



# OPTIMALIZACE NOSNÉ STRUKTURY OBRÁBĚCÍHO STROJE

## Diplomová práce

*Studijní program:* N2301 – Strojní inženýrství  
*Studijní obor:* 3901T003 – Aplikovaná mechanika  
*Autor práce:* **Bc. Vojtěch Zapadlík**  
*Vedoucí práce:* Ing. Michal Sivčák, Ph.D.





TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC  
Faculty of Mechanical Engineering ■

# OPTIMIZATION OF THE SUPPORTING STRUCTURE OF THE MACHINE TOOL

Diploma thesis

*Study programme:* N2301 – Mechanical Engineering

*Study branch:* 3901T003 – Applied Mechanics

*Author:* **Bc. Vojtěch Zapadlík**

*Supervisor:* Ing. Michal Sivčák, Ph.D.



Tento list nahradte  
originálem zadání.

## Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum:

Podpis:

## **Poděkování**

Děkuji panu Ing. Michalovi Sivčákovi, Ph.D. za ochotu vést moji diplomovou práci, za podnětné diskuze a cenné připomínky.

Dále děkuji kolektivu spolupracovníků z firmy TOS Varnsdorf a.s. za poskytnutí podkladových materiálů a užitečné rady.

## **Abstrakt**

Cílem této práce je identifikace vlastností svařence stávajícího stojanu vodorovné vyvrtávačky MAXIMA firmy TOS Varnsdorf a.s. a jeho následná náhrada odlitkem s ohledem na statickou tuhost, dynamické parametry a hmotnost vzhledem k ekonomičnosti výroby. K dosažení optimálního řešení je v práci využito metod parametrické optimalizace a topologické optimalizace inženýrské výpočetní metody konečných prvků, jež využívá princip diskretizace spojitého problému.

## **Klíčová slova**

Optimalizace topologie, parametrická optimalizace, nosná struktura, obráběcí stroj, MKP

## **Abstract**

The aim of this work is to identify the characteristics of the existing welding column of horizontal boring machine TOS Varnsdorf a.s. MAXIMA and his subsequent replacement with a casting column with regard to the static rigidity , dynamic parameters and mass due to the economics of production. To achieve the optimal solution this work used a method of parametric optimization and topology optimization method, which both are applied to the finite element method.

## **Keywords**

Topology optimization, parametric optimization, support structure, machine-tool, FEM

## OBSAH

ÚVOD .....	9
1. FORMULACE PROBLÉMU A METODIKA JEHO ŘEŠENÍ.....	10
2. STAVBA OBRÁBĚCÍCH STROJŮ.....	12
2.1. Základní pojmy .....	12
2.2. Konstrukční materiály rámu strojů.....	13
2.3. Porovnání konstrukčních materiálů.....	14
2.4. Základní rozdělení vyvrtávaček .....	15
2.5. Porovnání vybraných strojů v rámci konkurence.....	16
3. TEORIE OPTIMALIZACE .....	19
3.1. Úvodní slovo .....	19
3.2. Vybrané optimalizační metody .....	20
3.2.1. Analytické metody optimalizace s volným extrémem.....	20
3.2.2. Analytické metody optimalizace s vázaným extrémem .....	21
3.2.3. Iterační metody optimalizace komparativní .....	22
3.2.4. Iterační metody optimalizace gradientní.....	24
3.2.5. Stochastické metody (metody náhodného vyhledávání) .....	25
3.3. Teorie optimalizace topologie.....	27
3.3.1. Úvod.....	27
3.3.2. Metoda zobecněné optimalizace tvaru (GSO).....	28
3.3.3. Úloha maximalizace tuhosti poddajných těles.....	30
3.3.4. Princip metody SIMP.....	33
3.4. Příklad vícekriteriální optimalizace topologie .....	34
3.5. Schéma optimalizačního algoritmu TOSCA.....	35
4. TVORBA A ANALÝZA MAT. MODELU SVAŘENCE STOJANU.....	36
4.1. Tvorba matematického modelu svařence stojanu .....	36
4.2. Okrajové podmínky.....	37
4.2.1. Okrajové podmínky geometrické.....	38
4.2.2. Okrajové podmínky silové.....	39
4.3. Celkový výpočtový model svařence stojanu.....	43
4.3.1. Úvod.....	43
4.3.2. Úskalí tvorby výpočtových modelů sestav .....	44

4.4.	Výsledky deformační analýzy modelu se svařencem .....	46
4.5.	Výsledky modální analýzy modelu se svařencem .....	48
5.	NÁVRH A ANALÝZA MAT. MODELU ODLITKU STOJANU .....	49
5.1.	Koncepce žebrování odlévaných stojanů TOS Varnsdorf .....	49
5.2.	Vlastní koncepce žebrování .....	50
5.3.	Pevností analýza modelu s odlitkem .....	51
5.4.	Výsledky pevností analýzy modelu s odlitkem.....	51
5.5.	Výsledky modální analýzy modelu s odlitkem .....	51
5.6.	Srovnání navrženého modelu s odlitkem a se svařencem .....	52
6.	PARAMETRICKÁ OPTIMALIZACE NAVRŽENÉHO STOJANU .....	53
6.1.	Návrh proměnných parametrické optimalizace .....	53
6.2.	Vliv proměnné A – tloušťka žeber .....	54
6.1.	Vliv proměnné B – tloušťka vnější stěny.....	55
6.2.	Vliv proměnné C – velikost odlehčení.....	56
6.3.	Vliv proměnné D – počet pater žeber .....	57
6.4.	Diskuze výsledků parametrické optimalizace .....	58
7.	OPTIMALIZACE TOPOLOGIE TĚLESA STOJANU .....	59
7.1.	Úvod.....	59
7.2.	Výchozí výpočtový model – plný materiál .....	61
7.3.	Upravený výpočtový model – plně vyztuženo žebry.....	62
8.	KONEČNÝ NÁVRH OPTIMALIZOVANÉHO STOJANU .....	64
8.1.	Výsledky analýzy deformací a vl. frekvencí na navržených stojanech .....	65
8.2.	Srovnání navržených stojanů se stojanem svařovaným .....	66
	ZÁVĚR .....	67
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A ODKAZŮ .....	69
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ .....	70



## ÚVOD

V rámci konkurenceschopnosti je nutné neustále hledat nové cesty a možnosti v průmyslové výrobě. Je třeba aplikovat nové materiály, výrobní technologie i výpočtové metody. Cesta výrobku až ke spotřebiteli je dlouhá a to, zda na konci této cesty výrobek v konkurenčním boji uspěje či nikoliv ovlivňuje celá řada faktorů. Právě tento boj přináší v moderní době velký technický pokrok, který se odráží na počátku celého řetězce u vývoje a výroby obráběcích strojů, jejichž technická úroveň stojí na základech předchozích generací strojů a lidí.

Jedním z výrobců obráběcích strojů je severočeská firma TOS Varnsdorf, která byla založena již roku 1903 a časem se specializovala především na výrobu horizontálních frézovacích a vyvrtávacích strojů a obráběcích center. Úkolem této diplomové práce je optimalizovat nosnou strukturu horizontální stolové vyvrtávačky nesoucí název MAXIMA. Pod optimalizací se v tomto případě rozumí snaha dosáhnout v rámci dané prostorové zástavby co nejvyšší statické tuhosti a tlumení nosné struktury s ohledem na co nejnižší hmotnost a cenu. Vzhledem ke složitosti konstrukce nosných dílů se již dávno odstoupilo od analytických výpočtů a k přiblížení se k tomuto cíli se v dnešní době s výhodou využívají různé inženýrské metody zpracovávané výpočetní technikou. Nejpoužívanější z těchto metod je metoda konečných prvků, jejíž základy byly položeny již v 50.tých letech minulého století, ale až rozvoj výkonu výpočetní techniky umožňuje řešit náročné úlohy, jako jsou například kontaktní úlohy, či právě úlohy optimalizace.

Tato práce je logicky koncipována do několika kapitol. V té první je blíže představena řešená problematika a jsou načrtnuty postupy jejího řešení. V druhé kapitole je popsána základní konstrukce obráběcích strojů, především horizontálních vyvrtávaček. Zvláštní důraz je pak věnován materiálům používaných na díly nosných konstrukcí. Třetí kapitola má za úkol seznámit s teoretickým základem použitých optimalizačních metod, tedy s principem parametrické optimalizace a optimalizace topologie. V následujících kapitolách je podrobně popsáno vše důležité od tvorby výpočtového modelu až po samotné zpracování výsledků a konečný návrh.

## 1. FORMULACE PROBLÉMU A METODIKA JEHO ŘEŠENÍ

Na parametry přesnosti a produktivity stroje má výrazný vliv jeho statická tuhost a dynamické chování (vlastní frekvence, vlastní tvary kmitů a tlumení jednotlivých tvarů kmitů). U horizontálních frézovacích strojů střední velikosti jsou tyto parametry ovlivněny především tělesem stojanu.<sup>[Vrba, 2010]</sup> Jednou z možností jak ovlivnit produktivitu stroje je zvýšit posuvové rychlosti os, které v důsledku vedou k nárůstu nároků na tuhost stroje a jeho dynamické chování. Tuhost stroje se obvykle zvyšuje přidáním žebrováním, jež ale navyšuje hmotnost, a ovlivňuje dynamické vlastnosti. Tyto vlastnosti přímo souvisejí s volbou a naladěním výkonnějších pohonů, a to v důsledku vede naopak ke snížení produktivity. Statická tuhost se obvykle definuje jako poměr mezi zatížením a přetvořením v místě zatížení  $k=F/y$ . U obráběcích strojů je snahou dosáhnout jejího maxima mezi nástrojem a obrobkem.

Kritické modální vlastnosti jsou takové, které negativně interagují s pohony. Proto se vyšetřuje několik prvních vlastních frekvencí, které jsou amplitudově afinní se směrem těchto pohonů.<sup>[Vrba, 2010]</sup> Modální vlastnosti závisí na rozložení tuhosti a hmotnosti v soustavě, při návrhu konstrukce je tedy snaha nalézt co nejvýhodnější kombinaci těchto dvou faktorů pomocí vhodného dimenzování. Stojany horizontálních frézovacích strojů se obvykle navrhují jako svařence z oceli, či jako odlitky z litiny, nejčastěji s lupínkovým grafitem (šedá litina). Oba tyto přístupy se při konstrukci dosti odlišují a mají svá specifika. Jelikož praxe posledních let ukázala, že z hlediska ekonomičnosti návrhů a tlumících schopností je vhodnější používat stojany odlité, (a stojan řešeného stroje MAXIMA je svařovaný) je tato náhrada příčinou vzniku této práce.



Obr. 1 TOS Varnsdorf - MAXIMA

### *Metodika řešení práce:*

Prvním úkolem této práce je stanovení statické tuhosti a modálních parametrů současné koncepce stojanu řešeného jako svařenec. K tomu je zapotřebí dle určitých zásad vytvořit vhodný výpočtový model, jenž bude vycházet z dostupných geometrických 3D CAD dat, a bude splňovat několik požadavků, které budou rozepsány dále. Správnost tohoto modelu by bylo vhodné verifikovat měřením na skutečném stroji, ale bohužel toto nebylo z praktických důvodů možné. Místo toho se práce bude opírat o zkušenosti výpočtářů z obdobných strojů a také z faktu, že jejím cílem je pouze porovnávat řešení relativně mezi sebou, nikoliv vytvořit model, který by odpovídal reálné situaci a dával v absolutních hodnotách odpovídající výsledky.

Dalším krokem řešení je návrh odlitku stojanu, který navrhne nejprve intuitivně dle obecných zásad pro konstrukci odlitků a dle inspirace jinými již řešenými stojany. Výpočtový model tohoto návrhu poté podrobíme kvůli srovnání, stejným analýzám jako výchozí model svařence.

Stěžejní část této práce obsahuje parametrickou optimalizaci navrženého řešení pomocí vybraných proměnných konstrukčního návrhu (počet žeber, jejich tloušťka, velikost odlehčení atd.). Poté následuje část, jež nebyla vysloveně v původním zadání od firmy, ale jelikož mě tato problematika osobně velice zajímá, stanovil jsem si za úkol navrhnout jiné, poněkud nekonvenční řešení pomocí metod optimalizace topologie.

V závěru práce jsou všechna řešení mezi sebou porovnána a dochází především k rekapitulaci celého přístupu k práci, z důvodu možnosti formulace postupu optimalizace nosné struktury i u jiných obráběcích strojů. Ze všeho nejdříve, je ale nutné postavit odpovídající teoretický základ v konstrukci strojů, provést rešerši napříč ekvivalentní konkurencí a pochopit alespoň základy teorie použitých výpočetních metod.

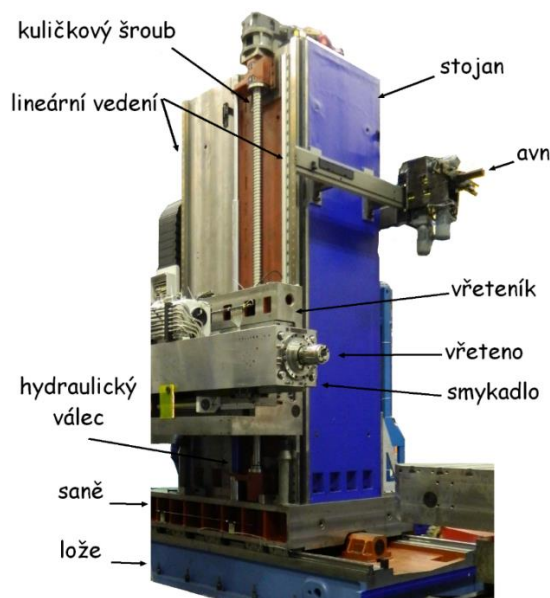
## 2. STAVBA OBRÁBĚCÍCH STROJŮ

### 2.1. Základní pojmy

Obráběcí stroje se skládají ze čtyř základních konstrukčních celků. [Lašová, 2012]

- Nosné uzly – rám stroje
- Pohonné uzly – pohonné a posuvové mechanismy
- Spojovací uzly – pohyblivá a pevná spojení částí stroje
- Pomocné uzly – mazání, chlazení, obslužné manipulace (AVN – automatická výměna nástrojů apod.)

Rámem stroje se rozumí soustava těles, která mezi sebou přenášejí účinky všech působících sil. Mezi hlavní požadavky na rám patří statická tuhost a dynamická stabilita, tedy odolnost proti přenosu vibrací, ať už do základů či do místa řezu. Dalším důležitým požadavkem je tepelná stabilita, zaručující co nejmenší teplotní deformace ovlivňující kvalitu obrábění. [Lašová, 2012]



Obr. 2 Rám stolové horizontální vyvrtávačky MAXIMA

## 2.2. Konstrukční materiály rámu strojů

Možností jak docílit požadovaných mechanických vlastností, vzhledem ke snaze minimalizovat hmotnost nosné struktury, je použití nekonvenčních materiálů, kompozitů a různých sendvičových struktur v kombinaci s metodami optimalizace topologie struktury. Návrh takovéto konstrukce je velmi složitý a není cílem této práce, proto se bude tato práce soustředit pouze na možnosti optimalizace topologie s využitím konvenčního materiálu jako je litina. Přesto považuji za vhodné zde zmínit i jiné materiály a tendence jejich využívání v praxi.

*Konvenční konstrukční materiály* [Lašová, 2012][Marek, 2010]

*Ocel* má dobré mechanické vlastnosti, ale nižší tlumící schopnosti než litina. Svařence lze snadno opravit či konstrukčně pozměnit, je ale nutné odstranit vnitřní pnutí například pomocí tepelného zpracování jako je žíhání. Dále je nutné obkládat vodící plochy. Obecně se svařence hodí spíše pro kusovou originální výrobu.

*Šedá Litina* oplývá především dobrými tlumícími vlastnostmi a relativně nízkou cenou spojených technologií lití. Nevýhodou je nutnost dlouhého stárnutí či žíhání pro odstranění vnitřních pnutí. Oproti oceli má až o 10% nižší hustotu, a přibližně o 45% nižší modul pružnosti  $E$ , ve spojení s technologickými omezeními odlévání tak vycházejí stejně tuhé odlitky hmotnější jak svařence. Oproti oceli má nižší koeficient teplotní roztažnosti a vyšší koeficient tepelné vodivosti.

*Tvárná litina*, neboli také litina s kuličkovým grafitem, má oproti šedé litině vyšší Youngův modul pružnosti  $E$ . Forma grafitu je ovlivněna modifikací taveniny hořčíkem, je tedy také dražší.

*Nekonvenční konstrukční materiály* [Lašová, 2012][Marek, 2010]

*Hydrobeton* je druh betonu používaný například pro vodní stavby díky své vodotěsnosti. Používá se především jako výplň svařovaných loží, čímž zvyšuje jejich hmotnost, tuhost a součinitel poměrného tlumení. Součinitel teplotní roztažnosti je stejný jako u oceli, ale vyniká tím, že má řádově menší koeficient tepelné vodivosti. Nevýhodou je potřeba zalévání různých kotevních prvků pro připevnění návazných ocelových částí.

*Polymerický beton (Granitan, Hydropol, epucret)* je 2-5x pevnější než obyčejný beton, jedná se o směs anorganické látky (kamenivo, keramika) a pryskyřičného pojiva. Někdy označovaný jako minerální litina, či zmiňovaný v souvislosti s litím za studena.

*Přírodní žula (Granit)* se používá ve formě opracovaných monolitních bloků, hlavně pro měřicí přístroje. Jedná se o přírodní materiál, který je vysoce tvarově stabilní, pevný a má nízký součinitel teplotní vodivosti.

*Vláknové kompozity* jsou tvořeny vlákny prosycenými pryskyřicí. Jsou navíjeny na trn či skládány po vrstvách a následně tvrzeny působením tlaku a teploty. Výsledné vlastnosti vzniklého laminátu, jako například tuhost a pevnost, jsou velice variabilní a závislé na jeho skladbě a orientaci jednotlivých vláken. Velice náročné jak na výpočty, tak na konstrukci a technologii.

*Sendvičové struktury* jsou tvořeny potahy a výplní. Potahy nesou ohybové namáhání, výplně pak smykové namáhání. V poslední době se zkoušejí sendviče s ocelovými potahy vyplněnými kovovými pěny, které se vyrábí z kovových prášků (hliník, zinek...). Takto vzniklé struktury mají výborné tlumící schopnosti.

### 2.3. Porovnání konstrukčních materiálů

<i>Materiál</i>	<b>Měrná hmotnost</b>	<b>Modul pružnosti[GPa]</b>	<b>Náklady a zpracovatelnost</b>
<i>Šedá litina</i>	7100-7300	88-140	*
<i>Tvárná litina</i>	7040-7060	160-180	**
<i>Ocelové svařence</i>	7850	190-210	**
<i>Hliníkové slitiny</i>	2600-2800	70-79	***
<i>Přírodní žula</i>	2600-3150	30-70	***
<i>Polymerický beton</i>	1500-2600	40-50	***
<i>Vláknové kompozity (uhlíkové)</i>	1700-1980	100-580	*****
<i>Sendvičové struktury</i>	1000-3500	70-210	*****

Tab. 1 Porovnání konstrukčních materiálů [Lašová, 2012][Marek, 2010]

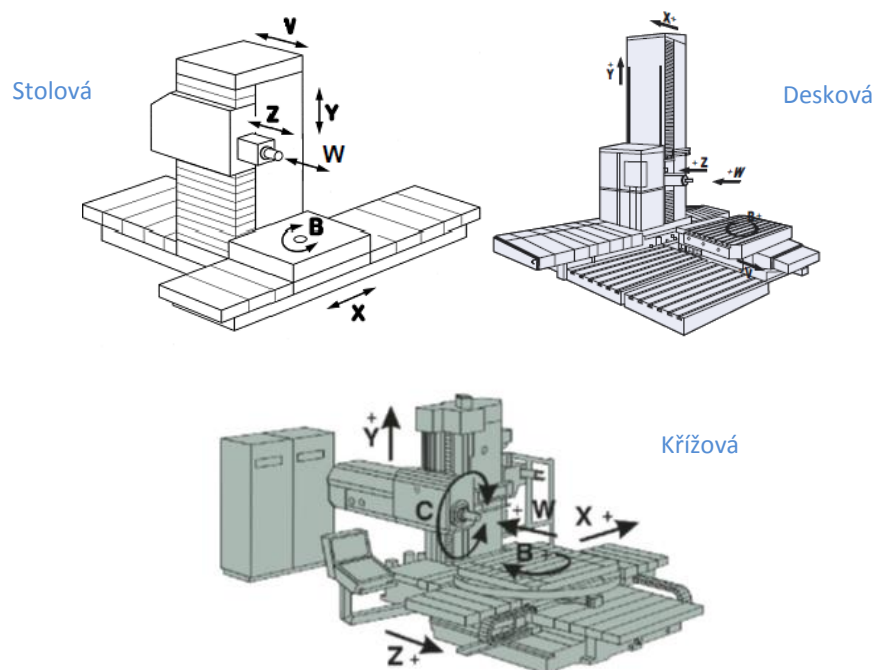
## 2.4. Základní rozdělení vyvrtávaček

Vyvrtávací stroje se dělí dle polohy osy vřeten, buď je osa svislá, nebo vodorovná. Svislé vyvrtávačky se používají většinou pro souřadnicové vyvrtávání velmi přesných děr v přesných osových vzdálenostech. Vodorovné vyvrtávačky se dále dělí na stolové, křížové, deskové a případně i souřadnicové. [Vondrák, 2011][Mareš, 2010]

*Stolové vyvrtávačky* jsou charakteristické tím, že mají pracovní stůl pohybující se v ose kolmé na osu vřeten, s možností rotace o  $360^\circ$  (osa B). Stojan se někdy pohybuje v podélném směru v ose vřeten (osa V). Jsou určeny především pro obrábění rovinných ploch dlouhých obrobků.

U *deskových vyvrtávaček* je obrobek ustaven na nepohyblivé desce, případně na přídavném otočném stole. Stojan se pohybuje v podélném směru (osa X), vřeteník po stojanu ve vertikálním směru (osa Y). Osa Z představuje výsuv smykadla, ze kterého se dále vysouvá samotné vřetení (osa W). Jsou předurčeny pro rozměrné a velice hmotné obrobky.

*Křížové vyvrtávačky* jsou vybaveny tzv. křížovým stolem, který je pohyblivý ve dvou na sebe kolmých osách, někdy také otočný. Stojan je většinou nepohyblivý.



Obr. 3 Schéma vodorovných vyvrtávaček

## 2.5. Porovnání vybraných strojů v rámci konkurence

### *TOS Varnsdorf a.s. – Maxima*

V současné koncepci hlavní nosné dílce z šedé litiny, výjimku tvoří stojan, který je svařovaný. Úkolem této práce je náhrada právě tohoto svařovaného stojanu za litý.



Obr. 4 Stolová vodorovná vyvrtávačka TOS Maxima

Konstrukce stroje vychází z konstrukčních skupin deskových strojů WRD. Nabízí se ve dvou provedeních MAXIMA I a MAXIMA II, které se liší průměrem pracovního vřetena (130mm, resp. 150mm), maximálními otáčkami a krouticím momentem.

### *Škoda Machine Tool a.s. – HCW 1000*

Jediný zástupce ve stolových vyvrtávačkách od známého českého výrobce. Všechny nosné části stroje jsou vyrobeny z litiny.



Obr. 5 Stolová vyvrtávačka ŠKODA HCW 1000



### *PAMA spA – SPEEDMAT 4600*

Italský výrobce produkující stroje nejvyšší technické úrovně. Všechny nosné díly stroje vyrobeny ze šedé litiny, vřeteník je centrálně uložený v symetrickém stojanu. Maximální otáčky pracovního vřetena o průměru 130mm jsou uváděny 4000/min, s maximálním krouticím momentem 2400 Nm.



Obr. 6 PAMA SPEEDMAT 4600

### *Union Chemnitz GmbH – K-Series*

Je nejstarší výrobce obráběcích strojů v Evropě založený roku 1852 a sídlící v německém městě Chemnitz. Výrobní řadu dělí na čtyři základní kategorie, kde K-series představuje stroje stolové konstrukce s pohyblivým stojanem, ale bez výsuvného smykadla. Všechny nosné dílce jsou opět vyrobeny jako odlitky z litiny.



Obr. 7 UNION K-Series

## DANOBATGROUP SORULACE KB-150-W

Nový stroj od společnosti SORULACE původem ze Španělska, jež je součástí nadnárodní skupiny DANOBATGROUP, potažmo korporace MONDRAGON. Hlavní díly nosné struktury stroje jsou vyrobeny ze šedé litiny.



Obr. 8 SORULACE KB-150-W

### Porovnání parametrů vybraných strojů

výrobce	stroj	průměr prac. vřetena [mm]	max. otáčky [1/min]	max. kroucí moment [Nm]
TOS	MAXIMA I	130	3500	2535
	MAXIMA II	150	2800	2466
ŠKODA	HCW 1000	130	3000	2500
PAMA	SPEEDMAT 4600	130	4000	1525
		160	3500	2396
UnionChemnitz	K/KC 110	110	6000	2012
	K/KC 130	130	4000	2179
	K/KC/KCU 150	150	3500	3000
DanobatGroup	Sorulace KB-150-W	150	3000	2344

Tab. 2 Porovnání parametrů vybraných strojů

Údaje o parametrech strojů a jejich obrázky byly získány z oficiálních, veřejně přístupných zdrojů na internetových stránkách jednotlivých výrobců.

### 3. TEORIE OPTIMALIZACE

#### 3.1. Úvodní slovo

Pod pojmem optimalizační úloha (někdy též úloha matematického programování) se z hlediska matematiky rozumí úloha nalézt bod, v němž jistý funkcionál či funkce nabývá svého extrému. Podle toho jestli hledáme extrém funkce nebo funkcionálu, lze tyto úlohy rozdělit na úlohy parametrické optimalizace a úlohy optimalizace funkční. Disciplína zabývající se těmito úlohami se nazývá *matematická teorie optimálních procesů*.

*Parametrická optimalizace* - představuje problém nalezení bodů (hodnot návrhového vektoru)  $\hat{\mathbf{x}}$  v němž daná funkce  $f(\mathbf{x})$  nabývá svého extrému (maxima či minima), a to při splnění jistých podmínek, jež jsou předepsány ve formě soustavy rovnic  $h_k(\mathbf{x}) = 0$  a nerovnic  $g_l(\mathbf{x}) \leq 0$ . Vyšetřovanou funkci  $f(\mathbf{x})$  nazýváme objektivní, kriteriální či cílová.<sup>[Mareš,2006]</sup>

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = \max_{\mathbf{x} \in P} f(\mathbf{x}) \quad (3.1.1)$$

$$g_l(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (l = 1, 2, \dots, q) \quad (3.1.2)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (3.1.3)$$

Úlohu lze také zapsat v následujícím tvaru, kde  $E^p$  je návrhový prostor,  $p$ -dimenze.

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x} \in P} f(\mathbf{x}) \quad (3.1.4)$$

$$P = \{\mathbf{x} \in E^p \mid g_l(\mathbf{x}) \leq 0, h_k(\mathbf{x}) = 0 \forall l, k\} \quad (3.1.5)$$

*Funkční optimalizace* – jedná se o nalezení funkce (či souboru funkcí)  $y(\mathbf{x})$   $p$ -rozměrné proměnné definované na jisté množině  $\Omega \in E_p$ , v nichž nabývá daný funkcionál největší (či nejmenší) hodnoty mezi všemi funkcemi splňující tzv. vedlejší podmínky dané soustavou algebraických, transcendentních, diferenciálních či integrálních rovnic případně nerovnic. Matematická disciplína zabývající se nalezením extrémů funkcionálů se nazývá *variační počet*.<sup>[Mareš,2006]</sup>

## 3.2. Vybrané optimalizační metody

Optimalizační úlohy lze dále členit podle různých hledisek.

- *Dle vedlejších podmínek* na úlohy s vedlejšími podmínkami (s tzv. vázanými extrémy) a na úlohy bez vedlejších podmínek (s tzv. volnými extrémy)
- *Dle typu entit* na lineární a nelineární, ty se dále dělí například na konvexní, nekonvexní, kvadratické apod.
- *Dle metod řešení* na přesné a přibližné, dále na analytické a numerické, či na přímé a iterační

### 3.2.1. Analytické metody optimalizace s volným extrémem

V případě jednorozměrné úlohy se jedná o klasickou derivaci:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (3.2.1)$$

Kde extrémy funkce  $f(x)$  hledáme dle vztahu:

$$f'(x) = 0 \quad (3.2.2)$$

V případě více rozměrů přecházíme k pojmu gradient, což je matematický diferenciální operátor definovaný jako vektor parciálních derivací:

$$\nabla f = \text{grad}f(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (3.2.3)$$

Extrém funkce více proměnných se pak hledá pomocí tzv. Hessovy matice

$$H = \nabla^2 f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \cdot \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

U této matice se vyšetřuje, zda je pozitivně či negativně definitní, a podle toho se určuje, jestli má funkce  $f(x)$  v daném bodě lokální minimum, lokální maximum nebo sedlový bod. [Jurek,2007]

### 3.2.2. Analytické metody optimalizace s vázaným extrémem

Na rozdíl od volného extrému nehledáme extrém na celém definičním oboru, ale na oboru omezeném rovnicemi, nerovnicemi či jejich kombinací. Úlohy s omezením typu rovnosti se nazývají úlohy klasického vázaného extrému, úlohy s omezením nerovnosti pak úlohy neklasického vázaného extrému. [Jurek,2007]

*Klasický vázaný extrém:*

Postup řešení klasického vázaného extrému je známý pod pojmem metoda Lagrangeových multiplikátorů. Funkce  $L$  se nazývá Lagrangeova funkce, reálná čísla  $\lambda_k$  se nazývají Lagrangeovy multiplikátory. Platí že, pokud má Lagrangeova funkce ve svém stacionárním bodě extrém, pak má i funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$  v tomto bodě extrém vázaný podmínkami  $h_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Stacionární body Lagrangeovy funkce určíme jako řešení soustavy rovnic (3.2.5) a (3.2.8).

$$h_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (3.2.5)$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \boldsymbol{\lambda}) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot h_k(x_1, \dots, x_n) \quad (3.2.6)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad m < n \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.8)$$

*Neklasický vázaný extrém:*

Zobecněním metody Lagrangeových multiplikátorů jsou Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky:

$$\text{optimality} \quad \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \nabla h_k(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^q \mu_l \cdot \nabla g_l(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.2.9)$$

$$\text{připustnosti} \quad g_l(\mathbf{x}) \leq 0, \quad l = 1, \dots, q \quad (3.2.10)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (3.2.11)$$

$$\text{duality} \quad \mu_l \geq 0, \quad l = 1, \dots, q \quad (3.2.12)$$

$$\text{komplementarity} \quad \mu_l g_l(\mathbf{x}) = 0, \quad l = 1, \dots, q \quad (3.2.13)$$

### 3.2.3. Iterační metody optimalizace komparativní

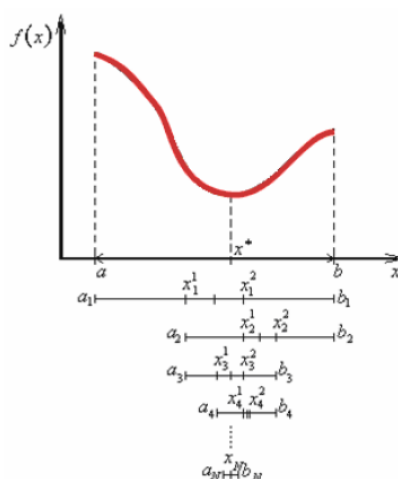
Komparativní iterační metody nevyžadují výpočet nebo odhad derivace cílové funkce. Při výpočtu porovnávají hodnoty vypočtené v jednotlivých krocích a postupují, dokud dochází ke zlepšování.

*Jednorozměrné [Jurek,2007]*

Mezi tyto metody se řadí Fibonacciho metoda, využívající Fibonacciho čísel (každé číslo v posloupnosti je určeno součtem dvou předchozích čísel). A dále metoda zlatého řezu, která je z Fibonacciho metody odvozena a využívá limitní podíl dvou po sobě jdoucích čísel ve Fibonacciho posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{N-i+1}}{F_{N-i+2}} = 0,618 \quad (3.2.14)$$

Hodnota 0,618 se nazývá poměr zlatého řezu. Tato metoda využívá vlastnosti, kdy rozdělením intervalu v tomto poměru vznikne kratší a delší subinterval, pro něž platí, že poměr délky kratšího subintervalu k délce delšího je stejný jako poměr délky delšího subintervalu k délce celého intervalu. Takto dostaneme dva dělicí body, jež dále dělí delší subintervaly v poměru zlatého řezu. Ve výpočtu testujeme velikost funkční hodnoty cílové funkce a její změnu, která určuje požadovanou přesnost.

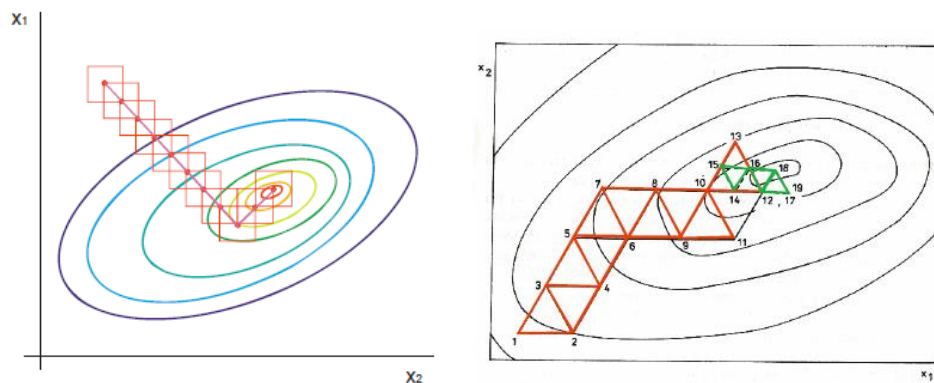


Obr. 9 Metoda zlatého řezu a vyobrazení dělení intervalů v jednotlivých krocích [Jurek,2007]

Mezi tyto metody patří BOX-Wilsonova metoda, Simplexové metody, metoda mapování kriteriální plochy a metoda cyklické záměny parametrů. Jejich společným znakem je vyčíslení hodnoty cílové funkce v určitých bodech a jejich vzájemné porovnání v jednotlivých iteracích.

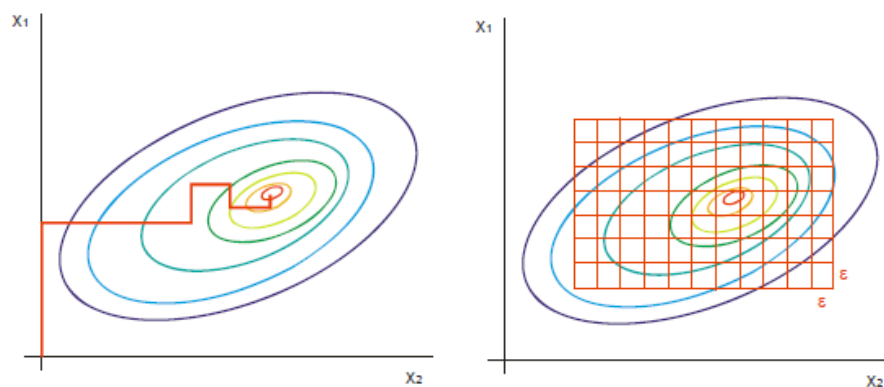
V případě Box-Wilsonovy metody se pro  $n=2$  konstruuje čtverec, v jehož středu a vrcholech se vypočítají funkční hodnoty cílové funkce, v dalším kroku se pak vrchol s nejmenší (či největší) hodnotou stává středem nového čtverce. Pro úlohy  $n$ -rozměrné se konstruuje nadkvádr s  $2^N$  vrcholy a počítá se funkční hodnota ve  $1+2^N$  vrcholech.

V případě simplexové metody se konstruuje tzv. simplex, tedy nejmenší konvexní polyedr v daném prostoru (pro  $n$ -dimenzionální prostor máme  $n+1$  vrcholů).



Obr. 10 Box-Wilsonova metoda a Simplexová metoda [Jurek,2007]

Metodě cyklické záměny parametrů se také někdy říká metoda Gauss-Seidelova, jejím principem je hledání jednorozměrného optima pro jednotlivé proměnné, přičemž ostatní zůstávají konstantní, takto se postupně vyšetří všechny proměnné. V případě metody mapování kriteriální plochy dochází k výpočtu v mnoha diskrétních bodech.



Obr. 11 Gauss-Seidelova metoda a metoda mapování kriteriální plochy [Jurek,2007]

### 3.2.4. Iterační metody optimalizace gradientní

Tyto metody vyžadují odhad nebo výpočet derivace cílové funkce.

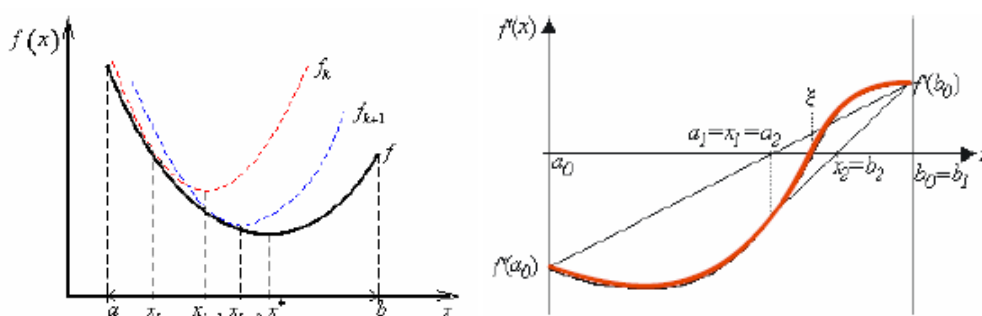
#### *Jednorozměrné gradientní metody*

Mezi tyto metody patří známá Newtonova metoda, která spočívá v iteračním hledání průsečíku tečny v bodě vyšetřované funkce s osou  $x$ .

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} \quad (3.2.15)$$

Další metodou je regula-falsi, která kombinuje metodu sečen a metodu půlení intervalu, má odvozený následující iterační předpis:

$$x_{i+1} = x_i - f'(x_i) \frac{x_{i-1} - x_i}{f'(x_{i-1}) - f'(x_i)} \quad (3.2.16)$$



Obr. 12 Princip Newtonovy metody (vlevo) a metody Regula-falsi (vpravo) [Jurek,2007]

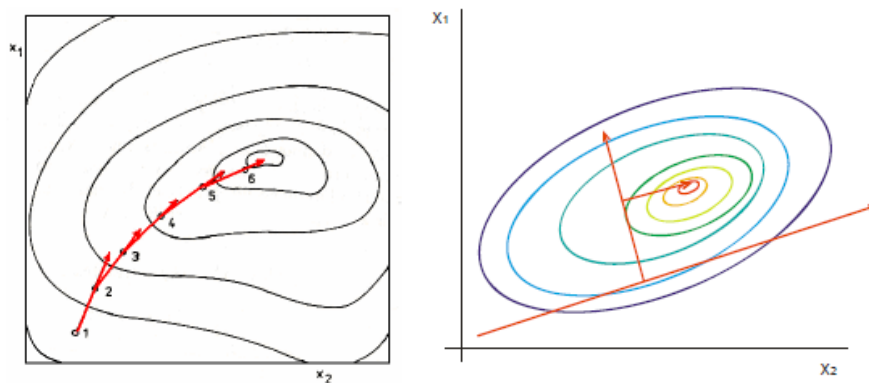
#### *Vícerozměrné gradientní metody*

U metody s krátkým krokem je algoritmus předepsán následujícím vztahem:

$$x_{i+1} = x_i + \lambda_i \nabla f(x_i) \quad (3.2.17)$$

Kdy koeficient  $\lambda_i$  zůstává konstantní. Pak existuje ještě metoda s dlouhým krokem, která tento koeficient upravuje v každém kroku dle určitého vypracovaného vztahu.





Obr. 13 Princip metody s krátkým (vlevo) a dlouhým (vpravo) krokem [Jurek,2007]

### 3.2.5. Stochastické metody (metody náhodného vyhledávání)

Stochastické metody oproti deterministickému přístupu značně zvyšují šanci na nalezení globálního extrému. Do této kategorie patří jak jednoduché metody, které pouze vyhodnocují, zda je nový bod lépe položený než předchozí, tak metody založené na poznatcích z fyzikálních či biologických procesů v přírodě.

#### *Hill climbing („horolezecký“ algoritmus)*

Jedná se o variantu gradientních metod, kdy se směr největšího spádu určí komplexním prohledáváním okolí. Získané lokální řešení se použije jako počátek nového prohledávání. Celý algoritmus se spouští několikrát z náhodných míst, takto ale vzniká problém možnosti tzv. zacyklení, kdy se prohledávání vrací do míst lokálních řešení.

#### *Tabu search (Zakázané prohledávání)*

Vychází z předchozí metody Hill climbing, s tím že se snaží zamezit zacyklení pomocí tzv. krátkodobé paměti, kdy si algoritmus pamatuje předchozí lokální řešení.

#### *Simulované žíhání*

Vychází z fyzikálního principu žíhání, které označuje tepelné zpracování kovů při kterém je těleso ohřáto na žíhací teplotu, a postupným pomalým ochlazováním se odstraňují defekty krystalové mřížky. V rámci optimalizace představuje klesající teplota množství náhodných změn, které algoritmus provádí s cílem najít globální minimum (podobně jako při žíhání dochází k minimalizaci vnitřního napětí).

## *Genetické algoritmy*

Genetické algoritmy (GA, genetic algorithms) napodobují evoluční algoritmy probíhající v přírodě. Na rozdíl od klasických metod nepracují přímo s hodnotami parametrů systémů, ale pouze s jejich symbolickou reprezentací, s tzv. **chromozomem**. Do nich jsou hodnoty parametrů zakódovány, nejčastěji v binární soustavě. Každý parametr zakódovaný v binární soustavě se nazývá **gen**, každý jeho prvek (0 nebo 1) pak **alela**. Genetický algoritmus pracuje se skupinou několika chromozomů, která se nazývá **populace**, každý její prvek je **jedinec** (obvykle má pouze jeden chromozom).

Proces optimalizace začíná výchozí populací, která se vygeneruje čistě náhodně jako soubor jedniček a nul. V průběhu optimalizace se počet jedinců nemění, ale mění se jejich složení, obměněná populace se nazývá další **generace**. Průběh optimalizace se nazývá **reprodukční proces**.

1. Selekce – jejím cílem je vyloučit z reprodukce horší jedince (ty s menší hodnotou kritériální funkce). Při selekci je možno postupovat tak, že si seřadíme jedince dle kvality (dle velikosti hodnoty kritériální funkce) a provedeme tzv. decimaci populace, kdy odstraníme její horší polovinu.
2. Párování – ze zbylých jedinců utvoříme pár, který dá tak vzniknout dvěma potomkům, jedince do párů lze vybírat mnoha způsoby, často i náhodně. Mluvíme tak o rodičích, o matce a otci.
3. Křížení - funguje na principu smíšení alel ze dvou jedinců, tzv. rodičů. Při použití binární symboliky zvolíme náhodně pozici dělítka v řetězci bitů, první jedinec pak převezme bity (alely) nalevo od dělítka od otce a napravo od dělítka od matky. Druhý jedinec přesně opačně.
4. Mutace – v bitové symbolice se provádí jako inverze bitů na náhodných pozicích v rámci chromozomu

Po provedení předchozích kroků máme k dispozici novou generaci, která čítá stejný počet jedinců jako předtím, a reprodukční proces může začít nanovo. Opakuje se tak dlouho, dokud není splněno kritérium uvalené na hodnotu cílové funkce.

### 3.3. Teorie optimalizace topologie

#### 3.3.1. Úvod

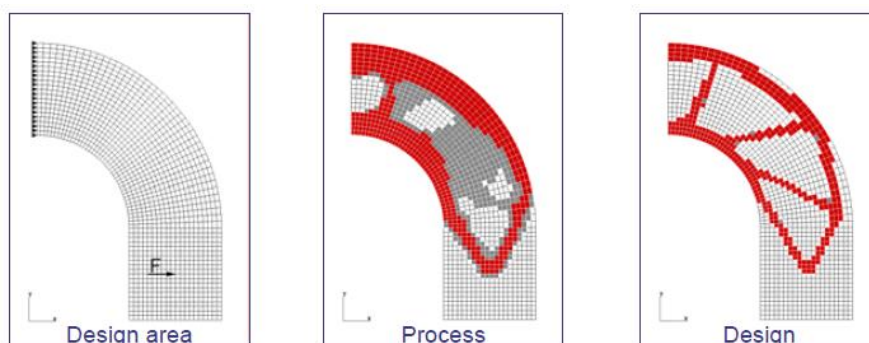
Jedná se o metodu výpočtu distribuce materiálu v definovaném návrhovém (disponibilním) prostoru s respektováním zadaných okrajových podmínek (geometrické, silové a dále optimalizační, výrobní apod.) s cílem nalézt takové řešení, které je v dané situaci nejvýhodnější. Z hlediska matematiky se jedná o funkční optimalizaci a dělí se na dvě základní oblasti.

*Optimalizace dispozice (LO – layout optimization)*

Je určena pro prutové a rámové konstrukce, tedy konstrukce s tzv. malým objemovým zlomkem, jejíž základy položil již roku 1904 australský inženýr Anthony Michell.

*Zobecněná optimalizace tvaru (GSO – generalized shape optimization)*

Byla vyvinuta pro konstrukce s velkým objemovým zlomkem. Za průkopníka v této oblasti lze považovat dánského vědce Martina Philipa Bendsøe a jeho práce z 80 let. 20. století. Tyto úlohy lze řešit v principu analyticky, ale v praxi se spojitý problém diskretizuje a řešení se hledá numericky pomocí metody konečných prvků (FEM). Míra diskretizace (jemnost sítě) přitom přímo ovlivňuje rozlišení řešení a výpočtový čas. Na obrázku níže je vyobrazený princip této metody, kdy řešič postupně konverguje k hledanému optimálnímu rozložení materiálu (červená barva).



Obr. 14 Princip metody GSO

### 3.3.2. Metoda zobecněné optimalizace tvaru (GSO)

Metoda GSO se dále dělí dle použitého typu elementů.

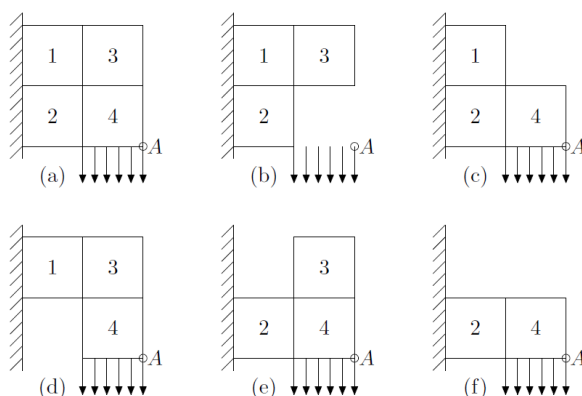
- ISE – Isotropic Solid or Empty element = izotropní pevný či prázdný element
- ASE – Anisotropic Solid or Empty element = anizotropní pevný či prázdný element
- ISEP – Isotropic Solid, Empty or Porous element = izotropní pevný, prázdný či pórovitý element

Ve významu jednotlivého značení se rozumí:

- S – Solid = pevný element zcela vyplněný jedním materiálem
- E – Empty = prázdný element bez materiálu
- P – Porous = pórovitý element s jedním materiálem a prázdným prostorem (tzv. void, či cavities)
- C – composite = kompozitní, obsahuje více druhů materiálu, žádné voidy
- CP – composite porous = kompozitní pórovitý, obsahuje více druhů materiálů a voidy

*ISE –topologie [Mareš,2006]*

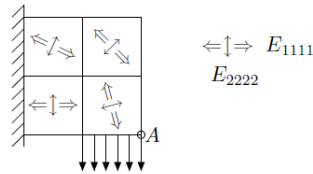
Jsou topologie tvořené buď prázdným elementem, nebo pevným elementem z jednoho materiálu. Pokud v úvahu přichází např. tři materiály, hovoříme o tzv. 3ISE-topologiích.



Obr. 15 Úloha optimalizace 1ISE-topologie, (a)- návrhová oblast (b)-nepřípustné řešení (c)-optimální řešení (d-f) přípustná avšak neoptimální řešení [Mareš,2006]

### ASE-topologie [Mareš,2006]

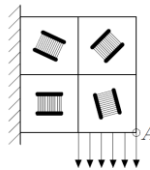
Jsou topologie tvořené prázdnými či pevnými anizotropními elementy, kde má každý element specifikován tenzor tuhosti  $\mathbf{E}=\mathbf{E}_{ijkl}$ , který je v rámci daného elementu konstantní.



Obr. 16 Příklad úlohy s ASE-topologií [Mareš,2006]

### ISEP-topologie [Mareš,2006]

Jsou topologie tvořící elementy, jež obsahují prázdný prostor a jeden nebo více materiálů, představují tedy porézní strukturu, kterou je možné samostatně optimalizovat. Tato optimalizace se řeší pomocí tzv. homogenizace (matematické). Po homogenizaci, jež představuje vlastně zprůměrování vlastností přes daný element, přechází ISEP-topologie na ASE-topologie.



Obr. 17 Příklad úlohy s ISEP-topologií obsahující elementy tvořené mikrolamináty [Mareš,2006]

Dále existují ještě topologie ISEC, kde pórovité elementy jsou nahrazeny kompozitními a ISECP-topologie, které připouštějí jak kompozitní, tak pórovité elementy.

*Metody řešení GSO* v případě ISE-topologií jsou následující:

- SIMP – Solid Isotropic Microstructure with Penalization
- OMP – Optimal Microstructure with Penalization
- NOM – NonOptimal Microstrucures

V praxi se nejčastěji využívá ISE-topologií v kombinaci s metodou SIMP, proto zde bude dále popsána tato.

### 3.3.3. Úloha maximalizace tuhosti poddajných těles

Problém maximalizace tuhosti lze převést na úlohu minimalizace poddajnosti. Ve významu úlohy se jedná vlastně o problém minimalizace deformací při daném zatížení. Vycházíme z principu minima úplné potenciální energie, který říká, že skutečný stav deformovaného tělesa minimalizuje na množině přípustných deformací funkcionál úplné potenciální energie.  $l(\mathbf{u})$  je potenciální energie vnějších sil (práce vnějších sil) a  $a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  je elastická potenciální energie (deformační energie). [Mareš,2006][Bendsoe,1995]

$$\begin{array}{l} \text{Úplná potenciální} \\ \text{energie} \end{array} \quad \Pi(\mathbf{u}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u}) \quad (3.3.1)$$

$$\begin{array}{l} \text{Deformační} \\ \text{energie tělesa} \end{array} \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) d\Omega \quad (3.3.2)$$

$$\text{Hookův zákon} \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = E_{ijkl}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (3.3.3)$$

$$\begin{array}{l} \text{Chauchyho tenzor} \\ \text{malých deformací} \end{array} \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} (u_{ij}(\mathbf{x}) + u_{ji}(\mathbf{x})) \quad (3.3.4)$$

$$\begin{array}{l} \text{Potenciální energie} \\ \text{vnějších sil} \end{array} \quad l(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} t_i u_i dS \quad (3.3.5)$$

$$\begin{array}{l} \text{Objemové síly} \end{array} \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} p_x(\mathbf{x}) \\ p_y(\mathbf{x}) \\ p_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{array}{l} \text{Povrchové síly} \end{array} \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} t_x(\mathbf{x}) \\ t_y(\mathbf{x}) \\ t_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{array}{l} \text{Posuvy uvnitř} \\ \text{tělesa} \end{array} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_x(\mathbf{x}) \\ u_y(\mathbf{x}) \\ u_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

Pro skutečně deformovaný tvar, lze psát (3.3.9), pak dosazením do (3.3.1) platí (3.3.10).

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \min_{\mathbf{u} \in U} \prod(\mathbf{u}) \quad (3.3.9)$$

$$\prod(\hat{\mathbf{u}}) = a(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) - l(\hat{\mathbf{u}}) = \min \prod(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u} \in U} (a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u})) \quad (3.3.10)$$

Z teorie variačních metod řešení diferenciálních rovnic je známo, že pro skutečně deformovaný tvar  $\hat{\mathbf{u}}$  platí (3.3.11), pak lze psát (3.3.12), potažmo (3.3.13)

$$\min \prod = \frac{1}{2} (A\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) - (f, \hat{\mathbf{u}}) \wedge (A\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = (f, \hat{\mathbf{u}}) \quad (3.3.11)$$

$$\min \prod = -\frac{1}{2} (f, \hat{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{2} l(\hat{\mathbf{u}}) \quad (3.3.12)$$

$$\prod(\hat{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{2} l(\hat{\mathbf{u}}) < 0 \quad (3.3.13)$$

Pro  $\hat{\mathbf{E}}$  maximalizující míru tuhosti (minimalizující míru poddajnosti  $l(\mathbf{u})$ ) lze psát (3.3.14) a formulovat úlohu minimalizace poddajnosti (3.3.15). [Mareš,2006][Bendsoe,1995]

$$\hat{\mathbf{E}} = \arg \min_{E \in E} l(\hat{\mathbf{u}}) = \arg \max_{E \in E} \left( -\frac{1}{2} l(\hat{\mathbf{u}}) \right) = \arg \max_{E \in E} \prod(\hat{\mathbf{u}}) = \quad (3.3.14)$$

$$= \arg \max_{E \in E} (a(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) - l(\hat{\mathbf{u}})) = \arg \max_{E \in E} \min_{\mathbf{u} \in U} (a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u}))$$

$$\{\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{u}}\} = \arg \max_{E \in E} \min_{\mathbf{u} \in U} (a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u})) \quad (3.3.15)$$

Při návrhu topologie může množina přípustných tenzorů tuhosti  $E$  obsahovat tenzor tuhosti daného materiálu, nebo nulový tenzor (se všemi prvky nulovými). Rovnice (3.3.18) pak představuje objemové omezení úlohy. Proměnná  $\chi(\mathbf{x})$  je návrhovou proměnnou celé úlohy a lze jí nazývat pseudohustota.

$$E_{ijkl} = \chi(\mathbf{x}) E_{ijkl}^0 \quad (3.3.16)$$

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - \text{materiál v místě } \mathbf{x} \\ 0 - \text{bez materiálu v místě } \mathbf{x} \end{cases} \quad (3.3.17)$$

$$\int_{\Omega} \chi(\mathbf{x}) dx \leq V_0 \quad (3.3.18)$$

Úlohu (3.3.15) lze psát ve tvaru (3.3.19), kde minimalizovaný funkcionál je tzv. doplňková deformační energie. Odvození není triviální, více se mu věnuje použitá literatura. [Mareš, 2006][Bendsoe, 1995]

$$\{\widehat{\mathbf{C}}, \widehat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg \min_{\mathbf{C} \in \mathcal{C}} \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} d\Omega \right) \quad (3.3.19)$$

$\widehat{\mathbf{C}}$  je tenzor poddajnosti z množiny přípustných tenzorů poddajnosti minimalizující výše uvedený funkcionál, stejně tak  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$  je tenzor napjatosti z množiny přípustných tenzorů napjatosti, pro který platí stejná věta o minimalizaci funkcionálu.

### *Diskretizace úlohy maximalizace tuhosti*

V praxi se výše rozepsaná úloha řeší pomocí diskretizace spojitého problému, konkrétně metodou konečných prvků. Užitím následujících reformulovaných vztahů, lze pro 2D lineární prvek formulovat úlohu (3.3.24), která nám poslouží pro vysvětlení následující kapitoly.

$$\text{Úplná potenciální energie} \quad \prod = U - L \quad (3.3.20)$$

$$\begin{array}{l} \text{Energie napjatosti pro 2D} \\ \text{lineární prvek} \end{array} \quad U = \frac{1}{2} u^T K u \quad (3.3.21)$$

$$\text{Práce vnějších sil} \quad L = 2U = u^T K u \quad (3.3.22)$$

$$\text{Rovnice silové rovnováhy} \quad Ku = f \rightarrow u^T K = f^T \quad (3.3.23)$$

Dosazením (3.3.19) do (3.3.20) dostáváme:

$$L = f^T u \quad (3.3.24)$$

$$\min(L) = \min(f^T u)$$

$K$  je celková matice tuhosti (modifikovaná zavedením okrajových podmínek)

$u, u^T$  je vektor uzlových posunutí;  $f^T$  je vektor uzlových sil

S uvážením distribuce pseudohustoty (3.3.17) se tímto krokem stává úloha prakticky neřešitelná, protože například těleso s 10000 elementy představuje problém s  $2^{10000}$  možnostmi. Z tohoto důvodu se převádí proměnná pseudohustota  $\chi(\mathbf{x})$  na spojitou pomocí tzv. relaxace.

$$0 \leq \chi(\mathbf{x}) \leq 1 \quad (3.3.25)$$

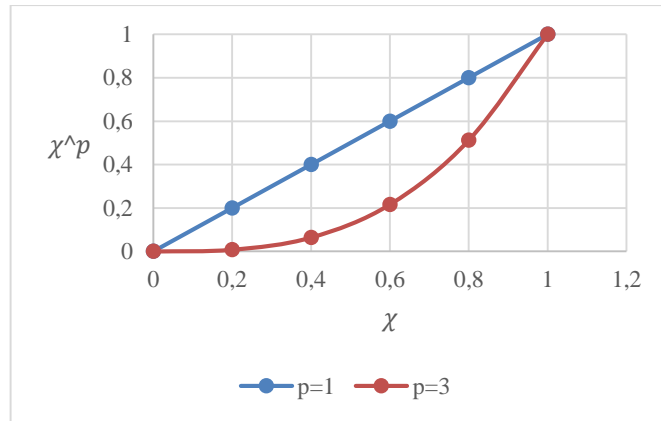
Další postup jak interpretovat mezilehlou hodnotu pseudohustoty závisí již na použité metodě. Zde bude popsána pouze ta nejznámější z nich.



### 3.3.4. Princip metody SIMP

Jednou z metod řešení zobecněné optimalizace topologie (GSO) je metoda SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization), která využívá pro odstranění prvků s mezilehlou pseudohustotou tzv. penalizační faktor  $p$ .

$$E_{ijkl} = \chi^p(\mathbf{x})E_{ijkl}^0 \quad (3.3.26)$$



Obr. 18 Průběh pseudohustoty v závislosti na velikosti exponentu  $p$

Dalším krokem této metody je zjištění citlivostí (derivací) pro určení „směru“ jakým má řešič dále postupovat.

$$\frac{dL}{d\chi} = (f^T) \frac{d(u)}{d\chi} + \frac{d(f^T)}{d\chi}(u) \quad (3.3.27)$$

Za využití silové rovnováhy MKP a použitím substituce lze reformulovat optimalizační problém, s tím že jsou již známy citlivosti.

$$Ku = f \rightarrow \frac{dK}{d\chi}u + K \frac{du}{d\chi} = 0 \quad (3.3.28)$$

$$\frac{dK}{d\chi}u = -K \frac{du}{d\chi} \rightarrow -K^{-1} \frac{dK}{d\chi}u = \frac{du}{d\chi} \quad (3.3.29)$$

$$\frac{dL}{d\chi} = -u^T \frac{dK}{d\chi}u = -\frac{p}{\chi} u^T K_{\text{local}}u = -\frac{p}{\chi} \cdot u(\chi) \quad (3.3.30)$$

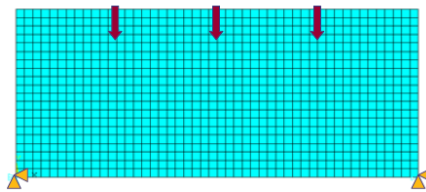
Další postup pak závisí na použité metodě matematické optimalizace (kritéria optimality, matematické programování apod.) [TOSCA Seminar, online]

### 3.4. Příklad vícekriteriální optimalizace topologie

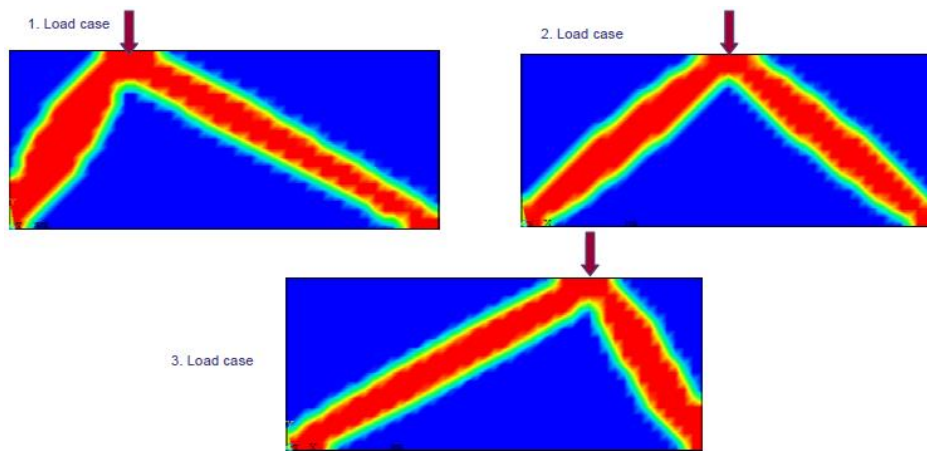
Pokud provádíme optimalizaci více parametrů, stává se cílová funkce tzv. funkcí vícekriteriální. Ta je potom vyjádřena ve tvaru váženého součtu jednokriteriálních funkcí.

Mějme nosník vetknutý na dvou podporách a zatížený třemi osamocenými silami (každá působí zvlášť – 3 zátěžové případy). Cílovou funkcí je maximalizovat tuhost (tedy minimalizovat poddajnost) a odebrat například 70% objemu.

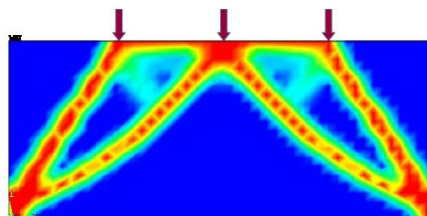
$$\min \sum_i^3 \frac{1}{3} C_i + \text{podmínka } V \leq 0,3 \cdot V_0 \quad (3.4.1)$$



Obr. 19 Schématické znázornění okrajových podmínek na nosníku, s tím že působí vždy jen jedna ze sil



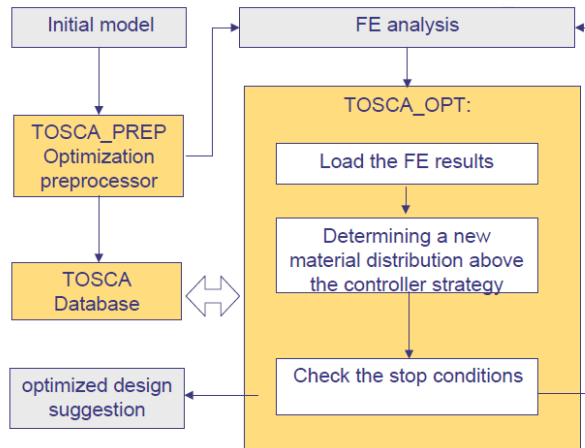
Obr. 20 Znázornění výsledků optimalizace topologie pro jednotlivé případy zatížení



Obr. 21 Znázornění výsledku optimalizace topologie pro vícekriteriální funkci maximalizace tuhosti nosníku pro 3 různé případy zatížení

### 3.5. Schéma optimalizačního algoritmu TOSCA

Jelikož použitý software FEMAP obsahuje modul na optimalizaci topologie TOSCA od společnosti FE-DESIGN, bude zde přiblíženo jeho schéma.



Obr. 22 Schéma optimalizačního algoritmu TOSCA

Algoritmus vychází z konečně prvkového výpočtového modelu (initial model), na začátku nastavíme v optimalizačním preprocesoru (optimization preprocessor) požadované parametry optimalizace, jako je typ cílové funkce, optimalizační omezení a další parametry, které se uloží do databáze (TOSCA Database), ke které má optimalizační řešič v průběhu optimalizace přístup a do které také ukládá mezivýsledky. Poté proběhne první výpočet deformací pomocí metody konečných prvků (FE analysis). V tomto bodě začíná cyklus samotné optimalizace, kdy si řešič načte výsledky z MKP analýzy, dle vnitřního algoritmu určí nové rozvržení distribuce materiálu, zkontroluje ukončující podmínky a předá upravený výpočtový model opět na výpočet MKP analýze. V případě dosažení ukončujících podmínek (stop condition) optimalizační výpočet končí a předá návrh (suggestion) postprocesoru pro vyhodnocení uživatelem.

Cílových funkcí existuje mnoho, tento konkrétní řešič nabízí následující tři.

- Minimalizace poddajnosti s podmínkou odebrání určitého % materiálu
- Minimalizace hmotnost při dodržení max. statické výchylky
- Maximalizace první vlastní frekvence při odebrání určitého % materiálu

Dále lze výsledky optimalizace ovlivnit celou řadou dalších nastavení. Jmenujme například výrobní omezení (tvorba dutin v jednom směru), zamknutí vybraných elementů (frozen elements), nastavení symetrie (např. rotační) či minimální a maximální velikosti prvků.

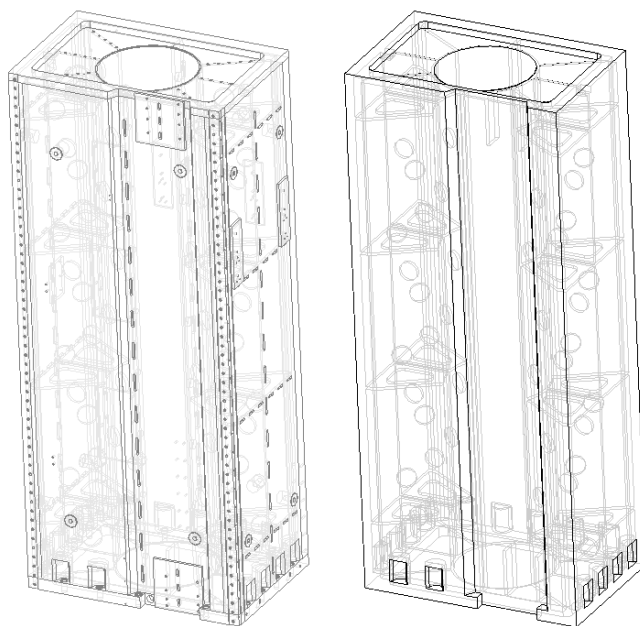
## 4. TVORBA A ANALÝZA MAT. MODELU SVAŘENCE STOJANU

V následujících kapitolách bude přiblížena tvorba matematického modelu svařence stojanu vycházející z CAD modelu, který poskytla zadavatelská firma. Většina konstrukčních prací proběhla v softwaru Solid Edge ST7 od firmy Siemens, výjimkou je pak parametrický model stojanu, který je vytvořen v konkurenčním softwaru SolidWorks, kde je i následně analyzován. Pro topologickou optimalizaci byl vybrán program FEMAP, taktéž od firmy Siemens. Veškeré konstrukční práce i výpočty proběhly na běžné pracovní stanici.

### 4.1. Tvorba matematického modelu svařence stojanu

V rámci preprocesingu je nutné připravit geometrický model stojanu pro síťování. Tyto přípravy se sestávají převážně z úkonů vedoucí ke zjednodušení geometrie, odstranění malých zaoblení, děr, a podobných entit, které mají zanedbatelný vliv na výsledky výpočtů, ale značně komplikují či přímo znemožňují vlastní tvorbu konečné prvkové sítě. Svařence se obvykle modelují jako sestavy jednotlivých dílů, které mají mezi sebou již určitou výrobní vůli. Veškeré tyto mezery je nutno před síťováním eliminovat. Komerční softwary povětšinou disponují automatickými funkcemi pro podobné zjednodušování modelů, ale u takto složitých dílů není jejich funkčnost příliš dobrá, a proto je nutné většinu těchto úkonů provést ručně. Výsledkem těchto úprav je možnost dosažení značné redukce počtu prvků, zkvalitnění sítě a urychlení samotného síťování a to vše bez podstatného ovlivnění přesnosti výsledků.

Obecně u svařovaných konstrukcí je problémem věrohodná simulace svarů, jejichž mechanické vlastnosti ovlivňuje ve skutečnosti mnoho faktorů, jako například nestejněměrné provaření a velikost samotného svaru, vliv vnitřního pnutí vlivem zvýšené teploty a podobně. Proto je obvykle nutná experimentální verifikace výsledného matematického modelu, kterou nebylo možné provést vzhledem k tomu, že nebyl fyzicky k dispozici samotný stojan. Přesto je v možné případech, kdy se na výkresové dokumentaci svařence předepisuje tupý svar s plným průvarem, na základě referencí zkušenějších výpočtářů přistoupit ke zjednodušení, kdy je ke svařenci přistupováno jako k jednomu dílu.



Obr. 23 Porovnání geometrie modelu před a po úpravách

## 4.2. Okrajové podmínky

Samotnou kapitolou při jakýchkoli simulačních výpočtech, které si kladou za cíl postihnout reálnou situaci, jsou okrajové podmínky. Tyto jsou dvojího druhu:

- a) podmínky silové, do nichž spadá veškeré zatížení vnějšími silami jak statickými tak dynamickými, včetně síly tíhové a zatížení od teploty
- b) podmínky geometrické, které vyjadřují zadané posuvy na části hranice sítě, a jejichž úkolem je napodobit reálné uložení zkoumaného tělesa v okolním prostředí

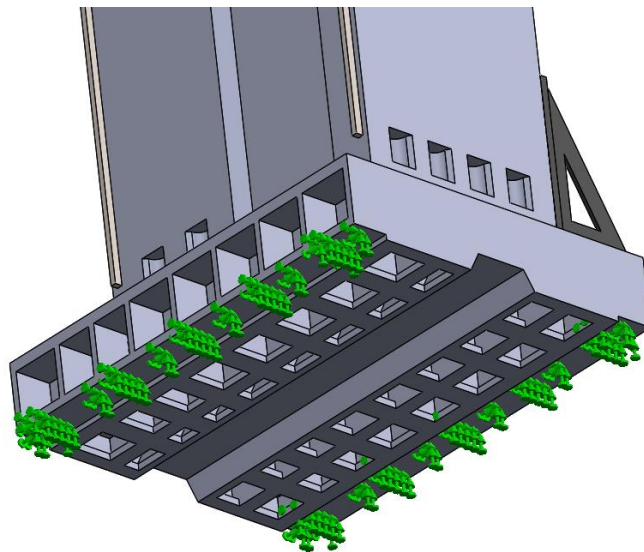
#### 4.2.1. Okrajové podmínky geometrické

Stojan stroje je směrem k základům součástí následujícího řetězce:

STOJAN → SANĚ → LINEÁRNÍ VEDENÍ + KULIČKOVÝ ŠROUB → LOŽE →  
KOTVÍCÍ PRVKY → ZÁKLAD STROJE

Tvorba matematického modelu postihující celý tento poddajný řetězec je komplikovaná a náročná, především díky neznámé tuhosti soustavy lineárního vedení v kombinaci s kuličkovým šroubem. Navíc v našem případě není důležité získat absolutně přesné výsledky prováděných analýz, nýbrž pouze vytvořit takový model, ve kterém by se dala věrohodně porovnávat konstrukce stojanů.

Do celkového výpočtového modelu tedy zahrneme pouze saně a podpěrné konzoly. Kde na plochy saní, které slouží k montáži vozíků lineárního vedení, zavedeme fixní uložení, tedy takové které odebírá všechny stupně volnosti.



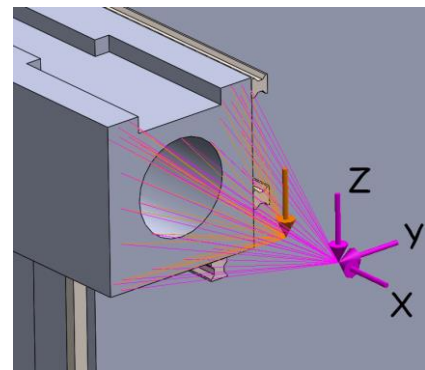
Obr. 24 Schématické zobrazení použitého fixního uložení saní stojanu

#### 4.2.2. Okrajové podmínky silové

Stojan vodorovné vyvrtávačky této konstrukce je vlivem gravitace zatížen vlastní tíhou, ale také tíhou připojených komponent, z nichž nejdůležitější směrem k nástroji jsou součástí tohoto řetězce:

STOJAN ← LINEÁRNÍ VEDENÍ + KULIČKOVÝ ŠROUB ← VŘETENÍK ← LINEÁRNÍ VEDENÍ + KULIČKOVÝ ŠROUB ← SMYKADLO ← FRÉZOVACÍ HLAVA ← NÁSTROJ

Vřeteník se pohybuje na stojanu ve svislé ose po dvou kolejnicích lineárního valivého vedení pomocí kuličkového šroubu. Jeho hmotnost, a hmotnost připojených komponent, je navíc vyvažována pomocí hydraulického válce. Smykadlo se pohybuje po vřeteníku v příčném směru na vřeteníku po třech kolejnicích lineárního valivého vedení, taktéž pomocí kuličkového šroubu. Dále uvažujme z hlediska zatěžování méně výhodnou situaci, kde se nevysouvá pracovní vřeteno, ale na smykadlu je připevněna frézovací hlava, například univerzální, jejíž působení zavedeme do modelu pomocí tíhové síly umístěné v jejím těžišti ( $m=600\text{kg}$ , vzdálenost od čela smykadla  $x=400\text{mm}$ ).



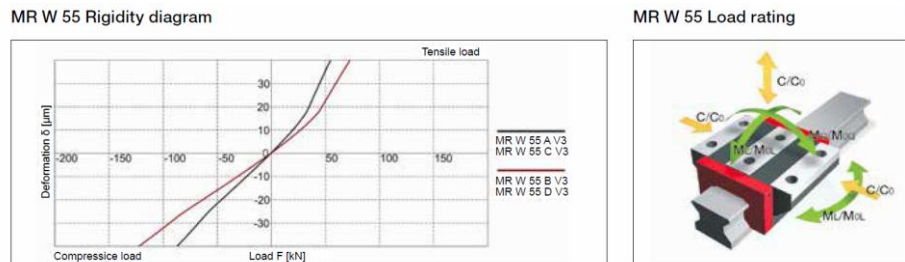
Obr. 25 Frézovací hlava HUI50  $m=600\text{kg}$  a schématické znázornění působení řezných sil

Hlavní silové působení představují řezné síly, které mají obecně v čase proměnnou velikost a směr. Pro náš případ budeme pro jednoduchost uvažovat řeznou sílu o velikosti  $F_r=10000\text{N}$ , působící ve třech zvolených směrech, u kterých se předpokládá, že jsou pro danou konstrukci z hlediska deformací nejméně příznivé. Jako místo působení těchto sil byl zvolen bod vzdálený 600mm od čela smykadla.

Poznámka: souřadnicový systém, ve kterém jsou zavedeny řezné síly, neodpovídá souřadnicovému systému stroje.

## Lineární vedení

Způsobů jak simulovat lineární vedení je hned několik. Nejpřesnější používaný přístup předpokládá tvorbu kontaktního modelu. Pro naše potřeby však postačí, když budeme realizovat lineární vedení náhradou pomocí lineárních pružinových prvků o konstantní tuhosti, kterou určíme orientačně z katalogu výrobce. [Dvořák, 2002]

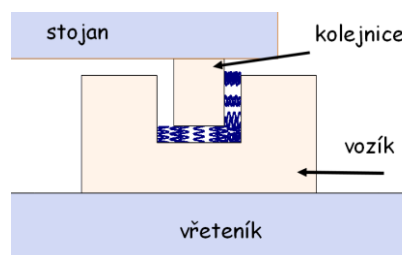


Obr. 26 Diagram tuhosti lineárního vedení výrobce SCHNEEBERGER

Stanovení přibližné hodnoty tuhosti lineárního vedení dle diagramu:

$$k = \frac{50\text{kN}}{20\mu\text{m}} = 2,5\text{e}6 \text{ N/mm}$$

Absolutní přesnost zvolené hodnoty tuhosti není pro náš případ příliš důležitá, její velikost ovlivní totiž především deformaci vřeteníkové skupiny jako celku. Na druhou stranu není možné zacházet do krajních případů, protože tato deformace (například natočení celé skupiny) ovlivňuje také směr přenášených sil.



Obr. 27 Pohled zhora na zjednodušený model vozíku a kolejnice lin. vedení



### *Kuličkový šroub*

Síla v kuličkovém šroubu je zachytávána na horním konci radiálně a axiálně, na dolním pouze radiálně. Pro výpočty budeme tedy považovat horní konec kuličkového šroubu jako vetknutý do stojanu, respektive do matice kuličkového šroubu, kterou budeme považovat za součást tělesa stojanu.



Obr. 28 Fotografie uchycení horního konce kuličkového šroubu do stojanu

Stanovení tuhosti kuličkového šroubu KS100x20 dle výrobce TOS-KUŘIM ve vzdálenosti  $x=500\text{mm}$  od horního konce provedeme následujícím způsobem. Materiál šroubu uvažujeme ocel ( $E=2,1\text{e}5\text{ MPa}$ ), a průměr  $d=100\text{mm}$ .

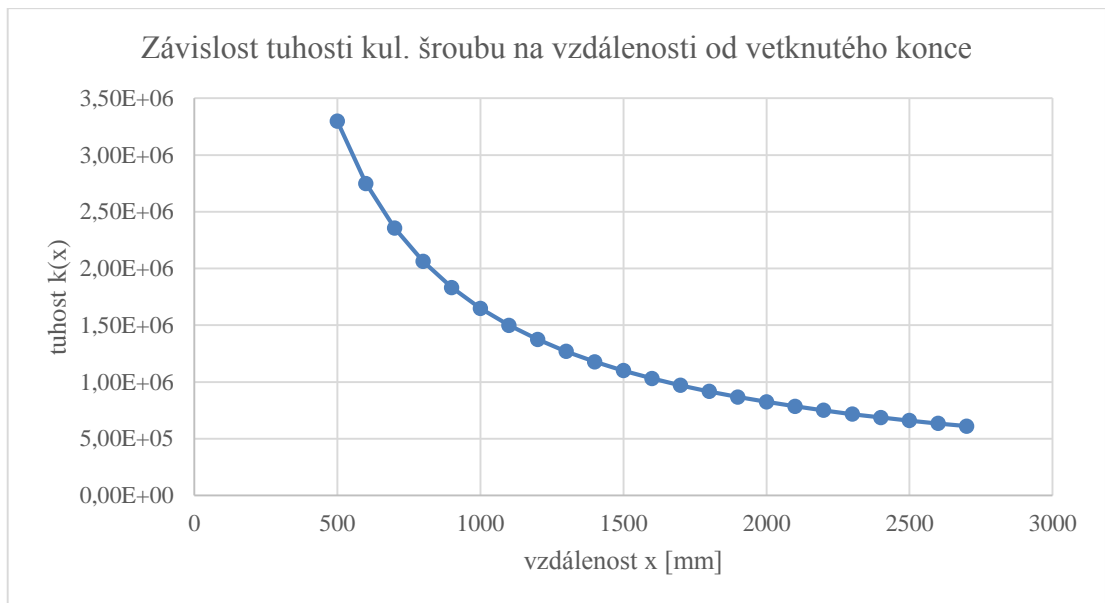
$$\text{poměrná deformace} \quad \varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \quad (4.2.1)$$

$$\text{tahové napětí v} \\ \text{průřezu} \quad \sigma = \frac{F}{S} \quad (4.2.2)$$

$$\text{obsah kruhu} \quad S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad (4.2.3)$$

$$\text{dosazení do Hookova} \\ \text{zákonu} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta x}{x} \quad (4.2.4)$$

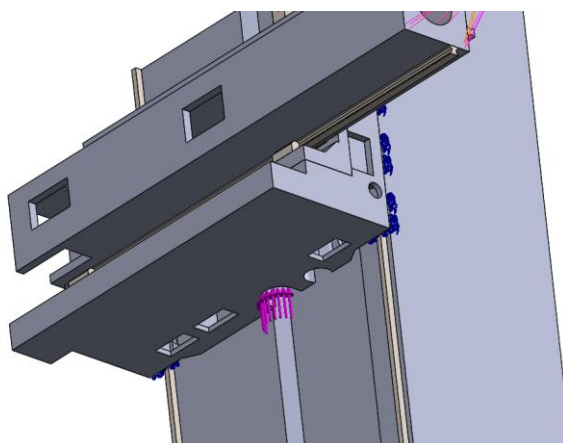
$$\text{vyjádření tuhosti} \quad k(x) = \frac{F}{\Delta x} = \frac{E \cdot S}{x} = \frac{E \cdot d^2 \cdot \pi}{4 \cdot x} = 3,3\text{e}6 \text{ N/mm} \quad (4.2.5)$$



Obr. 29 Graf závislosti tuhosti kuličkového šroubu na vzdálenosti od vetknutého konce

### *Hydraulický válec*

Hydraulický válec slouží k statickému vyvažování hmotnosti vřeteníkové skupiny včetně hmotnosti připojeného zvláštního příslušenství (např. frézovacích hlav). Ve výpočtovém modelu nahradíme jeho působení silou zavedenou na spodní hranu vřeteníku do místa předpokládaného připojení. Tato síla co do velikosti odpovídá tíze vřeteníkové skupiny  $m=5320\text{kg}$  a tíze zvolené frézovací hlavy  $m=600\text{kg}$ , celkem tedy  $F_v=59200\text{N}$ .

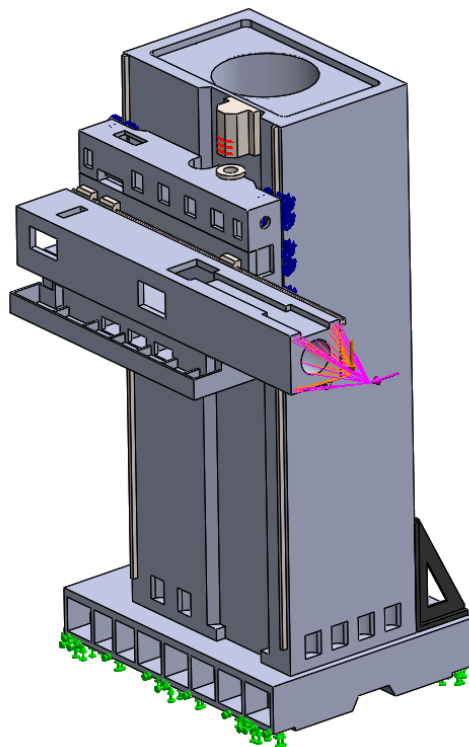


Obr. 30 Znárodnění zavedení sil od hydraulického válce

## 4.3. Celkový výpočtový model svařence stojanu

### 4.3.1. Úvod

Jelikož je vřeteníková skupina přestavitelná ve vertikálním směru a smykadlo navíc výsuvné ve směru příčném, budeme pro další výpočty uvažovat konfiguraci, u které se předpokládá, že je z hlediska zatěžování stojanu nejméně příznivá. Tato konfigurace odpovídá vřeteníku v nejvyšší poloze a smykadlu s maximálním výsuvem.



Obr. 31 Pohled na celkový výpočtový model

#### *Použité materiály*

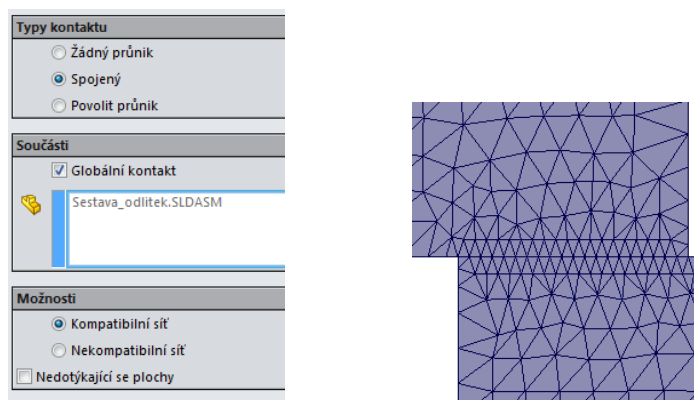
Saně, vřeteník a opěrné konzoly jsou odlitky ze šedé litiny. Tělo smykadla je odlito z ocelolitiny (ocel na odlitky). Stojan a ostatní drobné díly jsou pak vyrobeny z oceli.

### 4.3.2. Úskalí tvorby výpočtových modelů sestav

Jelikož je stojan analyzován v rámci sestavy několika připojených dílů, považuji za vhodné zmínit problémy, které se objevují u takovýchto výpočtových modelů a jejichž řešení závisí na možnostech nastavení použitého softwaru.

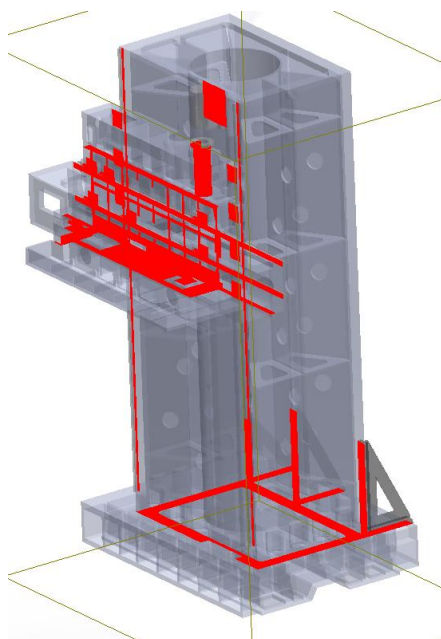
#### *Nastavení kontaktu*

V tomto případě nejde o klasickou kontaktní úlohu, ale o nastavení parametrů tvorby sítě v rámci preprocesingu, kdy dojde ke spojení sítí jednotlivých součástí. Jako velice důležité se ukázalo nastavení „Kompatibilní síť“ v kombinaci s vhodným nastavením zjemnění sítě, a to především při kontaktu menších ploch (vzhledem k velikosti sestavy).



Obr. 32 Znáznornění kompatibilní kontaktní sítě

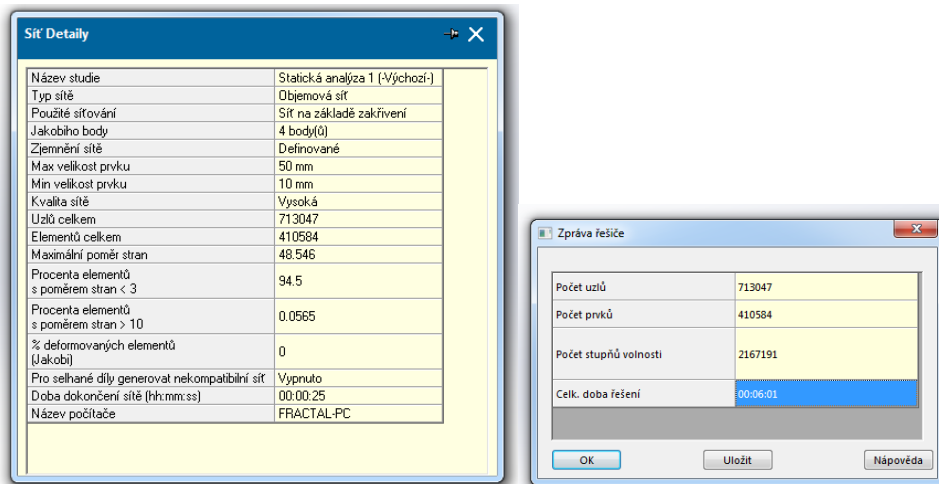
Správnost nalezení kontaktních ploch na modelu lze ověřit vizualizací, viz obrázek.



Obr. 33 Vizualizace kontaktních ploch na výpočtovém modelu

### Kvalita sítě a její vliv na celkové výsledky a dobu výpočtu

Zvláště u optimalizačních úloh, u kterých se předpokládá přesítování a nová analýza při každé iteraci, je nastavení kvality sítě vzhledem k výpočetní náročnosti velice důležité. Pro účely porovnávací studie se ukázalo jako dostatečné nastavení maximální hodnoty velikosti prvku (čtyřstěn – tetraedr) na 50mm v kombinaci s automatickým zjemňováním sítě na základě zakřivení a dodatečného ručního nastavení zjemnění sítě v místech lineárního vedení.



Obr. 34 Detaily MKP sítě použité při výpočtu

Jedním ze způsobů, jak charakterizovat kvalitu sítě, je poměr stran vzniklých prvků (aspect ratio, AR), který je například u čtyřstěnu definován jako poměr mezi nejdelší hranou a nejkratší hranou. Dokonalý čtyřstěn (tetraedr, tetrahedron) má stejně dlouhé hrany, takže  $AR = 1.0$ . Velikost AR ovlivňuje kvalitu získaných výsledků. U použité sítě se počet elementů s  $AR > 10$  pohybuje kolem 0,05%, počet elementů s  $AR < 3$  pak činí 94,5%. Takovou síť je možné považovat za kvalitní.



Obr. 35 Znárodnění rozdílu mezi čtyřstěnem s  $AR = 1$  a  $AR=10$

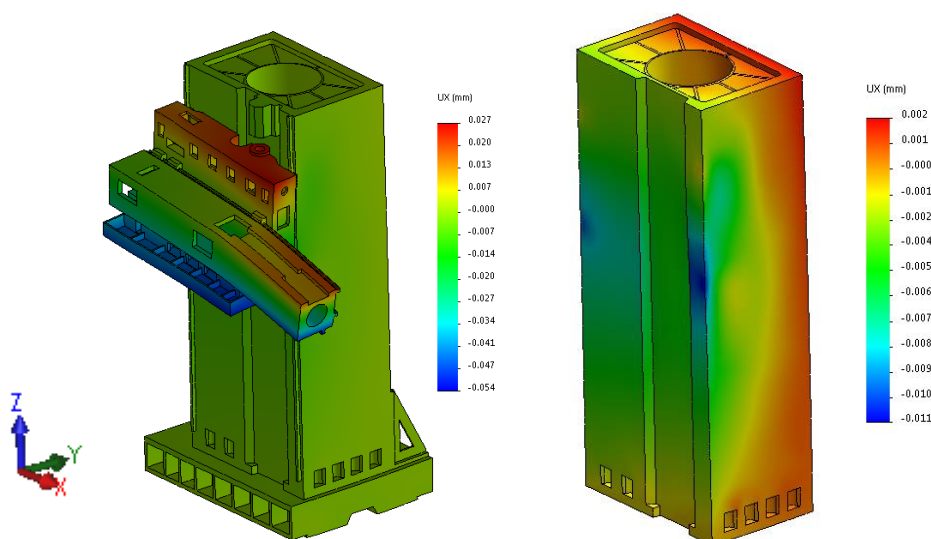
#### 4.4. Výsledky deformační analýzy modelu se svařencem

Pro posouzení míry tuhosti stojanu byl vybrán referenční bod na čele smykadla, jelikož bod, do kterého jsou zavedeny řezné síly, se nachází mimo síť a použitý software nedisponuje nástroji pro zjištění posuvu právě tohoto bodu.

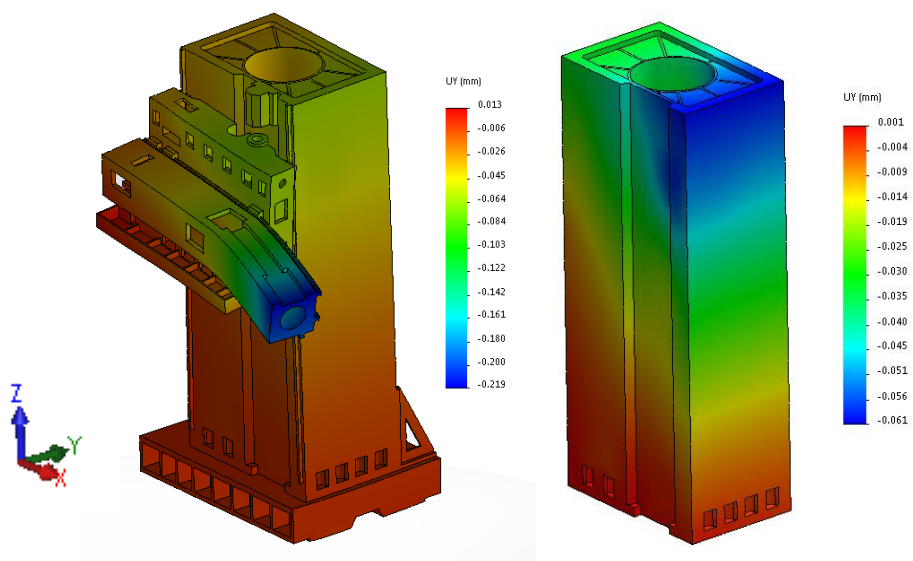
Výpočet proběhl nejprve se zatížením pouze vlastní tíhou, poté byli aplikovány vždy jednotlivě působící řezné síly ve zvolených směrech. Při zatížení vlastní tíhou byl zaznamenán celkový posun referenčního bodu  $U_{res}$  a jeho jednotlivé složky do směrů os souřadnicového systému. Při zatížení řeznou silou byl odečten pouze posun referenčního bodu ve směru působící řezné síly. Výsledný posun bodu pouze od řezné síly je pak rozdílem posuvu od zatížení řeznou silou a vlastní tíhou a posuvu od zatížení samotnou tíhou.

		Deformace [mm]			
		$U_{res}$	$X$	$Y$	$Z$
Zatížení	Vlastní tíha	0,260	0,057	-0,008	-0,254
	+ Řezná síla $X$		0,016		
	+ Řezná síla $Y$			-0,219	
	+ Řezná síla $Z$				-0,505
Rozdíl			0,041	-0,211	-0,251

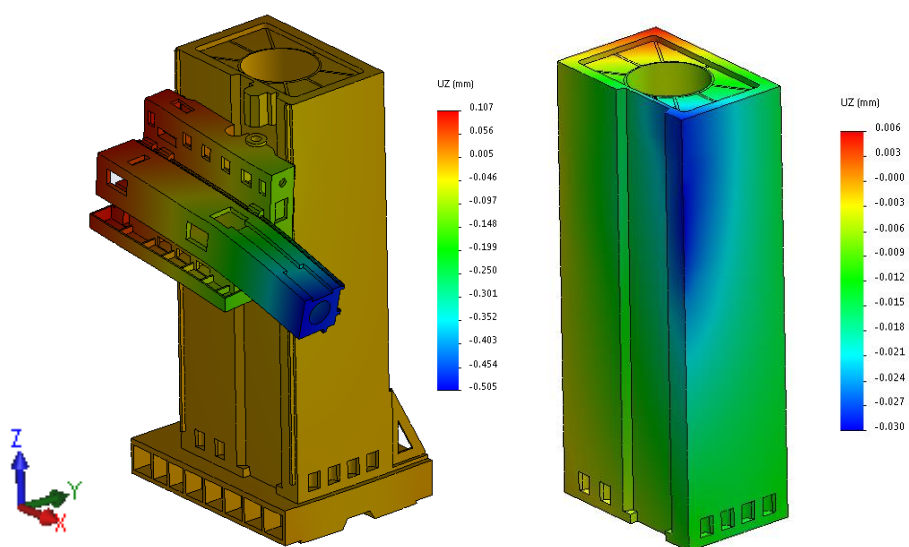
Tab. 3 Výsledky deformační analýzy modelu se svařencem



Obr. 36 Deformace ve směru X vlivem řezné síly ve směru X



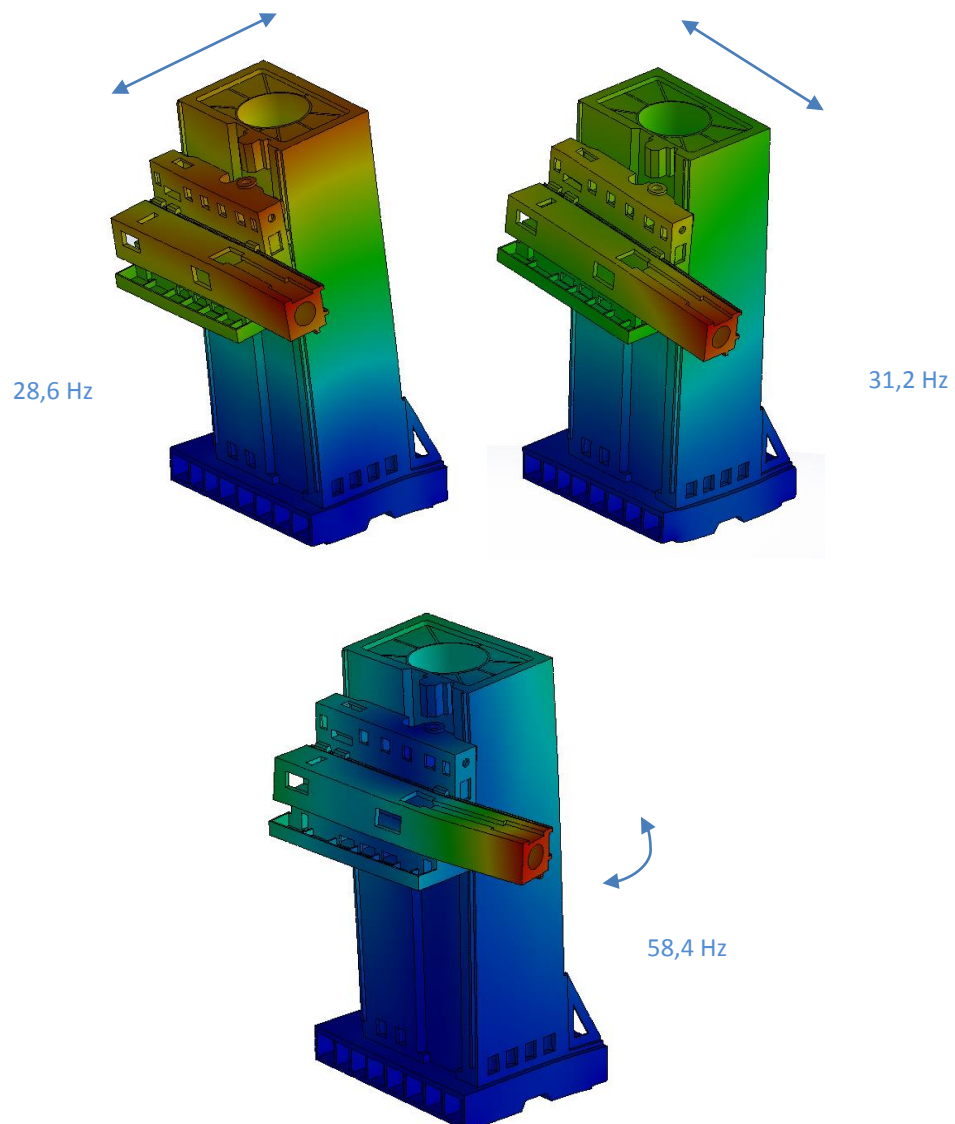
Obr. 37 Deformace ve směru Y vlivem řezné síly ve směru Y



Obr. 38 Deformace ve směru Z vlivem řezné síly ve směru Z

#### 4.5. Výsledky modální analýzy modelu se svařencem

První vlastní frekvence odpovídající důležitým vlastním tvarům, které zahrnují celou soustavu, nikoli například jen žebra atd., byly vypočítány následovně:



Obr. 39 Vypočítané vlastní frekvence a odpovídající vlastní tvary kmitů

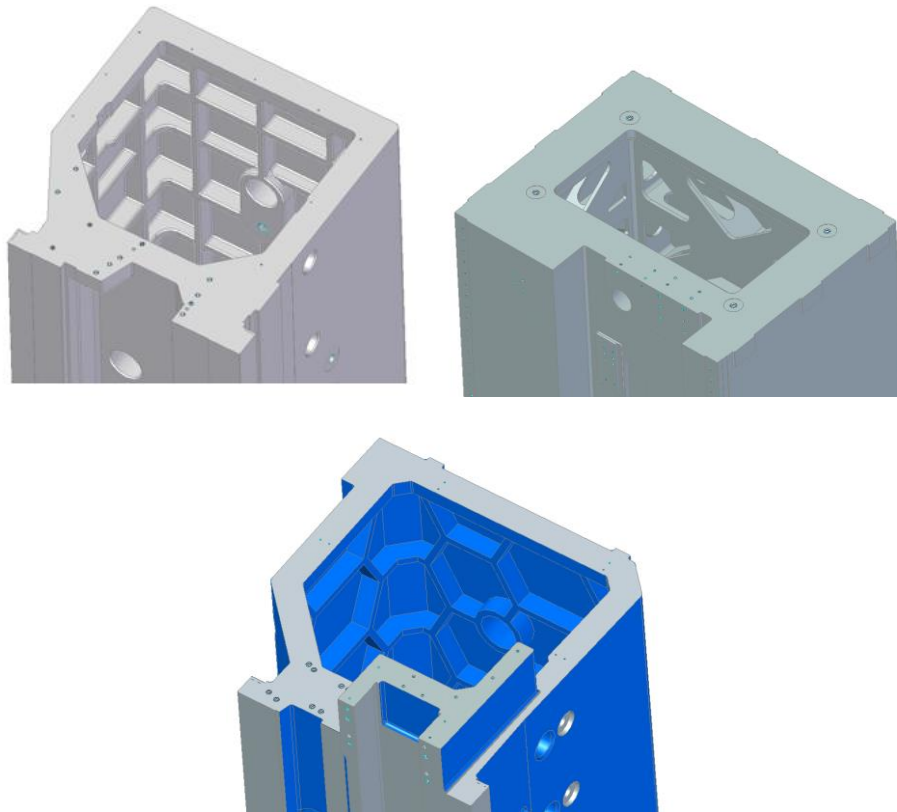
První dvě vlastní frekvence mají ohybové vlastní tvary kmitů, u třetí vlastní frekvence se jedná o torzní případ, s otáčením podle svislé osy stojanu.



## 5. NÁVRH A ANALÝZA MAT. MODELU ODLITKU STOJANU

### 5.1. Koncepce žebrování odlévaných stojanů TOS Varnsdorf

Při návrhu žebrování můžeme vycházet ze stávajících prověřených konstrukcí stojanů porovnatelné velikosti. Jak je vidět na vyobrazení níže, přístupů je několik a značně se liší. V této problematice se setkávají dva protichůdné požadavky – požadavek technologický, tedy ze strany modelárny a slévárny – na co nejjednodušší tvary. A požadavek konstrukce na husté žebrování a pokud možno co nejvíc uzavřené kapsy, především kvůli namáhání krutem. [Breník, 1970]



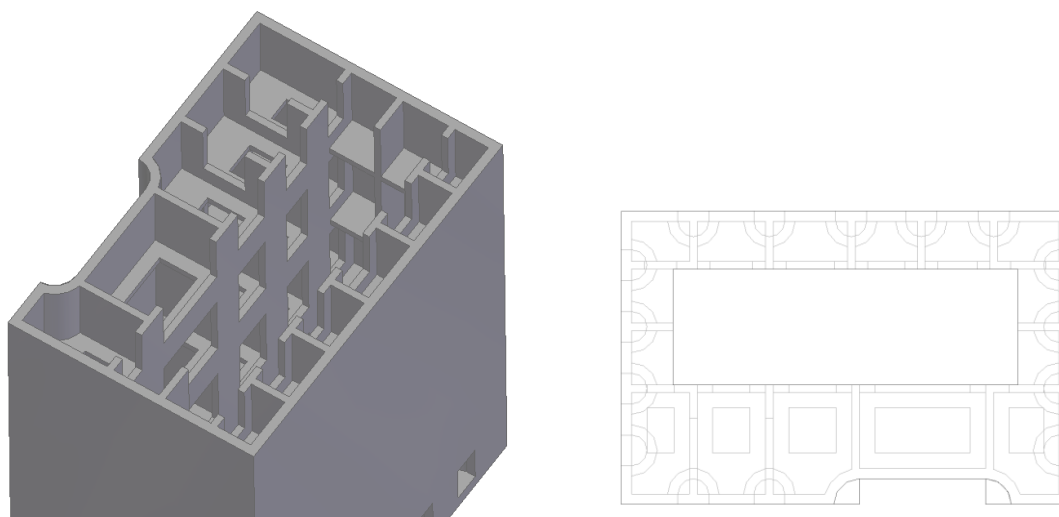
Obr. 40 Vybrané koncepce žebrování z produkce TOS Varnsdorf a.s.

Důležití je zmínit, že prostor uvnitř stojanu je obvykle využíván pro umístění protizávaží – to se týká koncepcí, kdy hmotnost vřeteníkové soustavy není vyvažována například hydraulickým válcem, soustavou kuličkových šroubů či jiným způsobem.

## 5.2. Vlastní koncepce žebrování

Při konstrukčním návrhu odlitků je nutné se vzhledem k použité technologii odlévání řídit několika zásadami. Jedná se například o doporučení vhodných tloušťek stěn, zkosení ploch, zaoblení hran, napojování žeber apod. Všechny tyto doporučení je možné v obecnosti nalézt v odborné literatuře, ale v současné praxi kdy slévárny již nejsou součástí samotných výrobních podniků, ale jedná se o externí firmy se svými vlastními zvyklostmi a zkušenostmi, lze část těchto konstrukčních záležitostí přenechat na nich. Vzhledem k povaze práce, zde tedy nebude toto dále rozebíráno, pouze zde zmíníme ty nejzákladnější zásady. [Breník, 1970] [Marek, 2010]

- vnitřní stěny odlitku chladnou mnohem pomaleji než stěny vnější, proto se tloušťka vnitřních stěn volí menší než tloušťka vnějších stěn
- odlitek nemá mít ostré úhly ani hrany, je nutné volit správná zaoblení
- různé tloušťky stěn mají být spojeny pozvolnými přechody
- v jednom místě se má spojovat co nejméně stěn
- do uzavřených kapes je potřeba mít co nejlepší přístup kvůli čištění odlitku



Obr. 41 Návrh žebrování

### 5.3. Pevností analýza modelu s odlitkem

K tvorbě výpočtového modelu obsahující odlévaný stojan je přístupováno stejně jako v případě stojanu svařovaného. Pouze je nutné upozornit na skutečnost, že stejně jako v případě svařence a svarů, dochází i u odlitků ke zjednodušení, tentokrát kvůli tomu že litina jako taková je nelineární materiál. Protože ale předpokládáme pohyb pouze v oblasti malých deformací, můžeme si dovolit použít materiálový model lineární.

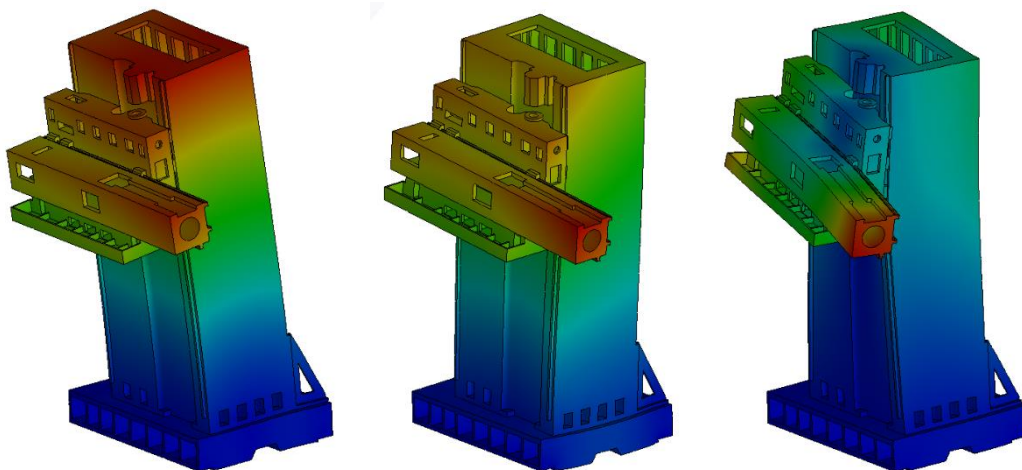
### 5.4. Výsledky pevností analýzy modelu s odlitkem

		Deformace [mm]			
		<i>Ures</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
Zatížení	Vlastní tíha	0,330	0,075	-0,028	-0,320
	+ Řezná síla X		0,006		
	+ Řezná síla Y			-0,311	
	+ Řezná síla Z				-0,630
Rozdíl			0,069	-0,283	-0,310

Tab. 4 Výsledky deformační analýzy modelu s odlitkem

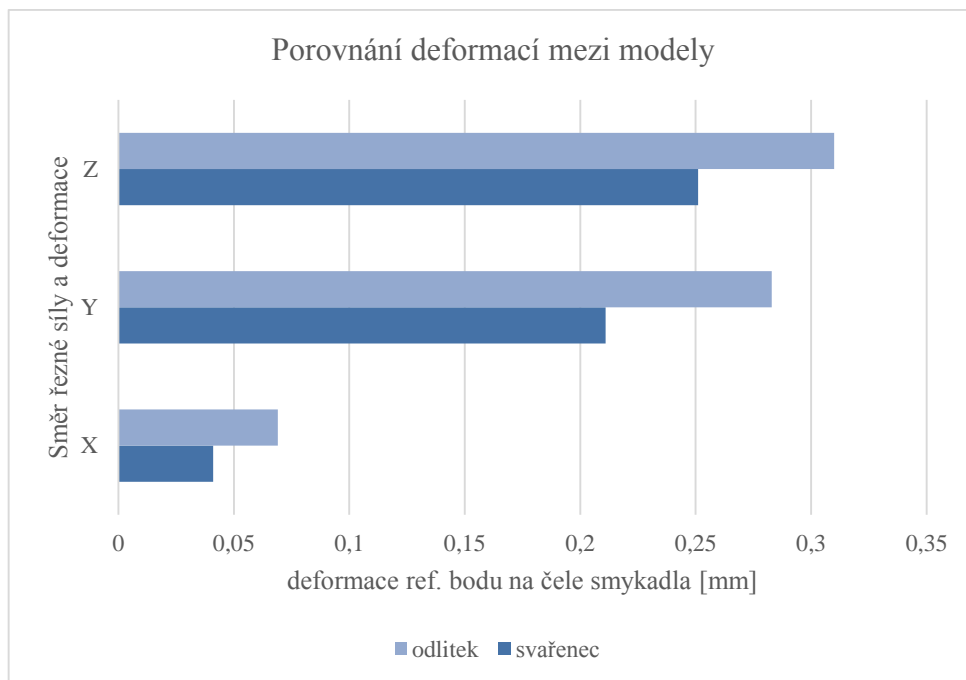
### 5.5. Výsledky modální analýzy modelu s odlitkem

Výpočtem byly zjištěny tyto tři první vlastní frekvence: 19,6Hz ; 22,7Hz; 44,9Hz

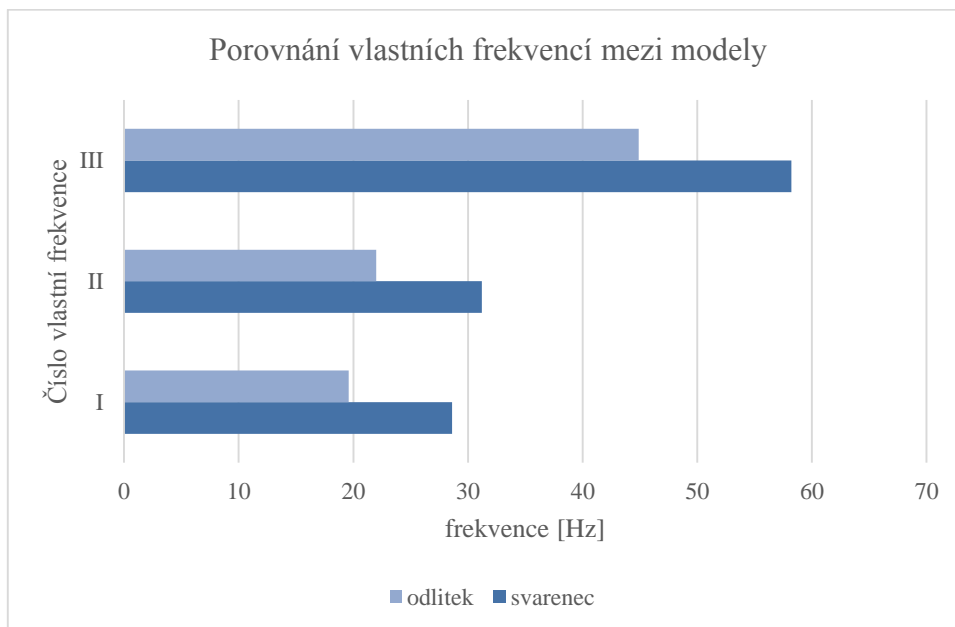


Obr. 42 Vlastní tvary kmitů modelu s odlitkem odpovídající prvním třem vlastním frekvencím

## 5.6. Srovnání navrženého modelu s odlitkem a se svařencem



Obr. 43 Porovnání deformací mezi modely



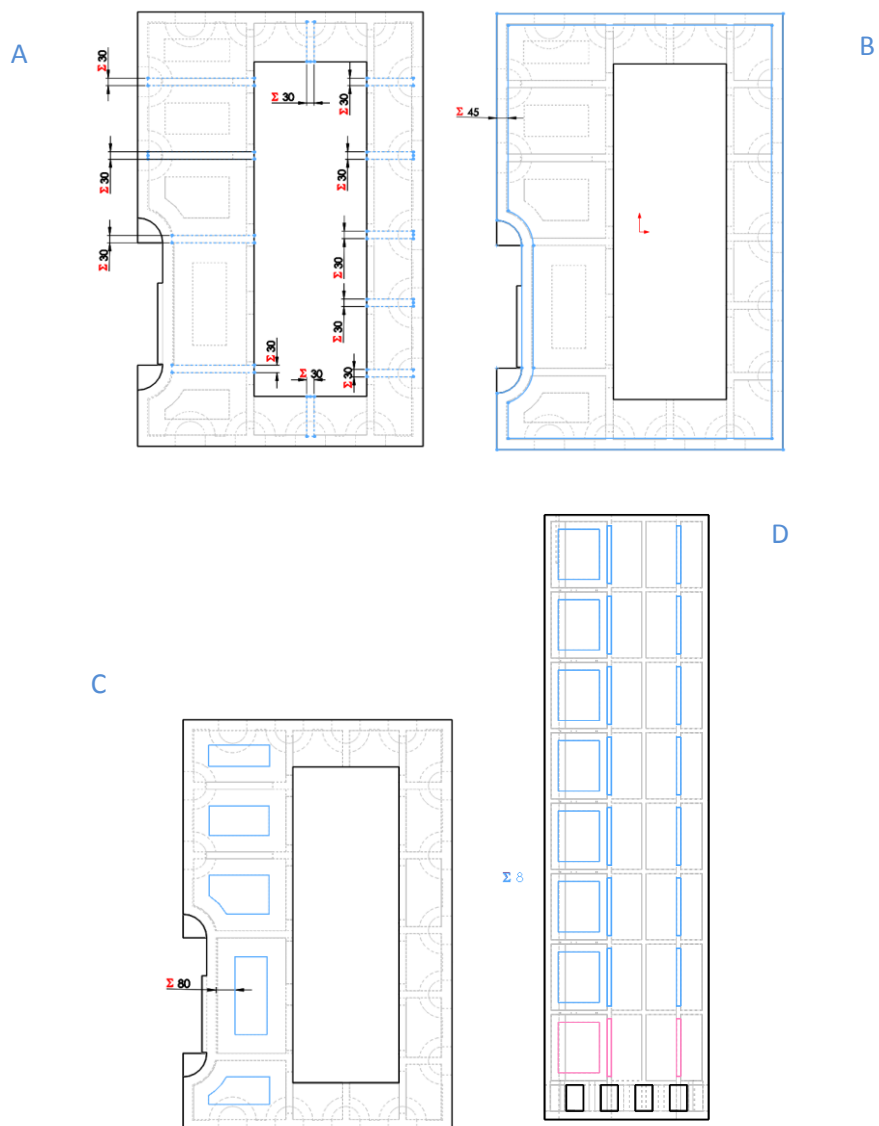
Obr. 44 Porovnání vlastních frekvencí mezi modely

## 6. PARAMETRICKÁ OPTIMALIZACE NAVRŽENÉHO STOJANU

### 6.1. Návrh proměnných parametrické optimalizace

Dle uvážení předpokládaného vlivu byly zvoleny následující čtyři návrhové proměnné.

- A - tloušťka vnitřních žeber
- B - tloušťka vnější stěny
- C - velikost odlehčení ve vodorovných stěnách
- D - počet pater vodorovných žeber

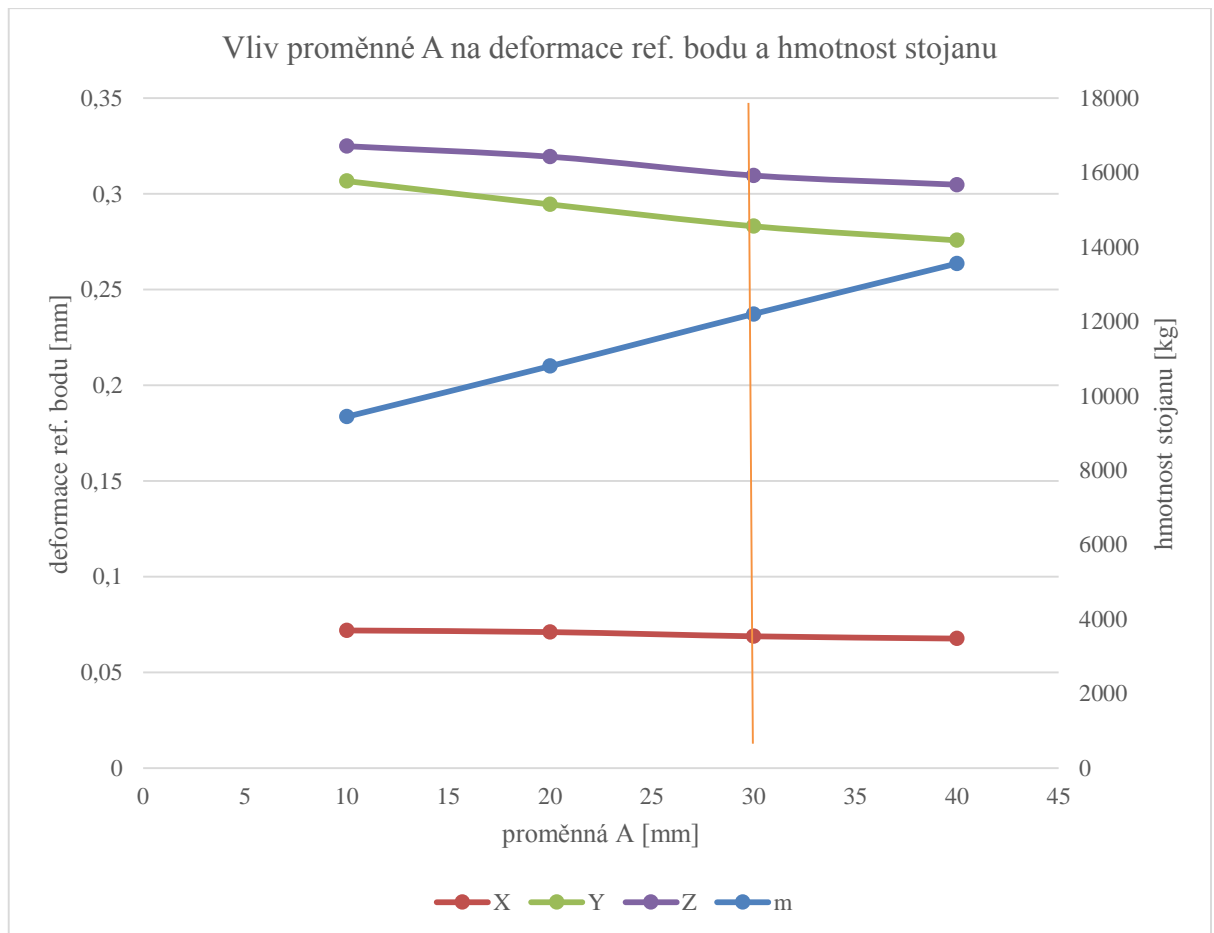


Obr. 45 Vizualizace zvolených návrhových proměnných

## 6.2. Vliv proměnné A – tloušťka žeber

		10	20	30	40
<b>Zatížení od</b>	<i>m</i>	9440	10799	12200	13556
<b>Vlastní tíha</b>	X	0,0057	0,0059	0,0061	0,0067
	Y	0,3395	0,3259	0,3112	0,3014
	Z	0,6567	0,6480	0,6303	0,6221
<b>Řezná síla + tíha</b>	X	0,0776	0,0773	0,0749	0,0743
	Y	0,0332	0,0307	0,0279	0,0253
	Z	0,3316	0,3286	0,3204	0,3175
<b>Řezná síla</b>	X	0,0719	0,0710	0,0689	0,0676
	Y	0,3066	0,2944	0,2830	0,2757
	Z	0,3249	0,3194	0,3096	0,3047

Tab. 5 Výsledky parametrické analýzy vlivu proměnné A na deformace ref. bodu a hmotnost stojanu

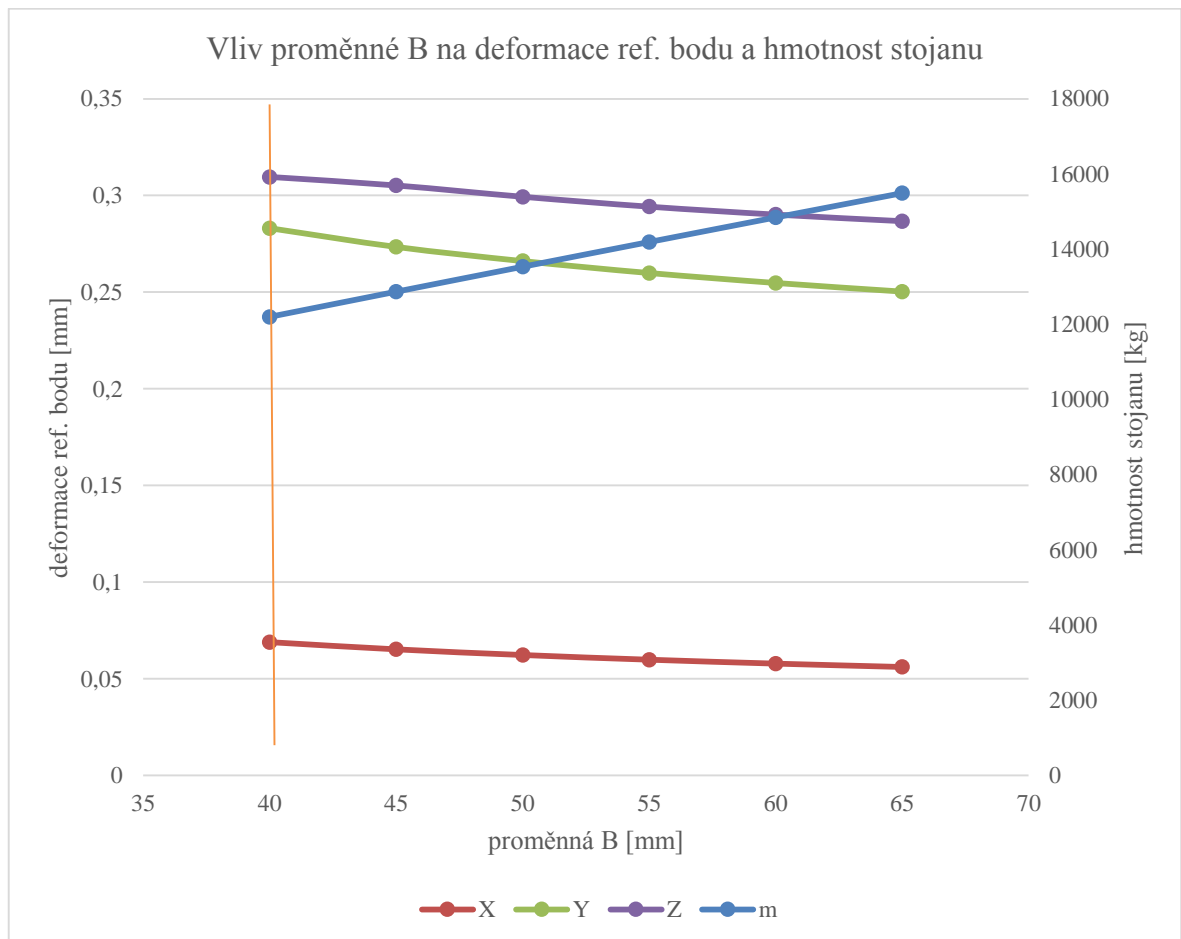


Obr. 46 Vliv tloušťky vnitřních žeber na deformace ref. bodu a hmotnost stojanu

## 6.1. Vliv proměnné B – tloušťka vnější stěny

		40	45	50	55	60	65	70
<b>Zatížení od</b>	<i>m</i>	12200	12869	13533	14191	14844	15491	16133
<b>Vlastní tíha</b>	X	0,0061	0,0078	0,0093	0,0105	0,0118	0,0126	0,0135
	Y	0,3112	0,2992	0,2895	0,2811	0,2753	0,2698	0,2642
	Z	0,6303	0,6181	0,6067	0,5962	0,5886	0,5817	0,5750
<b>Řezná síla + tíha</b>	X	0,0749	0,0730	0,0716	0,0704	0,0695	0,0687	0,0681
	Y	0,0279	0,0256	0,0236	0,0219	0,0203	0,0190	0,0177
	Z	0,3204	0,3128	0,3068	0,3020	0,2981	0,2949	0,2923
<b>Řezná síla</b>	X	0,0689	0,0652	0,0622	0,0598	0,0578	0,0561	0,0546
	Y	0,2830	0,2733	0,2660	0,2599	0,2547	0,2502	0,2462
	Z	0,3096	0,3051	0,2993	0,2942	0,2901	0,2867	0,2827

Tab. 6 Výsledky parametrické analýzy vlivu proměnné B na deformace ref. bodu a hmotnost stojanu

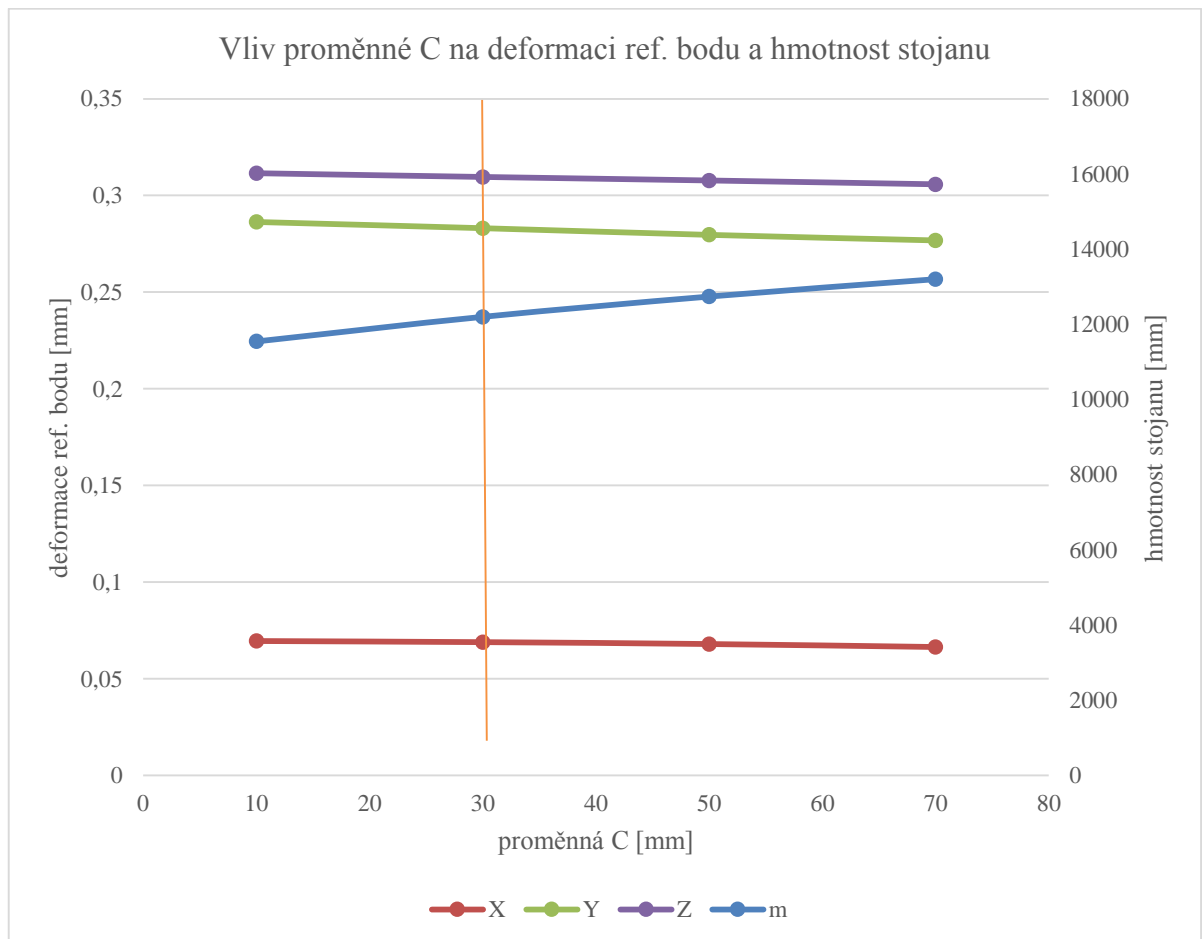


Obr. 47 Vliv tloušťky vnější stěny na deformace ref. bodu a hmotnost stojanu

## 6.2. Vliv proměnné C – velikost odlehčení

		10	30	50	70
<b>Deformace od</b>	<i>m</i>	11545	12200	12739	13201
<b>Vlastní tíha</b>	X	0,0058	0,0061	0,0064	0,0069
	Y	0,3157	0,3112	0,3060	0,3016
	Z	0,6334	0,6303	0,6264	0,6224
<b>Řezná síla + tíha</b>	X	0,0753	0,0749	0,0744	0,0733
	Y	0,0294	0,0279	0,0264	0,0249
	Z	0,3218	0,3204	0,3186	0,3166
<b>Řezná síla</b>	X	0,0695	0,0689	0,0679	0,0664
	Y	0,2863	0,2830	0,2796	0,2767
	Z	0,3115	0,3096	0,3077	0,3057

Tab. 7 Výsledky parametrické analýzy vlivu proměnné C na deformace ref. bodu a hmotnost stojanu



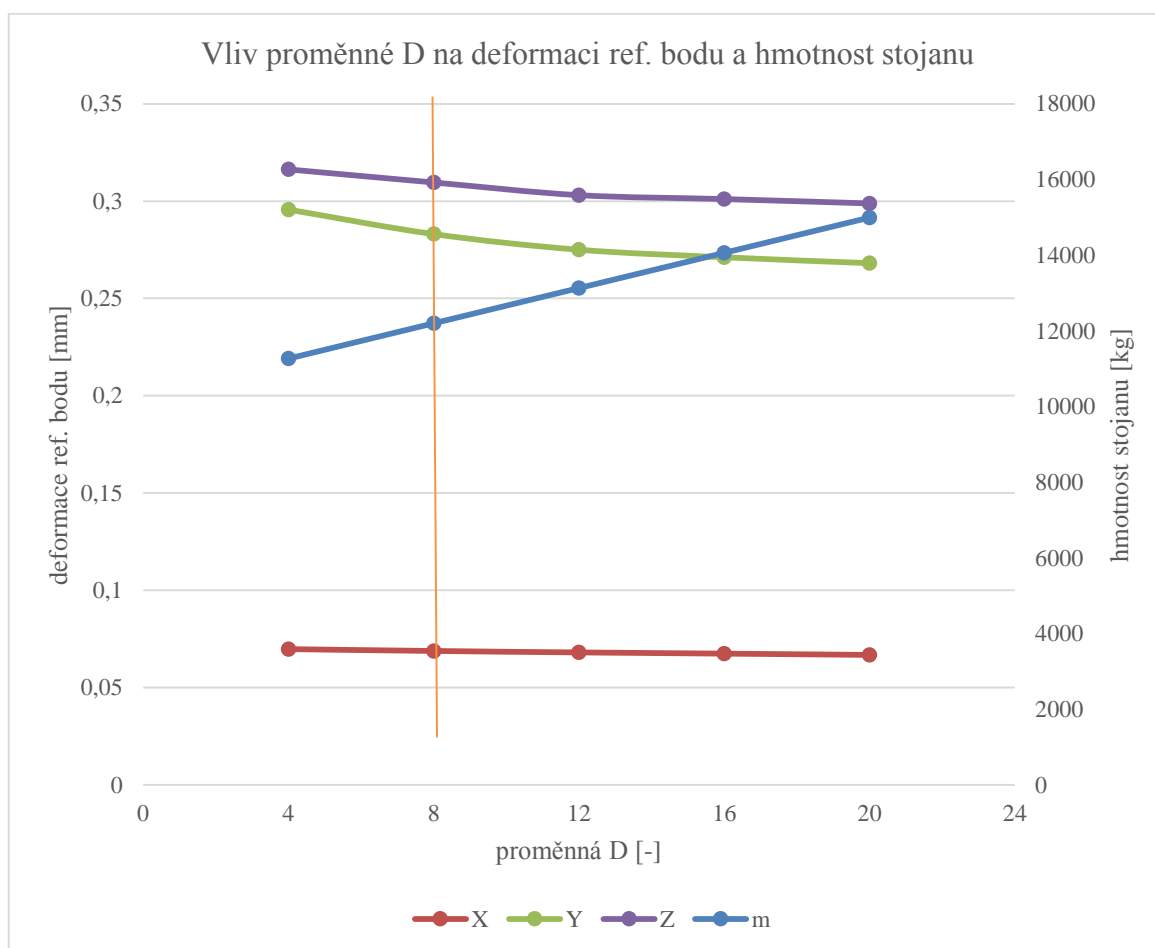
Obr. 48 Vliv velikosti odlehčení na deformace ref. bodu a hmotnost stojanu



### 6.3. Vliv proměnné D – počet pater žeber

		4	8	12	16	20
<b>Deformace od</b>	<i>m</i>	11267	12200	13131	14062	14993
<b>Vlastní tíha</b>	X	0,0059	0,0061	0,0062	0,0064	0,0065
	Y	0,3251	0,3112	0,3027	0,2979	0,2931
	Z	0,6415	0,6303	0,628	0,6170	0,6132
<b>Řezná síla + tíha</b>	X	0,0757	0,0749	0,0743	0,0739	0,0733
	Y	0,0293	0,0279	0,0269	0,0258	0,0248
	Z	0,3247	0,3204	0,3169	0,3159	0,3141
<b>Řezná síla</b>	X	0,0698	0,0689	0,0681	0,0674	0,0668
	Y	0,2956	0,2830	0,2750	0,2711	0,2681
	Z	0,3163	0,3096	0,3030	0,3010	0,2988

Tab. 8 Výsledky parametrické analýzy vlivu proměnné D na deformace ref. bodu a hmotnost stojanu



Obr. 49 Vliv počtu pater na deformace ref. bodu a hmotnost stojanu

#### 6.4. Diskuze výsledků parametrické optimalizace

Z provedené analýzy vlivu jednotlivých zvolených konstrukčních proměnných na posunutí referenčního bodu na čele smykadla a na hmotnost stojanu lze učinit několik obecných závěrů. Jelikož je průběh změn téměř lineární, můžeme mezi sebou porovnávat vlivy jednotlivých proměnných v rámci stejného přírůstku hmotnosti, například  $dm=2000\text{kg}$ . Míru vlivu pak můžeme porovnávat dle celkového posunutí  $dU = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$ .

		Proměnná			
		A	B	C	D
Změna posunutí [um]	dX	2,060	7,803	3,731	1,594
	dY	15,053	19,927	11,521	14,787
	dZ	9,776	13,910	6,920	9,382
	dU	18,067	25,524	13,948	17,585

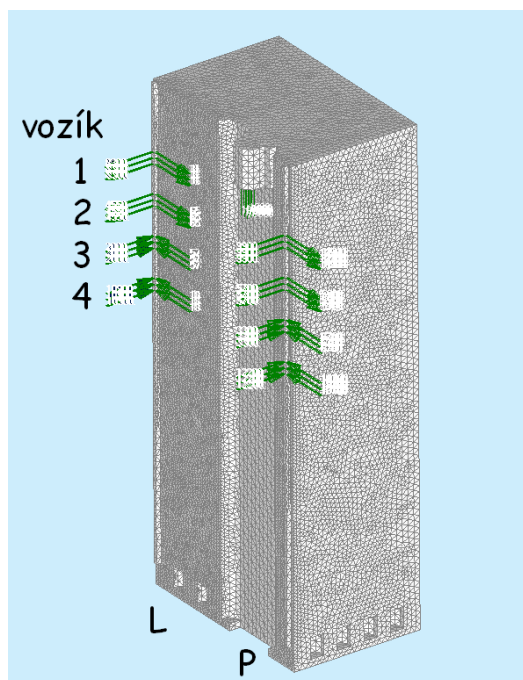
Tab. 9 Tabulka porovnání vlivu zvolených konstrukčních proměnných na změnu posunutí referenčního bodu na čele smykadla

Z výše uvedené tabulky je zřejmé, že největší vliv na posunutí referenčního bodu bude mít při uvažovaném přírůstku  $dm=2000\text{kg}$  konstrukční proměnná B – tedy tloušťka vnější stěny. Naopak nejmenší vliv má velikost odlehčení (C). Vliv tloušťky žeber (A) a počtu pater žeber (B) je srovnatelný.

## 7. OPTIMALIZACE TOPOLOGIE TĚLESA STOJANU

### 7.1. Úvod

Úlohy optimalizace topologie jsou nepoměrně výpočetně náročnější než úlohy parametrické optimalizace, proto se vždy vyplatí uvážit možnost využití zjednodušení výpočtového modelu. V našem případě je možné provádět výpočty na modelu samotného stojanu, k tomu je ovšem nutné korektně přenést síly působící na stojan v rámci sestavy do samotného modelu stojanu. Tyto síly lze určit přímo z pružin nahrazujících lineární vedení a kuličkový šroub. Na obrázku níže se nachází vizualizace zavedení sil do výpočtového modelu s vyznačenou číselnou identifikací jednotlivých vozíků – odshora dolů 1-4 v kombinaci s určením strany, levá (L) či pravá (P). Vozíky přenáší normálové síly ( $F_n$ ) a tečné síly ( $F_t$ ).



Obr. 50 Vizualizace zavedení sil do výpočtového modelu pro optimalizaci topologie

*Určení sil v pružinách nahrazujících lineární vedení vertikální osy*

		<b>L</b>		<b>P</b>	
		<b>Fn [N]</b>	<b>Ft [N]</b>	<b>Fn [N]</b>	<b>Ft [N]</b>
<b>Bez zatížení</b>	<b>1</b>	6300	8750	7300	9400
	<b>2</b>	3500	3250	4300	3000
	<b>3</b>	-1500	-2700	-2250	-3500
	<b>4</b>	-8200	-8600	-9300	-9600

Tab. 10 Síly v pružinách lineárního vedení v případě zatížení pouze vlastní tíhou

		<b>L</b>		<b>P</b>	
		<b>Fn [N]</b>	<b>Ft [N]</b>	<b>Fn [N]</b>	<b>Ft [N]</b>
<b>Řezná síla X</b>	<b>1</b>	5800	7400	7780	8300
	<b>2</b>	2550	1850	5100	2000
	<b>3</b>	-2600	-4200	-1100	-4500
	<b>4</b>	-9750	-10200	-7750	-10700

Tab. 11 Síly v pružinách lineárního vedení v případě zatížení řeznou silou ve směru X

		<b>L</b>		<b>P</b>	
		<b>Fn [N]</b>	<b>Ft [N]</b>	<b>Fn [N]</b>	<b>Ft [N]</b>
<b>Řezná síla Y</b>	<b>1</b>	5000	8700	10700	9200
	<b>2</b>	700	3100	9700	3400
	<b>3</b>	-4700	-3000	3700	-3000
	<b>4</b>	-12000	-8900	-3000	-9600

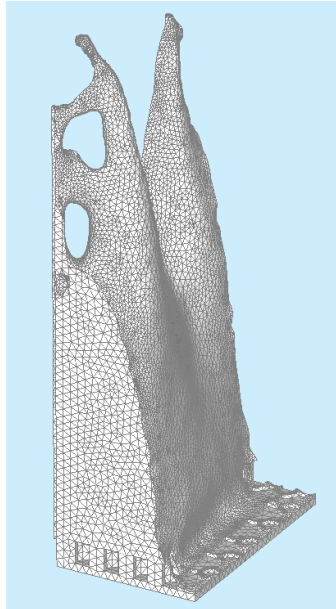
Tab. 12 Síly v pružinách lineárního vedení v případě zatížení řeznou silou ve směru Y

		<b>L</b>		<b>P</b>	
		<b>Fn [N]</b>	<b>Ft [N]</b>	<b>Fn [N]</b>	<b>Ft [N]</b>
<b>Řezná síla Z</b>	<b>1</b>	8300	18100	9900	18900
	<b>2</b>	4550	6500	5700	5900
	<b>3</b>	-2000	-5700	-3300	-6700
	<b>4</b>	-10900	-18100	-12200	-18700

Tab. 13 Síly v pružinách lineárního vedení v případě zatížení řeznou silou ve směru Z

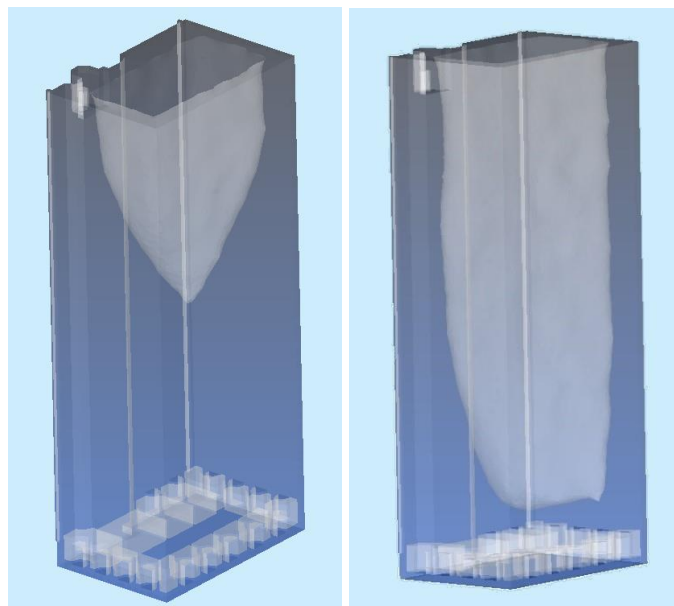
## 7.2. Výchozí výpočtový model – plný materiál

V případě, že provedeme výpočet topologické optimalizace na výchozím modelu stojanu, který neobsahuje žádné dutiny, a tvoří jej pouze plný materiál, získáme výsledek podobný obrázku níže. Řešič v takovémto případě využívá pouze podmínku odebrání 70% objemu a zachování elementů, na kterých jsou definovány okrajové podmínky.



Obr. 51 Výsledek topologické optimalizace stojanu pouze s podmínkou odebrání 70% objemu

Vzhledem k nepoužitelnosti takovéhoho výsledku, se pokusme v následujícím kroku omezit odebrání elementů nacházejících se na vnějších obvodových stěnách stojanu.

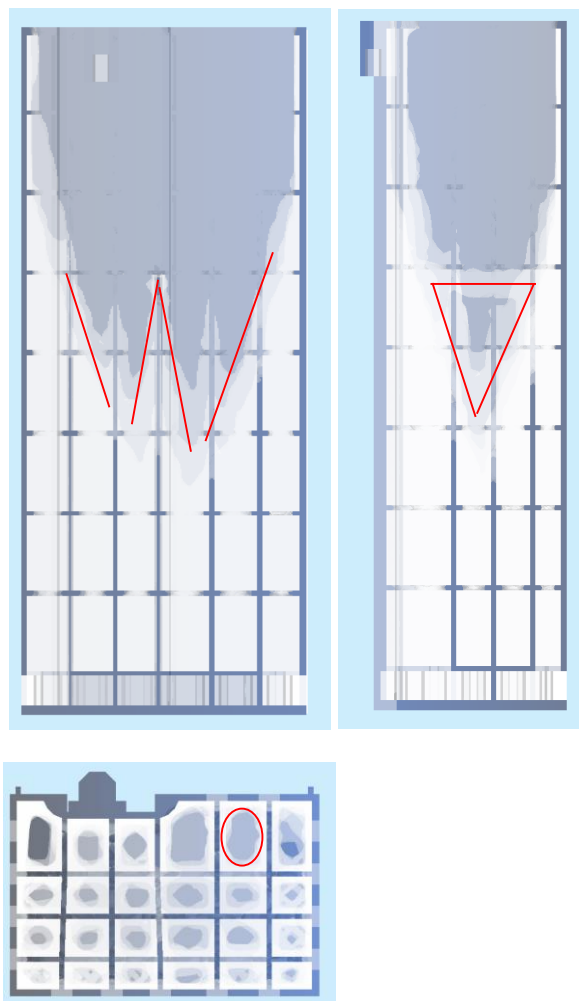


Obr. 52 Výsledek topologické optimalizace stojanu s omezením odebrání vnějších stěn s podmínkou odebrání 30% (vlevo) a 70% (vpravo) objemu

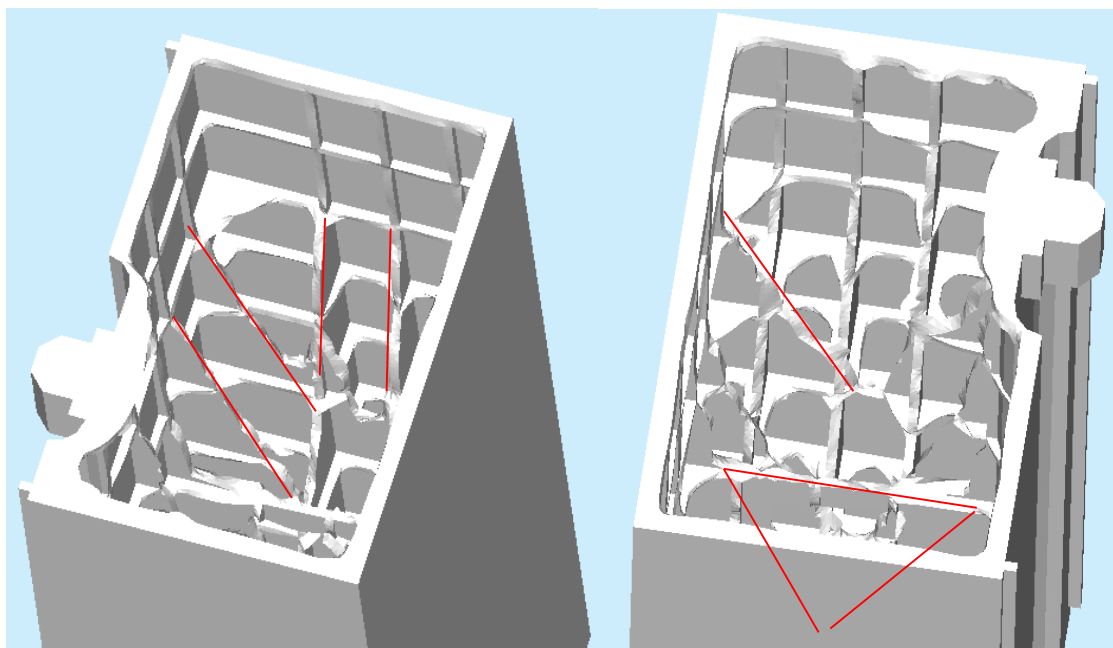
### 7.3. Upravený výpočtový model – plně vyztuženo žebry

V předchozím pokusu jsme obdrželi výsledek, který není příliš překvapivý. V rámci optimalizace došlo k postupnému odebírání materiálu ze středu stojanu a to směrem odshora dolů. Nedošlo k tvorbě žádných žeber ani výztuh.

Proto se nyní se pokusme provést topologickou optimalizaci na stojanu, který obsahuje vodorovná a svislá žebra v celém svém objemu. Cílem tohoto pokusu je především snaha zjistit významnost jednotlivých žeber při daném zatěžování.



Obr. 53 Výsledek topologické optimalizace stojanu s vodorovnými a svislými žebry při podmínce odebrání 30% objemu



Obr. 54 Výsledek topologické optimalizace stojanu s vodorovnými a svislými žebry při podmínce odebrání 30% objemu – 3D pohled

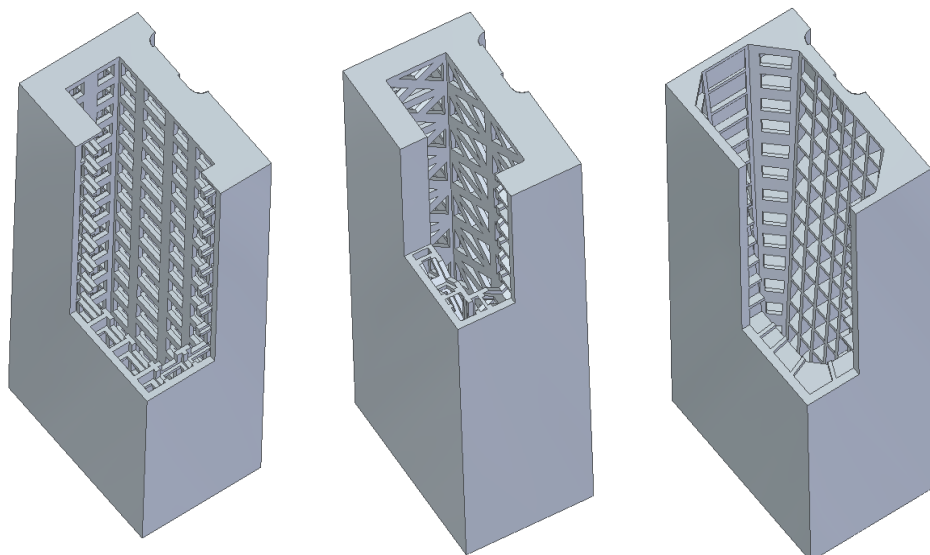
Z předchozích vizualizací výsledků lze usoudit několik závěrů.

- Odebírání materiálu opět vychází z horní strany stojanu a pokračuje směrem dolů v klínovitém tvaru, ovšem na vnějších stěnách zůstává určité žebrované vyztužení. Tento fakt koresponduje s parametrickou analýzou ve smyslu významného vlivu vnější stěny tělesa stojanu.
- Na první pohled je také patrné odebrání materiálu prakticky na všech plochách pater mezi žebry. Toto naopak opět koresponduje se závěrem parametrické analýzy, že tedy velikost odlehčení nemá výraznější vliv na tuhost, ale naopak výrazně ovlivňuje hmotnost stojanu.
- Výztuha napříč stojanem se objevuje přibližně až v polovině výše stojanu.

## 8. KONEČNÝ NÁVRH OPTIMALIZOVANÉHO STOJANU

Interpretovat výsledky parametrické optimalizace nečiní větší potíže, na druhou stranu metoda optimalizace topologie poskytuje spíše abstraktní výsledek, který lze poměrně těžko uchopit a přetvořit do konstrukčního návrhu. Snazší situace nastává u prostorově méně členitých a z hlediska zatěžování jednodušších těles, než u těles topologicky složitých jako jsou odlitky nosných dílů obráběcích strojů.

Tak či tak, zásadní problém při konstrukčním návrhu představují především omezení technologická, tedy omezení plynoucí z vyrobitelnosti a ekonomičnost výroby návrhu. Konkrétně u těles litých stojanů vyvstává navíc požadavek modularity modelového zařízení, tak aby mohl být stojan dle potřeb zákazníka zvýšen, a to řádově až na dvojnásobek původní výšky. Různé zkosené stěny a obecné plochy také značně komplikují montáž souvisejících komponent (vedení manipulátoru automatické výměny nástrojů, krytování , či případně pojízdné plošiny obsluhy). Členitost vnitřních dutin zase komplikuje a prodražuje výrobu modelového zařízení a také například znesnadňuje následné vyjmutí jader či čištění odlitku. Z těchto důvodů se tedy upřednostňují rovinné plochy a co nejjednodušší tvary. Výstupem této práce jsou tři návrhy optimalizovaného stojanu, které se liší koncepcí žebrování.



Obr. 55 Výsledné návrhy – zleva X1,X2,X3



## 8.1. Výsledky analýzy deformací a vl. frekvencí na navržených stojanech

Návrh odlitku X1		Deformace [mm]			
		<i>Ures</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
Zatížení	vlastní tíha	0,302	0,068	0,016	0,294
	+ řezná síla <i>X</i>		0,014		
	+ řezná síla <i>Y</i>			0,258	
	+ řezná síla <i>Z</i>				0,578
rozdíl			0,054	0,242	0,284

Tab. 14 Výsledky deformační analýzy modelu s odlitkem X1

Návrh odlitku X2		Deformace [mm]			
		<i>Ures</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
Zatížení	vlastní tíha	0,303	0,068	0,016	0,295
	+ řezná síla <i>X</i>		0,016		
	+ řezná síla <i>Y</i>			0,252	
	+ řezná síla <i>Z</i>				0,578
rozdíl			0,052	0,236	0,283

Tab. 15 Výsledky deformační analýzy modelu s odlitkem X2

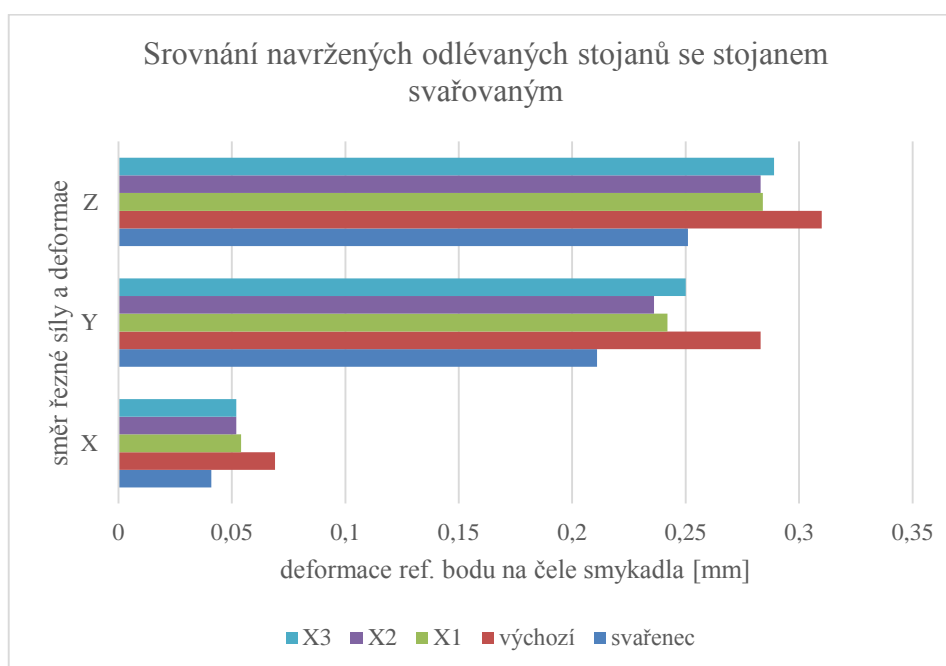
Návrh odlitku X3		Deformace [mm]			
		<i>Ures</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
Zatížení	vlastní tíha	0,304	0,066	0,023	0,296
	+ řezná síla <i>X</i>		0,014		
	+ řezná síla <i>Y</i>			0,273	
	+ řezná síla <i>Z</i>				0,585
rozdíl			0,052	0,25	0,289

Tab. 16 Výsledky deformační analýzy modelu s odlitkem X3

## 8.2. Srovnání navržených stojanů se stojanem svařovaným

		svařenec	odlitek			
			výchozí	X1	X2	X3
<b>Hmotnost[kg]</b>	<i>m</i>	10500	12200	17300	17900	17100
<b>def. ref. bodu [mm]</b>	<i>X</i>	0,041	0,069	0,054	0,052	0,052
	<i>Y</i>	0,211	0,283	0,242	0,236	0,25
	<i>Z</i>	0,251	0,31	0,284	0,283	0,289
<b>vl. frekvence [Hz]</b>	<i>I</i>	28,6	19,6	20,9	20,6	22,0
	<i>II</i>	31,2	22,0	23,6	23,6	24,6
	<i>III</i>	58,2	44,9	48,0	48,6	48,5

Tab. 17 Porovnání deformací ref. bodu a vl. frekvencí mezi svařencem a jednotlivými návrhy odlitku



Obr. 56 Srovnání navržených stojanů se stojanem svařovaným

Z výsledků analýzy je patrné, že navržené lité stojany vycházejí minimálně o 50% hmotnější než stojan svařovaný, a také přibližně o 20% poddajnější. Litý stojan, který by měl být stejně tuhý jako svařovaný, vychází dle prvotních návrhů o 100% hmotnější. To odpovídá přibližně rozdílu Youngova modulu pružnosti ( 1,2GPa u litiny vs. 2,1GPa u oceli). Důležité je ale zmínit že hlavní podíl poddajnosti nosné struktury stroje nemá stojan, ale spíše vřeteníková skupina, konkrétně největší vliv bude mít vysunutě smykadlo.

## ZÁVĚR

V rámci této diplomové práce byl vytvořen zjednodušený výpočtový model vodorovné stolové vyvrtávačky MAXIMA firmy TOS Varnsdorf za účelem identifikovat statickou tuhost a modální parametry ocelového svařovaného stojanu, který má být nahrazen především z ekonomických důvodů stojanem odlévaným ze šedé litiny. Úkolem této práce bylo navrhnout takový odlitek stojanu, který by se svými vlastnostmi co nejvíce blížil současnému stojanu.

V rámci řešení se vyskytlo hned několik překážek či problémů, které byly více či méně v rámci možností a především vzhledem k účelu práce vyřešeny. V souhrnu se jednalo především o následující body.

- Zprvé je důležité zmínit, že nebylo vzhledem k fyzické nedosažitelnosti možné verifikovat vytvořený výpočtový model, neproběhlo tedy žádné měření statické tuhosti ani modálních parametrů. Použitelnost výpočtového modelu pro porovnávací analýzu byla tedy pouze ověřena na základě zkušeností výpočtářů z obdobných případů.
- S předchozím bodem souvisí zpočátku poměrně nejistá interpretace použití náhrady pohybových komponent, jako je lineární vedení a kuličkový šroub. Přístupů jak tyto náhrady realizovat je hned několik, pro potřeby této optimalizační práce se však ukázalo jako nejvíce efektivní poměrně jednoduché nahrazení tuhosti komponent lineárními pružinovými prvky. Tlumení těchto komponent je vzhledem k principu použitých valivých tělísek natolik malé, že jsme si ho mohli dovolit v práci zanedbat.<sup>[Marek,2010]</sup>
- V rámci parametrické optimalizace se ukázalo jako největší úskalí korektní vytvoření parametrického modelu stojanu a jeho umístění do celku sestavy v použitém softwaru SolidWorks. Poměrně velký čas si také vyžádalo korektní nastavení kontaktů a parametrů konečněprvkové sítě.
- Aplikace metody optimalizace topologie pro těleso stojanu pak představovala největší výzvu. Tato práce jistě nevyčerpala veškerý její potenciál, hlubší ponoření do problematiky by vyžadovalo do budoucna intenzivnější studium a především získání více zkušeností.

- Přestože teoretický základ použitých optimalizačních metod přesahuje látku vyučovanou v rámci inženýrského studia, bylo zde snahou postihnout a popsat alespoň jejich základní principy.

Výsledkem této práce je geometrický model optimalizovaného odlitku stojanu ve třech variantách. Jedná se ovšem o předběžný návrh, jež by bylo nutné z hlediska konstrukce či technologie upravit. Je důležité zmínit, že ke skutečné realizaci tohoto stojanu nedojde, protože tato diplomová práce zabrala velké množství času, a požadavky praxe na vývoj a konstrukci se pohybují v jiném měřítku. V současné době je vyvinuta koncepce litého stojanu, jehož přímou součástí jsou již samotné saně. Tento nový přístup dává mnohem větší prostor pro práci s návrhem optimální topologie nosné struktury stroje, než tomu bylo doposud. Úměrně těmto možnostem ovšem také rostou nároky na konstrukční práce, tvorbu technologických postupů, montáž a samozřejmě i na samotnou výrobu.

Přínos této práce bych tedy osobně spatřoval v prohloubení znalostí dané problematiky, ujasnění si používaných pojmů a stanovení postupu jak by bylo možné postupovat v obdobných případech. Myslím si tedy, že znalosti a zkušenosti získané při vypracování této práce v budoucnu jistě využiji, buď přímo v práci ve firmě při návrhu jiného nosného dílce obráběcího stroje, či snad v případném postgraduálním studiu, kde bych se této problematice nadále rád věnoval.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A ODKAZŮ

BENDSOE, Martin. *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*. Berlin: Springer, 1995.

BRENÍK, Přemysl a Josef PÍČ. *Obráběcí stroje – Základy konstrukce a výpočtů*. Praha: SNTL, 1970.

DVOŘÁK, Božek. *Návrh skupiny výsuvného smykadla obráběcího stroje GRATA s ohledem na mechanické vlastnosti systému*. Diplomová práce. TU v Liberci, 2002.

JUREK, Miloš. *Numerické metody optimalizace*. Diplomová práce. UTB ve Zlíně, 2007.

LAŠOVÁ, Václava.: *Základy stavby obráběcích strojů* [online]. Západočeská univerzita v Plzni, 2012. Dostupné z:

[https://www.zcu.cz/pracoviste/vyd/online/Zaklady\\_stavby.pdf](https://www.zcu.cz/pracoviste/vyd/online/Zaklady_stavby.pdf)

MAREK, Jiří. *Konstrukce CNC obráběcích strojů*. Vyd. 2, přeprac., rozš. Praha: MM publishing, 2010, 420 s. MM speciál. ISBN 978-80-254-7980-3.

MAREŠ, Tomáš. *Základy konstrukční optimalizace* [online]. Praha, 2006. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/tomas.mares/zko.pdf>

SEDLÁČEK, Petr a Jaroslav ŠINDLER. *Topologická optimalizace nosných dílců*. ČVUT v Praze, 2010. Dostupné z: [www.rcmt.cvut.cz](http://www.rcmt.cvut.cz) (na vyžádání)

SMOLÍK, Jan. *Stavba nosných soustav*. ČVUT v Praze, 2009. Dostupné z: [www.rcmt.cvut.cz](http://www.rcmt.cvut.cz) (na vyžádání)

VONDRÁK, Pavel. *Návrh obráběcího stroje typu desková horizontální vyvrtávačka*. Diplomová práce. VUT v Brně, 2011

VRBA, Pavel. *Využití sendvičové struktury pro stojanové těleso obráběcího stroje*. ČVUT v Praze, 2010. Dostupné z: [www.rcmt.cvut.cz](http://www.rcmt.cvut.cz) (na vyžádání)

TOS Varnsdorf a.s. [online]. Dostupné z: <http://www.tosvarnsdorf.cz/cz/>

Škoda Machine Tool a.s. [online]. Dostupné z: <http://www.skodamt.com/>

PAMA spa. [online]. Dostupné z: <http://www.pama.it/en/>

UNION Werkzeugmaschinen GmbH [online]. Dostupné z: <http://www.unionchemnitz.de/en/>

DANOBAT GROUP [online]. Dostupné z: <http://www.danobatgroup.com/en/soraluce>

FE-DESIGN GMBH. *Topology Optimization: TOSCA Seminar* [online] Dostupné z: <http://www.femfat.com/fileadmin/downloads/szdownld.php?i=2319>

## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

$f(\mathbf{x})$	vícerozměrná funkce
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$	vícerozměrná proměnná, vektor
$\hat{\mathbf{x}}$	konkrétní hodnota, pro kterou má funkce extrém
$h(\mathbf{x})$	vektor omezujících podmínek typu =
$g(\mathbf{x})$	vektor omezujících podmínek typu $\leq$
$\nabla f(\mathbf{x})$	gradient vícerozměrné funkce $f$
$H$	Hessova matice
$L$	Lagrangeova funkce
$\lambda$	Lagrangeovy multiplikátory
$\mu$	konstanty Kuhn-Tuckerových podmínek
$V$	objem
$V_0$	počáteční objem
$p$	dimenze (rozměr prostoru) či exponent metody SIMP
$\Omega$	Oblast, množina
$\Gamma$	hranice oblasti
$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}), U$	deformační energie tělesa
$l(\mathbf{u}), L$	potenciální energie vnějších sil
$\sigma_{ij}$	tenzor napětí
$\varepsilon_{ij}$	tenzor poměrných deformací (přetvoření)
$u_{ij}$	tenzor posuvů
$C_{ijkl}$	tenzor poddajnosti
$\prod$	Úplná potenciální energie