Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Sbírka úloh z teorie determinantů

Bakalářská práce

Autor: Martin Budina

Studijní program: Chemie

Studijní obor: Chemie se zaměřením na vzdělávání
Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce : RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Oponent: doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D.

Hradec Králové 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny prameny, ze kterých jsem vycházel.

V Hradci Králové Martin Budina

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval *RNDr. Jitce Kühnové, Ph.D.* nejenom za její ochotu, věnovaný čas a trpělivost, ale také za přínosné rady a velmi cenné připomínky, které mi pomohly k vypracování této práce.

Anotace

BUDINA, Martin. *Sbírka úloh z teorie determinantů*. Hradec Králové, 2022. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Práce se zabývá vytvořením sbírky příkladů z teorie determinantů. Součástí práce je přehledně zpracovaná teorie, vzorově vyřešené příklady a neřešené příklady s výsledky. Není opomenuto ani využití determinantů a některé speciální determinanty.

Klíčová slova

determinant, matice, řádek, sloupec, Sarrusovo pravidlo, rozvoj

Annotation

BUDINA, Martin. *A Collection of Problems on the Theory of the Determinants*. Hradec Králové, 2022. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Bachelor Thesis Supervisor RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

The thesis deals with the creation of a collection of examples from the theory of determinants. The thesis includes a clearly developed theory, sample solved examples and unsolved examples with results. The use of determinants and some special determinants is not omitted.

Keywords

determinant, matrix, row, column, Sarrus rule, development

Obsah

Úvod

Pojem determinant matice se historicky vyvinul jako nástroj pro řešení soustav lineárních rovnic. Za zakladatele pojmu determinant je považován německý matematik, filozof a přírodovědec Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716), který při řešení soustavy lineárních rovnic dospěl k výrazu sestavenému z koeficientů rovnic, který dnes nazýváme determinant.

Tato bakalářská práce se zabývá především úlohami z teorie determinantů. V první kapitole je zavedena definice determinantu, dále jsou uvedeny základní pojmy z teorie determinantů a ve formě vět nejdůležitější vlastnosti determinantů využívané při výpočtech. Všechna tvrzení jsou uvedena bez důkazů, které lze nalézt v uvedené literatuře.

Druhá kapitola obsahuje sbírku příkladů na kterých jsou ilustrovány jednotlivé metody výpočtu determinantů. V této kapitole je nastíněno využití determinantů v různých matematických disciplínách a nejsou opomenuty ani některé speciální determinanty užívané především v matematické analýze. Součástí je sbírka neřešených příkladů s výsledky.

Samotné příklady ve sbírce jsou čerpány z uvedené literatury, přičemž bylo převzato zadání i řešení (odkaz na literaturu je uveden na konci řešení), nebo pouze zadání (odkaz na literaturu je uveden na konci zadání). U zbylých příkladů je zadání i řešení autorské.

Kapitola 1

Determinanty

V této části bakalářské práce si představíme základní definice a věty, které jsou pro samotné výpočty determinantů stěžejní. Je důležité si uvědomit, že determinant je prvek z pole T přiřazený čtvercové matici, resp. že se jedná o zobrazení v lineární algebře, které každé čtvercové matici přiřadí skalár. Pro definici pojmu determinant je nejprve potřeba zavést pojem permutace a několik dalších pojmů, které s permutacemi souvisí, zejména inverze a znaménko permutace. V této kapitole jsem čerpal zejména z publikací [1], [2], [3], [7], kde jsou také důkazy uvedených tvrzení.

1.1 Definice determinantu

Definice 1.1. Nechť $M = \{1, 2, \cdots, n\}$ je konečná množina o n prvcích, pak **permutací** Π na množině M rozumíme libovolnou *bijekci* množiny M na sebe. *Permutaci* Π budeme zpravidla zapisovat v tzv. **základním tvaru**, tj. ve tvaru dvouřádkové matice

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \end{pmatrix},$$

kde v prvním řádku jsou vypsány všechny *prvky* množiny M a v druhém řádku je pod každým prvkem zapsán jeho *obraz* v dané permutaci.

Poznámka.

- Zřejmě má množina $M = \{1, 2, \cdots, n\}$ právě $n!$ navzájem různých permutací.
- Uspořádanou n-tici $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ prvků z množiny $M = \{1, 2, \cdots, n\}$, v níž se každé z čísel $1, 2, \cdots, n$ vyskytuje právě jednou, nazýváme také **pořadí** čísel $1, 2, \cdots, n$.

- Je-li $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ libovolné pořadí prvků $1, 2, \cdots, n$ a $\Pi(s_i) = t_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, můžeme tutéž permutaci zapsat v tzv. **obecném tvaru**

$$\Pi = \begin{pmatrix} s_1, s_2, \cdots, s_n \\ t_1, t_2, \cdots, t_n. \end{pmatrix}.$$

- Permutaci

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

nazýváme **identickou** (resp. identitou) nebo **jednotkovou**.

- Permutaci

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

nazýváme **inverzní permutací** k permutaci

$$\Pi = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{pmatrix}.$$

- Množina všech permutací na množině $M = \{1, 2, \cdots, n\}$ je vzhledem k operaci násobení permutací grupa řádu $n!$. Tato grupa se nazývá **symetrická grupa** n prvků a značí se S_n.

Definice 1.2. Nechť $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ je pořadí čísel $1, 2, \cdots, n$. O uspořádané dvojici (i_r, i_s) různých čísel z tohoto pořadí řekneme, že je **inverzí** v daném pořadí $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$, právě když $r < s$ a $i_r > i_s$, (tj. když větší z čísel i_r, i_s předchází v daném pořadí před menším).

Poznámka.

- Pořadí, které má *sudý*, resp. *lichý* počet inverzí, se nazývá *sudé*, resp. *liché*. Mluvíme pak o **paritě** pořadí.

- Zaměníme-li v pořadí dva prvky, říkáme, že jsme provedli **transpozici**. Transpozice mění paritu pořadí.

- Permutace $\Pi = \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \end{pmatrix}$, se nazývá *sudá*, resp. *lichá*, právě když pořadí $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ je *sudé*, resp. *liché*.

- Permutace $\Pi = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_n \\ j_1, j_2, \cdots, j_n \end{pmatrix}$, se nazývá *sudá*, resp. *lichá*, právě když pořadí $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$,$(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ mají tutéž, resp. opačnou paritu.
- Navzájem *inverzní permutace* mají stejnou paritu, tj. $\text{zn}\,\Pi = \text{zn}\,\Pi^{-1}$.
- $\text{zn}\,(\Pi_1 \cdot \Pi_2) = (\text{zn}\,\Pi_1) \cdot (\text{zn}\,\Pi_2)$

Definice 1.3. Je-li p počet všech inverzí v pořadí $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$, resp. v permutaci Π, pak číslo $(-1)^p$ nazýváme **znaménkem**, resp. **znamením**, pořadí $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$, resp. permutace Π, a značíme jej **zn** $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$, resp **zn** Π, nebo **sgn** $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$, resp. **sgn** Π.

Příklad 1.1. Určete paritu permutace $\Pi \in S_8$, jestliže

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 7 & 3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Platí: $6 > 2,\ 6 > 5,\ 6 > 3,\ 6 > 1,\ 6 > 4,\ 2 > 1,\ 5 > 3,\ 5 > 1,\ 5 > 4,\ 7 > 3,$ $7 > 1,\ 7 > 4,\ 3 > 1,$ *tedy počet inverzí v pořadí* $(6, 2, 5, 7, 3, 1, 4, 8)$ *je roven číslu* 13*. Znaménko permutace* Π *je* $(-1)^p = (-1)^{13} = -1$*. Jedná se o lichou permutaci.*

Definice 1.4. Nechť n je přirozené číslo, T libovolné pole a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

libovolná čtvercová matice řádu n nad polem T.

Determinantem n-tého stupně matice A rozumíme prvek

$$\det A = \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_n)} zn\,(i_1, i_2, \cdots, i_n) \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

z pole T, kde sčítáme přes všechna pořadí množiny $M = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Determinant matice A značíme také $\det A = |A|$.

Místo $\det A$ píšeme též $\det(a_{ij})$ nebo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Poznámka.

(1)
- prvky $a_{ij} \in T$ se nazývají **prvky** determinantu
- $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ se nazývá **člen** determinantu
- $zn\,(i_1, i_2, \cdots, i_n) \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ se nazývá **algebraický člen** determinantu
- **řádem determinantu** rozumíme řád odpovídající matice
- řádky či sloupce matice A se nazývají též **řádky** či **sloupce determinantu** $\det A$
- pro řádky a sloupce determinantu užíváme též souhrnného názvu **řady determinantu**

(2)
- Rozebereme-li si předchozí Definici 1.4 podrobněji, pak vidíme, že determinant $\det A$ je prvek z T, který dostaneme sečtením celkem $n!$ členů determinantu. Přitom každý jednotlivý člen determinantu je součinem n prvků matice A vybraných tak, že z každého řádku a z každého sloupce je vybrán právě jeden prvek a tento součin je "opatřen znaménkem $+$ nebo $-$"podle toho, zda pořadí utvořené z řádkových a sloupcových indexů vybraných n prvků je *sudé* nebo *liché*.

Příklad 1.2. Rozepišme si předchozí Definici determinantu 1.4 pro nejjednodušší případy, tj. pro $n = 1, 2, 3$.

(1) $n = 1$:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Poznámka. Determinant matice **prvního řádu** je roven prvku, který stojí v matici.

(2) $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Poznámka. Determinant matice **druhého řádu** je roven rozdílu součinů prvků hlavní a vedlejší diagonály.

(3) $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

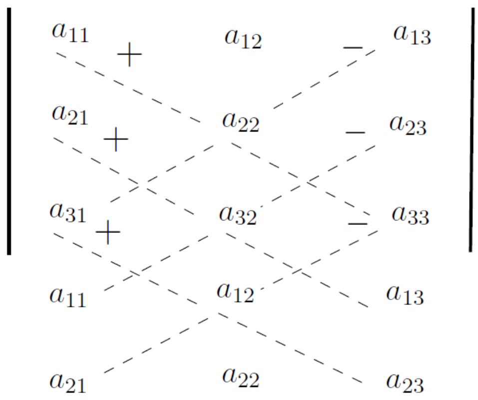
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Poznámka. Determinant matice **třetího řádu** můžeme vypočítat podle tzv. *Sarussova pravidla*. Toto pravidlo používáme pouze pro determinanty matic *třetího řádu*.

(a) K matici, ze které determinant počítáme, připíšeme dolů (resp. vpravo), znovu její první a druhý řádek (resp. první a druhý sloupec), v tomto pořadí.

(b) Následně

- vypočteme součiny trojic prvků ležících na rovnoběžkách s *hlavní diagonálou*
- určíme (-1) násobky součinů trojic prvků ležících na rovnoběžkách s *vedlejší diagonálou*
- takto získaná čísla sečteme.



Vytknutím znaménka dostaneme

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$- (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}).$$

Poznámka. Je vidět, že výpočet determinantu matice pouze na základě definice by byl neúnosně zdlouhavý a pracný, zejména pro větší n. Např. pro $n = 10$ by bylo nutno spočítat přes tři a půl milionu desetičlenných součinů (neboť $10! = 3628800$). Z tohoto důvodu uvedeme nyní několik vět popisujících základní vlastnosti determinantů, které mnohdy výpočet determinantu podstatně zjednoduší.

1.2 Vlastnosti determinantu

Ve všech dalších úlohách budeme symboly A, B, C rozumět čtvercové matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ řádu n nad polem T.

Věta 1.1. *Transponováním matice A se hodnota determinantu nezmění, tj.* $\det A = \det A^T$.

Poznámka. Věta 1.1 má pro teorii determinantů značný význam. Říká nám totiž, že nahradíme-li v libovolné větě o determinantech slovo *řádek* slovem *sloupec*, dostaneme opět platnou větu o determinantech. V dalším budeme tedy mluvit pouze o *řádcích*.

Věta 1.2. *Nechť prvky i-tého řádku, $i = 1, 2, ..., n$, matice A mají tvar*

$$a_{i1} = b_{i1} + c_{i1}, \quad a_{i2} = b_{i2} + c_{i2}, \quad \cdots \quad , a_{in} = b_{in} + c_{in}$$

a nechť matice B, resp. C se liší od matice A pouze v prvcích i-tého řádku, přičemž $b_{i1}, \cdots, b_{in}$ je i-tý řádek matice B, resp. $c_{i1}, \cdots, c_{in}$ je i-tý řádek matice C. Potom platí

$$\det A = \det B + \det C.$$

Schématicky zapsáno tedy platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 1.3. *Nechť matice B vznikne z matice A:*

1. *záměnou dvou různých řádků. Potom* $\det B = -\det A$.
2. *vynásobením jednoho řádku konstantou $c \in T$, $c \neq 0$. Potom je* $\det B = c \cdot \det A$.

Věta 1.4. *Nechť v matici A:*

1. *Jeden řádek sestává ze samých nul. Potom je* $\det A = 0$.
2. *Dva různé řádky jsou shodné. Potom je* $\det A = 0$.
3. *Jeden řádek je násobkem jiného řádku. Potom je* $\det A = 0$.
4. *Jeden řádek je lineární kombinací ostatních řádků. Potom je* $\det A = 0$.

Věta 1.5. *Hodnota determinantu matice A se nezmění, jestliže:*

1. *k jednomu řádku matice A přičteme libovolný násobek jiného řádku*
2. *k jednomu řádku matice A přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků.*

Poznámka.

- Z Věty 1.3 plyne, že jsou-li všechny prvky některého řádku násobkem nějakého prvku z T, můžeme tento prvek vytknout před determinant.
- Větu 1.5 často využíváme při konkrétních výpočtech determinantů, kdy se přičítáním vhodných násobků jedněch řádků k jiným řádkům snažíme matici upravit na takový tvar, z něhož již determinant lehce spočítáme.

Věta 1.6. *Matice A je regulární (resp. singulární) právě tehdy, když* $\det A \neq 0$ (*resp.* $\det A = 0$).

Definice 1.5. Nechť D je determinant matice A.

- Matici, která vznikne z matice A vynecháním libovolných k řádků a libovolných k sloupců, $k < n$, nazýváme **dílčí čtvercovou maticí**(resp. **submaticí**) matice A řádu $n - k$.
- Determinant každé takové dílčí matice nazýváme **minorem**, resp. **subdeterminantem** matice A řádu $n - k$.
- Nechť a_{ij} je libovolný prvek matice A. Subdeterminant řádu $n - 1$ vzniklý vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce matice A označíme A_{ij} a nazýváme ho **subdeterminantem determinantu** D příslušejícím k prvku a_{ij}.

Definice 1.6. Nechť D je determinant matice A, nechť a_{ij} je jeho libovolný prvek. Nechť se matice B shoduje s maticí A ve všech prvcích s výjimkou prvků v i-tém řádku, v němž má matice B všechny prvky kromě prvku a_{ij} rovny nule a prvek $a_{ij} = 1$. Potom se determinant matice B nazývá **algebraický doplněk prvku** a_{ij} nebo také **algebraický doplněk determinantu** D příslušný k prvku a_{ij}. Označuje se D_{ij}.

Věta 1.7. *Nechť D je determinant matice A, nechť* A_{ij} *je jeho subdeterminant a* D_{ij} *jeho algebraický doplněk příslušející k jeho prvku* a_{ij}*. Potom platí*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}, \quad \textit{resp.}\ A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}.$$

Příklad 1.3. Určete algebraický doplněk D_{33} determinantu D, jestliže

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>*Řešení:*</u> Podle Definice 1.6 je

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Potom podle Věty 1.7 máme

$$D_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (25 - 5) = 20.$$

Ve zbývající části tohoto paragrafu odvodíme způsob jak zjednodušit výpočet determinantu.

Definice 1.7. Nechť A je matice. Nechť je zvoleno k jejích řádků a sloupců $(k < n)$, a sice: $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, resp. $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$. Pak matice vytvořená ze zvolených řádků a sloupců, tj. matice

$$M = \begin{pmatrix} a_{i1,j1} & a_{i1,j2} & \cdots & a_{i1,jk} \\ a_{i2,j1} & a_{i2,j2} & \cdots & a_{i2,jk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ik,j1} & a_{ik,j2} & \cdots & a_{ik,jk} \end{pmatrix}$$

se nazývá **submatice** matice A určená řádky $i_1, \cdots, i_k$ a sloupci $j_1, \cdots, j_k$. Její determinant $\det M$ se nazývá **minor** řádu k matice A.

Zbývajícími $(n-k)$ řádky a $(n-k)$ sloupci je určena submatice $\overline{M}$ matice A, která se nazývá **doplňková submatice** k submatici M a její minor $\det \overline{M}$ se nazývá **doplněk minoru** $\det M$.

Označme $s_M = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k$. Pak číslo $(-1)^{s_M} \cdot \det \overline{M}$ se nazývá **algebraický doplněk minoru** $\det M$. Člen doplňku $\det \overline{M}$ vynásobený číslem $(-1)^{s_M}$ se pak nazývá **člen algebraického doplňku minoru** $\det M$.

Determinant submatice tvořené stejnými řádky a sloupci, tj. $i_1 = j_1, i_2 = j_2, ..., i_k = j_k$, se nazývá **hlavní minor** řádu k.

Věta 1.8. *Nechť A je matice a nechť* $\det M$ *je minor řádu k matice A ($k < n$). Pak součin libovolného členu minoru* $\det M$ *s libovolným členem jeho algebraického doplňku je členem determinantu* $\det M$.

Věta 1.9. (***Obecná Laplaceova věta***) *Nechť A je matice a nechť je pevně zvoleno k řádků matice A, kde $0 < k < n$. Pak determinant matice A je roven součtu všech $\binom{n}{k}$ součinů minorům řádu k, vybraných ze zvolených k řádků, s jejich algebraickými doplňky.*

Poznámka. Obecná Laplaceova věta se také někdy nazývá "*věta o rozvoji determinantu podle zvolených k řádků.*" Její praktický význam spočívá v tom, že výpočet determinantu matice určitého řádu (zejména vyššího) převádíme na výpočet jistého počtu determinantů matic menšího řádu.

Příklad 1.4. Nechť A je matice řádu 4 taková, že

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 6 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zvolíme-li $i_1 = 1, i_2 = 3, j_1 = 2, j_2 = 4$, tj. první a třetí řádek, resp. druhý a čtvrtý sloupec, pak submatice M určená zvolenými řádky a sloupci je tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tzn. minor } \det M = 6.$$

Doplňkovou submaticí je pak

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tzn. doplněk } \det \overline{M} = -14.$$

Dále je $s_M = 1 + 3 + 2 + 4 = 10$, tzn. algebraický doplněk minoru $\det M$ *je*

$$(-1)^{s_M} \cdot \det \overline{M} = (-1)^{10} \cdot (-14) = -14.$$

Věta 1.10. (***Laplaceova věta o rozvoji determinantu podle řádku (sloupce)***)
Nechť A je matice. Pro každé $i = 1, 2, \cdots, n$ je

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} A_{in} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}.$$

Záměnou řádků za sloupce dostáváme pro každé $j = 1, 2, \cdots, n$

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}.$$

Poznámka.

(1) Větu 1.10 lze při použití Věty 1.7 přeformulovat také takto

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \cdots + a_{in}D_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

resp. takto

$$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \cdots + a_{nj}D_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}D_{ij}, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

(2) Je zřejmé, že Věta 1.10 je důsledkem Věty 1.9 pro $k = 1$.

Věta 1.11. *Determinant horní trojúhelníkové matice*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

Poznámka.

(1) Z Definice 1.4 víme, že počítáme se součtem součinů zn $(i_1, i_2, \cdots, i_n) \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$. Pokud aspoň jeden z těchto činitelů je nulový, je nulový celý součin. V celkovém součtu nás zajímají jen nenulové součiny. Prozkoumejme, které to jsou:

- Z posledního řádku musíme vzít jen prvek a_{nn}, protože všechny ostatní prvky v posledním řádku jsou nulové.
- Z předposledního řádku můžeme vzít jen prvek $a_{n-1,n-1}$, protože ostatní jsou nulové. Prvek $a_{n-1,n}$ nelze do součinu zahrnout, protože z posledního sloupce už v součinu máme prvek a_{nn}.
- Analogickou úvahou zahrneme do součinu prvky $a_{n-2,n-2}, \cdots, a_{22}, a_{11}$.

Není tedy jiná možnost nenulového součinu, než součin $a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$. Ten odpovídá permutaci $(1, 2, ..., n)$, která nemá žádnou inverzi a její znaménko je tedy $+1$. Ostatní sčítanci z definice determinantu jsou nulový. Proto $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

(2) K výpočtu $\det A$ lze využít Větu 1.10.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}.$$

(3) Z Věty 1.1 ihned plyne analogické tvrzení pro hodnotu determinantu dolní trojúhelníkové matice.

Příklad 1.5. Vypočítejte determinant matice A, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \\ -1 & -4 & 5 & 2 \\ -1 & -4 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> Přičtením prvního řádku ke všem ostatním řádkům dostaneme

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 11 = 528.$$

Věta 1.12. (***Cauchyova věta, Věta o násobení determinantů***)

Pro matice A, B platí

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B),$$

tj. determinant součinu dvou matic téhož řádu, je roven součinu determinantů těchto dvou matic.

Poznámka. Je-li A je regulární matice, tak podle Věty 1.12 máme

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1, \text{ tedy } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Věta 1.13. *Nechť A je regulární matice, pak*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*, \quad \textit{kde} \tag{2}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Poznámka. Matice A^* se nazývá **adjungovaná** matice k matici A.

Příklad 1.6. Najděte adjungovanou matici k matici A, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Řešení: Najdeme algebraické doplňky D_{ij} prvků matice A.

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (\det d) = d, \qquad D_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (\det b) = -b,$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (\det c) = -c, \qquad D_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (\det a) = a$$

Víme, že adjungovaná matice je ve tvaru (3)*, dostáváme tak*

$$A^{*^T} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \textit{ tedy} \qquad A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Věta 1.14. (***Cramerovo pravidlo***)

Nechť je dána soustava n lineárních rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

o n neznámých nad libovolným polem T a nechť determinant matice soustavy $A = (a_{ij})$ je nenulový (tj. $\det A \neq 0$). Pak má tato soustava právě jedno řešení $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in T^n$, přičemž platí

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \cdots n, \quad \textit{kde}$$

$$\det A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Determinant matice A_i vznikne z determinantu matice A nahrazením jeho i-tého sloupce sloupcem pravých stran dané soustavy rovnic).

Definice 1.8. Nechť $A = (A_{ij})$ je čtvercová bloková matice řádu n nad polem T. Řekneme, že matice A je:

1. **Bloková horní trojúhelníková,** jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \cdots, n, i > j$, je $A_{ij} = O$.
2. **Bloková dolní trojúhelníková,** jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \cdots, n, i < j$, je $A_{ij} = O$.
3. **Blokově diagonální,** jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j$, je $A_{ij} = O$, kde O je nulová matice patřičného řádu. Píšeme také $A = \mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{nn})$.

Věta 1.15. *Determinant horní (dolní) trojúhelníkové blokové matice je roven součinu determinantů všech jejích bloků stojících na diagonále.*

Příklad 1.7. Vypočítejte determinant matice A, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 5 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení: *Matici A můžeme chápat jako blokovou horní trojúhelníkovou matici.*

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 5 & 4 & 2 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

Dostáváme tedy

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 6 \cdot 20 \cdot 13 = 1560$$

Kapitola 2

Sbírka příkladů

V této kapitole jsou ilustrovány jednotlivé metody výpočtu determinantů na konkrétních příkladech. Determinanty jsou velice účinným nástrojem pro značnou část matematických disciplín, proto se zaměříme také na jejich využití. Pro zajímavost uvedeme některé speciální typy determinantů. Součástí je také sbírka neřešených příkladů s výsledky. Hlavními zdroji pro tuto sekci jsou [1], [5], [6], [8], [9].

Příklad 2.1. Určete v závislosti na i, j znaménko daného členu determinantu matice $A = (aij)$ řádu n, je-li:

$$n = 5; \quad a_{31} \cdot a_{1i} \cdot a_{54} \cdot a_{43} \cdot a_{2j}. \qquad [6]$$

<u>Řešení:</u> Člen determinantu seřadíme vzestupně podle řádkových indexů, abychom mohli určit počet inverzí pořadí sloupcových indexů.

$$a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{31} \cdot a_{43} \cdot a_{54}$$

Tedy $i, j \in \{2, 5\}$ *a máme dvě možnosti výběru.*
Při volbě

$$i = 2, j = 5$$

dostaneme pořadí sloupcových indexů $(2, 5, 1, 3, 4)$*, a tedy zn*$(2, 5, 1, 3, 4) = (-1)^4$.
Při volbě

$$i = 5, j = 2$$

dostaneme pořadí sloupcových indexů $(5, 2, 1, 3, 4)$*, a tedy zn*$(5, 2, 1, 3, 4) = (-1)^5$.

Tedy

- *pro* $(i,j) = (2,5)$, $\quad + a_{31}a_{1i}a_{54}a_{43}a_{2j}$
- *pro* $(i,j) = (5,2)$, $\quad - a_{31}a_{1i}a_{54}a_{43}a_{2j}$

Příklad 2.2. Uveďte všechny členy determinantu dané matice $A = (aij)$ řádu 4, které

1. obsahují prvky a_{12}, a_{34}.
2. obsahují prvek a_{23} a mají znaménko mínus. [6]

Řešení:

1. *Po doplnění znaménka, které bychom opět zjistili pomocí počtu inverzí v pořadí sloupcových indexů, dostaneme dva členy determinantu*

$$+ a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43}$$

$$- a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41}.$$

2. *Za zadání máme k dispozici prvek a_{23}. Zbylé sloupcové indexy může vhodně nakombinovat, avšak ve výběru možností nám vypadnou všechny prvky, který mají sloupcový index 3.*

1	2	3	4	
4	3	2	1	+
4	3	1	2	-
2	3	4	1	-
2	3	1	4	+
1	3	4	2	+
1	3	2	4	-

Z tabulky vybereme členy se záporným znaménkem

$$-a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$$

$$-a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41}$$

$$-a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$$

Příklad 2.3. Na základě definice determinantu najděte členy determinantu

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x & x \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}, \quad \text{které obsahují mocniny } x^2,\ x^3 \text{ a } x^4.$$

Řešení: *Příklad vyřešíme na základě přehledné tabulky, pomocí které nalezneme všechny členu determinantu. V tabulce uvedeme do záhlaví vzestupně řádkové indexy, ke kterým vhodně nakombinujeme sloupcové indexy. Znaménko členu determinantu zjistíme pomocí počtu inverzí v pořadí sloupcových indexů. Nalezené členy jsou vyznačeny v tabulce.*

1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4	
1	2	3	4	x^4	2	1	3	4	$-2x^2$	3	1	2	4	$3x$	4	1	2	3	$-6x$
1	2	4	3	$-2x^3$	2	1	4	3	$4x$	3	1	4	2	$-x$	4	1	3	2	x^2
1	3	2	4	$-3x^2$	2	3	1	4	$4x$	3	2	1	4	$-2x^2$	4	2	3	1	$-x^3$
1	3	4	2	x^2	2	3	4	1	$-2x$	3	2	4	1	x^2	4	2	1	3	$4x^2$
1	4	2	3	$18x$	2	4	1	3	-24	3	4	1	2	6	4	3	1	2	$-2x$
1	4	3	2	$-3x^2$	2	4	3	1	$6x$	3	4	2	1	-9	4	3	2	1	$3x$

2.1 Metody výpočtu determinantů

V tomto paragrafu si na několika příkladech ukážeme některé metody výpočtu determinantů. Při výpočtech determinantů si mnohdy nevystačíme s jedním nebo několika málo jednoduchými algoritmy, ale vyžadují zamyšlení, nápad a zkušenost. Při řešení příkladů je vhodné zvolit co nejefektivnější metodu výpočtu, která je při řešení konkrétního determinant nejvýhodnější. Příklady, které v dalším uvedeme, se proto budeme snažit počítat různými způsoby, abychom ukázali jednotlivé obraty a umožnili jejich srovnání. Během výpočtů využijeme zejména základní vlastnosti determinantů, Větu 1.9 a Větu 1.10 o rozvoji determinantu, dále Větu 1.12 o násobení determinantů a Větu 1.11 o determinantu horní (dolní) trojúhelníkové matice. Zaměříme se také na výpočet determinantů vyšších řádů s využitím metody rekurentních vztahů a matematické indukce.

Příklad 2.4. Vypočítejte determinant matice A druhého řádu, jestliže

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Řešení: *Determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále, od kterého odečteme součin prvků na vedlejší diagonále.*

$$\det A = a \cdot d - b \cdot c = ad - bc$$

Příklad 2.5. Vypočítejte.

$$a) \qquad \det A = \begin{vmatrix} 2+i\sqrt{3} & i \\ 2\sqrt{3}+3 & 2-i^2\sqrt{3} \end{vmatrix} - 2\sqrt{3}.$$

Řešení:

$$\det A = (2+i\sqrt{3})(2-i^2\sqrt{3})-(2\sqrt{3}+3)i-2\sqrt{3} = (2+i\sqrt{3})(2+\sqrt{3})-2i\sqrt{3}-3i-2\sqrt{3} =$$
$$= 4+2\sqrt{3}+2i\sqrt{3}+3i-2i\sqrt{3}-3i-2\sqrt{3} = 4$$

$$b) \qquad \det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & z \\ z & -1 \end{vmatrix}, \qquad z = \cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}.$$

Řešení:

$$\det A = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-(z^2) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-(\cos\frac{2}{3}\pi+i\,\sin\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

$$c) \qquad \det A = \begin{vmatrix} \log_5 25^4 & 4\log_{16} 2 \\ \log_2 \frac{1024}{256} & \log_2 8 \end{vmatrix}.$$

Řešení:

$$\log_5 25^4 = 4\log_5 25 = 4\cdot 2 = 8$$

$$4\log_{16} 2 = \log_{16} 2^4 = \log_{16} 16 = 1$$

$$\log_2 \frac{1024}{256} = \log_2 4 = 2$$

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

Tedy

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22$$

Příklad 2.6. Vypočítejte determinant matice A třetího řádu podle Sarrusova pravidla, jestliže

$$a) \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vpravo si opíšeme první a druhý sloupec. Následně určíme součiny prvků na hlavní diagonále a na rovnoběžkách s hlavní diagonálou od kterých odečteme součiny prvků na vedlejší diagonále a na rovnoběžkách s vedlejší diagonálou.

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc} 5 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 5 & 3 \\ 6 & 4 \\ -3 & 2 \end{array} =$$

$$= 5\cdot 4\cdot 4+3\cdot(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot 6\cdot 2-[(-2)\cdot 4\cdot(-3)+5\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot 6\cdot 4] = 65-86 = -21$$

$$b) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 \\ u^2 & 1 & u \\ u & u^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \sqrt{3} - i.$$

[5]

Řešení:

$$\det A = 1 + u^6 + u^3 - (u^3 + u^3 + u^3) = 1 + u^6 - 2u^3$$

Dosazením za prvek u dostaneme

$$u^2 = (\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 2i\sqrt{3} + i^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$u^3 = (\sqrt{3} - i)^3 = (2 - 2i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{3} - 2i - 6i - 2\sqrt{3} = -8i$$

$$u^6 = (\sqrt{3} - i)^6 = (\sqrt{3} - i)^3(\sqrt{3} - i)^3 = (-8i)(-8i) = -64$$

Tedy

$$\det A = 1 - 64 - 2 \cdot (-8i) = 16i - 63$$

Příklad 2.7. Řešte následující rovnici.

$$\begin{vmatrix} x^2 & -3 & -1 \\ 2x^2 & 2x & 2x \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Řešení:</u> K výpočtu determinantu použijeme Sarrusovo pravidlo

$$\begin{vmatrix} x^2 & -3 & -1 \\ 2x^2 & 2x & 2x \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 6x^3 - 12x^2 + 18x - (6x + 12x^3 - 18x^2) = 0$$

Dostaneme

$$-6x^3 + 6x^2 + 12x = 0$$

$$-6x \cdot (x^2 - x - 2) = 0$$

$$6x \cdot (x - 2)(x + 1) = 0$$

Tedy

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$$

Příklad 2.8. Vypočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} \sin x & 1 & \cos x \\ \sin y & 1 & \cos y \\ \sin z & 1 & \cos z \end{vmatrix}.$$

[5]

<u>Řešení:</u> Determinant vypočteme pomocí Sarrusova pravidla a použijeme známý goniometrický vzorec $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

$$\begin{vmatrix} \sin x & 1 & \cos x \\ \sin y & 1 & \cos y \\ \sin z & 1 & \cos z \end{vmatrix} = \sin x\cos z + \sin y\cos x + \sin z\cos y - \cos x\sin z - \cos y\sin x - \cos z\sin y =$$

$$= (\sin x\cos z - \cos x\sin z) + (\sin y\cos x - \cos y\sin x) + (\sin z\cos y - \cos z\sin y) =$$

$$= \sin(x - z) + \sin(y - x) + \sin(z - y)$$

Příklad 2.9. Bez použití Sarrusova pravidla ukažte, že platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan x & \tan y & \tan z \\ \tan^2 x & \tan^2 y & \tan^2 z \end{vmatrix} = \frac{\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)}{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z}$$

[4]

<u>*Řešení:*</u> *Nechť*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan x & \tan y & \tan z \\ \tan^2 x & \tan^2 y & \tan^2 z \end{vmatrix}$$

Nejprve odečteme třetí sloupec od prvního a druhého sloupce

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \tan x - \tan z & \tan y - \tan z & \tan z \\ \tan^2 x - \tan^2 z & \tan^2 y - \tan^2 z & \tan^2 z \end{vmatrix}$$

Dále z prvního sloupce vytkneme $(\tan x - \tan z)$ *a z druhé sloupce* $(\tan y - \tan z)$

$$\det A = (\tan x - \tan z)(\tan y - \tan z) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \tan z \\ \tan x + \tan z & \tan y + \tan z & \tan^2 z \end{vmatrix}$$

Determinant rozvedeme podle prvního řádku

$$\det A = (\tan x - \tan z)(\tan y - \tan z) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \tan x + \tan z & \tan y + \tan z \end{vmatrix}$$

Od prvního sloupce odečteme druhý sloupce

$$\det A = (\tan x - \tan z)(\tan y - \tan z) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \tan x - \tan y & \tan y + \tan z \end{vmatrix} =$$
$$= (\tan x - \tan z)(\tan y - \tan z)(\tan y - \tan x)$$

Výsledek upravíme s využitím goniometrických vzorců $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$$\det A = \left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin z}{\cos z}\right)\left(\frac{\sin y}{\cos y} - \frac{\sin z}{\cos z}\right)\left(\frac{\sin y}{\cos y} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) =$$
$$= \left(\frac{\sin x \cos z - \sin z \cos x}{\cos x \cos z}\right)\left(\frac{\sin y \cos z - \sin z \cos y}{\cos y \cos z}\right)\left(\frac{\sin y \cos x - \sin x \cos y}{\cos x \cos y}\right) =$$
$$= \frac{\sin(x-z)}{\cos x \cos z}\,\frac{\sin(y-z)}{\cos y \cos z}\,\frac{\sin(y-x)}{\cos x \cos y}$$

Pak

$$\det A = \frac{\sin(x-z)}{\cos x \cos z}\,\frac{\sin(y-z)}{\cos y \cos z}\,\frac{\sin(y-x)}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)}{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z}$$

Tedy rovnost platí.

Příklad 2.10. Vypočítejte determinant matice A s využitím Věty 1.3, Věty 1.5 a Věty 1.11, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejdříve vhodně prohodíme sloupce, následně přičteme dvojnásobek třetího řádku ke čtvrtému a ke třetímu řádku přičteme druhý řádek.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 4\cdot 7 = -56$$

Poznámka. Můžeme si všimnout, že pro výpočet by šla také využít Věta 1.10. Rozvojem podle třetího sloupce bychom okamžitě dostali determinant třetího řádu, který bychom upravili zcela analogicky a také využili Větu 1.11.

Příklad 2.11. Následující determinant vypočtěte na základě Věty 1.3, Věty 1.4 a Věty 1.5.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

[5]

Řešení: Přičteme první řádek k (-1)-násobku druhého řádku a druhý řádek k (-1)-násobku třetího řádku. Dále vynásobíme třetí sloupec číslem (-1), vytkneme $(a-b)$ z druhého řádku a $(b-c)$ z třetího řádku. Nakonec odečteme druhý řádek od třetího řádku, získáme horní trojúhelníkový tvar a budeme postupovat podle Věty 1.11.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & a-b & bc-ac \\ 0 & b-c & ac-ab \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & -bc \\ 0 & a-b & ac-bc \\ 0 & b-c & ab-ac \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(a-b)(b-c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & -bc \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (-1)\cdot(a-b)(b-c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & -bc \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & a-c \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-b)(c-a)$$

Příklad 2.12. Dokažte následující rovnost

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

[4]

<u>Řešení:</u> Z předchozího příkladu víme, že

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a).$$

Při výpočtu druhého determinantu budeme postupovat analogicky.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & a-b & (a-b)(a+b) \\ 0 & b-c & (b-c)(b+c) \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(b-c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & c-a \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a) = (b-a)(c-b)(c-a)$$

Tedy rovnost determinantů platí.

Příklad 2.13. Následující rovnost dokažte na základě Věty 1.3, Věty 1.4 a Věty 1.5.

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot (x-y)(y-z)(z-x)$$

[5]

<u>Řešení:</u> *Budeme postupovat podobně jako v předchozích příkladech. Nejprve z prvního sloupce vytkneme a, dále vyměníme sloupce determinantu. Přičteme první řádek k (-1)-násobku druhého řádku a druhý řádek k (-1)-násobku třetího řádku. Vytkneme $(x-y)$ z druhého řádku a $(y-z)$ z třetího řádku. Nakonec odečteme druhý řádek od třetího řádku, získáme horní trojúhelníkový tvar a budeme postupovat podle Věty 1.11.*

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & a^2+x^2 \\ 1 & y & a^2+y^2 \\ 1 & z & a^2+z^2 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & a^2+x^2 \\ 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a\cdot(x-y)(y-z)\cdot \begin{vmatrix} 1 & x & a^2+x^2 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & y+z \end{vmatrix} = a\cdot(x-y)(y-z)\cdot \begin{vmatrix} 1 & x & a^2+x^2 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & z-x \end{vmatrix} = a\cdot(x-y)(y-z)(z-x)$$

Příklad 2.14. Dokažte, že platí.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & -x & -x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x^2 & x \\ y^2 & y \end{vmatrix}$$

[5]

<u>Řešení:</u> (-1)*-násobek prvního řádku přičteme k ostatním řádkům, z druhého řádku vytkneme číslo* 2 *a determinant rozvedeme podle prvního sloupce.*

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & -x & -x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & -2x & -2x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} x & x^2 \\ y-x & y^2-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \cdot (xy^2 - x^3 + x^3 - x^2y) = 2 \cdot (x^2y - xy^2)$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} x^2 & x \\ y^2 & y \end{vmatrix} = 2 \cdot (x^2y - xy^2)$$

Tedy rovnost platí.

Příklad 2.15. Vypočítejte determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}.$$

[4]

<u>Řešení:</u> Nejprve součet druhého, třetího a čtvrtého sloupce přičteme k prvnímu sloupci

$$\det A = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x+a+b+c & a & b & c \\ -x+a+b+c & -x & c & b \\ -x+a+b+c & c & -x & a \\ -x+a+b+c & b & a & -x \end{vmatrix}$$

Vytkneme $(-x+a+b+c)$ a následně odečteme první řádek od ostatních řádků

$$\det A = (-x+a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & -x & c & b \\ 1 & c & -x & a \\ 1 & b & a & -x \end{vmatrix} = (-x+a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & a+x & b-c & c-b \\ 0 & a-c & b+x & c-a \\ 0 & a-b & b-a & c+x \end{vmatrix}$$

Determinant rozvedeme podle prvního sloupce a následně přičteme druhý sloupec ke třetímu sloupci

$$\det A = (-x+a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} a+x & b-c & c-b \\ a-c & b+x & c-a \\ a-b & b-a & c+x \end{vmatrix} = (-x+a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} a+x & b-c & 0 \\ a-c & b+x & x+b+c-a \\ a-b & b-a & x+b+c-a \end{vmatrix}$$

Nakonec třetí řádek odečteme od druhého řádku

$$\det A = (-x+a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} a+x & b-c & 0 \\ b-c & x+a & 0 \\ a-b & b-a & x+b+c-a \end{vmatrix}$$

Determinant rozvedeme podle posledního sloupce a vypočteme

$$\det A = (-x+a+b+c)(x+b+c-a)\cdot \begin{vmatrix} a+x & b-c \\ b-c & x+a \end{vmatrix} =$$

$$= (-x+a+b+c)(x+b+c-a)\cdot [(a+x)^2-(b-c)^2] =$$

$$= (-x+a+b+c)(x+b+c-a)(a+x+b-c)(a+x-b+c)$$

Příklad 2.16. Vypočítejte determinant matice A, jestliže

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> Budeme postupovat podle Věty 1.9.

- *Zvolíme-li např.* $i_1 = 1, i_2 = 2, j_1 = 1, j_2 = 2$, *tj. první a druhý řádek, první a druhý sloupec, dostaneme* $\binom{4}{2}$, *tedy* 6 *sčítanců.*

  $$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \textit{ tzn. minor } \det M = 1.$$

  Doplňkovou submaticí je pak

  $$\overline{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \textit{ tzn. doplněk } \det \overline{M} = -6.$$

  Dále $s_M = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$ *a dostáváme*

  $$(-1)^{s_M} \cdot \det M \cdot \det \overline{M} = (-1)^6 \cdot 1 \cdot (-6) = -6.$$

- $i_1 = 1, i_2 = 2, j_1 = 1, j_2 = 3$

  $$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \det M = -2 \qquad \overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \det \overline{M} = 0$$

  $$s_M = 1 + 2 + 1 + 3 = 7$$

  $$(-1)^{s_M} \cdot \det M \cdot \det \overline{M} = (-1)^7 \cdot (-2) \cdot 0 = 0$$

- $i_1 = 1, i_2 = 2, j_1 = 1, j_2 = 4$

  $$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \det M = -3 \qquad \overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \det \overline{M} = 7$$

  $$s_M = 1 + 2 + 1 + 4 = 8$$

  $$(-1)^{s_M} \cdot \det M \cdot \det \overline{M} = (-1)^8 \cdot (-3) \cdot 7 = -21$$

- $i_1 = 1, i_2 = 2, j_1 = 2, j_2 = 3$

  $$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \det M = -8 \qquad \overline{M} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \det \overline{M} = 30$$

  $$s_M = 1 + 2 + 2 + 3 = 8$$

  $$(-1)^{s_M} \cdot \det M \cdot \det \overline{M} = (-1)^8 \cdot (-8) \cdot 30 = -240$$

- $i_1 = 1, i_2 = 2, j_1 = 2, j_2 = 4$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \det M = -10 \qquad \overline{M} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \det \overline{M} = 3$$

$$s_M = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$$

$$(-1)^{s_M} \cdot \det M \cdot \det \overline{M} = (-1)^9 \cdot (-10) \cdot 3 = 30$$

- $i_1 = 1, i_2 = 2, j_1 = 3, j_2 = 4$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \det M = -4 \qquad \overline{M} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \det \overline{M} = 35$$

$$s_M = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$(-1)^{s_M} \cdot \det M \cdot \det \overline{M} = (-1)^{10} \cdot (-4) \cdot 35 = -140$$

Konečně tedy

$$\det A = (-6) + 0 + (-21) + (-240) + 30 + (-140) = -377$$

Příklad 2.17. Vypočítejte determinant matice A podle Věty 1.9, jestliže

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> Výpočet provedeme rozvinutím podle 1. *a* 5. *řádku, tj.* $i_1 = 1, i_2 = 5$. *Při praktickém výpočtu je zřejmě nejvýhodnější volit řádky, v nichž se vyskytuje hodně nul, resp. upravit řádky tak, aby se v nich vyskytovalo co nejvíce nul.*

$$\det A = (-1)^9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{10} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{11} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{12} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{11} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{12} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{13} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{13} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{14} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{15} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-33) + (-2) \cdot (-14) + 4 \cdot (-12) + (-1) \cdot (-1) \cdot (-16) + (-5) \cdot (-75) + (-1) \cdot (-1) \cdot (-26) =$$

$$= -198 + 28 - 48 - 16 + 375 - 26 = 115$$

Příklad 2.18. Vypočítejte determinant matice A podle Věty 1.10, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> K rozvoji si vybereme druhý sloupec, protože obsahuje největší počet nul. Touto volbou se výpočet determinantu značně zjednoduší.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ve vzniklém determinantu třetího řádu upravíme druhý řádek a pokračujeme opět podle Věty 1.10 rozvojem determinantu podle prvního sloupce.

$$\det A = -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -35$$

Příklad 2.19. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je $\det A \leqslant 0$, je-li

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 \end{vmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> Determinant rozvedeme podle posledního sloupce a vzniklé determinanty opět rozvedeme podle prvního, resp. druhého řádku.

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & x & x \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ x & x & x \end{vmatrix} =$$

$$= -x \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x \end{vmatrix} - x \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ x & x \end{vmatrix} = x \cdot (x - x) - x \cdot (x^2) = -x^3$$

Tedy $\det A \leqslant 0$, *právě když* $-x^3 \leqslant 0$, *tj.* $x \geqslant 0$.

Příklad 2.20. Spočtěte determinant

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> První řádek odečteme od ostatních řádků

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 & y^3-x^3 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 & z^3-x^3 \\ 0 & t-x & t^2-x^2 & t^3-x^3 \end{vmatrix}$$

Determinant rozvedeme podle prvního sloupce. Využijeme známý algebraický rozklad a vytkneme

$$V = \begin{vmatrix} y-x & (y-x)(y+x) & (y-x)(x^2+xy+y^2) \\ z-x & (z-x)(z+x) & (z-x)(x^2+xz+z^2) \\ t-x & (t-x)(t+x) & (t-x)(x^2+xt+t^2) \end{vmatrix}$$

$$V = (y-x)(z-x)(t-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & y+x & x^2+xy+y^2 \\ 1 & z+x & x^2+xz+z^2 \\ 1 & t+x & x^2+xt+t^2 \end{vmatrix}$$

První řádek opět odečteme od ostatních řádků

$$V = (y-x)(z-x)(t-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & y+x & x^2+xy+y^2 \\ 0 & z-y & z^2+xz-xy-y^2 \\ 0 & t-y & t^2+xt-xy-y^2 \end{vmatrix}$$

Determinant opět rozvedeme podle prvního sloupce, využijeme známý algebraický rozklad a vytkneme

$$V = (y-x)(z-x)(t-x) \cdot \begin{vmatrix} z-y & x(z-y)+(z-y)(z+y) \\ t-y & x(t-y)+(t-y)(t+y) \end{vmatrix}$$

$$V = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x+y+z \\ 1 & x+y+t \end{vmatrix}$$

$$V = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(x+y+t-x-y-z) =$$
$$= (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

Příklad 2.21. Vypočítejte determinant.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 & 0 \\ x & 1 & -x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Řešení: *Přičteme čtvrtý sloupec ke třetímu a šestému sloupci a determinant rozvedeme podle prvního řádku*

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 & 0 \\ x & 1 & -x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 & x & 1 & x \\ x & 1 & -x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & x & 1 & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 & 1 & x \\ x & 1 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

Dále budeme postupovat podobně jako v předchozím kroku. (-1)*-násobek druhého sloupce přičteme k prvnímu a poslednímu sloupci a determinant rozvedeme podle prvního řádku*

$$\det A = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & x-1 & 1 & x-1 \\ x-1 & 1 & -x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & x & 1 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x-1 & 1 & x-1 \\ x-1 & -x & 0 & -1 \\ -1 & x & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$(-x)$*-násobek třetího sloupce přičteme k prvnímu sloupci a* (-1)*-násobek třetího sloupce přičteme k poslednímu sloupci a determinant rozvedeme podle prvního řádku*

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x-1 & x-1 & 1 & x-2 \\ x-1 & -x & 0 & -1 \\ -x-1 & x & 1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x-1 & x-1 & x-2 \\ x-1 & -x & -1 \\ -x-1 & x & x-2 \end{vmatrix}$$

(-1)*-násobek prvního řádku přičteme k poslednímu řádku a k prvnímu řádku přičteme druhý řádek. Výsledný determinant rozvedeme podle posledního řádku*

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & -1 & x-3 \\ x-1 & -x & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & x-3 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} = -(2-x^2+4x-3) = x^2-4x+1$$

Příklad 2.22. Vypočítejte

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> Označme

$$J_1 = |2|, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad J_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad J_5 = J$$

Determinant J rozvedeme podle prvků posledního sloupce

$$J_5 = 1 \cdot (-1)^9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{10} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -J_3 + 2J_4$$

Podobně

$$J_4 = 2\,J_3 - J_2, \quad J_3 = 2\,J_2 - J_1$$

Dostaneme

$$J_1 = 2, \quad J_2 = 3, \quad J_3 = 2J_2 - J_1 = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \quad J_4 = 2J_3 - J_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5,$$

$$J_5 = J = 2J_4 - J_3 = 2 \cdot 5 - 4 = 6$$

[5]

Poznámka. Uvedený způsob je podstatou jedné z metod na výpočet determinantů, kterou nazýváme *metoda rekurentních vztahů*.

Příklad 2.23. Nechť $n \geqslant 2$. Užitím Věty 1.12 vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & \cdots & x_1 - y_n \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 & \cdots & x_2 - y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - y_1 & x_n - y_2 & \cdots & x_n - y_n \end{vmatrix}.$$

[6]

<u>*Řešení:*</u> *Daný determinant vyjádříme jako součin dvou vhodných determinantů.*

- $n = 2$

$$\begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & -1 \\ x_2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$$

- $n = 3$

$$\begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & x_1 - y_3 \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 & x_2 - y_3 \\ x_3 - y_1 & x_3 - y_2 & x_3 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ x_2 & 0 & -1 \\ x_3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vdots$$

- $n > 3:$

$$\begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & \cdots & x_1 - y_n \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 & \cdots & x_2 - y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - y_1 & x_n - y_2 & \cdots & x_n - y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ x_3 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} = 0$$

Příklad 2.24. Určete, pro která x je $\det A = 0$, je-li

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2 + a_3 - x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix}.$$

Řešení: Odečteme-li první řádek determinantu od ostatních řádků, dostaneme

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 - x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 - x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - x \end{vmatrix} = a_1 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - x).$$

- *Je-li* $a_1 = 0$, *potom je* $\det A = 0$.
- *Je-li* $a_1 \neq 0$, *potom je* $\det A = 0$ *pro* $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$.

[1]

Příklad 2.25. Vypočítejte

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \binom{n+2}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}.$$

[5]

Řešení:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \cdots & \binom{n-2}{1} & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{2} \\ 1 & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} & \cdots & \binom{n}{3} & \binom{n+1}{3} & \binom{n+2}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-2}{n-3} & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n}{n-3} & \cdots & \binom{2n-6}{n-3} & \binom{2n-5}{n-3} & \binom{2n-4}{n-3} \\ 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} & \binom{n+1}{n-2} & \cdots & \binom{2n-5}{n-2} & \binom{2n-4}{n-2} & \binom{2n-3}{n-2} \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \binom{n+2}{n-1} & \cdots & \binom{2n-4}{n-1} & \binom{2n-3}{n-1} & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

Od každého sloupce odečteme předcházející sloupec. Využijeme známého vztahu $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *a dostaneme*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \cdots & \binom{n-2}{1} & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ 1 & 3 & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-3 & \binom{n-2}{n-4} & \binom{n-1}{n-4} & \cdots & \binom{2n-7}{n-4} & \binom{2n-6}{n-4} & \binom{2n-5}{n-4} \\ 1 & n-2 & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n}{n-3} & \cdots & \binom{2n-6}{n-3} & \binom{2n-5}{n-3} & \binom{2n-4}{n-3} \\ 1 & n-1 & \binom{n}{n-2} & \binom{n+1}{n-2} & \cdots & \binom{2n-5}{n-2} & \binom{2n-4}{n-2} & \binom{2n-3}{n-2} \end{vmatrix}$$

Determinant rozvedeme podle prvního řádku

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \binom{5}{1} & \cdots & \binom{n-2}{1} & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ 3 & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \binom{6}{2} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{2} \\ 4 & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} & \binom{7}{3} & \cdots & \binom{n}{3} & \binom{n+1}{3} & \binom{n+2}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-3 & \binom{n-2}{n-4} & \binom{n-1}{n-4} & \binom{n}{n-4} & \cdots & \binom{2n-7}{n-4} & \binom{2n-6}{n-4} & \binom{2n-5}{n-4} \\ n-2 & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n}{n-3} & \binom{n+1}{n-3} & \cdots & \binom{2n-6}{n-3} & \binom{2n-5}{n-3} & \binom{2n-4}{n-3} \\ n-1 & \binom{n}{n-2} & \binom{n+1}{n-2} & \binom{n+2}{n-2} & \cdots & \binom{2n-5}{n-2} & \binom{2n-4}{n-2} & \binom{2n-3}{n-2} \end{vmatrix}$$

Od každého řádku odečteme předcházející řádek

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \cdots & \binom{n-3}{1} & \binom{n-2}{1} & \binom{n-1}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \cdots & \binom{n-2}{2} & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} \\ 1 & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} & \cdots & \binom{n-1}{3} & \binom{n}{3} & \binom{n+1}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-3}{n-4} & \binom{n-2}{n-4} & \binom{n-1}{n-4} & \cdots & \binom{2n-8}{n-4} & \binom{2n-7}{n-4} & \binom{2n-6}{n-4} \\ 1 & \binom{n-2}{n-3} & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n}{n-3} & \cdots & \binom{2n-7}{n-3} & \binom{2n-6}{n-3} & \binom{2n-5}{n-3} \\ 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} & \binom{n+1}{n-2} & \cdots & \binom{2n-6}{n-2} & \binom{2n-5}{n-2} & \binom{2n-4}{n-2} \end{vmatrix} = D_{n-1}$$

V dalším budeme postupovat analogicky jako ve výše uvedených krocích, tedy nejprve od každého sloupce odečteme přecházející sloupec

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \cdots & \binom{n-3}{1} & \binom{n-2}{1} & \binom{n-1}{1} \\ 1 & 3 & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \cdots & \binom{n-2}{2} & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-4 & \binom{n-3}{n-5} & \binom{n-2}{n-5} & \cdots & \binom{2n-9}{n-5} & \binom{2n-8}{n-5} & \binom{2n-7}{n-5} \\ 1 & n-3 & \binom{n-2}{n-4} & \binom{n-1}{n-4} & \cdots & \binom{2n-8}{n-4} & \binom{2n-7}{n-4} & \binom{2n-6}{n-4} \\ 1 & n-2 & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n}{n-3} & \cdots & \binom{2n-7}{n-3} & \binom{2n-6}{n-3} & \binom{2n-5}{n-3} \end{vmatrix}$$

Determinant opět rozvedeme podle prvního řádku

$$D_{n-2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \binom{5}{1} & \cdots & \binom{n-3}{1} & \binom{n-2}{1} & \binom{n-1}{1} \\ 3 & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \binom{6}{2} & \cdots & \binom{n-2}{2} & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} \\ 4 & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} & \binom{7}{3} & \cdots & \binom{n-1}{3} & \binom{n}{3} & \binom{n+1}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-4 & \binom{n-3}{n-5} & \binom{n-2}{n-5} & \binom{n-1}{n-5} & \cdots & \binom{2n-9}{n-5} & \binom{2n-8}{n-5} & \binom{2n-7}{n-5} \\ n-3 & \binom{n-2}{n-4} & \binom{n-1}{n-4} & \binom{n}{n-4} & \cdots & \binom{2n-8}{n-4} & \binom{2n-7}{n-4} & \binom{2n-6}{n-4} \\ n-2 & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n}{n-3} & \binom{n+1}{n-3} & \cdots & \binom{2n-7}{n-3} & \binom{2n-6}{n-3} & \binom{2n-5}{n-3} \end{vmatrix}$$

Od každého řádku odečteme předcházející řádek

$$D_{n-2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \cdots & \binom{n-4}{1} & \binom{n-3}{1} & \binom{n-2}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \cdots & \binom{n-3}{2} & \binom{n-2}{2} & \binom{n-1}{2} \\ 1 & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} & \cdots & \binom{n-2}{3} & \binom{n-1}{3} & \binom{n}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-4}{n-5} & \binom{n-3}{n-5} & \binom{n-2}{n-5} & \cdots & \binom{2n-10}{n-5} & \binom{2n-9}{n-5} & \binom{2n-8}{n-5} \\ 1 & \binom{n-3}{n-4} & \binom{n-2}{n-4} & \binom{n-1}{n-4} & \cdots & \binom{2n-9}{n-4} & \binom{2n-8}{n-4} & \binom{2n-7}{n-4} \\ 1 & \binom{n-2}{n-3} & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n}{n-3} & \cdots & \binom{2n-8}{n-3} & \binom{2n-7}{n-3} & \binom{2n-6}{n-3} \end{vmatrix}, \quad atd.$$

Tedy

$$D_{n-2} = D_{n-3} = \ldots = D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Příklad 2.26. Spočtěte determinanty dané matice A řádu $n \geqslant 2$.

$$a) \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ a_1 & a_2 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

[6]

<u>Řešení:</u> Poslední řádek odečteme od ostatních řádků

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ a_1 & a_2 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a_2 & 2-a_3 & \cdots & n-2-a_{n-1} & n-1-a_n \\ 0 & 0 & 1-a_3 & \cdots & n-3-a_{n-1} & n-2-a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4-a_{n-1} & n-3-a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Determinant rozvedeme podle prvního sloupce

$$\det A = a_1 \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 1-a_2 & 2-a_3 & \cdots & n-2-a_{n-1} & n-1-a_n \\ 0 & 1-a_3 & \cdots & n-3-a_{n-1} & n-2-a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & 2-a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

Užitím Věty 1.11 dostaneme

$$\det A = a_1 \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1-a_2)(1-a_3)\cdots(1-a_n) = a_1 \cdot (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (a_2-1)(a_3-1)\cdots(a_n-1) =$$

$$= a_1 \cdot (-1)^{2n} \cdot (a_2-1)(a_3-1)\cdots(a_n-1) = a_1 \cdot \prod_{i=2}^{n}(a_i-1)$$

$$b) \qquad A = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[6]

<u>Řešení:</u> Všechny sloupce přičteme k prvnímu sloupci

$$\det A = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinant rozvedeme podle prvního sloupce a použijeme Větu 1.11

$$\det A = n \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} = n \cdot (-1)^{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} a_i$$

$$c) \qquad A = \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{pmatrix}.$$

[6]

Řešení: Všechny sloupce přičteme k prvnímu sloupci

$$\det A = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_{n-1} \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

Vytkneme prvky prvního sloupce

$$\det A = \left(x+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_{n-1} \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

První řádek odečteme od ostatních řádků

$$\det A = \left(x+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_{n-2} & 0 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & a_{n-1}-a_{n-2} & x-a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Determinant rozvedeme podle prvního sloupce a použijeme Větu 1.11

$$\det A = \left(x+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot \begin{vmatrix} x-a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_{n-2} & 0 \\ a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & a_{n-1}-a_{n-2} & x-a_{n-1} \end{vmatrix} = \left(x+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot \prod_{i=1}^{n-1}(x-a_i)$$

$$d) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}.$$

[6]

<u>*Řešení:*</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-1 & n & 1 & \cdots & n-5 & n-4 & n-3 \\ n-1 & n & 1 & 2 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

Od každého řádku odečteme předchozí řádek

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

K prvnímu sloupci přičteme všechny ostatní sloupce

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinant rozvedeme podle prvního sloupce

$$\det A = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dále přičteme všechny sloupce k poslednímu sloupci

$$\det A = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Odečteme první řádek od všech ostatních řádků

$$\det A = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinant dále rozvádíme postupně vždy podle posledního sloupce

$$\begin{aligned}\det A &= \frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)(-1)^{n}(-1)^{n-1}(-n)(-1)^{n-2}(-n)\cdots(-1)^{3}(-n)(-n) = \\ &= \frac{n+1}{2}\cdot n^{n-1}(-1)^{1+(n+n-1+\ldots+3)+n-2} = \frac{n+1}{2}\cdot n^{n-1}(-1)^{n+1+n+\ldots+3} = \\ &= \frac{n+1}{2}\cdot n^{n-1}(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n^{n-1}\end{aligned}$$

Příklad 2.27. Vypočítejte determinant n-tého řádu.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix}, \quad x \neq a_i,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Řešení:

Determinant vypočítáme dvěma způsoby.

(1) *Od každého řádku odečteme první řádek*

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}-x & 0 \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Nyní z každého sloupce vytkneme $a_i - x,\ i = 1, 2, ..., n$ *a přičteme všechny sloupce k prvnímu sloupci*

$$D_n = (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\cdot\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_{n-1}-x} & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\cdot \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_{n-1}-x} & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\cdot\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i-x}\Big) = \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\cdot\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i-x}\Big)$$

(2) *Provedením několika kroků determinant odhadneme a výsledek dokážeme matematickou indukcí.*

(a) *Determinant D_n rozložíme na součet dvou determinantů (podle Věty 1.2) tak, že poslední sloupec uvažujeme jako součet dvou sloupců.*

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & 0 \\ x & a_2 & x & \cdots & x & 0 \\ x & x & a_3 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & x & \cdots & x & a_n-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}.$$

První determinant rozvedeme podle posledního sloupce a ve druhém odečteme poslední sloupec od všech ostatních a rozvedeme podle posledního řádku

$$D_n = (a_n-x)\cdot D_{n-1}\cdot(-1)^{2n} + \begin{vmatrix} a_1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}-x & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (a_n - x)\cdot D_{n-1} + x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x) =$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)x + (a_n-x)\cdot[(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)x + (a_{n-1}-x)\cdot D_{n-2}] = \cdots =$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)x + (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_n-x)x +$$

$$+ (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-3}-x)(a_{n-1}-x)(a_n-x)x + \cdots + (a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_n-x)x +$$

$$+ (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x) = \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\cdot\Big[\frac{x}{a_n-x}+\frac{x}{a_{n-1}-x}+\cdots+\frac{x}{a_1-x}+1\Big] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\cdot\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i-x}\Big).$$

(b) Provedeme důkaz matematickou indukcí.

- *Dokážeme, že námi nalezený výsledek platí pro $n = 2$.*

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & x \\ x & a_2 \end{vmatrix} = a_1\cdot a_2 - x^2.$$

$$D_2 = (a_1-x)(a_2-x)\cdot\Big[\frac{x}{a_2-x}+\frac{x}{a_1-x}+1\Big] = (a_1-x)x + (a_2-x)x + (a_1-x)(a_2-x) =$$

$$= a_1x - x^2 + a_2x + a_1a_2 - a_2x - a_1x + x^2 = a_1a_2 - x^2.$$

Tedy tvrzení pro $n = 2$ platí.

- *Předpokládejme, že výpočet D_n je správný pro všechna přirozená čísla menší než n (a větší nebo rovna 2) a dokážeme, že je správný pro n.*

$$D_n = (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)x + (a_n-x)\cdot D_{n-1} \overset{IP}{=}$$

$$\overset{IP}{=} (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)\cdot\frac{x}{a_n-x}\cdot(a_n-x) +$$

$$+ (a_n-x)\cdot\Big[\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-x)\cdot\Big(\frac{x}{a_{n-1}-x}+\frac{x}{a_{n-2}-x}+\cdots+\frac{x}{a_1-x}+1\Big)\Big] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\cdot\frac{x}{a_n-x} + \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\cdot\Big(\frac{x}{a_{n-1}-x}+\frac{x}{a_{n-2}-x}+\cdots+\frac{x}{a_1-x}+1\Big) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\cdot\Big(\frac{x}{a_n-x}+\frac{x}{a_{n-1}-x}+\cdots+\frac{x}{a_1-x}+1\Big) = \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\cdot\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i-x}\Big)$$

[8]

Příklad 2.28. Vypočtěte determinant řádu $n+1$.

$$P(a_0,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Řešení: Uvedeme několik možností výpočtu tohoto determinantu.

a) Užijeme následující elementární úpravy: $x-$násobek posledního sloupce přičteme k předposlednímu. Dále $x-$násobek nově vzniklého předposledního sloupce přičteme k $(n-1)-$nímu,..., $x-$násobek druhého sloupce přičteme k prvnímu sloupci.

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}+a_nx & a_n \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2}+a_{n-1}x+a_nx^2 & a_{n-1}+a_nx & a_n \end{vmatrix}=\cdots=$$

$$
= \begin{vmatrix}
0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\
\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} + a_{n-1}x + a_n x^2 & a_{n-1} + a_n x & a_n
\end{vmatrix} =
$$

Získaný determinant rozvedeme podle prvního sloupce

$$
= (-1)^{n+2} \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot (-1)^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i
$$

b) Rozvedeme determinant podle posledního sloupce a užijeme indukci.

$$
P(a_0, \cdots, a_n) = (-1)^{2n+2} \cdot a_n \cdot x^n + (-1)^{2n+1} \cdot (-1) \cdot P(a_0, \cdots, a_{n-1}) =
$$
$$
= a_n x^n + P(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i
$$

c) Rozvedeme determinant podle prvního sloupce a užijeme indukci.

$$
P(a_0, \cdots, a_n) = (-1)^2 \cdot x \cdot P(a_1, \cdots, a_n) + (-1)^{n+2} \cdot a_0 \cdot (-1)^n =
$$
$$
= a_0 + x \cdot P(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i
$$

d) Rozvedeme-li determinant podle prvního řádku, dostaneme totéž jako v předchozím výpočtu.

$$
P(a_0, \cdots, a_n) = (-1)^2 \cdot x \cdot P(a_1, \cdots, a_n) + (-1)^{n+2} \cdot a_0 \cdot (-1)^n =
$$
$$
= a_0 + x \cdot P(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i
$$

e) Rozvedeme determinant podle posledního řádku.

$$
P(a_0, \cdots, a_n) = (-1)^{n+2} \cdot a_0 \cdot (-1)^n + \cdots +
$$
$$
+ (-1)^{n+1+i+1} \cdot a_i \cdot x^i \cdot (-1)^{n-i} + \cdots + (-1)^{2n+2} \cdot a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i
$$

[1]

2.2 Využití determinantů

V této podkapitole si ukážeme některá využití determinantů, zejména při určování inverzní matice, řešení soustavy lineárních rovnic, hledání charakteristického polynomu a vlastních čísel. Neopomeneme ani geometrický význam determinantů při výpočtu vektorového a smíšeného součinu, objemu a obsahu geometrických těles a obecné rovnice roviny.

Příklad 2.29. Pomocí determinantu najděte inverzní matici A^{-1} k matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> Budeme postupovat podle Věty 1.13. Nejprve spočítáme determinant matice A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot 2 = -16$$

Dále vypočteme algebraické doplňky D_{ij} v matici A^*.

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -20, \qquad D_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16, \qquad D_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 18,$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -8, \qquad D_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -12,$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 8, \qquad D_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -20 & 8 & 18 \\ 16 & -8 & -12 \\ -8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Podle Věty 1.13 máme

$$A^{-1} = \frac{1}{-16} \cdot \begin{pmatrix} -20 & 8 & 18 \\ 16 & -8 & -12 \\ -8 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{8} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.30. Řešte Cramerovým pravidlem soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2\,x_2 - x_3 &= 3 \\ 2\,x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$$

<u>*Řešení:*</u> *Maticí soustavy je matice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočteme její determinant za použití Sarrusova pravidla

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

Dále určíme determinant matice A_1, která vznikne záměnou prvního sloupce za sloupec pravých stran a analogicky určíme determinanty matic A_2 a A_3

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 36, \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 60.$$

Podle Věty 1.14 dostáváme

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{24}{12} = 2, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{36}{12} = 3, \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{60}{12} = 5.$$

Tedy $(2, 3, 5)$ je řešení dané soustavy.

Příklad 2.31. Určete charakteristický polynom matice A nad tělesem R, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> Nejprve sestavíme charakteristickou matici $(\lambda E - A)$ matice A.

$$(\lambda E - A) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 5 \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom matice je determinant její charakteristické matice.

$$p(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7$$

Příklad 2.32. Určete vlastní čísla matice A, jestliže

$$a) \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Řešení:</u> Nejprve nalezneme charakteristický polynom a pak určíme jeho kořeny, což jsou vlastní čísla, resp. charakteristická čísla matice A.

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

Tedy

$$p(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ 5 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

Řešením této rovnice získáme vlastní čísla.

$$(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 5$$

$$b) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Řešení:</u> Budeme postupovat analogicky jako v předchozím příkladě.

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

K výpočtu použijeme Větu 1.10.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\cdot(\lambda^2-\lambda-4)+2\lambda-6+8-4\lambda = \lambda^3-2\lambda^2-3\lambda+4-2\lambda+2 = \lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6 = 0$$

Řešením této rovnice získáme vlastní čísla.

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 3$$

$$c) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & \lambda & -1 \\ -2 & 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

Odečteme třetí řádek od čtvrtého řádku a přičteme čtvrtý sloupec ke třetímu sloupci

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

K dalšímu výpočtu využijeme Větu 1.9. Položíme $i_1 = 2, i_2 = 4$, máme

$$|\lambda E - A| = (-1)^{6+6}\cdot\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} + (-1)^{6+7}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)^2\cdot[(\lambda-1)^2-2]-(2-2\lambda)(\lambda-1) = (\lambda-1)^4-2\cdot(\lambda-1)^2+2\cdot(\lambda-1)^2 = (\lambda-1)^4$$

Získáváme tedy

$$\lambda_{1,2,3,4} = 1$$

Příklad 2.33. Vypočítejte vektorový součin dvou vektorů $\vec{u} = (2, -1, 1)$ a $\vec{v} = (-2, 3, 1)$.

Řešení: *V dané pravotočivé (kladné) ortonormální bázi ve vektorovém prostoru V_3 dimenze 3 pro souřadnice vektorové součinu $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ platí $w_1 = u_2v_3 - u_3v_2, w_2 = -(u_1v_3 - u_3v_1), w_3 = u_1v_2 - u_2v_1$.*
Tedy

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (w_1, w_2, w_3) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

K vyjádření vektorového součinu můžeme využít zápis pomocí determinantu.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory rovnoběžné se souřadnicovými osami, tedy $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$.
Determinant můžeme rozvést podle prvního řádku na základě Věty 1.10.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} + (-1) \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= [u_2v_3 - u_3v_2]\vec{i} + [-(u_1v_3 - u_3v_1)]\vec{j} + [u_1v_2 - u_2v_1]\vec{k}.$$

Přitom však také můžeme psát

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}.$$

Dosazením dostáváme

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-\vec{i}) + 6\vec{k} + (-2\vec{j}) - (2\vec{k} + 3\vec{i} + 2\vec{j}) =$$

$$= -4\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} = -4(1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1) = (-4, -4, 4)$$

Tedy

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = (-4, -4, 4).$$

Poznámka. Pro jednotkové vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ v pravotočivém souřadnicovém systému platí

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{o}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{o}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Příklad 2.34. Vypočítejte smíšený součin tří vektorů, jestliže $\vec{u} = (2, 3, 1), \vec{v} = (1, 3, 5)$, $\vec{w} = (-1, 0, 2)$.

<u>*Řešení:*</u> *Nechť je dána kladná ortonormální báze ve vektorovém prostoru V_3 dimenze* 3. *Smíšeným součinem tří vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ nazýváme číslo $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.*

Uvažujme libovolný vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, pak pro skalární součin $\vec{w} \cdot \vec{x}$ platí vztah

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3.$$

Protože platí

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

můžeme psát

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{x} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Tedy pro smíšený součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ platí s využitím Věty 1.3

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Vidíme, že pro smíšený součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ platí v ortonormální kladné bázi výše uvedený vzorec.

Do tohoto vzorce dosadíme vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ a dostáváme

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 + (-15) - ((-3) + 6) = -6$$

Tedy

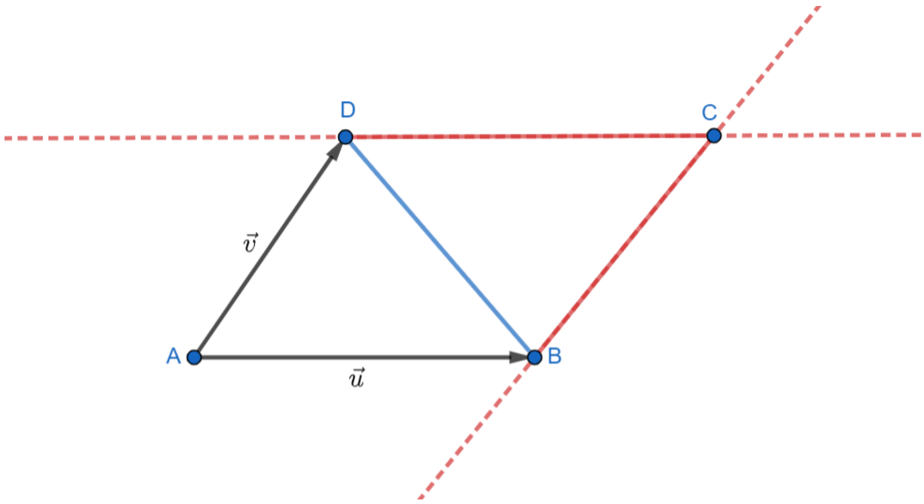
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -6.$$

Poznámka. Absolutní hodnota smíšeného součinu udává objem *rovnoběžnostěnu*.

Příklad 2.35. Vrcholy trojúhelníku jsou dány body $A = (1, 3, 2)$, $B = (3, 5, 4)$, $C = (4, 5, 1)$. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC.

Řešení: *Mějme dán v prostoru rovnoběžník $ABCD$ a vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, které jsou tvořeny stranami AB, AC, pak je obsah rovnoběžníku roven $S = |\vec{u} \times \vec{v}|$. Máme-li dán v prostoru trojúhelník s vrcholy $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$, potom je jeho obsah rovný $S = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$.*
Tedy

$$S = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \left|\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)\right|.$$



Pro vektory $\vec{u}, \vec{v}$ platí

$$\vec{u} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\vec{v} = C - A = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

Dostáváme

$$S = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & x_2 - x_1 & 0 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2}.$$

Vidíme, že pro obsah trojúhelníku platí výše uvedený vzorec. Dosazením do vzorce dostáváme

$$S\triangle = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 8^2 + (-6)^2} =$$

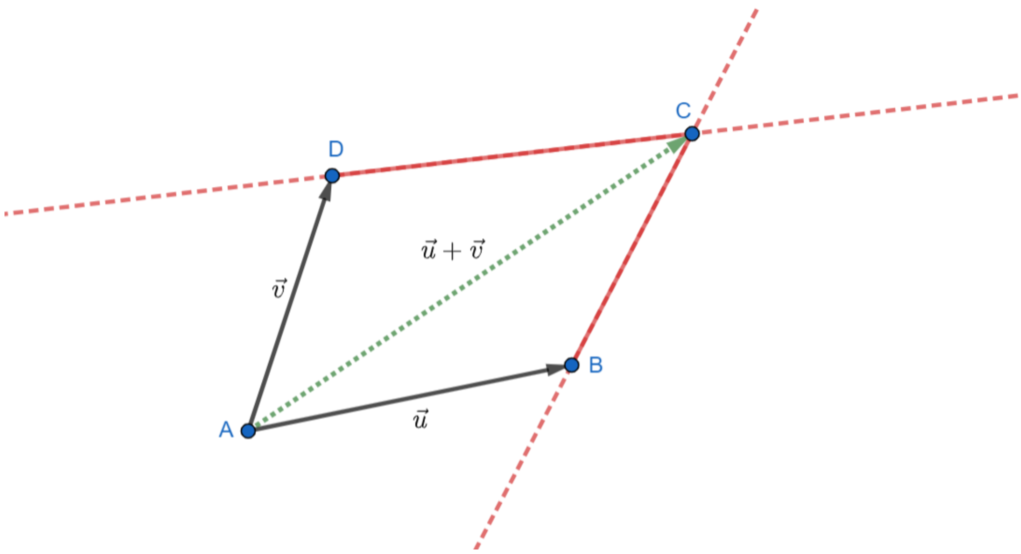
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{104} = \frac{2\sqrt{26}}{2} = \sqrt{26}$$

Příklad 2.36. Najděte obecnou rovnici roviny, která je dána body $A[-1, 2, -5]$, $B[2, -1, 2]$, $C[2, 0, 0]$.

<u>*Řešení:*</u> *Pokud máme tři různé body $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$, můžeme sestrojit dva různé vektory $\vec{u} = (B - A)$ a $\vec{v} = (C - A)$. Pomocí libovolného zadaného bodu a dvou vektorů můžeme definovat rovinu parametricky.*

$$X = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v},$$

kde A je libovolný bod roviny a $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou směrové vektory roviny.



$$X = A + t \cdot (B - A) + s \cdot (C - A), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Tuto rovnici můžeme rozepsat do soustavy rovnic.

$$X = a_1 + t \cdot (x_2 - x_1) + s \cdot (x_3 - x_1)$$

$$Y = a_2 + t \cdot (y_2 - y_1) + s \cdot (y_3 - y_1)$$

$$Z = a_3 + t \cdot (z_2 - z_1) + s \cdot (z_3 - z_1)$$

Vyloučením parametrů s a t dostaneme

$$[(X - A) \times (B - A)] \cdot (C - A) = 0$$

Tato rovnice má tvar

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vidíme, že pro zjištění obecné rovnice roviny můžeme využít výše uvedený vzorec. Dosazením do vzorce dostáváme

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-7y - 3z - 1) + (-x - 8y - 3z) = 0$$

Hledanou rovnicí roviny je rovnice

$$-x + 6y + 3z + 2 = 0$$

2.3 Speciální determinanty

V následujících odstavcích se budeme zabývat speciálními determinanty se kterými se setkáváme zejména v matematické analýze. Jedná se převážně o determinanty, jejichž prvky jsou funkce.

Vandermondův determinant

Vandermondovým determinantem prvků $a_1, \cdots, a_n$ rozumíme determinant

$$V(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> Při jeho výpočtu nejprve odečteme poslední sloupec od všech ostatních a pak rozvojem determinantu podle prvního řádku snížíme řád determinantu

$$V(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 - a_n & \cdots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ a_1^2 - a_n^2 & \cdots & a_{n-1}^2 - a_n^2 & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} - a_n^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - a_n^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} a_1 - a_n & \cdots & a_{n-1} - a_n \\ a_1^2 - a_n^2 & \cdots & a_{n-1}^2 - a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} - a_n^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ze sloupců vytkneme rozdíly $a_1 - a_n, \cdots, a_{n-1} - a_n$

$$V(a_1, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 + a_n & \cdots & a_{n-1} + a_n \\ a_1^2 + a_1 a_n + a_n^2 & \cdots & a_{n-1}^2 + a_{n-1} a_n + a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} + \cdots + a_n^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} + \cdots + a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Nyní odečteme a_n-násobek prvního řádku od druhého řádku, a_n^2-násobek prvního řádku od třetího řádku, $\cdots$, a_n^{n-2}-násobek prvního řádku od posledního řádku. Potom odečteme a_n-násobek *druhého řádku od třetího řádku, $\cdots$, nakonec odečteme a_n-násobek předposledního řádku od posledního řádku; dostaneme Vandermondův determinant $V(a_1, \cdots, a_{n-1})$. Pomocí matematické indukce dostáváme*

$$V(a_1, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) \cdot V(a_1, \cdots, a_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) \cdot \prod_{i=1}^{n-2}(a_{n-1} - a_i) \cdots (a_2 - a_1) =$$

$$= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} (a_j - a_i)$$

[1]

Poznámka. Příklad 2.20 je vlastně Vandermondův determinant.

Wronského determinant

Nechť $f_1, \cdots, f_n$ jsou reálné funkce, které mají na intervalu (a, b) vlastní derivace až do řádu $n - 1$. Označme $f_i^{(j)}$ j-tou derivaci funkce f_i na intervalu (a, b). **Wronského determinantem** funkcí $f_1, \cdots, f_n$ budeme rozumět determinant

$$W(f_1, \cdots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1^{(1)}(x) & f_2^{(1)}(x) & \cdots & f_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Věta 2.1. *Nechť $f_1, \cdots, f_n$ jsou reálné funkce, které mají na intervalu (a, b) vlastní derivace až do řádu $n - 1$. Jsou-li funkce $f_1, \cdots, f_n$ lineárně závislé jako vektory prostoru všech funkcí na intervalu (a, b), potom pro každé $x \in (a, b)$ je $W(f_1, \cdots, f_n)(x) = 0$.*

Příklad 2.37. Ověřte na základě Věty 2.1, zda jsou funkce $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$, $f_3(x) = e^{3x}$, $f_4(x) = e^{4x}$ lineárně závislé, resp. lineárně nezávislé.

Řešení: Vypočteme potřebné parciální derivace funkcí $f_1, ..., f_4$ a výsledky dosadíme do Wronského determinantu. Vzniklý determinant upravíme na horní trojúhelníkovou matici a nakonec využijeme Větu 1.11.

$$W(f_1, \cdots, f_4)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} & e^{4x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} & 4e^{4x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} & 16e^{4x} \\ e^x & 8e^{2x} & 27e^{3x} & 64e^{4x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} & e^{4x} \\ 0 & e^{2x} & 2e^{3x} & 3e^{4x} \\ 0 & 3e^{2x} & 8e^{3x} & 15e^{4x} \\ 0 & 7e^{2x} & 26e^{3x} & 63e^{4x} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} & e^{4x} \\ 0 & e^{2x} & 2e^{3x} & 3e^{4x} \\ 0 & 0 & 2e^{3x} & 6e^{4x} \\ 0 & 0 & 12e^{3x} & 42e^{4x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} & e^{4x} \\ 0 & e^{2x} & 2e^{3x} & 3e^{4x} \\ 0 & 0 & 2e^{3x} & 6e^{4x} \\ 0 & 0 & 0 & 6e^{4x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{2x} \cdot 2e^{3x} \cdot 6e^{4x} = 12e^{10x}$$

$W(f_1, \cdots, f_4)(x) \neq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, funkce $f_1(x), \cdots, f_4(x)$ jsou tedy lineárně nezávislé.

Jacobiho determinant

Nechť $f_1, \cdots, f_n$ jsou reálné funkce n reálných proměnných $x_1, \cdots, x_n$, které mají parciální derivace na intervalu I. **Jacobiho determinantem** těchto funkcí budeme rozumět determinant

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Příklad 2.38. Najděte Jacobiho determinant pro funkce $f_1(x, y, z) = 4x^2 + 3\sin y + z^3$, $f_2(x, y, z) = -\cos x + e^{2y} + 2\ln z$, $f_3(x, y, z) = \cot y + e^z$.

Řešení: Vypočteme potřebné parciální derivace funkcí f_1, f_2, f_3 a výsledky dosadíme do Jacobiho determinantu.

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8x & 3\cos y & 3z^2 \\ \sin x & 2e^{2y} & \frac{2}{z} \\ 0 & -\frac{1}{\sin^2 y} & e^z \end{vmatrix} =$$

$$= 8x \cdot 2e^{2y} \cdot e^z + \sin x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 y}\right) \cdot 3z^2 - \left[\frac{2}{z} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 y}\right) \cdot 8x + e^z \cdot 3\cos y \cdot \sin x\right] =$$

$$= 16x \cdot e^{2y+z} - 3\sin x \cdot \left(\frac{z^2}{\sin^2 y}\right) + 16x \cdot \left(\frac{1}{z \cdot \sin^2 y}\right) - 3\sin x \cdot e^z \cdot \cos y =$$

$$= 16x \cdot \left(e^{2y+z} + \frac{1}{z \cdot \sin^2 y}\right) - 3\sin x \cdot \left(\frac{z^2}{\sin^2 y} + e^z \cdot \cos y\right)$$

Hessův determinant

Nechť f je reálná funkce n reálných proměnných $x_1, \cdots .x_n$, která má na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}^n$ parciální derivace druhého řádu. **Hessovým determinantem** funkce f budeme rozumět determinant

$$H(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Příklad 2.39. Vypočtěte Hessův determinant funkce
$f(x, y, z) = \tan x - 2xy^2 + xz + \sin y + 2z^2.$

Řešení: *Vypočteme potřebné parciální derivace funkce* $f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 2y^2 + z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - 4xy, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x + 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin y - 4x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

Výsledné parciální derivace správně dosadíme do Hessova determinantu. Násobek prvního řádku přičteme k poslednímu řádku a determinant rozvedeme podle posledního sloupce

$$H(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} & -4y & 1 \\ -4y & -\sin y - 4x & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} & -4y & 1 \\ -4y & -\sin y - 4x & 0 \\ -\frac{8 \sin x}{\cos^3 x} & 16y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4y & -\sin y - 4x \\ -\frac{8 \sin x}{\cos^3 x} & 16y \end{vmatrix} = -64y^2 - \left[\left(-\frac{8 \sin x}{\cos^3 x}\right)(-\sin y - 4x)\right] =$$

$$= -64y^2 - \frac{8 \sin x \sin y + 32x \sin x}{\cos^3 x} = -64y^2 - \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin x \cdot (8 \sin y + 32x)}{\cos x} =$$

$$= -64y^2 - \sec^2 x \cdot \tan x \cdot (8 \sin y + 32x)$$

2.4 Neřešené příklady s výsledky

Sbírka obsahuje také neřešené příklady, které vychází z již vyřešených příkladů v této kapitole. V řešení je vždy uveden stručný postup výpočtu se správným výsledkem.

Příklad 2.40. Určete v závislosti na i, j, resp. k znaménko daného členu determinantu matice $A = (aij)$ řádu n, je-li:

$a)\, n = 5; \quad a_{i1} \cdot a_{j5} \cdot a_{2i} \cdot a_{1j} \cdot a_{5k}$

$b)\, n = 6; \quad a_{23} \cdot a_{1i} \cdot a_{42} \cdot a_{65} \cdot a_{3j} \cdot a_{5k}$

Řešení:

$a)$ vždy kladné znaménko

$b)$ kladné znaménko pro $(i, j, k) = (1, 6, 4), (4, 1, 6), (6, 4, 1)$,

resp. záporné znaménko pro $(i, j, k) = (1, 4, 6)(4, 6, 1)(6, 1, 4)$

[6]

Příklad 2.41. Vypočítejte.

$$a)\ \det A = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} \qquad b)\ \det A = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} \qquad c)\ \det A = \begin{vmatrix} 2\cos x & 0 \\ \sin x & \sin x \end{vmatrix}$$

$$d)\ \det A = \begin{vmatrix} -i+1 & -i \\ 2i-1 & i \end{vmatrix} \qquad e)\ \det A = \begin{vmatrix} i^2-2 & -i \\ 4i+3 & i+1 \end{vmatrix} \qquad f)\ \det A = \begin{vmatrix} 1+\sqrt{4} & 2-\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} & 1-\sqrt{4} \end{vmatrix}$$

Řešení:

$a)\ \cos 2x$	$b)\, 1$	$c)\ \sin 2x$
$d)\ -1$	$e)\ -7$	$f)\ -1$

Příklad 2.42. Vypočítejte.

$$a) \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & z^2 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}, \quad z = \cos\frac{2}{3}\pi + i \cdot \sin\frac{2}{3}\pi$$

$$b) \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}, \quad z = \cos\frac{4}{3}\pi + i \cdot \sin\frac{4}{3}\pi$$

Řešení:

$$a)\ \det A = -3 \qquad\qquad b)\ \det A = 3i\sqrt{3}$$

[6]

Příklad 2.43. Vypočítejte.

$$a)\ |16| + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2i & 1 \\ -3 & 6 & 3 & -3 \\ -5i & -1 & -i & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & -i \\ i & 2i & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$a)\ 97 \qquad\qquad b)\ 9$$

Příklad 2.44. Řešte následující rovnice.

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ x & -1 & 3 \\ x-4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ x & 1 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} i & 0 & -i & i \\ 2 & x & 1 & x \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & i & 10 \\ i & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$a)\ x = 5 \qquad\qquad b)\ x = -27$$

Příklad 2.45. Následující determinant vypočtěte pouze na základě Věty 1.3, Věty 1.4 a Věty 1.5.

$$\det A = \begin{vmatrix} u+v & z & 1 \\ v+z & u & 1 \\ z+u & v & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\det A = 0$

[5]

Příklad 2.46. Následující rovnosti dokažte pouze na základě Věty 1.3, Věty 1.4 a Věty 1.5.

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

<u>Řešení:</u>

$a)$ ***Návod:*** *K třetímu sloupci přičtěte druhý sloupec vynásobený číslem* $(ab+bc+ac)$ *a odečtěte první sloupec vynásobený číslem* abc.

$b)$ ***Návod:*** *Odečtěte třetí sloupec od prvního a druhého sloupce, vytkněte z prvního sloupce* $(x-z)$ *a z druhého sloupce* $(y-z)$ *a rozveďte determinant podle prvního řádku.*

[5]

Příklad 2.47. Dokažte následující rovnosti

$$a) \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

$$b) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac+2d$$

[4]

Příklad 2.48. Užitím Věty 1.10 vypočtěte determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}.$$

<u>Řešení:</u> $D = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. ***Návod:*** *Nejprve rozveďte determinant podle prvního sloupce.*

[6]

Příklad 2.49. Užitím Věty 1.9 vypočtěte determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Řešení: $\det A = 24$. ***Návod:*** *Zvolte pevně libovolné dva řádky tak, aby obsahovaly hodně nul a jednotlivé součiny byly nulové.*

Příklad 2.50. Spočtěte determinant D_n dané matice řádu $n \geqslant 2$.

$$a)\ D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix} \qquad b)\ D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení:

a) $D_n = (-1)^{n+1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$. ***Návod:*** *Poslední řádek odečtěte od ostatních řádků kromě prvního a rozveďte determinant podle* 1. *sloupce, dále všechny sloupce přičtěte k poslednímu sloupci a nakonec rozveďte determinant podle posledního sloupce.*

b) $D_n = -(a_2 + \cdots + a_n)$. ***Návod:*** *Od prvního řádku odečtěte ostatní řádky.*

[6]

Příklad 2.51. Určete, pro která x je $\det A = 0$, je-li

$$\det A = \begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x + a_n \end{vmatrix}.$$

Řešení: $\det A = (x + a_1 + \cdots + a_n) \cdot x^{n-1}$, *tedy* $\det A = 0$, *právě když je* $x = 0$ *nebo* $x = -\sum_{i=1}^{n} a_i$
Návod: *Máte k dispozici dvě možnosti výpočtu.*

a) K prvnímu sloupci přičtěte všechny ostatní sloupce a vytkněte. Dále od druhého, ..., n*-tého sloupce odečtěte po řadě* a_2*-násobek, ...* a_n*-násobek prvního sloupce.*

b) *Determinant rozložte na součet* 2^n *determinantů* (*podle Věty 1.2*) *tak, že každý sloupec budete uvažovat jako součet dvou sloupců* (*v jednom budou samá* a_i*, ve druhém samé nuly a jedno* x).

Příklad 2.52. Nechť $n \geqslant 2$. Užitím Věty 1.12 vypočtěte determinant

$$D = \begin{vmatrix} \sin(x_1+y_1) & \sin(x_1+y_2) & \cdots & \sin(x_1+y_n) \\ \sin(x_2+y_1) & \sin(x_2+y_2) & \cdots & \sin(x_2+y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(x_n+y_1) & \sin(x_n+y_2) & \cdots & \sin(x_n+y_n) \end{vmatrix}$$

Řešení: $D = \sin(x_1 - x_2) \cdot \sin(y_2 - y_1)$ *pro* $n = 2$*,* *resp.* 0 *pro* $n > 3$.

Návod: *Danou matici nejprve vyjádřete jako součin dvou vhodných matic.*

[6]

Závěr

Baklářská práce obsahuje v první kapitole nejdůležitější definice a věty, které jsou potřebné k naplnění cíle. Jsou zde zavedeny vlastnosti determinantů a metody výpočtu determinantů. Už v této části se můžeme setkat s názornými příklady, které upevňují patřičné pojmy.

Ve druhé části je sbírka úloh, která na řešených příkladech demonstruje aplikaci uvedených metod výpočtů determinantů. Samotná řešení ve sbírce nabízí zajímavá srovnání samotných metod výpočtů a snaží se zvolit co nejefektivnější postup, který je při řešení konkrétního determinant nejvýhodnější. Součástí sbírky jsou též neřešené příklady s výsledky.

Samotná práce pro mě byla velikým přínosem, neboť jsem měl možnost řešit determinanty, se kterými jsem se doposud nesetkal, zejména se jednalo o determinanty vyšších řádů. Během řešení příkladů jsem měl možnost pozorovat jednotlivé obraty a volit metody, které jsou nejvýhodnější. Také jsem měl příležitost vytvářet vlastní příklady, které jsem navrhoval tak, aby jejich řešení bylo přijatelné s náležitým výsledkem. U těchto příkladů tedy není uveden zdroj. V poměru účinnosti a obtížnosti je podle mého názoru nejvýhodnější během výpočtu upravit determinant tak, aby obsahoval co nejvíce nul a následně použít Laplaceův rozvoj podle jednoho řádku, resp. sloupce.

Literatura

[1] BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. Vyd.3. Praha: Matfyzpress, 2005. ISBN 80-86732-57-6.

[2] BICAN, Ladislav. *Lineární algebra a geometrie*. Vyd.1. Praha: Academia, 2000. ISBN 80-200-0843-8.

[3] BLAŽEK, Jaroslav, CALDA, Emil, KOMAN, Milan, KUSSOVÁ, Blanka. *Algebra a teoretická aritmetika I.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1983.

[4] ELIAŠ, Jozef, HORVÁTH, Ján, KAJAN, Juraj. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1.časť*. Vyd.3. Bratislava: ALFA, 1971.

[5] ELIAŠ, Jozef, HORVÁTH, Ján, KAJAN, Juraj. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1.časť*. Vyd.6. Bratislava: Vydavatelstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1985.

[6] HORÁK, Pavel. *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. Vyd.2. Brno: Masarykova univerzita, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

[7] HORÁK, Pavel. *Lineární algebra a geometrie I.*[online]. 2017 [cit.15.3.2022]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~janyska/LA_CELE_2017.pdf>

[8] KÜHNOVÁ, Jitka. Dostupné z: síťový disk: sw(\\ proteus.uhk.cz)(N:UKAZKY\). *Pkal1 přednáška 2021*.[online].[cit.10.1.2022].

[9] ZUŠČÁK, Tomáš. Dostupné z: síťový disk: sw(\\ proteus.uhk.cz)(N:UKAZKY\). *Geometrie 2*.[online].[cit.2.2.2022].