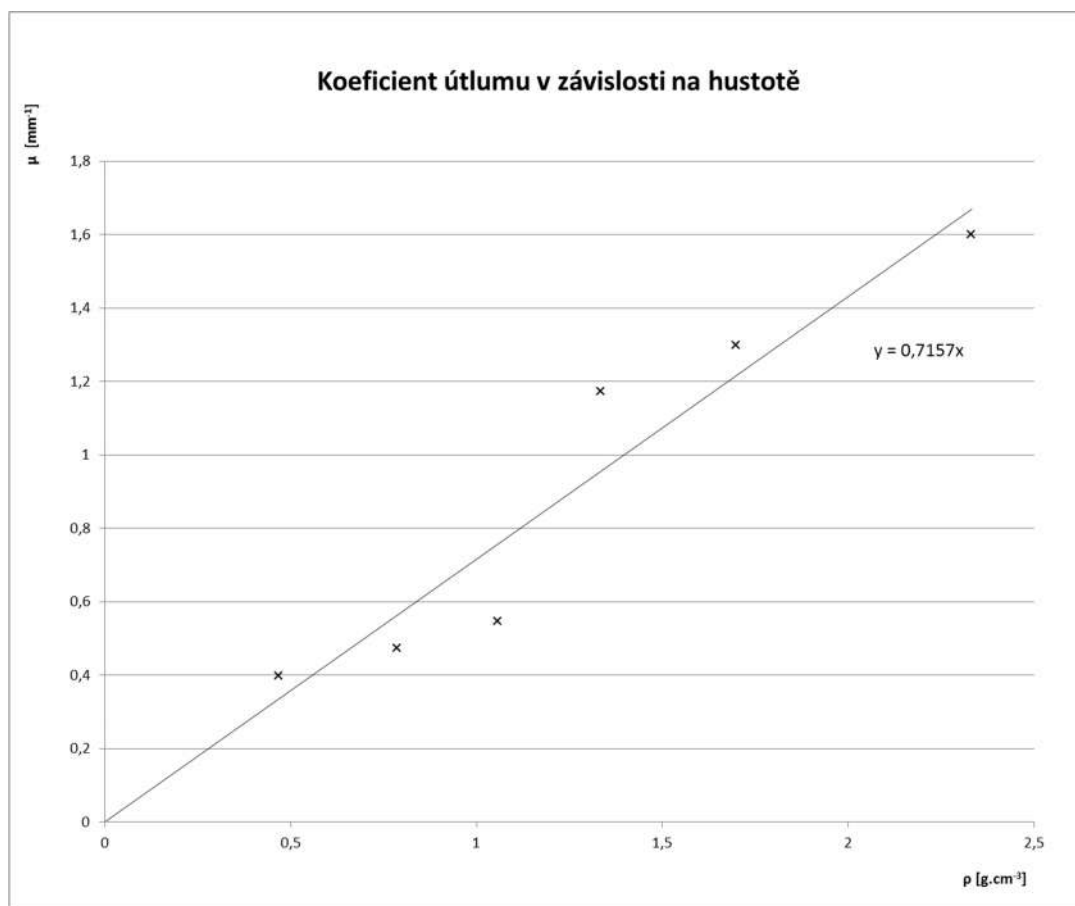
**Tabulka 3-3: Vlastnosti použitých materiálů**

Vzorek	m	Rozměry [ cm ]			$\rho$	$\mu$	$\mu_m$
	[ g ]	x	h	l	[ g.cm <sup>-3</sup> ]	[ mm <sup>-1</sup> ]	[ cm <sup>2</sup> .g ]
Fólie	2,96	0,019	9,86	11,82	1,337	1,174	8,783
Textit	19,64	0,097	9,98	11,93	1,701	1,298	7,633
Sololit	26,79	0,295	10,00	8,57	1,060	0,547	5,162
Lepenka	4,99	0,100	10,10	10,54	0,469	0,399	8,512
Sklo	4,84	0,105	7,60	2,60	2,333	1,600	6,859
Papír	1,74	0,027	10,50	7,78	0,789	0,474	6,008

Pro ukázkou je uveden výpočet podle (39) a (40) pro vzorek textitu

$$\rho = \frac{m}{x \cdot h \cdot l} = \frac{19,64}{0,097 \cdot 9,98 \cdot 11,93} = 1,701 \text{ g/cm}^3$$

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1,298}{1,701} = 7,633 \text{ cm}^2/\text{g}$$



**Obrázek 3.3 - Závislost koeficientu útlumu na hustotě**

Závislost na obrázku 3.3 znázorňuje koeficient útlumu v závislosti na hustotě materiálu. Faktorem úměrnosti mezi  $\mu$  a  $\rho$  se nazývá hmotnostní koeficient útlumu  $\mu_m$ . Směrnice této přímkou je námi hledaná konstanta  $\mu_m = 7,1 \text{ cm}^2/g$ .

V literatuře [21] je uveden vztah pro výpočet teoretické hodnoty  $\mu_m$

$$\mu_m = \frac{22 \frac{\text{cm}^2}{g}}{W_m^{1,3333} / \text{MeV}}, W_m > 0,5 \text{ MeV} \quad (41)$$

kde  $W_m$  je maximální hodnota energie částic záření. Ve této literatuře bylo počítáno s hodnotou pro radionuklid  $^{90}\text{Kr}$   $W_m = 0,7 \text{ MeV}$ , i když v seznamu použitých přístrojů je uveden jako zdroj radionuklid  $^{90}\text{Sr}$ , kterému odpovídá maximální energie o velikosti 0,546 MeV. Po dosazení hodnoty 0,546 MeV do zmíněného vzorce nám teoretická hodnota hmotnostního koeficientu útlumu vyšla  $\mu_m = 49,29 \text{ cm}^2/g$ , jejíž správnost ale nejsme schopni ověřit.

## 3.2 Ověření statistických parametrů zdrojů ionizujícího záření

Cílem tohoto experimentu je ukázat, že počet pulzů vyvolaných průchodem ionizujícího záření ze zdroje s velkým poločasem rozpadu ve fixní vzdálenosti, které jsou detekované detektorem během stejných časových úseků, odpovídá Poissonovu rozdělení.

### 3.2.1 Zadání

1. Poissonovo rozložení radioaktivního rozpadu
2. Gaussovo rozložení radioaktivního rozpadu
3. Statistické rozložení radioaktivního pozadí

### 3.2.2 Teoretický popis

Pro měření této úlohy je potřeba tohoto vybavení:

- Přípravek s GM trubicí
- Zdroj ionizujícího záření –  $^{90}\text{Sr}$  –  $\beta$  zářiče X89-101, X89-102 – viz příloha 2
- Čítač Agilent 53131a
- Stínicí přepážky pro utlumení záření

Při průchodu záření materiálem v případech malé četnosti pulzů ( $n < 20$ ) můžeme na Poissonovu rozdělení spolehlivě pozorovat asymetrii. Abychom byli schopni tuto asymetrii pozorovat, budeme měřit v krátkých časových intervalech, které nám zaručí malé hodnoty počtů pulzů.

Nejen Poissonovo rozložení, ale i Gaussovo rozložení, které je vždy symetrické, je vhodné k aproximaci rozložení pulzů. To závisí na hodnotě počtu pulzů a času měření, za který se tyto hodnoty načítají, a následující experiment má právě toto dokázat.

Dalším aspektem, který má vliv na statistické rozložení počtu pulzů za čas, je mrtvá doba detektoru. Během této doby detektor nedetekuje průchody částic. Jestliže není tato doba

v poměru k průměrné době mezi pulzy detektoru zanedbatelná, kolísání hodnot pulzů je menší, než odpovídá Poissonovu rozdělení. Z toho vyplývá, že mrtvá doba ovlivňuje měření.

### 3.2.3 Postup

Uspořádání experimentu je podobné jako v předešlé úloze (Obrázek 3.1), ale místo vestavěného čítače, který je společně s GM trubici umístěn v přípravku budeme používat čítač Agilent 53131a, jehož Kanál 1 propojíme s výstupními svorkami čítače. Celá sestava je zobrazena na obrázku 3.4. Čítač je nutné před měřením správně nastavit. Měření jsme provedli při tomto nastavení čítače:

- Hodnota spouštěcí úrovně – Trigger – (Trigger > Auto Trigger: OFF, Trigger > Level: 0,5 V);
- nastavení čítání pulzů (Other Meas > Totalize 1);
- čas měření (Gate&ExtArm > Time, Gate&ExtArm > Time: 1 s (0,1 s))
- 100 kHz filter: ON

Po stisknutí tlačítka Run čítač čítá počty pulzů za nastavený časový úsek. Na napájecím zdroji jsme nastavili přibližně 600 V.



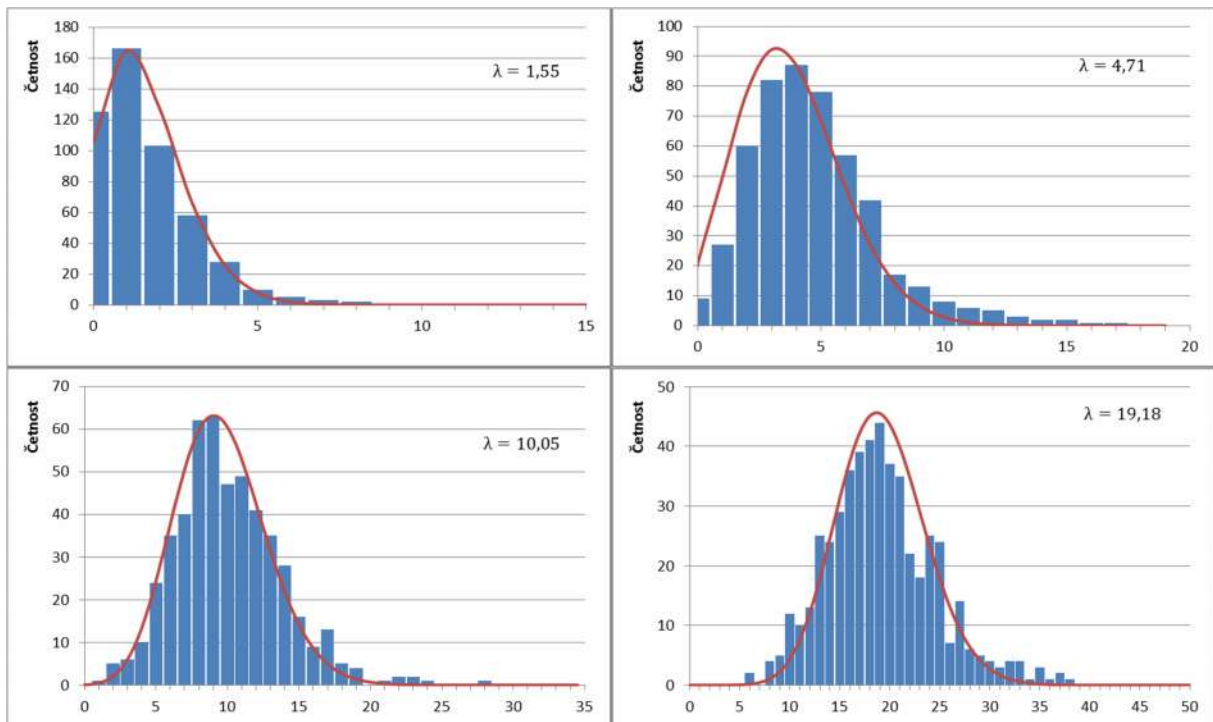
**Obrázek 3.4 – Zapojení experimentu s použitím čítače**

#### 1. Poissonovo rozložení radioaktivního rozpadu

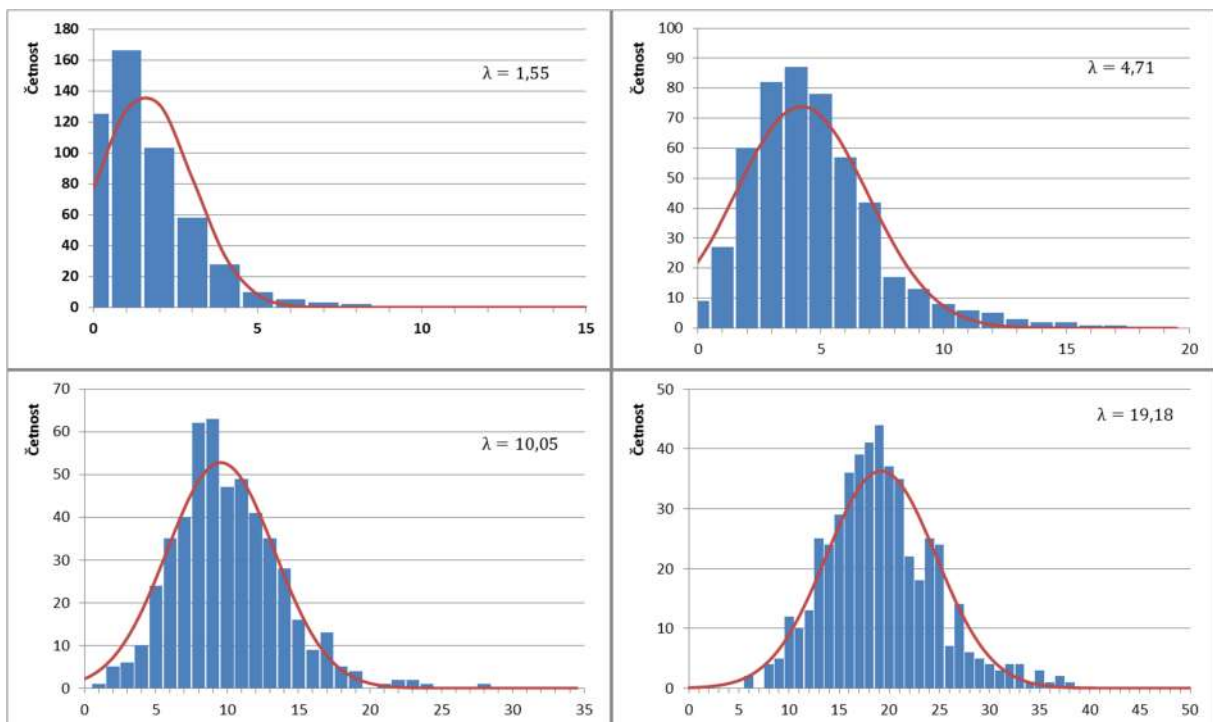
Pro použitý zářič X89-101, byl pomocí dostupných stínících přepážek nastaven počet pulzů mezi 1 až 3 pulzy/s. Doba měření byla nastavena na 1 sekundu, s tímto nastavením bylo změřeno  $n = 500$  hodnot. Dalšími kroky bylo opakování měření pro hodnoty pulzů/s přibližně 5, 10 a 20.

Na obrázku 3.5 jsou znázorněny četnosti měřených dat proložené Poissonovou křivkou teoretických četností a z nich můžeme jasně vidět, že tato rozložení nejsou symetrická, tj. maximum leží nalevo mezi minimální a maximální hodnotou. Dalším pozorováním dojdeme k faktu, že asymetrie klesá se zvyšováním  $\lambda$ . Obrázek 3.6 znázorňuje tato stejná naměřená data, tentokrát ale proložená symetrickou Gaussovou křivkou. Hodnoty

maxim Gaussových křivek a měřených četností jsou vzájemně posunuty a celkově méně si vzájemně odpovídají. Z těchto dvou obrázků je patrné, že při postupném zvyšování střední hodnoty  $\lambda$  se rozdíl mezi Gaussovou a Poissonovou křivkou zmenšují.



**Obrázek 3.5 – Rozložení četnosti pro různé hodnoty  $\lambda$  proložené Poissonovou křivkou**



**Obrázek 3.6 - Rozložení četnosti pro různé hodnoty  $\lambda$  proložené Gaussovou křivkou**

Asymetričnost nám tedy naznačuje, že radioaktivní rozpad se řídí Poissonovou statistikou, ale abychom se o tomto faktu ujistili, existují tzv. testy dobré shody, kterými se zjišťuje, zda veličina odpovídá určitému rozložení. Jeden z druhů tohoto testu je popsán v kapitole 2.3. Zda naměřené hodnoty opravdu odpovídají Poissonovu rozložení, ověříme pomocí testu Chí-kvadrát pro neznámé parametry. Testujeme tedy hypotézu  $H_0$ , že se počty impulzů generované GM trubicí při průletu ionizujících částic řídí podle Poissonova rozložení. Z důvodu analogického algoritmu ověřování je zde uveden výpočet ověření pouze pro  $\lambda = 1,55$  a výsledky pro zbylé měřené hodnoty  $\lambda$ . Všechna data získaná z měření jsou uvedena v příloze 3.

Nejprve si zvolíme hladinu významnosti  $\alpha$ , na které budeme naše data testovat. Nejčastěji se ověřuje s  $\alpha = 5\%$ , která byla použita i v této práci. Soubor naměřených hodnot počtu pulzů je potřeba rozřadit do tříd podle četnosti počtu pulzů, přičemž empirické četnosti  $X_i$  jsou uvedeny v tabulce 3-4. Pro jednotlivé četnosti  $X_i$  spočítáme podle vzorce (19)  $q_i$  – pravděpodobnosti odpovídající Poissonovu rozdělení. Pro odhad parametru použijeme výběrový průměr  $\hat{\lambda}$ , který je dán vzorcem (24). Jedná se v podstatě o aritmetický průměr, který v našem případě je

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=r}^{r+k-1} iX_i = 1,55 \text{ pulzů/s} \quad (42)$$

Podle uvedené teorie pro ověření Poissonova rozložení bychom měli dodržet podmínku pro teoretické četnosti  $np_i \geq 5$ , což většinou vede ke slučování málo četných tříd, jejichž pravděpodobnosti jsou velmi malé, až nulové.

**Tabulka 3-4: Tabulka hodnot pro výpočet  $\chi^2$  pro  $\lambda = 1,55$**

i	$X_i$	$q_i$	$np_i$
0	125	0,212248	106,124
1	166	0,328984	164,4922
2	103	0,254963	127,4814
3	58	0,131731	65,86541
4	28	0,051046	25,52285
5	10	0,015824	7,912082
6	5	0,004088	2,043955
7	3	0,000905	0,45259
8	2	0,000175	0,087689
9	0	3,02E-05	0,015102
10	0	4,68E-06	0,002341
11	0	6,6E-07	0,00033
12	0	8,52E-08	4,26E-05
13	0	1,02E-08	5,08E-06
14	0	1,12E-09	5,62E-07
15	0	1,16E-10	5,81E-08
$\Sigma$	500	1	500

Z tabulky 3-4 lze vidět, že tuto hodnotu



$$n \cdot p_i = 500 \cdot 0,32898 = 164,4922 \geq 5 \quad (43)$$

teoretické četnosti (součin  $n \cdot p_i$  (43)) nesplňují hodnoty větší než  $i = 5$ . Sloučením těchto tříd vznikne jedna třída již splňující uvedenou podmínku. Z teorie víme, že pravděpodobnosti nových tříd  $p_i$  jsou podle vzorce (20) tvořeny z pravděpodobností jednotlivých četností  $q_i$ . Toto sloučení vede ke transformaci původní tabulky na tabulku 3-5 s  $k = 6$  řádky.

Pro řádek  $i = 1$  tabulky 3-5 a tabulky 3-6 platí

$$(X_i - n \cdot p_i)^2 = (166 - 164,4922)^2 = 2,2735 \quad (44)$$

$$\chi^2 = \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{2,2735}{164,4922} = 0,01381 \quad (45)$$

**Tabulka 3-5: Tabulka hodnot pro výpočet  $\chi^2$**

$X_i$	$np_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$
125	106,1240	356,3039	3,35743
166	164,4922	2,2735	0,01382
103	127,4814	599,3409	4,70140
58	65,8654	61,8647	0,93926
28	25,5228	6,1363	0,24042
20	10,5141	89,9816	8,55815
$\Sigma$	500		17,81048

**Tabulka 3-6: Tabulka hodnot pro výpočet  $\chi^2$  bez nejmenších  $q_i$**

$X_i$	$np_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$
125	106,1240	356,3039	3,35743
166	164,4922	2,2735	0,01382
103	127,4814	599,3409	4,70140
58	65,8654	61,8647	0,93926
28	25,5228	6,1363	0,24042
10	10,5141	4,3594	0,55098
$\Sigma$	490	497,3979	9,80331

Pokud máme hotovy všechny potřebné výpočty, následuje určení hodnoty testovacího kritéria podle vzorce (25), které v tomto případě je  $\chi^2 = 17,81048$  a můžeme jej vidět i v levém spodním rohu tabulky 3-5.

Posledním krokem je pak porovnání této vypočítané hodnoty kritéria s hodnotou kvantilu Chí-kvadrátu pro  $k - 1 = 5$  stupňů volnosti pro zvolenou hodnotu  $\alpha$ , (95% kvantil odpovídá hodnotě významnosti  $\alpha = 5\%$ )  $\chi_{5;0,95}^2 = 11,07048$  (viz Příloha 1). Jelikož námi vypočítaná hodnota kritéria je  $\chi^2 = 17,81048 > \chi_{5;0,95}^2$  a nachází se za kritickou hranicí, zamítáme hypotézu  $H_0$  a tvrdíme, že se počty impulzů generované GM trubící při průletu ionizujících částic neřídí podle Poissonova rozložení.

Pokud se ovšem pozorně podíváme na jednotlivé rozdíly teoretických a empirických četností (sloupce  $X_i$  a  $np_i$  v tabulce 3-4), zjistíme, že největší rozdíl vzniká u velmi malých pravděpodobností  $q_i$ . Proto pokud hodnoty nebudeme započítávat do celkového rozložení, tak se nedopustíme velké statistické chyby, jelikož ostatní četnosti v tomto případě zabírají více jak 99 % celkového rozložení. Při tomto postupu se změní poslední řádek tabulky 3-5 viz tabulka 3-6, pro niž opět spočítáme hodnotou kvantilu Chí-kvadrátu pro  $k - 1 = 5$ . Jelikož nyní je  $\chi^2 = 9,80331 < \chi_{5;0,95}^2$ , nezamítáme hypotézu  $H_0$  a můžeme říct, že námi změřené rozložení pravděpodobnosti se na hladině významnosti  $\alpha = 5\%$  řídí Poissonovým rozdělením. Pokud navíc provedeme test Chí-kvadrát těchto dat pro Gaussovo rozložení, hodnota kritéria je  $\chi^2 = 66,2575 > \chi_{5;0,95}^2$ , což nám říká, že se nejedná o Gaussovo rozložení.

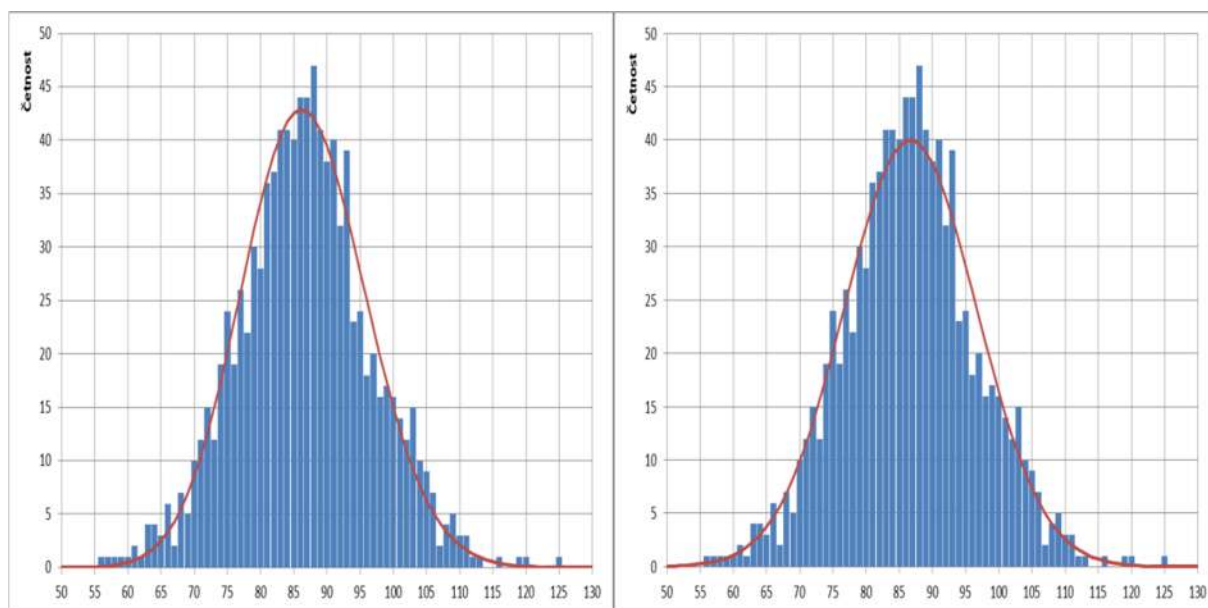
Pro zbylé hodnoty  $\lambda$ , pro které jsme rozložení měřili, jsou výsledky následující:  
 v případě  $\lambda = 4,71$  je  $\chi^2 = 14,82603 < \chi_{10;0,95}^2 = 18,30703$ ,  
 pro  $\lambda = 10,05$  –  $\chi^2 = 16,87332 < \chi_{14;0,95}^2 = 23,68478$ ,  
 a pro  $\lambda = 19,18$  –  $\chi^2 = 24,46574 < \chi_{20;0,95}^2 = 28,86932$ .

I výsledky těchto tří testů potvrzují hypotézu  $H_0$  a to, že radioaktivní rozpad se řídí Poissonovou statistikou.

## 2. Gaussovo rozložení radioaktivního rozpadu

Zapojení experimentu je stejné jako u bodu 1. Při tomto měření musíme provést dvě rozdílná měření.

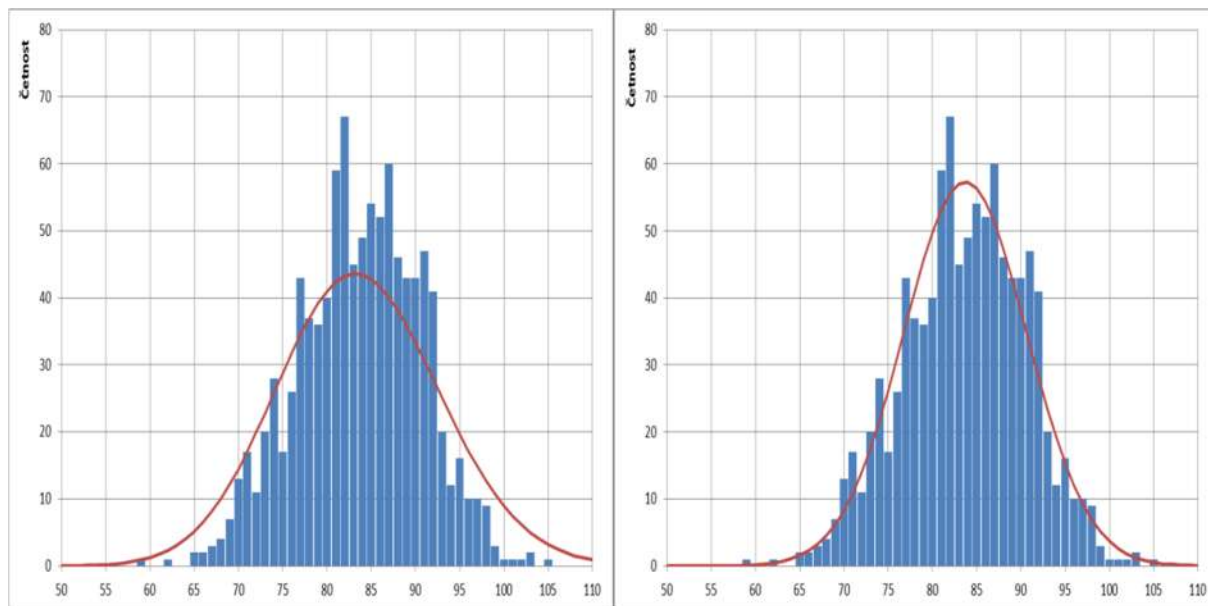
Během prvního měření nesmí hodnota pulzů překročit 100 pulzů/s abychom zajistili, že mrtvá doba detektoru, která se pohybuje okolo 0,1 ms, neovlivňuje měření. Abychom mohli adaptovat Gaussovo rozložení je optimální průměrná hodnota počtu pulzů je mezi 50 a 100 pulzy/s. Ke snížení počtu registrovaných částic byl mezi zdroj a GM trubici vložen nějaký materiál, který toto záření částečně odstínil, nebo lze rovněž zvětšit vzdálenost mezi zdrojem a detektorem. Na začátku měření byla tedy nastavena průměrná hodnota pulzů/s v rozmezí 50 až 100, konkrétně 87 pulzů/s, s dobou měření 1s. Poté bylo změřeno 1000 hodnot (tabulka 3-7). Četnosti jednotlivých hodnot pulzů byly vyneseny do grafu.



**Obrázek 3.7 – Rozložení četnosti pro malé hodnoty pulzů/s (87 pulzů/1s) s adaptovanou Poissonovou (vlevo) a Gaussovou křivkou (vpravo)**

Pro druhé měření potřebujeme dosáhnout velkého počtu pulzů/s, proto je nutné použít pro toto měření dostatečně silný zdroj radioaktivity. Aby byl počet měřených pulzů co největší a protože platí (11), byly použity oba  $\beta$  zářiče (X89-101 a X89-102), které jsme měli k dispozici. Mezi zdroj a zářič nebyl umístěn žádný stínící materiál, díky čemuž se začne projevovat mrtvá doba. Vliv mrtvé doby zapříčiní zmenšení rozptylu hodnot. Měření bylo

provedeno stejně jako v prvním případě, ale s tím rozdílem, že doba měření byla 0,1s a to proto, abychom se dostali na přibližně stejnou hodnotu  $\lambda$ . Hodnota, které se nám podařilo dosáhnout, byla 84 pulzů/0,1s. Opět bylo změřeno 1000 hodnot (tabulka 3-8).



**Obrázek 3.8 – Rozložení četnosti pro velké hodnoty pulzů/s (84 pulzů/0,1s) s adaptovanou Poissonovou (vlevo) a Gaussovou křivkou (vpravo)**

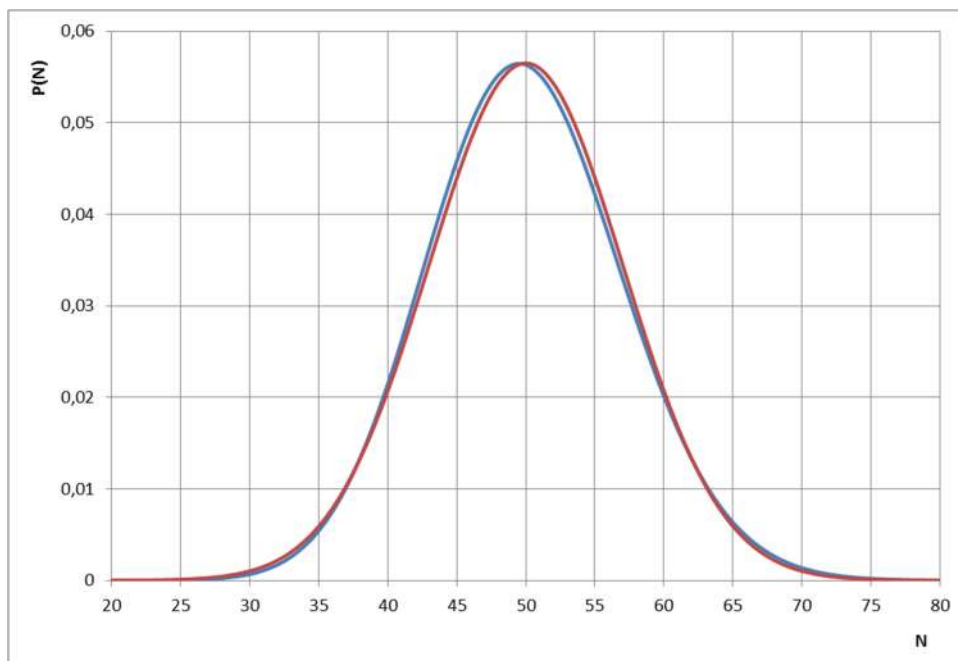
Na obrázku 3.7 jsou znázorněny četnosti jednotlivých hodnot pulzů, které jsou proloženy Poissonovou i Gaussovou křivkou. Při menších průměrných hodnotách četností jsou tyto křivky téměř stejné, nicméně Poissonova křivka odpovídá měřeným datům více.

Jak můžeme vidět, na toto získané rozdělení můžeme adaptovat i Gaussovu křivku. Pro větší průměrné hodnoty četností vlivem mrtvé doby detektoru a následnému menšímu kolísání četností, než je pro Poissonovo rozdělení typická, Poissonova křivka neodpovídá naměřeným hodnotám, jak můžeme vidět na obrázku 3.8.

V případě dostatečného počtu vzorků můžeme tedy popsat naměřená data proložení vždy souměrnou Gaussovou křivkou, která má tvar hustoty pravděpodobnosti podle rovnice (2). To je reprezentováno střední hodnotou  $\mu$  a směrodatnou odchylkou  $\sigma$ . Normální rozdělení zastupuje důležitou roli při popisu různých náhodných veličin a co se radioaktivního rozpadu týká, je odchylka, při velkém počtu hodnot, dána střední hodnotou  $\bar{N}$  a pak  $\sigma = \sqrt{\bar{N}}$ , potom se výraz popisující Gaussovo rozložení (2) mění na výraz následující

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \bar{N}}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{N})^2}{2\bar{N}}\right] \quad (46)$$

S pomocí určitých úkonů při velkých hodnotách pulzů/s se Poissonovo rozdělení, popsané rovnicí (4) transformuje na Gaussovo rozložení podle výrazu (46) přičemž  $\lambda = \bar{N}$ . Vykreslíme-li si rovnice (4) a (46) pro  $\bar{N} = 50$ , jako to je na obrázku 3.9x, vidíme, že toto rozložení se vzájemně moc neliší.



**Obrázek 3.9 - Poissonovo (modře) a Gaussovo (červeně) rozložení pro průměrný počet pulzů  $\bar{N} = 50$**

**Tabulka 3-7: Tabulka hodnot četností pro  $\lambda = 87$ ,  $t = 1$  s**

i	$X_i$	i	$X_i$	i	$X_i$	i	$X_i$
56	1	74	19	92	32	110	3
57	1	75	24	93	39	111	3
58	1	76	19	94	23	112	1
59	1	77	26	95	24	113	1
60	1	78	22	96	18	114	0
61	2	79	30	97	20	115	0
62	1	80	28	98	16	116	1
63	4	81	36	99	17	117	0
64	4	82	37	100	16	118	0
65	3	83	41	101	14	119	1
66	6	84	41	102	12	120	1
67	2	85	40	103	15	121	0
68	7	86	44	104	10	122	0
69	5	87	44	105	9	123	0
70	10	88	47	106	7	124	0
71	12	89	41	107	2	125	1
72	15	90	38	108	4		
73	12	91	40	109	5		

**Tabulka 3-8: Tabulka hodnot četností pro  $\lambda = 84$ ,  $t = 0,1$  s**

i	$X_i$	i	$X_i$	i	$X_i$
59	1	75	17	91	47
60	0	76	26	92	41
61	0	77	43	93	20
62	1	78	37	94	12
63	0	79	36	95	16
64	0	80	40	96	10
65	2	81	59	97	10
66	2	82	67	98	9
67	3	83	45	99	3
68	4	84	49	100	1
69	7	85	54	101	1
70	13	86	52	102	1
71	17	87	60	103	2
72	11	88	46	104	0
73	20	89	43	105	1
74	28	90	43		

### 3. Poissonovo rozložení radioaktivního rozpadu

Na závěr měření bylo ještě ověřeno rozložení 150 hodnot přirozeného radiačního pozadí, které bylo měřené v předchozí úloze (kapitola 3.1) pomocí čítače vestavěného v přípravku. Tabulka 3-9 obsahuje naměřená data pro střední hodnotu  $\lambda = 22$  pulzů/min.

Postup ověřování byl stejný jako u předešlých testů, takže budou opět uvedeny pouze výsledky. V tabulce 3-9 máme 16 řádků a všechny ve sloupci  $n.p_i$  obsahují hodnoty větší než 5, takže je možné hned přistoupit k výpočtu  $\chi^2$ . Kvantil pro 15 stupňů volnosti při  $\alpha = 5\%$  je  $\chi_{15;0,95}^2 = 24,9958$  a vypočtená hodnota, jak můžeme zjistit v pravé dolní buňce tabulky 3-9, je  $\chi^2 = 5,49559$ . Porovnáním těchto dvou hodnot je jasné vidět, že i zdroje přirozeného radiačního pozadí se řídí podle Poissonovy statistiky.

**Tabulka 3-9: Tabulka četností pro měření přirozeného pozadí**

$X_i$	$p_i$	$n \cdot p_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$
10	0,0670	10,0449	0,00202	0,00020
5	0,0363	5,4475	0,20024	0,03676
6	0,0478	7,1650	1,35732	0,18944
12	0,0593	8,9006	9,60644	1,07931
11	0,0698	10,4746	0,27608	0,02636
13	0,0781	11,7106	1,66263	0,14198
9	0,0831	12,4690	12,03374	0,96510
14	0,0845	12,6730	1,76091	0,13895
10	0,0821	12,3204	5,38410	0,43701
16	0,0765	11,4785	20,44420	1,78109
10	0,0684	10,2663	0,07094	0,00691
7	0,0589	8,8291	3,34546	0,37891
7	0,0487	7,3118	0,09720	0,01329
5	0,0389	5,8390	0,70387	0,12055
7	0,0524	7,8576	0,73543	0,09360
8	0,0481	7,2118	0,62134	0,08616
$\Sigma$	150	1,0000	149,9994	5,49559

## 4 ZÁVĚR

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo ověřit metody pro měření statistických parametrů zdrojů ionizujícího záření a ověření závislosti koeficientu útlumu na hustotě materiálu, kterým záření prochází. Z výsledků měření závislosti počtu pulzů vyplývá, že praktické experimenty zcela odpovídají teorii, tudíž že při zvětšování tloušťky stínícího materiálu počty částic detekovaných GM trubici exponenciálně klesají. Následné zjišťování hmotnostního koeficientu útlumu byl spíše početní záležitost. Nami zjištěná výsledná hodnota byla  $\mu_m = 7,157 \text{ cm}^2/g$ . Tato hodnota se nám bohužel nepodařila teoreticky ověřit z důvodu nejasností při výpočtu.

Při ověřování statistických vlastností zdrojů ionizujícího záření jsme nejprve ověřovali Poissonovo rozdělení, které je nejlépe pozorovatelné při malých středních hodnotách počtu pulzů  $\lambda$ . Prvním krokem ověřování bylo porovnávání histogramu četností jednotlivých počtu pulzů s teoretickou křivkou Poissonova a Gaussova rozdělení pro dané  $\lambda$ . Z naměřených závislostí bylo patrné, že data jsou vzhledem ke střední hodnotě uspořádána asymetricky, což naznačovalo závislost na Poissonově rozdělení. Při zvětšující se hodnotě  $\lambda$  se ale Poissonovo rozdělení přibližovalo tvaru Gaussova rozložení. To nám nakonec potvrdily i testy shody, které nám na hladině významnosti  $\alpha = 5 \%$  při  $\lambda = 10,05$  a  $\lambda = 19,18$  dokázaly, že testované rozložení odpovídá jak Poissonovu, tak i Gaussovu rozdělení. Dalším měřením jsme ověřili fakt, že Poissonovo rozdělení se zvyšující se střední hodnotou a přispění mrtvé doby přechází do Gaussova rozdělení.

Z počátku této práce byla zamýšlena prezentace výsledků měření formou histogramu s daty rozdělenými do určitých tříd. Při zpracovávání jsme ale dospěli k názoru, použité vyobrazení má větší vypovídající hodnotu, tudíž jsme zobrazení pomocí tříd nepoužili.

Posledním bodem měření bylo ověření statistického rozložení přirozeného radioaktivního pozadí, které jsme změřili při měření  $\mu_m$ .

Další pokračování této práce by mohlo spočívat v dohledání a vysvětlení empirického vzorce pro teoretickou hodnotu hmotnostního koeficientu útlumu použitého v literatuře od společnosti PHYWE [21]. Dále by bylo vhodné zjistit, proč ve zmíněném vzorci bylo počítáno s maximální energií záření 0,7 MeV pro radionuklid  $^{85}\text{Kr}$ , namísto s hodnotou 0,546 MeV, která odpovídá zdroji  $^{90}\text{Sr}$  uvedeném v seznamu použitých přístrojů, případně nalezení jiného vzorce, pomocí kterého by bylo možné tuto teoretickou hodnotu hmotnostního koeficientu útlumu vypočítat a tím ověřit správnost změřeného výsledku. Dalším navázáním na tuto práci by mohlo být vytvoření softwaru pro automatizovaný sběr dat a ovládání čítače Agilent.

# Literatura

- [1] PETRŽÍLKA, V., *Metody pro detekci a registraci jaderného záření*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1959
- [2] *Částce alfa, Záření beta, Záření gama, Kosmické záření, Radionuklid, Poločas přeměny*, [cit. 2015-3-2] Dostupné z: < [http://cs.wikipedia.org/wiki/Částice\\_alfa](http://cs.wikipedia.org/wiki/Částice_alfa) (Záření\_beta, Záření\_gama, Kosmické\_záření, Radionuklid, Poločas\_přeměny) >
- [3] ULLMANN, V., *Jaderná a radiační fyzika, kapitola 1.2 – Radioaktivita*, [online] [cit. 2015-3-2] Dostupné z: < <http://www.astronuklfyzika.cz/JadRadFyzika2.htm> >
- [4] ULLMANN, V., *Jaderná a radiační fyzika, kapitola 1.4 – Radionuklidy*, [online] [cit. 2015-3-2] Dostupné z: < <http://www.astronuklfyzika.cz/JadRadFyzika4.htm> >
- [5] *Princip vzniku RTG záření v rentgence*, ČVUT, [online] [cit. 2015-3-9] Dostupné z: < [http://www.rtg.fbmi.cvut.cz/index.php?option=com\\_content&view=article&id=56&Itemid=62.html](http://www.rtg.fbmi.cvut.cz/index.php?option=com_content&view=article&id=56&Itemid=62.html) >
- [6] HUŠÁK, V., *Zdroje ionizujícího záření*, JČU, [online] [cit. 2015-3-15] Dostupné z: < [http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kra/externi/kra\\_7169/ch01.htm](http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kra/externi/kra_7169/ch01.htm) >
- [7] ŠVEC, J., *Radioaktivita a ionizující záření*, 1. vyd., ISBN:80-86634-62-0, Ostrava, 2005, [online] [cit. 2015-4-3] Dostupné z: < <https://www.fbi.vsb.cz/export/sites/fbi/050/.content/sys-cs/resource/PDF/studijni-materialy/zareni.pdf> >
- [8] ULLMANN, V., *Jaderná a radiační fyzika, kapitola 1.6 – Ionizující záření*, [online] [cit. 2015-3-15] Dostupné z: < <http://astronuklfyzika.cz/JadRadFyzika6.htm> >
- [9] ULLMANN, V., *Detekce a spektrometrie ionizujícího záření*, [online] [cit. 2015-3-15] Dostupné z: < <http://astronuklfyzika.cz/DetekceSpektrometrie.htm> >
- [10] *Statistické vlastnosti radioaktivního zářiče*, [online] [cit. 2015-3-25] Dostupné z: < <http://physics.fme.vutbr.cz/~mcerny/BF/labiny/stat.pdf> >
- [11] *Měření parametrů jaderného záření*, [online] [cit. 2015-3-15] Dostupné z: < [http://if.vsb.cz/Veda/foto1/jaderne\\_zareni.pdf](http://if.vsb.cz/Veda/foto1/jaderne_zareni.pdf) >
- [12] MAREK, L., *Pravděpodobnost*, Professional Publishing, 2012, ISBN: 978-80-7431-087-4
- [13] MELOUN, M.; MILITKÝ, J., *Statistické zpracování experimentálních dat v chemometrii, biometrii, ekonometrii a v dalších oborech přírodních, technických a společenských věd*, East Publishing, 1998, ISBN: 80-7219-003-2
- [14] *Konstrukce histogramu*, [online] [cit. 2015-3-12] Dostupné z: < <https://quizlet.com/64614736/7-histogram-princip-vyznam-aplikace-v-rizeni-jakosti-konstrukce-histogramu-flash-cards/> >
- [15] NOVOVIČOVÁ, J., *Pravděpodobnost a matematická statistika*, ČVUT, 1999, [online] [cit. 2015-4-1] Dostupné z: < <http://euler.fd.cvut.cz/publikace/files/skripta3.pdf> >
- [16] REISENAUER, R., *Metody matematické statistiky a jejich aplikace v technice*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1970
- [17] ANDĚL, J., *Základy matematické statistiky*, 1. vydání, MATFYZPRESS, 2005, ISBN: 80-86732-40-1



- [18]  $\chi^2$  rozložení, [online] [cit. 2015-4-1] Dostupné z:  
< [http://math.info/Probability/Chi\\_Square\\_Distribution/](http://math.info/Probability/Chi_Square_Distribution/) >
- [19] Průnik záření různými materiály, [online] [cit. 2015-4-1] Dostupné z:  
< <http://www.namestnosl.cz/storage/jedu-prirucka.pdf> >
- [20] PHYWE, *Poisson's distribution and Gaussian distribution of radioactive decay with Cobra3*, [online] [cit. 2015-5-7] Dostupné z: < <http://repository.phywe.de/files/versuchsanleitungen/p2520311/e/p2520311.pdf> >
- [21] PHYWE, *Electron absorption*, [online] [cit. 2015-5-7] Dostupné z:  
< [http://www.nikhef.nl/~h73/knlc/praktikum/phywe/LEP/Experim/5\\_2\\_31.pdf](http://www.nikhef.nl/~h73/knlc/praktikum/phywe/LEP/Experim/5_2_31.pdf) >

# Seznam příloh

Příloha 1 – Kvantily Chi-kvadrát

Příloha 2 – Parametry zdrojů ionizujícího záření

Příloha 3 – Tabulky naměřených hodnot

Příloha 3 – CD-ROM

# Příloha 1 – Kvantily Chi-kvadrát

stupně volnosti	Kvantily chi - kvadrát															
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,9	0,925	0,95	0,975	0,99	0,995					
2	0,010025	0,0201	0,050636	0,102586	0,2021	4,605176	5,180537	5,991476	7,377779	9,210351	10,59653					
3	0,071723	0,114832	0,215795	0,351846	0,114832	6,251394	6,904643	7,814725	9,348404	11,34488	12,83807					
4	0,206984	0,297107	0,484419	0,710724	0,297107	7,779434	8,496285	9,487728	11,14326	13,2767	14,86017					
5	0,411751	0,554297	0,831209	1,145477	0,554297	9,236349	10,00831	11,07048	12,83249	15,08632	16,74965					
6	0,675733	0,872083	1,237342	1,63538	0,872083	10,64464	11,46594	12,59158	14,44935	16,81187	18,54751					
7	0,989251	1,239032	1,689864	2,167349	1,239032	12,01703	12,88343	14,06713	16,01277	18,47532	20,27774					
8	1,344403	1,646506	2,179725	2,732633	1,646506	13,36156	14,26974	15,50731	17,53454	20,09016	21,95486					
9	1,734911	2,087889	2,700389	3,325115	2,087889	14,68366	15,63094	16,91896	19,02278	21,66605	23,58927					
10	2,155845	2,558199	3,246963	3,940295	2,558199	15,98717	16,97136	18,30703	20,4832	23,20929	25,18805					
11	2,603202	3,053496	3,815742	4,574809	3,053496	17,27501	18,29422	19,67515	21,92002	24,72502	26,75686					
12	3,073785	3,570551	4,403778	5,226028	3,570551	18,54934	19,60197	21,02606	23,33666	26,21696	28,29966					
13	3,565042	4,1069	5,008738	5,891861	4,1069	19,81193	20,89655	22,36203	24,73558	27,68818	29,81932					
14	4,074659	4,660415	5,628724	6,570632	4,660415	21,06414	22,17954	23,68478	26,11893	29,14116	31,31943					
15	4,600874	5,229356	6,262123	7,260935	5,229356	22,30712	23,45216	24,9958	27,48836	30,57795	32,80149					
16	5,142164	5,812197	6,907664	7,961639	5,812197	23,54182	24,71551	26,29622	28,84532	31,99986	34,26705					
17	5,697274	6,407742	7,564179	8,671754	6,407742	24,76903	25,97048	27,5871	30,19098	33,40872	35,71838					
18	6,264766	7,014903	8,230737	9,390448	7,014903	25,98942	27,21781	28,86932	31,52641	34,80524	37,15639					
19	6,843923	7,632698	8,906514	10,11701	7,632698	27,20356	28,45813	30,14351	32,85234	36,19077	38,58212					
20	7,433811	8,260368	9,590772	10,8508	8,260368	28,41197	29,69201	31,41042	34,16958	37,56627	39,99686					
21	8,033602	8,897172	10,28291	11,59132	8,897172	29,61509	30,91998	32,67056	35,47886	38,93223	41,40094					
22	8,642681	9,542494	10,98233	12,33801	9,542494	30,81329	32,14242	33,92446	36,78068	40,28945	42,79566					
23	9,260383	10,19569	11,68853	13,09051	10,19569	32,00689	33,35973	35,17246	38,07561	41,63833	44,18139					
24	9,886199	10,85635	12,40115	13,84842	10,85635	33,19624	34,57228	36,41503	39,36406	42,97978	45,55836					
25	10,51965	11,52395	13,11971	14,6114	11,52395	34,38158	35,78032	37,65249	40,6465	44,31401	46,92797					
26	11,16022	12,19818	13,84388	15,37916	12,19818	35,56316	36,98412	38,88513	41,92314	45,64164	48,28978					
27	11,80765	12,87847	14,57337	16,15139	12,87847	36,74123	38,18399	40,11327	43,19452	46,96284	49,64504					
28	12,46128	13,56467	15,30785	16,92788	13,56467	37,91591	39,38011	41,33715	44,46079	48,27817	50,99356					
29	13,12107	14,25641	16,04705	17,70838	14,25641	39,08748	40,57267	42,55695	45,72228	49,58783	52,3355					
30	13,78668	14,95346	16,79076	18,49267	14,95346	40,25602	41,76189	43,77295	46,97922	50,89218	53,67187					
31	14,45774	15,65547	17,53872	19,28056	15,65547	41,42175	42,94791	44,98534	48,23192	52,19135	55,00248					
32	15,13402	16,3622	18,29079	20,07191	16,3622	42,58473	44,13093	46,19424	49,48044	53,48566	56,32799					
33	15,81518	17,07348	19,04666	20,86652	17,07348	43,74518	45,31101	47,3999	50,7251	54,77545	57,64831					
34	16,5013	17,7891	19,80624	21,66428	17,7891	44,90316	46,4884	48,60236	51,96602	56,06085	58,96371					

Příloha 2 – Parametry zdrojů ionizujících záření



ÚSTAV PRO VÝZKUM, VÝROBU  
A VYŘAZENÍ RADIOIZOTOPŮ  
Radiová 1, 102 27 Praha 10  
telefon 7043109, telex: 122608 ÚVVR

**OSVĚDČENÍ**  
**UZAVŘENÉHO RADIONUKLIDOVÉHO ZÁŘIČE (URZ)**

(podle ČSN 40 4301)

1 Číslo <b>103-3324-0-89</b>		5-6 Radionuklid a výrobní číslo (série) <b>90Sr X 89 101-102</b>	
3-4 Kód URZ, název URZ a počet URZ <b>SKB X 10 Kontrolní zářič beta, 2 ks à 370 kBq</b>	8 POTVRZENÍ URZ v y h o v ě l zkušebně povrchové kontaminace a těsnosti podle ČSN 40 4302. - datum provedení a číslo protokolu <b>21.04.89 17/S/89</b>		
7 RADIAČNĚ FYZIKÁLNÍ VELIČINY		- zkušební povrchová kontaminace <b>P 7</b>	
- hodnota <b>740 kBq</b>	- chyba měření <b>duben/89</b>	10 Doporučená doba používání URZ <b>5 let</b>	
aktivita	datum měření	13 Ošetření dle techn. normy - podmíněk <b>11, 14</b>	
exponiční příkon <b>A/kg</b>		- odprodán nebo <b>18</b>	
		12 Rozměry aktivní části <b>Ø 7 mm, tloušťka 0,2 mm</b>	
		16 Ochranný kontejner - typ nebo číslo	
1-3 Uzávěrná chemická forma radionuklidu <b>SrCO<sub>3</sub> homogenně inkorporován v Ag vrstvě</b>	9 Odstálost URZ <b>ISO/SEV C 52344</b>		
4-15 Pouzdro (normy a materiály) a typ obalového kování <b>Ø 14 mm, výška 3 mm dural</b>	17 Ošetření podle o URZ <b>Zalisováno, zalepeno Epoxy 1200</b>		
18 Odstálost	18 Odstálost <b>460 VUT Brno</b>		
19 Datum vystavení <b>24.04.89</b>	20 Potvrzení odebíratelů o převzetí <b>21 Avizo</b>		
Originální specifikace URZ od výrobce přiložena	Radioaktivní materiál zvláštní formy <b>ne</b>		

COJAV  
RADIOVÁ 1, PRAHA 10 - HOSTIVÁK  
103-3324-0-89  
Příloha 2 podpis odebíratelů

## Příloha 3 – Tabulky naměřených hodnot

### Měření koeficientu útlumu

#### Fólie

	Počet vrstev	1	2	3	4	5	6
	x [ mm ]	0,19	0,38	0,57	0,76	0,95	1,14
Číslo měření - n	1	25 153	17 620	14 437	11 846	10 050	8 576
	2	24 779	17 512	14 287	11 850	10 221	8 429
	3	24 990	17 576	14 257	12 250	10 099	8 602
	4	25 153	17 773	14 375	12 044	9 888	8 609
	5	25 447	17 687	14 269	12 085	10 084	8 636
	6	25 606	17 916	14 372	12 115	10 291	8 708
	7	25 220	17 817	14 669	12 021	10 124	8 608
	8	25 191	17 715	14 586	12 014	10 250	8 746
	9	25 253	17 863	14 511	12 170	10 342	8 604
	10	25 091	17 976	14 802	12 401	10 338	8 704
	11	25 581	17 732	14 616	12 168	10 151	8 820
	12	25 564	18 134	14 490	12 323	10 226	8 574
	13	25 341	18 016	14 792	11 968	10 243	8 970
	14	25 532	17 743	14 666	12 071	10 512	8 865
	15	25 506	17 871	14 691	12 394	10 274	8 907
$\bar{N}$		25 294	17 797	14 521	12 115	10 206	8 691

#### Textit

	Počet vrstev	1	2	3	4	5
	x [ mm ]	0,97	1,94	2,91	3,88	4,85
Číslo měření - n	1	8 649	2 452	508	122	73
	2	8 713	2 565	505	128	84
	3	8 578	2 537	539	145	82
	4	8 788	2 588	521	152	95
	5	8 879	2 536	528	154	93
	6	9 212	2 505	552	137	92
	7	9 032	2 428	529	139	90
	8	8 915	2 442	547	124	85
	9	8 817	2 429	560	122	99
	10	9 083	2 553	571	133	99
	11	9 048	2 561	549	129	77
	12	8 986	2 446	585	139	86
	13	9 129	2 393	548	119	80
	14	8 980	2 467	551	126	109
	15	8 996	2 486	559	165	96
$\bar{N}$		8 920	2 493	543	136	89

## Lepenka

	Počet vrstev	1	2	3	4	5	6
	x [ mm ]	1	2	3	4	5	6
Číslo měření - n	1	20 817	14 160	9 263	6 311	4 069	2 610
	2	20 815	13 853	9 524	6 214	4 084	2 622
	3	20 837	13 914	9 380	6 292	4 086	2 712
	4	20 673	13 885	9 569	6 242	4 147	2 730
	5	20 736	14 077	9 366	6 403	4 204	2 578
	6	20 914	14 207	9 348	6 414	4 283	2 714
	7	20 936	14 009	9 258	6 347	4 217	2 713
	8	20 746	14 063	9 625	6 324	4 289	2 722
	9	20 804	14 230	9 243	6 232	4 181	2 787
	10	20 957	14 171	9 437	6 264	4 097	2 802
	11	21 027	14 050	9 474	6 314	4 406	2 757
	12	20 709	14 022	9 376	6 375	4 151	2 782
	13	20 876	14 152	9 571	6 229	4 093	2 717
	14	20 904	14 200	9 566	6 384	4 313	2 904
	15	20 810	13 990	9 389	6 354	4 516	2 810
$\bar{N}$		20 837	14 066	9 426	6 313	4 209	2 731

## Tvrký papír

	Počet vrstev	1	2	3	4	5	6
	x [ mm ]	0,27	0,54	0,81	1,08	1,35	1,62
Číslo měření - n	1	27 145	23 543	20 520	18 016	15 903	13 945
	2	27 072	23 593	20 402	17 871	15 902	14 031
	3	27 427	23 531	20 537	17 996	15 820	14 128
	4	27 448	23 963	20 258	18 011	15 811	14 234
	5	27 181	23 363	20 112	17 819	15 990	14 180
	6	27 312	23 531	20 368	17 906	16 022	14 244
	7	27 295	23 407	20 338	18 293	16 025	14 167
	8	27 370	23 584	20 555	17 954	16 067	14 319
	9	27 442	23 416	20 702	18 178	16 059	14 228
	10	27 261	23 664	20 567	18 100	16 065	14 291
	11	27 380	23 678	20 658	17 896	16 079	14 452
	12	27 102	23 762	20 562	18 075	16 262	14 414
	13	27 481	23 656	20 546	18 044	16 265	14 471
	14	27 157	23 701	20 604	18 275	16 305	14 375
	15	27 211	23 825	20 784	18 504	16 161	14 378
$\bar{N}$		27 286	23 614	20 501	18 063	16 049	14 257

## Sololit

	Počet vrstev	1	2	3
	x [ mm ]	2,92	5,84	8,76
Číslo měření - n	1	5 950	906	329
	2	5 830	778	325
	3	5 794	851	394
	4	5 892	893	324
	5	5 900	779	323
	6	6 026	839	352
	7	6 006	812	286
	8	6 052	875	233
	9	5 894	792	258
	10	6 108	899	430
	11	6 048	875	412
	12	6 141	964	362
	13	6 079	865	345
	14	6 164	830	397
	15	6 305	798	246
$\bar{N}$	6 013	850	334	

## Sklo

	Počet vrstev	1	2	3
	x [ mm ]	1,05	2,1	3,15
Číslo měření - n	1	4 682	682	327
	2	4 812	738	278
	3	4 613	701	301
	4	4 731	741	301
	5	4 726	746	298
	6	4 601	702	305
	7	4 623	689	321
	8	4 759	738	308
	9	4 702	721	299
	10	4 801	699	285
	11	4 760	691	291
	12	4 686	711	303
	13	4 653	743	320
	14	4 649	716	315
	15	4 671	771	296
$\bar{N}$	4 698	719	303	

Měření statistických parametrů zdrojů ionizujícího záření - četnosti

$\lambda = 1,55$

i	$X_i$	$q_i$	$np_i$	$X_i$	$np_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$	$X_i$	$np_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$
0	125	0,212248	106,124	125	106,1240	356,3039	3,35743	125	106,1240	356,3039	3,35743
1	166	0,328984	164,4922	166	164,4922	2,2735	0,01382	166	164,4922	2,2735	0,01382
2	103	0,254963	127,4814	103	127,4814	599,3409	4,70140	103	127,4814	599,3409	4,70140
3	58	0,131731	65,86541	58	65,8654	61,8647	0,93926	58	65,8654	61,8647	0,93926
4	28	0,051046	25,52285	28	25,5228	6,1363	0,24042	28	25,5228	6,1363	0,24042
5	10	0,015824	7,912082	20	10,5141	89,9816	8,55815	10	10,5141	4,3594	0,55098
6	5	0,004088	2,043955								
7	3	0,000905	0,45259								
8	2	0,000175	0,087689								
9	0	3,02E-05	0,015102								
10	0	4,68E-06	0,002341								
11	0	6,6E-07	0,00033								
12	0	8,52E-08	4,26E-05								
13	0	1,02E-08	5,08E-06								
14	0	1,12E-09	5,62E-07								
15	0	1,16E-10	5,81E-08								
$\Sigma$	500	1	500	$\Sigma$ 500	500,0000		17,81048	$\Sigma$ 490	497,3979		9,80331

$\lambda = 4,72$

i	$X_i$	$q_i$	$np_i$	$X_i$	$np_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$	$X_i$	$np_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$
0	9	0,008987	4,493393								
1	27	0,042346	21,17287	36	25,6663	106,7862	4,16057	27	21,1729	33,9555	1,60373
2	60	0,099767	49,88328	60	49,8833	102,3481	2,05175	60	49,8833	102,3481	2,05175
3	82	0,1567	78,35	82	78,3500	13,3225	0,17004	82	78,3500	13,3225	0,17004
4	87	0,184593	92,2963	87	92,2963	28,0508	0,30392	87	92,2963	28,0508	0,30392
5	78	0,17396	86,98003	78	86,9800	80,6410	0,92712	78	86,9800	80,6410	0,92712
6	57	0,136617	68,30832	57	68,3083	127,8781	1,87207	57	68,3083	127,8781	1,87207
7	42	0,091963	45,98126	42	45,9813	15,8504	0,34471	42	45,9813	15,8504	0,34471
8	17	0,054166	27,08296	17	27,0830	101,6661	3,75388	17	27,0830	101,6661	3,75388
9	13	0,028359	14,17943	13	14,1794	1,3911	0,09810	13	14,1794	1,3911	0,09810
10	8	0,013363	6,68135	8	6,6813	1,7388	0,26025	8	6,6813	1,7388	0,26025
11	6	0,005724	2,862047	20	4,5908	237,4437	51,72171	6	2,8620	9,8467	3,44046
12	5	0,002248	1,123831								
13	3	0,000815	0,407345								
14	2	0,000274	0,137101								
15	2	8,61E-05	0,043068								
16	1	2,54E-05	0,012684								
17	1	7,03E-06	0,003516								
18	0	1,84E-06	0,00092								
19	0	4,56E-07	0,000228								
20	0	1,08E-07	5,38E-05								
$\Sigma$	500	1	500	$\Sigma$ 500	500,0000		65,66412	$\Sigma$ 477	493,7778		14,82603



$\lambda = 10,05$

i	$X_i$	$q_i$	$np_i$	$X_i$	$np_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$	$X_i$	$np_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$
0	0	4,33E-05	0,021636								
1	1	0,000435	0,2174								
2	5	0,002184	1,092215								
3	6	0,007316	3,658194								
4	10	0,018379	9,189382	22	14,1788	61,1707	4,31423	10	9,1894	0,6571	0,07151
5	24	0,036934	18,46698	24	18,4670	30,6143	1,65778	24	18,4670	30,6143	1,65778
6	35	0,061852	30,92604	35	30,9260	16,5972	0,53667	35	30,9260	16,5972	0,53667
7	40	0,088784	44,39212	40	44,3921	19,2907	0,43455	40	44,3921	19,2907	0,43455
8	62	0,111513	55,7565	62	55,7565	38,9812	0,69913	62	55,7565	38,9812	0,69913
9	63	0,124498	62,24904	63	62,2490	0,5639	0,00906	63	62,2490	0,5639	0,00906
10	47	0,125096	62,54783	47	62,5478	241,7352	3,86480	47	62,5478	241,7352	3,86480
11	49	0,114269	57,1346	49	57,1346	66,1718	1,15817	49	57,1346	66,1718	1,15817
12	41	0,095681	47,84071	41	47,8407	46,7953	0,97815	41	47,8407	46,7953	0,97815
13	35	0,073954	36,97719	35	36,9772	3,9093	0,10572	35	36,9772	3,9093	0,10572
14	28	0,053078	26,53906	28	26,5391	2,1344	0,08042	28	26,5391	2,1344	0,08042
15	16	0,035555	17,77763	16	17,7776	3,1600	0,17775	16	17,7776	3,1600	0,17775
16	9	0,022329	11,16435	9	11,1644	4,6844	0,41959	9	11,1644	4,6844	0,41959
17	13	0,013198	6,598788	13	6,5988	40,9755	6,20955	13	6,5988	40,9755	6,20955
18	5	0,007367	3,68359	16	7,4503	73,0969	9,81124	5	3,6836		
19	4	0,003896	1,948038								
20	0	0,001957	0,978694								
21	1	0,000937	0,468282								
22	2	0,000428	0,213877								
23	2	0,000187	0,093436								
24	1	7,82E-05	0,039119								
25	0	3,14E-05	0,015723								
26	0	1,22E-05	0,006076								
27	0	4,52E-06	0,002261								
28	1	1,62E-06	0,000811								
29	0	5,62E-07	0,000281								
30	0	1,88E-07	9,42E-05								
31	0	6,1E-08	3,05E-05								
32	0	1,92E-08	9,58E-06								
33	0	5,84E-09	2,92E-06								
34	0	1,72E-09	8,62E-07								
35	0	4,95E-10	2,48E-07								
$\Sigma$	500	1	500	$\Sigma$ 500	500,0000		30,45683	$\Sigma$ 477	491,2438		16,40287

$\lambda = 19,18$

i	$X_i$	$q_i$	$np_i$	$X_i$	$np_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$	$X_i$	$np_i$	$(X_i - np_i)^2$	$\chi^2$
0	0	4,68E-09	2,34E-06								
1	0	8,98E-08	4,49E-05								
2	0	8,61E-07	0,00043								
3	0	5,5E-06	0,002752								
4	0	2,64E-05	0,013194								
5	0	0,000101	0,050613								
6	2	0,000324	0,161793								
7	0	0,000887	0,443314								
8	4	0,002126	1,062846								
9	5	0,00453	2,265042								
10	12	0,008689	4,34435	23	8,3444	214,7871	9,33857				
11	10	0,01515	7,574967	10	7,5750	5,8808	0,58808	10	7,5750	5,8808	0,77634
12	13	0,024215	12,10732	13	12,1073	0,7969	0,06130	13	12,1073	0,7969	0,06582
13	25	0,035726	17,86296	25	17,8630	50,9374	2,03750	25	17,8630	50,9374	2,85156
14	24	0,048945	24,47225	24	24,4723	0,2230	0,00929	24	24,4723	0,2230	0,00911
15	29	0,062584	31,29185	29	31,2919	5,2526	0,18112	29	31,2919	5,2526	0,16786
16	36	0,075022	37,51111	36	37,5111	2,2834	0,06343	36	37,5111	2,2834	0,06087
17	39	0,084643	42,32136	39	42,3214	11,0314	0,28286	39	42,3214	11,0314	0,26066
18	41	0,090192	45,09576	41	45,0958	16,7752	0,40915	41	45,0958	16,7752	0,37199
19	44	0,091046	45,52298	44	45,5230	2,3195	0,05272	44	45,5230	2,3195	0,05095
20	37	0,087313	43,65654	37	43,6565	44,3095	1,19755	37	43,6565	44,3095	1,01496
21	35	0,079746	39,87297	35	39,8730	23,7458	0,67845	35	39,8730	23,7458	0,59554
22	22	0,069524	34,76198	22	34,7620	162,8681	7,40310	22	34,7620	162,8681	4,68524
23	18	0,057977	28,98847	18	28,9885	120,7464	6,70814	18	28,9885	120,7464	4,16533
24	25	0,046333	23,16662	25	23,1666	3,3613	0,13445	25	23,1666	3,3613	0,14509
25	24	0,035547	17,77343	24	17,7734	38,7702	1,61542	24	17,7734	38,7702	2,18136
26	7	0,026223	13,11132	7	13,1113	37,3483	5,33547	7	13,1113	37,3483	2,84855
27	14	0,018628	9,313895	14	9,3139	21,9596	1,56854	14	9,3139	21,9596	2,35772
28	6	0,01276	6,380018	6	6,3800	0,1444	0,02407	6	6,3800	0,1444	0,02264
29	5	0,008439	4,219612	5	4,2196	0,6090	0,12180	5	4,2196	0,6090	0,14433
30	4	0,005395	2,697739	23	6,6502	267,3154	11,62241	4	2,6977	1,6959	0,62863
31	3	0,003338	1,669117					3	1,6691	1,7712	1,06119
32	4	0,002001	1,000427								
33	4	0,001163	0,58146								
34	1	0,000656	0,328012								
35	3	0,00036	0,179751								
36	1	0,000192	0,095767								
37	2	9,93E-05	0,049644								
38	1	5,01E-05	0,025057								
39	0	2,46E-05	0,012323								
40	0	1,18E-05	0,005909								
41	0	5,53E-06	0,002764								
42	0	2,52E-06	0,001262								
43	0	1,13E-06	0,000563								
44	0	4,91E-07	0,000245								
45	0	2,09E-07	0,000105								
46	0	8,72E-08	4,36E-05								
47	0	3,56E-08	1,78E-05								
48	0	1,42E-08	7,11E-06								
49	0	5,57E-09	2,78E-06								
50	0	2,14E-09	1,07E-06								
$\Sigma$	500	1	500	$\Sigma$ 500	500,0000		49,43341	$\Sigma$ 461	489,3723		24,46574