



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

**VLIV FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE NA TURBULENTNÍ
PROUDĚNÍ**

INFLUENCE OF FRACTAL GEOMETRY ON TURBULENT FLOW

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Ondřej Hochman

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **Bc. Ondřej Hochman**
Studijní program: Strojní inženýrství
Studijní obor: Fluidní inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Vliv fraktální geometrie na turbulentní proudění

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V předchozí bakalářské práci bylo experimentálně dokázáno, že clonky s fraktální geometrií (von Kochova vločka, Apolonova síť) mají nižší hydraulické ztráty v nekavitujícím i kavitujícím proudění. Diplomová práce na ni navazuje a zaměřuje se na výpočtové modelování proudění (CFD) v clonce s fraktální geometrií s využitím různých přístupů k modelování turbulentního proudění s cílem pochopit rozdíly v mechanismu disipace energie u clonek s fraktální geometrií.

Cíle diplomové práce:

Bude provedeno výpočtové modelování proudění v clonce s fraktální geometrií s využitím různých modelů turbulence a s detailním rozbohem proudového pole. Cílem je zjištění rozdílů oproti jednoduché cloně s kruhovým otvorem, zejména z pohledu disipace energie, dynamických charakteristik, vlastností turbulentního proudění.

Seznam doporučené literatury:

MANDELBROT, Benoît B. The fractal geometry of nature. New York: W.H. Freeman, 1983. ISBN 0-7167-1186-9

BUKHARI, Manshoor, Zaman IZZUDDIN a Khalid AMIR. Experimental Study of Pressure Drop after the Circle Grids Fractal Orifice. Applied Mechanics and Materials [online]. 2013, 390, 111-115 [cit. 2017-02-15]. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.390.111. ISSN 1662-7482. Dostupné z: <http://www.scientific.net/AMM.390.111>

ELSAEY, A., A. ABOU EL-AZM ALY a M. FOUAD. CFD simulation of fractal-shaped orifices for flow measurement improvement. Flow Measurement and Instrumentation [online]. 2014, 36, 14-23 [cit. 2017-02-15]. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2014.01.004. ISSN 09555986. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0955598614000053>

HOCHMAN, Ondřej. Využití fraktální geometrie při návrhu hydraulické clony [online]. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2017 [cit. 2018-12-13]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11012/66309>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Energetický ústav. Vedoucí práce Pavel Rudolf

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá výpočtovým modelováním proudění (CFD) dvou clon s odlišnými otvory, ale s téměř stejnými průtočnými plochami. První clona je clona s kruhovým otvorem, která se běžně v praxi používá pro bezúdržbové měření průtoku. Druhá clona má otvor navržený na základě fraktální geometrie, konkrétně na základě von Kochovy vločky.

Práce navazuje na bakalářskou práci, ve které se experimentálně zjistilo, že právě clony s otvory navrženými podle fraktální geometrie mají lepší hydraulické vlastnosti (ztrátový součinitel a menší tlakové pulzace) než clona s kruhovým otvorem. Cílem je potvrzení závěrů z experimentů, tentokrát pomocí CFD s využitím různých modelů turbulence. Bylo provedeno výpočtové modelování jak jednofázové (tedy bez kavitace), tak vícefázové (proudění s kavitací). Jednotlivé modely byly mezi sebou porovnány z pohledu hydraulických a dynamických charakteristik.

Klíčová slova

CFD, kavitace, clona, fraktální geometrie, turbulence

Abstract

The master's thesis deals with computational fluid dynamics (CFD) of two orifices, that have different shapes of holes but similar cross-sectional flow areas. The first of them is orifice with circular-shaped hole, which is used for maintenance free measurement of flow. The second one is orifice with fractal-shaped hole, inspired by von Koch snowflake.

This thesis follows bachelor thesis, in which was experimentally examined, that fractal-shaped orifices have better hydraulic properties (hydraulic losses and lower pressure pulsations) than circle-shaped one. The main target is to confirm this conclusion based on experiment, this time using CFD with various types of turbulence modelling approaches. Both single phase (cavitation free) and multiphase numerical simulations were realized. Each model was compared from perspective of hydraulic and dynamic characteristics.

Keywords

CFD, cavitation, orifice, fractal geometry, turbulence

Bibliografická citace

HOCHMAN, Ondřej. Vliv fraktální geometrie na turbulentní proudění. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117993>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce Pavel Rudolf.

Čestné prohlášení autora

Čestně prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jen literaturu, kterou uvádím v seznamu.

V Brně dne 24. května 2019

.....

Ondřej Hochman

Poděkování

Chtěl bych poděkovat panu doc. Ing. Pavlu Rudolfovi, Ph.D. za podnětné rady a pomoc při vypracování této diplomové práce. Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům za to, jak mě v průběhu mých školních let podporovali.

Obsah

1	Úvod	10
2	Turbulence	11
2.1	Deterministický chaos a koherentní struktury turbulence [10], [26].....	11
2.2	Vlastnosti turbulence [24],[29]	14
2.3	Rovnice proudění	14
2.3.1	Základní rovnice dynamiky tekutin [27], [28].....	14
2.3.2	Rovnice turbulentního proudění.....	16
2.4	Modelování turbulence [13], [24]	18
2.4.1	Turbulentní modely používané v CFD softwarech [31]	18
2.4.2	k- ω SST (Shear-Stress Transport) [31]	19
3	Kavitace	21
3.1	Podstata kavitace [12].....	21
3.2	Kavitační číslo	22
3.3	Druhy kavitace [12]	22
3.4	Statická rovnováha kavitačního jádra [9].....	23
3.5	Dynamika kavitační bubliny [4], [8], [11]	23
3.6	Modelování kavitace v CFD [1], [15]	25
3.6.1	Mixture model [16]	26
3.6.2	Kavitační modely	27
4	Fraktální geometrie [19].....	29
5	Výchozí experimentálně naměřené charakteristiky [11].....	31
5.1	Clony [5]	31
5.2	Provedení experimentu a výsledky	31
6	Výpočtové modelování.....	33
6.1	Geometrie	33
6.1.1	Dekompozice výpočetní oblasti	33
6.2	Vytvoření sítě	34
6.3	Okrajové podmínky [2], [3]	36
6.3.1	Vstupní okrajová podmínka	37
6.3.2	Výstupní okrajová podmínka.....	37
6.3.3	Stěnová okrajová podmínka.....	38
6.4	Obecné nastavení numerických výpočtů	38
6.5	Sledované veličiny.....	38
7	Vyhodnocení CFD simulace	40

7.1	Jednofázový výpočet	40
7.2	Vícefázový výpočet.....	46
8	Závěr.....	48
9	Seznam použitých zdrojů	50
10	Seznam použitých symbolů.....	52
11	Seznam příloh.....	56

1 ÚVOD

Měření průtoku kapalin a plynů v potrubních systémech je stále živou problematikou, která se průběžně vyvíjí. Často se vyskytující metodou pro měření průtoků je měření pomocí snímačů diferenčního tlaku (clon, dýz, Venturiho trubice), vložených do zcela zaplněného potrubí, které má kruhový průřez. Hlavní výhodou těchto snímačů je to, že neobsahují žádnou pohyblivou část, jejich provoz je tak bezúdržbový a díky jednoduché konstrukci mají i nízkou pořizovací cenu. Hlavní nevýhodou je vznik tlakové ztráty za použitým snímačem.

Výzkumy v nedávné době ukázaly, že clony, které mají místo kruhového otvoru otvor ve tvaru fraktální geometrie (např. tvar von Kochovy vločky), mohou mít značný vliv na snížení tlakové ztráty za clonou. [6]

V turbulentním proudění za clonou vznikají vírové struktury, které jsou v měřítku od nejmenších vírů až po ty největší, vyplňující celou oblast. Spektrum těchto měřítek je spojité, což je typickým rysem fraktálních objektů, proto lze o turbulenci prohlásit, že má fraktální povahu [30]. Díky tomu se dá očekávat, že clona navržená podle fraktální geometrie bude budit vírové struktury, které budou v celém spektru měřítek, na rozdíl od clony s kruhovým otvorem, která dokáže vybudit vírové struktury jenom v určitých měřítcích. Také fluktuace rychlosti jsou díky fraktálnosti clony rovnoměrněji rozděleny do všech měřítek velikostí. Díky tomu dojde za clonou k lepšímu promíchání proudící tekutiny a k rychlejšímu ustálení proudu. [20]

Tato práce navazuje na bakalářskou práci [11], ve které se experimentálně zjistilo, že clony navržené podle fraktální geometrie mají nižší tlakové ztráty při bezkavitačním i kavitačním proudění. V této práci byl vytvořen výpočtový model, který svými parametry přesně odpovídal experimentu. Také zadané okrajové podmínky vycházely z dat naměřených při experimentu. Byly provedeny simulace proudění pomocí CFD programu Fluent, které měly za cíl potvrdit výsledky z experimentu.

2 TURBULENCE

Co to vlastně turbulence je? Podle Richarda Feynmana je turbulence nejdůležitějším dosud nevyřešeným problémem klasické fyziky. Už jenom samotná definice turbulence je značně obtížná. Podle P. Bradshawa je turbulence třidimenzionální časově závislý pohyb, ve kterém natahování víru způsobuje, že se fluktuace rychlosti šíří všemi vlnovými délkami od nejmenších vírů definovaných viskózními silami až po největší víry ohraničenými okrajovými podmínkami. Většinou se jedná o stav proudící tekutiny s výjimkou nízkých Reynoldsových čísel.

2.1 Deterministický chaos a koherentní struktury turbulence [10], [26]

Proudění tekutin je složitý spojitý nelineární dynamický systém (systém v čase se vyvíjející), jehož chování je za určitých podmínek charakterizováno jako deterministický chaos.

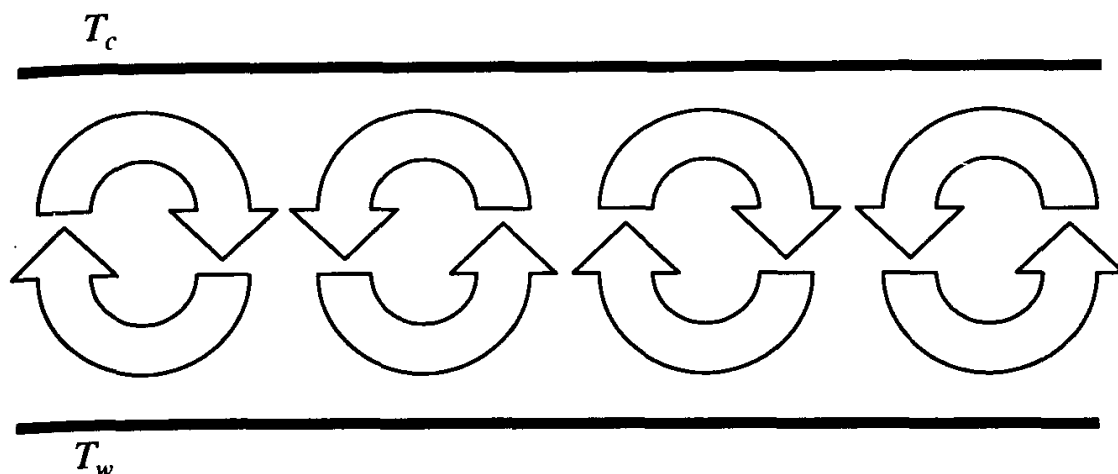
Pod pojmem chaos se všeobecně rozumí neuspořádané, náhodné chování bez jakéhokoli náznaku zákonitosti. Chaotické chování dynamického systému se vyznačuje tím, že i malé, prakticky neměřitelné podněty mohou vyvolat velké změny v chování systému a systém má velký počet stupňů volnosti. Existují dynamické systémy, jejichž pohyb se jeví chaoticky, avšak jejich časová závislost je deterministická. Pro takové systémy existuje předpis, a to buď diferenciální, nebo diferenční rovnice, pomocí kterých můžeme spočítat jejich budoucí chování ze zadaných počátečních podmínek a které neobsahují žádné náhodné parametry. Typickým příkladem systému chovajícího se podle deterministického chaosu je turbulence.

Nejvýznamnější charakteristikou dynamického systému vykazujícího deterministický chaos je vysoká citlivost na počáteční podmínky [25]. To znamená, že i nepatrná změna v počátečních podmínkách může vést k naprosto odlišnému výsledku v průběhu času. Míru odlišnosti původně velmi blízkých trajektorií vyjadřuje tzv. Lyapunovův exponent. Ten udává rozbíhavost blízkých trajektorií systému, neboli určuje citlivost systému na volbu počátečních podmínek. Množina všech možných stavů dynamického systému se nazývá fázový prostor. Jeho dimenze je dána počtem nezávisle proměnných veličin (počtem stupňů volnosti), které dokonale popisují stav systému. Vývojem systému vzniká ve fázovém prostoru křivka. Pokud se systém vyvíjí dostatečně dlouho, křivka ve fázovém prostoru začne zvyrazňovat určitou strukturu, která se nazývá atraktor. Zjednodušeně řečeno je atraktor konečný stav systému, ke kterému je systém „přitahován“ (odtud název) při počátečních podmínkách ležících v jisté oblasti fázového prostoru. Pokud je atraktorem bod nebo uzavřená křivka, lze předpovědět chování na libovolně dlouhou dobu. Naproti tomu chaotické systémy vytvářejí chaotický atraktor, který je neuzavřený. [17] Pokud má atraktor neceločíselnou dimenzi (fraktály), potom se nazývají podivný atraktor. [10]

Jedním z nejznámějších atraktorů je tzv. Lorenzův atraktor [18]. Edward Lorenz¹ vytvořil jednoduchý matematický model zemské atmosféry, na kterém se pokoušel studovat počasí. Tento matematický model zachycuje základní vlastnosti konvektivního proudění v atmosféře, která je zahřívána povrchem ze spodu a ochlazována svrchu. Vzniká tak rotační pohyb částic vzduchu, kdy ohřátá částice stoupá, tím se ochlazuje a začne klesat,

¹ Edward Lorenz (*1917; †2008) byl americký matematik a meteorolog, zabýval se teorií chaosu a je vynálezce pojmu podivný atraktor. Je také spojen s termínem motýlí efekt. Působil jako profesor na Massachusetts Institute of Technology.

aby se opět zahřála a stoupala. Tento jev je známý jako Rayleighova-Bénárdova nestabilita. [23]



Obr. 2.1. Rayleighova-Bénárdova nestabilita, $T_c < T_w$ [10]

Postupně zjednodušil svůj matematický model až na známý třírozměrný nelineární systém:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Pr(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + Ra \cdot x - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - b_l z\end{aligned}$$

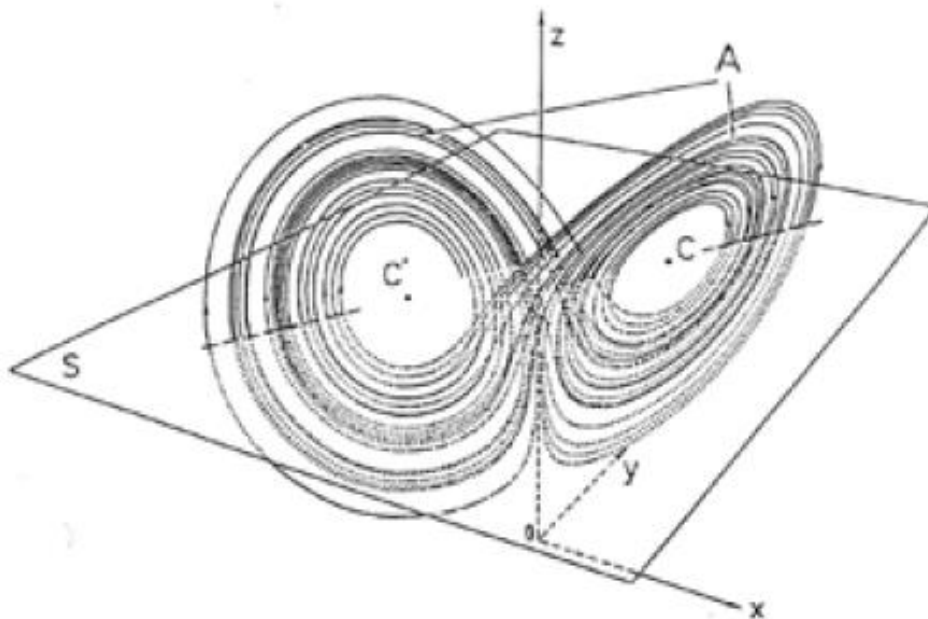
Kde Pr je Prandtlovo číslo, Ra je redukované Rayleighovo číslo a parametr b_l je štíhlost válce tekutiny při konvekci, tedy poměr jeho délky a průměru.

Proměnné x , y a z nejsou souřadnicemi v prostoru. x je úměrné intenzitě konvektivního pohybu, zatímco y je úměrné teplotnímu rozdílu mezi stoupajícími a klesajícími proudy. Stejně znaménka x a y znamenají, že teplejší tekutina stoupá a studenější klesá. Proměnná z je úměrná odchylce svislého teplotního profilu od lineárního průběhu, kladná hodnota svědčí o velkém gradientu poblíž okrajů.

Lorenz prováděl matematickou simulaci systému, což byla vlastně numerická integrace rovnic v čase pro různé hodnoty parametrů a pro různé počáteční hodnoty proměnných. Hodnoty parametrů $Pr = 10$ a $b_l = 8/3$ byly pevné a měnil pouze parametr Ra . Pro hodnoty parametru $Ra < 1$ spěje řešení k ustálené hodnotě v počátku $(0,0,0)$, kdy veškerá konvekce zaniká a systém je statický. Pro hodnoty $Ra > 1$ máme tři pevné body: z počátku se stal repelor („odpuzuje“ trajektorie od sebe), ale další dva body jsou atraktory. Tyto 2 pevné body odpovídají časově nezávislé konvekci. Proto pro hodnotu $Ra = 1$ nastala bifurkace, pokud tedy hodnota Ra stoupne nad 1, nekonveční stav se stane nestálý a libovolně malá odchylka od počátečních podmínek pošle trajektorii buď k jednomu, nebo k druhému atraktoru. Při hodnotách $Ra > 1,346$ pozorujeme v systému tzv. spirální pevné body.

Budeme-li hodnoty Ra i nadále zvyšovat, dostaneme se zhruba pro $r > 24,74$ do oblasti chaosu. Avšak těsně před tím při $r = 24$ pozorujeme velice zajímavé chování, které nazýváme metastabilní chaos, nebo také preturbulentní fáze. Atraktor nabývá známého

tvaru motýlích křídel². Jedná se o takzvaný podivný atraktor (obr. 2). Podivné atraktory se zdají být v určitém smyslu pravidelné, ale zachovávají si chaotické vlastnosti.



Obr. 2.2. Podivný atraktor [29]

Kvalitativně podobným způsobem se chovají i jiné nelineární systémy, např. turbulentní proudění vazké tekutiny. Stav proudící tekutiny lze z hlediska stability řešení charakterizovat bezrozměrnou střední rychlostí proudění tzv. Reynoldsovým číslem, viz níže.

Turbulentní proudění je charakterizováno koherentními (uspořádanými) strukturami, jejichž okamžitá poloha nebo orientace je zcela náhodná, nicméně velikost je daná zákonitostmi. V případě turbulence jsou jejich matematickým modelem Navier-Stokesovy rovnice. Tyto rovnice jsou silně nelineární. Nelinearita se projevuje tím, že neplatí princip superpozice a citlivost odezvy systému na podnět je velmi kolísavá, tj. není úměrná podnětu.

Pojmem bifurkace je často užíván při chování nelineárních systémů, rozumíme jím stav systému na mezi stability, při níž dojde k náhlé změně vlastností systému při nepatrné změně parametrů. Vývoj systému může pokračovat podle 2 nebo více scénářů. Výběr konkrétní změny je z pohledu člověka neznatelný, závisí na molekulárních změnách. [22] Bifurkací v proudění tekutin můžeme považovat přechod laminárního proudění na turbulentní. Kvantitativním vyjádřením stavu proudění je Reynoldsovo číslo. Definuje se jako:

$$Re = \frac{vL}{\nu} \quad (1)$$

Kde v , L jsou charakteristická rychlost, resp. délka a ν je kinematická viskozita. Pro nízká Reynoldsova čísla je proudění laminární (podle lat. *lamina* – vrstva), při hodnotě přibližně $Re > 2300$ proudění přechází do turbulentního stavu.

² Tento atraktor se stal symbolem prvních průkopníků při zkoumání chaosu a jeho podobnost s motýlími křídly inspirovala Lorenze při jedné přednášce v roce 1972, kdy hovořil na téma předpověditelnosti počasí. Tehdy s nadsázkou prohlásil: „Pohyb křídel motýla kdesi v Brazílském pralesi může způsobit vznik tornáda v Texasu.“

2.2 Vlastnosti turbulence [24],[29]

Jelikož je samotná definice turbulence obtížná, je lepší turbulenci definovat jako výčet vlastností.

1. **Náhodnost, stochasticita, chaos** – turbulence je nepředvídatelná v tom smyslu, že i nepatrné a náhodné poruchy v systému mohou vést k velkým změnám celého systému. To se může zdát v rozporu s faktem, že turbulentní proudění je popsáno Navier-Stokesovými rovnicemi, které jsou deterministické. Vlivem nelineárnosti se však v proudění mohou velmi zesilovat drobné poruchy. Tyto poruchy mohou vzniknout s nepřesným zadáním počátečních podmínek anebo s Brownovým pohybem částic tekutiny. Důsledkem toho je náhodné chování turbulentního proudění, které je ovšem ve statistickém smyslu předpověditelné, takže se jedná o deterministický chaos (viz kap. 2.1).
2. **Difuzivita** – k míšení dochází mnohem rychleji než při molekulární difuzi.
3. **Vířivost** – turbulentní proudění má vysoké hodnoty lokální vířivosti. Vířové struktury bývají nazývány koherentní víry nebo obecně koherentní struktury.
4. **Energetická kaskáda** – vířové struktury vznikající při turbulenci jsou velikostně v celé škále měřítek, od největších vírů až po víry podléhající disipaci v souvislosti s viskozitou. Spektrum měřítek je spojitě, což je typické pro fraktály.
5. **Prostorovost** – turbulentní proudění je vždy prostorové.
6. **Disipativnost** – při turbulenci dochází k disipaci nejmenších vírů, kdy se jejich kinetické energie proudění tekutiny mění na teplo.
7. **Nelinearita** – konvektivní člen v Navier-Stokesových rovnicích je nelineární.

2.3 Rovnice proudění

V rovnicích proudění tekutiny se vychází z předpokladu, že tekutina se chová jako kontinuum a zanedbává se její molekulární struktura (chování tekutiny z pohledu její mikrostruktury se zabývá statistická mechanika tekutin).

Ke studiu pohybu tekutin se mohou použít dvě různé metody. Lagrangeova metoda sleduje pohyb libovolné částice. Druhá, Eulerova metoda, sleduje změny kinematických veličin v libovolné oblasti proudění. V dalším textu se používá tato metoda, jelikož je vhodnější pro odvozování rovnic proudění.

2.3.1 Základní rovnice dynamiky tekutin [27], [28]

V dynamice tekutin hrají stěžejní roli zákony zachování, pomocí kterých se odvozují základní rovnice proudění.

2.3.1.1 Rovnice kontinuity

K odvození rovnice kontinuity se vychází ze zákona zachování hmoty v proudící tekutině. Uvažujme elementární kontrolní objem tekutiny ukotvený v prostoru. Zvýšení hmotnosti za čas v daném objemu je:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2)$$

Hmotnostní průtok opouštějící daný objem se může vyjádřit pomocí plošného integrálu jako:

$$\int_S \rho v_i n_i dS \quad (3)$$

Zákon zachování hmoty potom stanovuje, že zvýšení hmotnosti v daném objemu (2) se musí rovnat hmotnostnímu průtoku (3) vtékající do oblasti:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho v_i n_i dS \quad (4)$$

Této rovnice je integrální formou zákona zachování hmoty na kontrolním objemu tekutiny. Diferenciální forma zákona se získá tím, že se pravá strana rovnice transformuje pomocí Gauss-Ostrogradského věty z plošného na objemový integrál.

Po převedení na jednu stranu potom rovnice bude:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) \right] dV = 0 \quad (5)$$

Tento vztah je platný pro celý kontrolní objem, integrant proto musí být roven nule.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (6)$$

Tato rovnice se nazývá rovnicí kontinuity a vyjadřuje diferenciální formu zákona zachování hmoty.

Pokud předpokládáme nestlačitelnou tekutinu, rovnice se zjednoduší na:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

2.3.1.2 Navier-Stokesovy rovnice

Navier-Stokesovy rovnice (dále N-S rovnice) představují spolu s rovnicí kontinuity základní rovnice používané v dynamice tekutin. Jedná se o pohybovou rovnici viskózní kapaliny a popisuje laminární proudění nebo okamžitý stav turbulentního proudění.

Oproti Eulerově rovnici hydrodynamiky uvažuje i viskozitu kapaliny, tedy třecí síly. To jsou plošné síly, které působí v tečném směru k povrchu. V tenzoru napětí tak přibudou i mimodiagonální prvky.

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + \tau'_{ij} \quad (8)$$

Tenzor τ'_{ij} má celkem 9 složek, ale jen 6 složek je nezávislých. Pro řešení je třeba zavést tenzor v_{ij} , který uvádí závislost mezi tenzorem napětí a tenzorem, ve kterém se vyskytuje derivace rychlosti.

$$v_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

První část tenzoru (symetrická) je tenzor rychlosti deformace, druhá část (antisymetrická) je tenzor rychlosti rotace. Vztah mezi τ'_{ij} a v_{ij} zprostředkuje tenzor čtvrtého řádu C_{ijkl} jako:

$$\tau'_{ij} = C_{ijkl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \quad (10)$$

Tenzor C_{ijkl} vyjadřuje vlastnosti kapaliny. Má celkem 81 složek, z nichž je 21 nezávislých. V případě izotropní kapaliny (většina kapalin) se těchto 21 materiálových konstant redukuje na dvě. Vztah mezi tenzorem napětí a tenzorem rychlosti deformace se nazývá zobecněný Newtonův zákon.³

$$\tau'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} b \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (11)$$

První část představuje změnu tvaru. μ je dynamická viskozita, která vyjadřuje odpor částic kapaliny vůči vzájemnému pohybu. Druhá část vyjadřuje změnu objemu. b je druhá viskozita, která vyjadřuje odpor kapaliny proti změně pohybu. V případě nestlačitelné kapaliny je však $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$ a druhá část tenzoru je tedy roven nule.

N-S rovnice pro viskózní stlačitelnou kapalinu má tedy tvar:

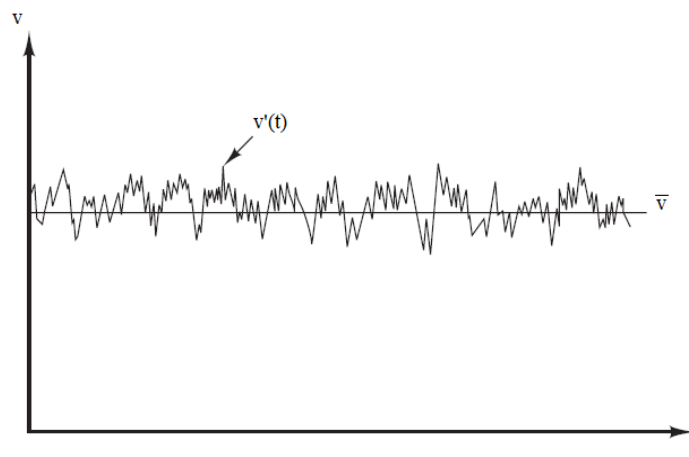
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = a_{(f)_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{b + \mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (12)$$

2.3.2 Rovnice turbulentního proudění

Jak už zmíněno výše, N-S rovnice sice popisuje i turbulentní proudění, pouze však jeho okamžitý stav. Pro popis turbulentního proudění v delším časovém horizontu je třeba provést tzv. Reynoldsovské středování N-S rovnice (ang. Reynolds-averaged Navier-Stokes – zkratka RANS).

Nejprve je třeba provést Reynoldsovskou dekompozici rychlosti. Okamžitá rychlost se rozdělí na dvě složky: střední složku \bar{v} a flukтуаční složku v' .

$$v = \bar{v} + v' \quad (13)$$



Obr. 2.3 Záznam okamžité rychlosti turbulentního proudění [30]

³ Formálně koresponduje se zobecněným Hookovým zákonem.

Zároveň musí platit věta o střední integrální hodnotě rychlosti

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v \, dt \quad (14)$$

Kde velikost T představuje turbulentní časové měřítko. Integrace přes toto měřítko je pro flukтуаční složku rychlosti rovna 0.

$$\int_0^T v' \, dt = \bar{v}' = 0 \quad (15)$$

Pro středování součinů platí

$$\begin{aligned} \int_0^T \bar{v}_i \cdot \bar{v}_j \, dt &= \overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} \\ \int_0^T \bar{v}_i \cdot v'_j \, dt &= 0 \\ \int_0^T v'_i \cdot v'_j \, dt &= \overline{v'_i v'_j} \neq 0 \\ \int_0^T v_i \cdot v_j \, dt &= \overline{v_i v_j} + \overline{v'_i v'_j} \end{aligned} \quad (16)$$

Využitím těchto vztahů a věty o záměně derivace a integrace se může postupně upravit rovnice kontinuity a N-S rovnice:

Rovnice kontinuity	$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dt = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^T v_i \, dt = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i}$
N-S rovnice	$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial v_i}{\partial t} \, dt = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^T v_i \, dt = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t}$
	$\frac{1}{T} \int_0^T -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \, dt = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^T -\frac{1}{\rho} p \, dt = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$
	$\frac{1}{T} \int_0^T v \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \, dt = \frac{1}{T} v \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \int_0^T v_i \, dt = v \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j}$
	$\frac{1}{T} \int_0^T v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dt = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^T v_i \cdot v_j \, dt = \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i v'_j})$

Po výše uvedených úpravách se rovnice RANS dají zapsat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i v'_j}) \end{aligned} \quad (17)$$

Tensor $\tau_{tij} = \overline{v'_i v'_j}$ se nazývá tenzor turbulentních napětí. Jedná se o symetrický tenzor obsahující 6 neznámých. Tímto tenzorem se rozšířil počet neznámých v rovnicích na 10:

$$3x \bar{v}_i \quad 1x \bar{p} \quad 6x \tau_{tij}$$

Jelikož jsou dostupné pouze 4 rovnice na 10 neznámých, jedná se o tzv. closure problem. Tento problém se v inženýrské praxi řeší zavedením modelů turbulence, které nahrazují tenzor turbulentních napětí. Pomocí těchto modelů se pak počet neznámých rovná počtu rovnic a rovnice RANS tak mají řešení.

2.4 Modelování turbulence [13], [24]

Pro redukci neznámých veličin slouží tzv. Boussinesquova hypotéza. Ta zjednodušuje tenzor turbulentních napětí na uměle zavedenou skalární veličinu, tzv. turbulentní viskozitu μ_t .

$$\tau_{tij} = 2\mu_t \overline{v_{ij}} \quad (18)$$

Počet neznámých je potom už jen pět, ovšem za cenu vynucení tzv. izotropní turbulence. U ní se předpokládá stejná velikost flukтуаčních složek ve všech směrech.

Po zredukování neznámých je však stále nutné zavést další rovnice. Modely turbulence založené na Boussinesquově hypotéze se nazývají Eddy viscosity model (EVM) a podle počtu rovnic sloužících k určení turbulentní viskozity se dělí na nula, jedno, dvou a více-rovnicové modely.

V inženýrské praxi jsou nejčastěji používány dvourovnicové modely turbulence. Ty představují kompromis mezi přesností a výpočetní náročností.

Tyto modely počítají transportní rovnice turbulentní kinetické energie. Ta je v podstatě energií flukтуаčních rychlostí, vyjádřená jako:

$$k = \frac{1}{2} (\overline{v'_i v'_i}) \quad (19)$$

Model transportní rovnice pro k vychází z N-S rovnice a je vyjádřena jako:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (20)$$

Kde σ_k je Prandtlůva konstanta, ε je disipace turbulentní kinetické energie a spočítá se podle vztahu:

$$\varepsilon = \frac{C_\mu k^{\frac{3}{2}}}{l_t} \quad (21)$$

$$l_t = C_D l_m$$

Kde C_D , C_μ , l_m jsou modelové konstanty.

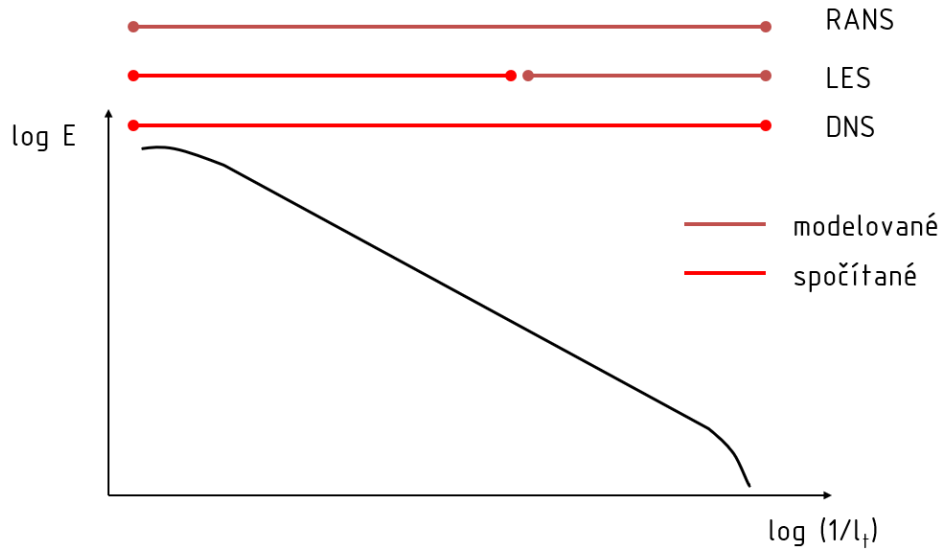
Pro model $k-\omega$, který je používán v dalších výpočtech, se ještě zavádí veličina ω , což je specifická disipace energie, která je přímo úměrná výrazu ε/k .

2.4.1 Turbulentní modely používané v CFD softwarech [31]

Rovnice kontinuity a N-S rovnice se mohou řešit pomocí CFD přímou numerickou simulací (Direct Numerical Simulation – DNS). Ta však vyžaduje velké výpočetní nároky, zvláště pro složitější proudění. Ve většině případů se ale nemusí řešit všechny velikosti fluktuací, proto je další metody modelují.

Metoda velkých vírů (Large Eddy Simulation – LES) filtruje malé fluktuace a je tak méně přesná než DNS.

Metody RANS, které jsou založené na Boussinesquově hypotéz, mají nejmenší přesnost. Rozdíly mezi metodami na energetickém spektru turbulentních vírů ukazuje obr. 2.3 (hranice mezi jednotlivými metodami není tak ostrá).



Obr. 2.3. Energetické spektrum vírů – srovnání modelů turbulence [18, upraveno]

V této diplomové práci se počítalo s dvourovnicovým RANS modelem, konkrétně s modelem $k-\omega$ SST a jeho variantou SBES pro vířivé proudění. Model $k-\omega$ obecně lépe predikují odtržení proudění, což bylo předmětem zkoumání této práce.

2.4.2 $k-\omega$ SST (Shear-Stress Transport) [31]

Tento model byl vytvořen tak, aby efektivně spojil robustnost a přesnost modelu $k-\omega$ v oblastech blízko stěny s modelem $k-\epsilon$, který lépe funguje ve volném proudění dále od stěn. Jsou použity oba modely a násobeny funkcí, která je rovna jedné blízko stěny, což aktivuje model $k-\omega$, a nule daleko od stěny, což aktivuje transformovaný model $k-\epsilon$.

Pro tento model byla upravena transportní rovnice (20) kinetické energie turbulence k

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \tilde{G}_k - Y_k + S_k \quad (22)$$

Druhou rovnicí tohoto modelu je transportní rovnice pro míru turbulentní disipace ω

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega \quad (23)$$

V těchto rovnicích \tilde{G}_k reprezentuje produkci kinetické energie turbulence k v důsledku gradientů střední rychlosti, G_ω reprezentuje generaci specifické disipace energie ω . Y_k a Y_ω zastupuje disipaci k , resp. ω , a to vlivem turbulence. S_k a S_ω jsou zdrojové členy definované uživatelem. D_ω představuje příčnou difuzi. Γ_k a Γ_ω představují efektivní difuzivitu k , resp. ω a jsou definovány vztahy:

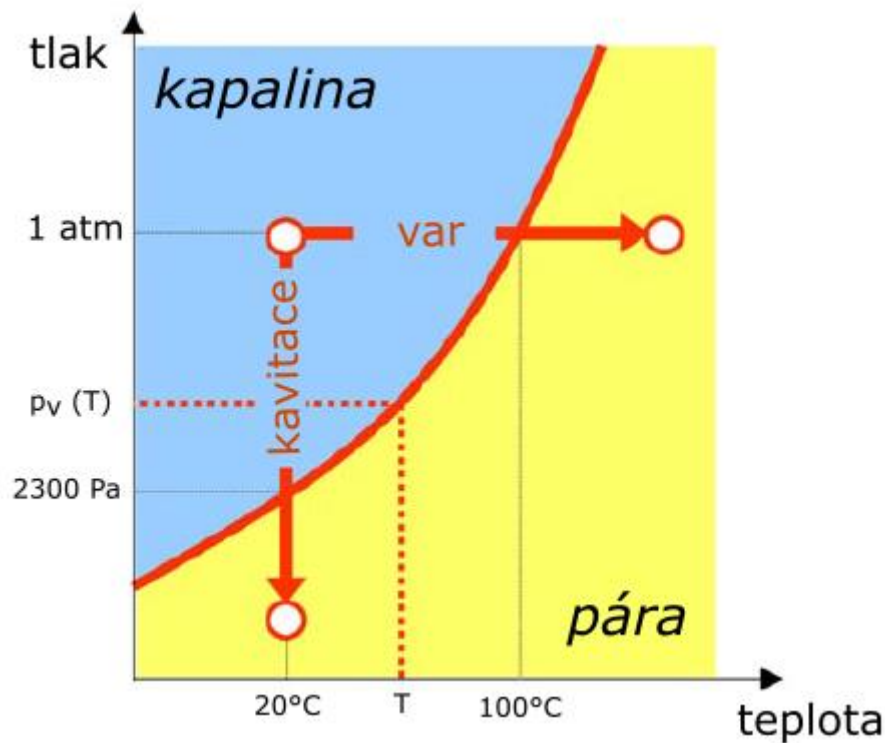
$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \\ \Gamma_\omega &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \end{aligned} \quad (24)$$

Kde σ_k a σ_ω jsou Prandtlova čísla pro k a ω .

Model SBES je speciálním modulem modelu $k-\omega$ SST. Jedná se o hybridní RANS-LES turbulentní model, který u stěny modeluje proudění pomocí modelu $k-\omega$ a ve větších vzdálenostech od stěny se přepíná na model LES. Použití modelu LES vyžaduje ve Fluentu kratší časový krok, v proudění se však díky LES nepotlačují a neprůměrují větší víry.

3 KAVITACE

Vznik kavitace v proudící kapalině je charakteristickým tím, že zde dochází k fázové přeměně kapaliny na páru za téměř konstantní teploty při snižujícím se tlaku v kapalině. Vznikají kavitační dutiny, které se vizuálně podobají bublinkám vznikajícím při varu. Na rozdíl od kavitace dochází k varu při zvyšování teploty v kapalině za konstantního tlaku, viz obr. 3.1.



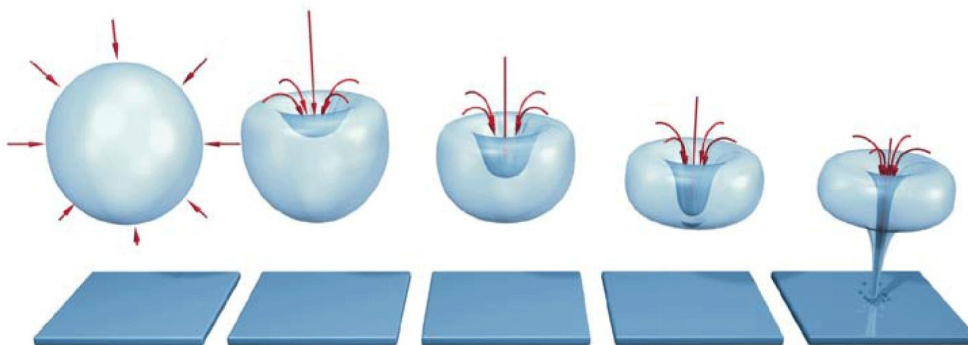
Obr. 3.1. Fázový diagram vody – rozdíl kavitace a varu [1, upraveno]

3.1 Podstata kavitace [12]

Pod pojmem kavitace se nerozumí pouze vznik kavitačních bublin, ale také jejich pohyb v proudící kapalině a zánik v místech s vyšším tlakem.

Kavitace vzniká v místech s výskytem kavitačních jader. Ty představují mikroskopické prachové nečistoty proudící s kapalinou nebo mikrobublinky nerozpuštěného plynu obsaženého v kapalině.

Jestliže v kapalině poklesne lokálně tlak na hodnotu tlaku nasycených par (při dané teplotě kapaliny), dojde k narušení spojitosti a vznikne kavitační dutina.



Obr. 3.2. Imploze kavitační dutiny [7]

Pokud tlak zůstane stejný nebo ještě víc klesá, vzniklá dutina se postupně zvětšuje. Postupně se tato kavitační bublina přemísťuje v proudící kapalině do místa s vyšším tlakem. V oblastech s tlakem vyšším, než je hodnota tlaku nasycených par, prudce zaniká, dochází k tzv. implozi. Přitom dochází v místě zániku k velkému lokálnímu nárůstu teploty, kapalina velkou rychlostí zaplňuje kavitační dutinu a dochází zde k velkému lokálnímu nárůstu napětí. Pokud dojde k zániku bubliny blízko obtékaného tělesa, má imploze na stěnu tělesa destruktivní účinky. Toto působení kavitace na povrch tělesa se označuje jako kavitační eroze.

3.2 Kavitační číslo

Aby se kavitace mohla posuzovat kvantitativně, byl zaveden pojem kavitační číslo σ . Výskyt kavitace je podmíněn tím, že tlak v kapalině klesne pod tlak nasycených par p_{va} . Tento předpoklad je však pouze přibližný. Kavitační číslo vyjadřuje podíl rozdílu statického tlaku a tlaku nasycených par ku dynamickému tlaku.

$$\sigma = \frac{p_{ref} - p_{va}}{\rho \frac{v_{ref}^2}{2}} \quad (25)$$

p_{ref} a v_{ref} jsou referenční hodnoty tlaku a rychlosti proudění. Volba těchto hodnot záleží na případě, který se zrovna zkoumá.

Pro vysoké hodnoty referenčního tlaku (nebo nízké referenční rychlosti) je kavitační číslo vysoké a jedná se o bezkavitační proudění. Naopak pro nízký tlak (nebo vysokou rychlost) je hodnota kavitačního čísla nízká a proudící kapalina kavituje. Čím nižší hodnota kavitačního čísla, tím je kavitačních bublin víc a oblast kavitace roste (od oblasti počáteční kavitace, přes vyvinutou kavitaci až po superkavitaci).

3.3 Druhy kavitace [12]

Shluk kavitačních bublin vytváří v proudící kapalině kavitační oblast, která hraničí buď jenom s kapalinou, nebo i s pevnou stěnou. Počáteční kavitací se označuje stav, při kterém vznikají první kavitační bubliny. Pokud kavitační oblast ovlivňuje nejenom proudění kapaliny v daném stroji nebo zařízení, ale i jeho parametry (výkon, účinnost, dopravní výška...), kavitační oblast se nazývá plně vyvinutá. Přechodný stav mezi počátkem kavitace a plně vyvinutou kavitací se nazývá částečně vyvinutá kavitace.

Rozsáhlejší kavitační oblasti, které vznikají při snížení kavitačního čísla, mohou mít rozmanité tvary. Některá proudění s vysokým Reynoldsovým číslem obsahují oblasti s velkou vířivostí (typicky proudění za lodními šrouby), ve kterých je tlak v jádru víru výrazně menší než v okolní kapalině. Tlak v těchto oblastech velmi často klesne pod tlak nasycených par a dochází tedy k tzv. vláknové kavitaci. Dalším snižováním kavitačního čísla dojde k tomu, že celé jádro víru je vyplněno parou. Pro turbíny se v této souvislosti používá pojem vírový cop. Pokud se v proudící kapalině objeví oblast, kterou vyplňuje shluk kavitačních bublin, jedná se o kapsovitou kavitaci. Ta vzniká například v tryskách nebo na lopatkách vodních strojů.

3.4 Statická rovnováha kavitačního jádra [9]

Jako kavitační jádro je zvolena kulová mikrobublina obsahující plyn a páru, která je v rovnováze s okolní kapalinou. Poloměr bubliny R je dostatečně malý právě tehdy, když je splněna podmínka, že hydrostatický tlak $2\rho gR$ je zanedbatelný oproti změně tlaku vyvolaný povrchovým napětím $2S_t/R$. Tato podmínka omezuje poloměr bubliny na hodnotu mnohem menší než $\sqrt{\frac{S_t}{\rho g}}$, takže se uvažuje maximální poloměr bublin $R = 0,5 \text{ mm}$.

Tlak okolní kapaliny se pak považuje za konstantní (vyjádřeno jako p_∞) a mikrobublina je skutečně kulová.

Rovnováha na rozhraní potom musí splňovat tuto podmínku:

$$p_\infty + \frac{2S_t}{R} = p_g + p_{va} \quad (26)$$

Kde p_g je parciální tlak plynu uvnitř bubliny a S_t je povrchové napětí.

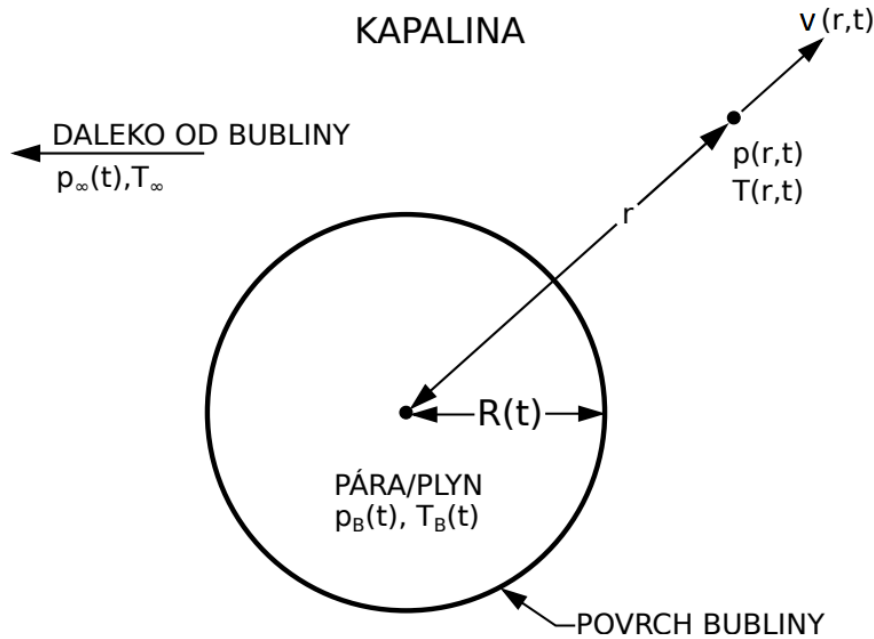
Z (26) vyplývá, že celkový tlak uvnitř bubliny $p_g + p_{va}$ je větší než tlak okolní kapaliny, a to díky vlivu povrchového napětí S .

3.5 Dynamika kavitační bubliny [4], [8], [11]

Vývoj kavitační bubliny je velmi zásadní jev při kavitaci. Lze jej popsat pomocí Rayleigh-Plessetovy rovnice. Tato rovnice vyjadřuje vývoj izolované kulovité kavitační bubliny v závislosti na čase a tlaku.

Před odvozením samotné Rayleigh-Plessetovy rovnice je třeba uvést předpoklady, za kterých byla odvozena. Uvažuje se kulová bublina mající poloměr $R(t)$, který se v čase t mění, má však počáteční velikost R_0 a počáteční rychlost rozhraní mezi bublinou a okolní kapalinou \dot{R}_0 , která je rovna nule, což značí, že se bublina nachází na počátku v rovnováze s kapalinou. Bublina se nachází v nekonečně rozlehlé oblasti nestlačitelné kapaliny, která má konstantní teplotu T_∞ a známý proměnný tlak $p_\infty(t)$ měnící se v čase t . Hustota kapaliny i její dynamická viskozita jsou považovány za konstantní. Pro bublinu je zaveden předpoklad, že je vyplněna nerozpuštěným plynem (tlak p_g) a sytou parou (tlak p_{va}), jejichž rozdělení je v celém objemu bubliny homogenní.

Výsledkem rovnice bude poloměr bubliny $R(t)$. Jak je naznačeno v obr. 3.3, radiální poloha vycházející ze středu bubliny je označeno jako r . Pomocí r a času t je pak určen i tlak $p(r, t)$, teplota $T(r, t)$ a rychlost proudění $v(r, t)$ (pohyb vyvolaný v kapalině růstem nebo implozí bubliny je čistě radiální). Na rozhraní platí $v(R, t) = \dot{R}(t)$



Obr. 3.3. Schéma kulové bubliny v nekonečně rozlehlé oblasti kapaliny [16, upraveno]

Změny tlaku jsou velmi rychlé, takže nestihne proběhnout přenos tepla, plyn uvnitř bubliny se proto adiabaticky a splňuje:

$$p_g(t) = p_{g0} \left[\frac{R_0}{R(t)} \right]^{3\gamma} \quad (27)$$

Kde γ je adiabatická konstanta.

Pokud se budou brát v úvahu dynamické účinky, rovnováha normálových sil na povrchu bubliny bude:

$$p_g(t) + p_{va} = p(R, t) + \frac{2S}{R} - 2\mu \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (28)$$

Tato rovnice se velmi podobá rovnici statické rovnováhy (31) s tím rozdílem, že tato obsahuje navíc člen, který připočítává dynamické účinky, jelikož okolní kapalina začala proudit.

Předpoklad nestlačitelné kapaliny $\text{div } \vec{v} = 0$ dovoluje vypočítat rychlost proudění z rychlosti rozhraní \dot{R} :

$$v(r, t) = \dot{R} \frac{R^2}{r^2} \quad (29)$$

Toto platí, pokud jsou rychlosti proudění výrazně menší, než je rychlost zvuku v dané kapalině.

V tomto konkrétním případě je viskózní člen v N-S rovnici roven nule. Z toho vyplývá, že jak pro ideální, tak pro skutečnou kapalinu platí tato hybnostní rovnice:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \quad (30)$$

Po integraci této rovnice od poloměru r až po nekonečno a využitím (34), rozložení tlaku vyjde jako:

$$\frac{p(r, t) - p_{\infty}(t)}{\rho} = \ddot{R} \frac{R^2}{r} + 2\dot{R}^2 \left[\frac{R}{r} - \frac{R^4}{4r^4} \right] \quad (31)$$

Na povrchu bubliny (pro $r = R$) potom platí:

$$\frac{p(R, t) - p_{\infty}(t)}{\rho} = R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \quad (32)$$

Rovnováha normálových sil na povrchu bubliny (28) po dosazení rovnic (27), (29) a (32) a postupných úpravách bude:

$$\rho \left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = [p_{va} - p_{\infty}(t)] + p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{2S_t}{R} - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} \quad (33)$$

Tato rovnice, známá jako Rayleigh-Plessetova rovnice, umožňuje predikovat časový vývoj poloměru bubliny R .

Na pravé straně rovnice vystupují čtyři různé výrazy. První z nich je řídicím výrazem pro vývoj bubliny. Druhý výraz vyjadřuje okamžitý tlak nerozpuštěných plynů p_g uvnitř bubliny. Třetí výraz zastupuje tlak způsobený povrchovým napětím. Protože je zde R ve jmenovateli, celý výraz je důležitý pouze pro malé poloměry. Poslední výraz vyjadřující efekt dynamické viskozity μ na kapalinu je úměrný k rychlosti deformace bublin \dot{R} a inverzně úměrný poloměru bubliny R , takže jeho význam stoupá se zvětšujícím se poloměrem.

Pokud se v rovnici (31) zanedbají výrazy s povrchovým napětím a viskózním členem (rychlostní a zrychlující členy jsou dominantní) a zavede se celkový tlak v bublině

$$p_B = p_{va} + p_{g0} \left[\frac{R_0}{R(t)} \right]^{3\gamma}$$

dostaneme tzv. zjednodušenou Rayleigh-Plessetovu rovnici:

$$\frac{p_B(t) - p_{\infty}(t)}{\rho} = R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \quad (34)$$

Bohužel i tato zjednodušená rovnice je příliš náročná pro CFD výpočty, proto se zaneřádává derivace vyšších řádů. Dynamika bubliny je potom:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{p_B(t) - p_{\infty}(t)}{\rho}} \quad (35)$$

3.6 Modelování kavitace v CFD [1], [15]

Modelování kavitace se může rozdělit do dvou skupin. První z nich je jednofázový model proudění (*ang.* single-phase model). Uvažovaná hranice mezi kapalnou a plynnou fází (plynnou fází představují syté páry) je plocha s konstantní hodnotou tlaku, který odpovídá hodnotě tlaku nasycených par v kapalině. Použití tohoto modelu je omezené na proudění, ve kterém se přímo nevyskytuje plynná fáze, je však výhodné svými malými požadavky na výpočet, který je zároveň numericky stabilní.

Druhá skupina modelování kavitace je založen na vícefázovém modelu proudění (*ang.* multi-phase model). Tento model se používá pro proudění silně ovlivněné kavitací. Využití vícefázového modelu a také přítomnost nerozpuštěného plynu v kapalině je důvodem

pro výskyt tzv. produkčního členu baroklinické vířivosti, což je přídavný produkční člen v transportní rovnici vířivosti [14].

Pro numerický výpočet vířivostného proudění jsou možné dva přístupy: metody Euler-Lagrange a Euler-Euler. Metoda Euler-Lagrange se opírá o Eulerův i Lagrangeův popis pohybu proudění. Zatímco kapalná fáze je považována za kontinuum (Eulerův popis) a řeší se pomocí RANS, disperzní fáze se řeší tak, že sleduje pohyb jednotlivých částic v proudovém poli (Lagrangeův popis). Tato metoda je vhodná pouze pro aplikace, ve kterých je objemový zlomek disperzní fáze zanedbatelný (např. rozprašování nebo spalování).

Metoda Euler-Euler přistupuje k oběma fázím jako ke kontinuím, která se vzájemně pronikají. Objemové zlomky obou fází jsou spojitou funkcí prostoru a času a jejich součet je roven jedné, tedy:

$$\frac{V_{va}}{V} + \frac{V_l}{V} = 1 \quad (36)$$

$$\alpha_{va} + \alpha_l = 1$$

Kde α_{va} je objemový zlomek disperzní (parní) fáze a α_l je objemový zlomek kapalně fáze. Rovnice popisující proudění obou fází mají podobnou strukturu a jsou odvozeny ze zákonů zachování.

Ve Fluentu jsou implementovány tři vířivostné modely založené na metodě Euler-Euler: VOF model, mixture model a Eulerovský model. V numerických výpočtech této práce se používalo pouze modelu mixture.

3.6.1 Mixture model [16]

Mixture model je zjednodušený vířivostný model, který se může použít pro modelování vířivostného proudění, ve kterém se jednotlivé fáze pohybují rozdílnou rychlostí, ale zároveň předpokládá lokální rovnovážný stav v malých prostorových měřítcích. Vazba mezi fázemi je silná. Tento model dokáže vytvořit rovnice pro N fází, a to rovnici kontinuity, hybnosti a zachování energie pro směs, dále rovnici objemového zlomku sekundárních fází a algebraické výrazy pro relativní rychlosti.

Rovnice kontinuity pro směs bude:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_m \cdot v_{m,j}) = 0 \quad (37)$$

Kde ρ_m je hustota směsi

$$\rho_m = \alpha_k \rho_k \quad (38)$$

$v_{m,j}$ je rychlost zprůměrovaná podle hmotnosti

$$v_{m,j} = \frac{\alpha_k \rho_k v_{k,j}}{\rho_m} \quad (39)$$

Kde α_k je objemový zlomek fáze k .

Rovnice pro zákon zachování hybnosti pro směs je dána součtem rovnic zachování hybnosti jednotlivých fází

$$\frac{\partial(\rho_m \cdot v_{m,i})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m \cdot v_{m,i} \cdot v_{m,j})}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_m \left(\frac{\partial v_{m,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{m,j}}{\partial x_i} \right) \right] + \rho_m g_i + F_i + \frac{\partial \alpha_k \rho_k v_{dr,k,i} v_{dr,k,j}}{\partial x_j} \quad (40)$$

Kde F_i je síla od tělesa a μ_m je viskozita směsi podle:

$$\mu_m = \alpha_k \mu_k \quad (41)$$

$v_{dr,k,i}$ je unášivá rychlost, pro kterou platí

$$v_{dr,k,i} = v_{k,i} - v_{m,i} \quad (42)$$

Zákon zachování energie pro směs nabývá následující tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k E_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_k v_{k,i} (\rho_k E_k + p) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{eff} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + S_E \quad (43)$$

Kde $k_{eff} = \sum \alpha_k (k_k + k_t)$ je efektivní vodivost. k_t je turbulentní tepelná vodivost definovaná podle použitého modelu turbulence. První člen rovnice na pravé straně reprezentuje energický přenos vedením. S_E obsahuje všechny další objemové zdroje tepla. Pro stlačitelnou fázi platí $E_k = h_k - \frac{p}{\rho_k} + \frac{v_k^2}{2}$, pro nestlačitelnou $E_k = h_k$, kde h_k je entalpie fáze.

Z rovnice kontinuity pro sekundární fázi (index p) lze získat rovnici objemového zlomku sekundárních fází:

$$\frac{\partial(\alpha_p \rho_p)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_p \rho_p v_{m,j}) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_p \rho_p v_{dr,p,j}) + \sum_{k=1}^n (\dot{m}_{qp} - \dot{m}_{pq}) \quad (44)$$

Relativní rychlost (*ang. slip velocity*) je definovaná jako rozdíl rychlostí sekundární fáze (index p) ku primární fázi (index q)

$$v_{p,q,i} = v_{p,i} - v_{q,i} \quad (45)$$

Vzhledem k tomu, že hmotnostní zlomek fáze k je

$$c_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho_m} \quad (46)$$

Potom je vztah mezi unášivou a relativní rychlostí

$$v_{dr,p,i} = v_{p,q,i} - \sum_{k=1}^n (c_k v_{k,q,i}) \quad (47)$$

3.6.2 Kavitační modely

Pro kavitační modely ve Fluentu platí tyto předpoklady:

- výpočetní systém musí obsahovat kapalnou a parní fázi
- předpokládá se přenos hmoty mezi fázemi, vznik a imploze kavitačních bublin

- kavitační modely jsou založeny na zjednodušených Rayleigh-Plessetových rovnicích, popisující dynamiku kavitační bubliny v kapalině

Kavitační modely využívá k popisu dynamiky bubliny zjednodušenou Rayleigh-Plessetovu rovnici (35).

Hmotnostní přenos kapaliny a páry (vypařování a kondenzace) je řízen transportní rovnicí páry

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_{va}\rho_{va}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_{va}\rho_{va}v_{va,i}) = R_S \quad (48)$$

Kde $v_{va,i}$ je rychlost parní fáze. Výraz R_S vyjadřuje zdroj přenosu hmoty spojený s růstem a implozí kavitačních bublin.

Fluent poskytuje tři kavitační modely: Singhal, Zwar-Gerber-Belamri a Schnerr-Sauer. Pro numerické výpočty v této práci byl použit pouze model Schnerr-Sauer.

Model Schnerr-Sauer využívá k popisu dynamiky bubliny zjednodušenou Rayleigh-Plessetovu rovnici (40). Při použití tohoto kavitačního modelu implementována transportní rovnice parní fáze pro vznik kavitace (53). Zdrojový člen R_S je v tomto případě vyjádřen jako

$$R_S = \frac{\rho_{va}\rho_l}{\rho} \frac{D\alpha_{va}}{Dt} \quad (49)$$

Tento model (jako jediný z modelů nabízených ve Fluentu) udává závislost objemového zlomku páry na počtu bublin v objemu tekutiny n_b

$$\alpha_{va} = \frac{n_b \frac{4}{3} \pi R_b^3}{1 + n_b \frac{4}{3} \pi R_b^3} \quad (50)$$

Kde R_b je poloměr kavitační bubliny.

Po dosazení (50) do (49) a následné derivaci dostaneme pro míru přenosu hmoty R_S

Pro $p_{va} \geq p$ platí:

$$R_e = \frac{\rho_{va}\rho_l}{\rho} \alpha_{va}(1 - \alpha_{va}) \frac{3}{R_b} \sqrt{\frac{2(p_{va} - p)}{3\rho_l}} \quad (51)$$

Tento přenos uvažuje vznik kavitace (vypařování)

Pro $p_{va} \leq p$ platí:

$$R_c = \frac{\rho_{va}\rho_l}{\rho} \alpha_{va}(1 - \alpha_{va}) \frac{3}{R_b} \sqrt{\frac{2(p - p_{va})}{3\rho_l}} \quad (52)$$

Tento přenos uvažuje zánik kavitace (kondenzaci).

Jediný parametr, který musí být určen, je počet kavitačních bublin n_b v kapalině.

4 FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE [19]

V přírodě se hojně vyskytují objekty, jejichž složitý a nepravidelný tvar je pomocí klasické Eukleidovské geometrie velmi těžko uchopitelný, např. přeslička, kvěťák, hory, oblaka, lidský mozek. Mnoho vzorů v přírodě je toliko nepravidelných a fragmentovaných, že v porovnání s Eukleidovskou geometrií příroda ukazuje nejenom vyšší stupeň, ale dokonce úplně rozdílnou úroveň komplexity. Matematici se popisu těchto objektů dlouho vyhýbali, utíkali od tohoto problému vymyšlením teorií, které však neměli žádnou oporu v tom, jak objekty vypadají v přírodě.

Konec 19. století by se mohl považovat za pozvolný počátek fraktální geometrie. V té době také probíhala ideová revoluce vedoucí ke vzniku moderní matematiky. Někteří matematici začali vytvářet podivné funkce a množiny (např. Weierstrassova funkce, Cantorova množina), které nezapadaly do zavedených představ o geometrické topologii. Tyto nové struktury byly pokládány za „patologické“, „přehlídku monster“, podobně jako kubistická díla v umění. Až v druhé polovině 20. století se těmito mimořádnými objekty začal zabývat matematik Benoît Mandelbrot⁴. Ten vymyslel název pro tyto struktury – fraktály (z *lat.* „fractus“ – rozdělený) a přiřadil jim několik definic:

„Fraktál je množina, pro kterou Hausdorff-Besicovichova dimenze (ostře) přesahuje hodnotu dimenze topologické.“

Topologická dimenze udává počet reálných parametrů potřebných k přesnému určení bodu na daném objektu v daném prostoru. Bod má tedy topologickou dimenzi rovnu 0, přímka 1, krychle 3 apod. Topologická dimenze může být vždy pouze přirozené číslo. Oproti tomu Hausdorff-Besicovichova dimenze může být neceločíselná, hodnoty této dimenze určují členitost daného objektu. Velikost Hausdorff-Besicovichovy dimenze se spočítá podle:

$$D_{HB} = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (53)$$

kde N označuje faktor změny délky a $\frac{1}{r}$ faktor změny měřítka.

Další definice fraktálu může být:

„Fraktál je takový útvar, při jehož zvětšení dostaneme opět stejný obraz bez ohledu na měřítko.“

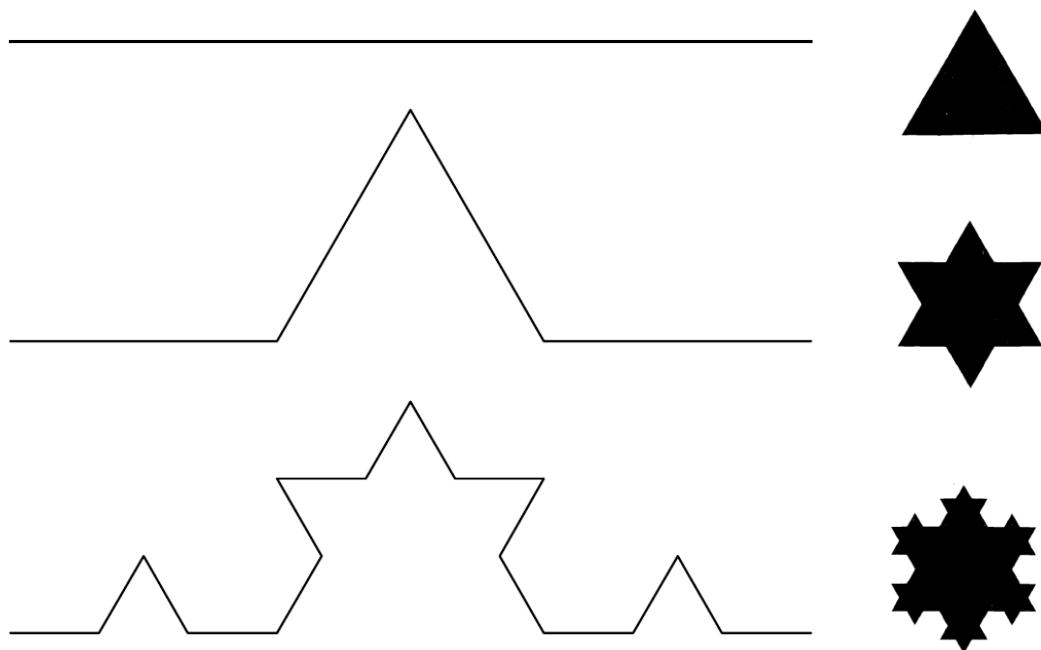
Podle této definice o fraktálech platí, že jsou soběpodobné.

Příklad výpočtu dimenze se může demonstrovat na jednoduchém fraktálu – von Kochově vločce (obr. 10). Ta se skládá z úseček, její topologická dimenze je proto $D_T = 1$.

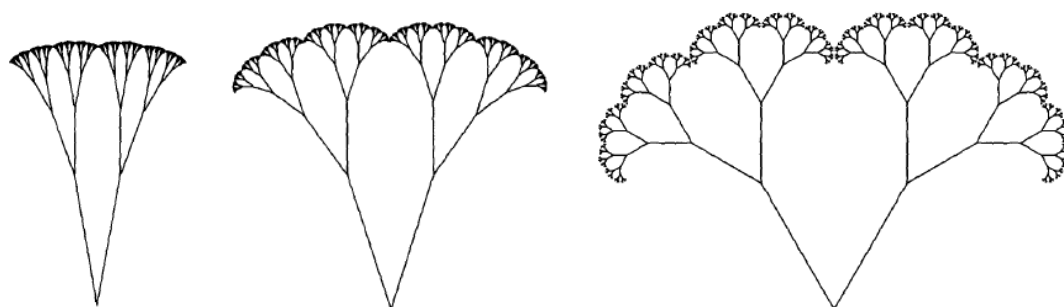
Při každé transformaci se délka úsečky rozdělí na třetiny (tzn. faktor změny měřítka $\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$) a počet soběpodobných úseků je 4 (tzn. faktor změny délky $N = 4$). Fraktální Hausdorff-Besicovichovy dimenze po dosazení bude

$$D_{HB} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618.$$

⁴ Benoît Mandelbrot (*1924; †2010) byl francouzsko-americký matematik a zakladatel fraktální geometrie, profesor matematických věd na Yaleově univerzitě a pracovník společnosti IBM ve vývojovém středisku Thomase J. Watsona. Pojmenována po něm byla Mandelbrotova množina, kterou jako první vykreslil na počítači. Roku 1993 obdržel Wolfovu cenu za fyziku.



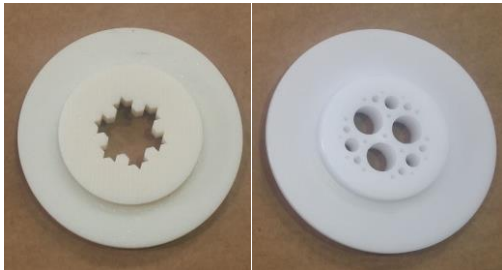
Obr. 4.1. První 3 iterace von Kochovy vločky [19]



Obr. 4.2. Iterace fraktálu ve tvaru kvěťáku [19]

5 VÝCHOZÍ EXPERIMENTÁLNĚ NAMĚŘENÉ CHARAKTERISTIKY [11]

Celá tato práce vychází z bakalářské práce [11], jejíž hlavním cílem bylo navrhnout otvor clony na základě fraktální geometrie, konkrétně se jednalo o fraktály von Kochova vločka a Apolónovy kružnice (obr. 5.1). Následně byly na hydraulické trati (obr. 5.2) změřeny hydraulické ztráty, které se pak porovnávaly s hydraulickými ztrátami clony s kruhovým otvorem o stejné průtočné ploše.



Obr. 5.1. Navržené fraktální clony [11]



Obr. 5.2. Hydraulická měřicí trať [11]

5.1 Clony [5]

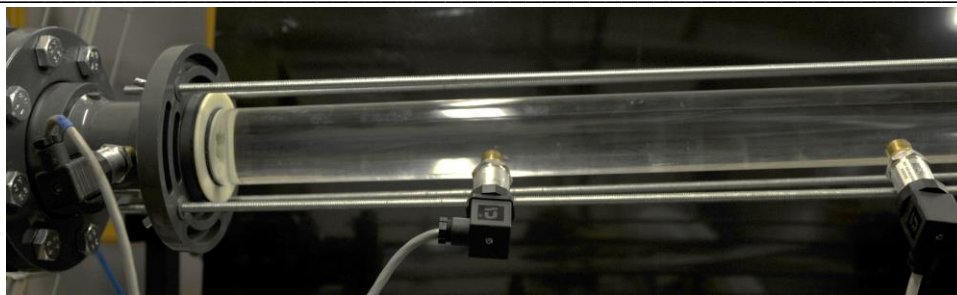
Clona je jedním z typů průtokoměrů, který je díky svojí konstrukční jednoduchosti často využíván v průmyslu. Princip měření spočívá v tom, že do potrubí se umístí clona, která lokálně zmenšuje průtočný průřez. Clona zabudovaná v potrubí potom způsobí v proudění tlakové ztráty a pomocí rozdílů statických tlaků před a za clonou lze snadno spočítat průtok.

Vedle bezúdržbového provozu je další výhodou použití clon i použitelnost ve velkém rozmezí průtoků. Nevýhodou je vznik poměrně velké tlakové ztráty. Se zvětšováním průtoku může za clonou vznikat kavitace, která dále snižuje energii proudu.

Je snaha tyto negativní účinky clon eliminovat. Jedna z možností, jak toho dosáhnout, je změna tvaru otvoru clony, kdy by otvor měl jiný než kruhový tvar. Mnoho experimentů i numerických simulací ukazuje, že slibnou cestou k dosažení nižších ztrát na cloně je využití fraktální geometrie při návrhu otvoru clony, viz [11], [6], [20].

5.2 Provedení experimentu a výsledky

V měřícím okruhu se postupně zvyšoval průtok až do té doby, kdy byla na cloně vytvořena superkavitace. Místa v potrubí kolem clony se osadila tlakoměry (viz obr. 5.3) pro snímání okamžitého tlaku.



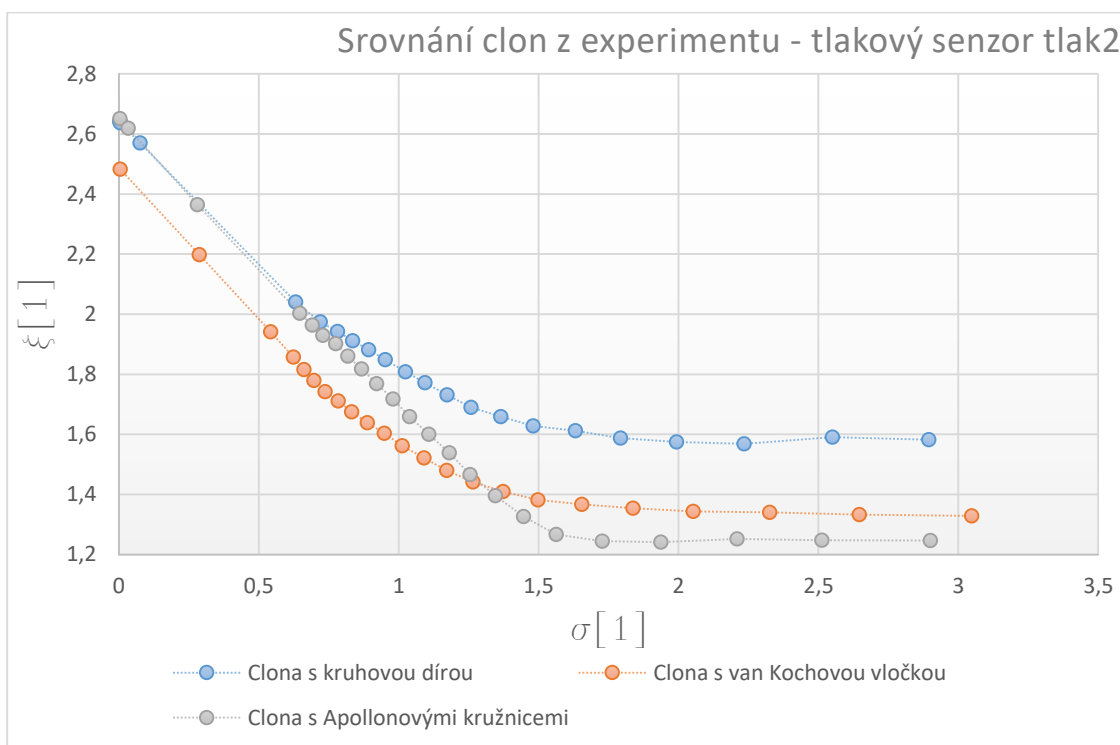
Obr. 5.3. Část hydraulického obvodu se clonou [11]

Po naměření několika kavitačních stavů za clonou byla z naměřených hodnot vytvořena charakteristika závislosti kavitačního čísla (25) na ztrátovém součiniteli za clonou ξ

$$\xi = \frac{p_{tlak1} - p_{tlak2}}{\rho \frac{v_{clona}^2}{2}} \quad (54)$$

Kde p_{tlak1} , resp. p_{tlak2} jsou tlaky naměřené na tlakoměrech před clonou, resp. za clonou a v_{clona} je rychlost proudění v místě clony.

Výsledné závislosti (obr. 5.4) ukázaly, že v porovnání clony s kruhovou dírou se clonami s fraktálně navrženými otvory měly ty s fraktálními otvory lepší hydraulické vlastnosti. Ztrátové součinitele při bezkavitačním provozu a při počátku kavitace dosahovaly nižších hodnot, zhruba o 20 %. Nejlepší hydraulické vlastnosti vykazovala clona s Apollonovými kružnicemi, po vyvinutí kavitace z částečně na plně vyvinutou měla ovšem clona s von Kochovou vločkou lepší vlastnosti (ztrátový součinitel o 15% menší). Stejně měření bylo zopakováno v diplomové práci [15], kde byl experiment proveden na stejné trati, ovšem s odlišným osazením tlakoměrů. Absolutní výsledky [11] a [15] se proto lišily, avšak relativní výsledky byly velmi podobné.

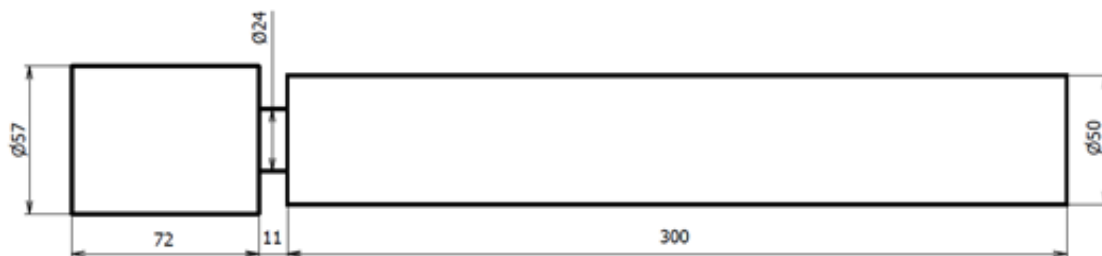
Obr. 5.4. Porovnání výsledků jednotlivých clon – závislost ztrátového součinitele ξ na kavitačním čísle σ [11]

6 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ

Pro provedení numerické simulace proudění v potrubí se clonou byl využit CFD software Ansys Fluent 19.1. Tento program je založen na principu řešení rovnic na námi vytvořené síti, a to metodou konečných objemů. Proto musela být nejprve vytvořena geometrie, na které se následně vytvořila výpočetní síť s nadefinovanými okrajovými podmínkami, která se importovala do Fluentu pro samotné CFD výpočty. Po vložení sítě do Fluentu se musel nastavit samotný výpočet. Celý průběh nastavování výpočtu bude naznačen v dalších kapitolách.

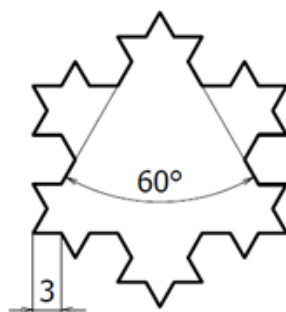
6.1 Geometrie

Geometrie byla vytvořena pomocí programu ANSYS DesignModeler. Vycházela z části měřicího okruhu, ve kterém se nacházela clona (obr. 5.3), s ustalovací částí objemu kapaliny před a za clonou. Velikosti domény pro kruhovou clonu jsou zobrazeny na obr. 6.1.



Obr. 6.1. Geometrie vytvořená pro Fluent

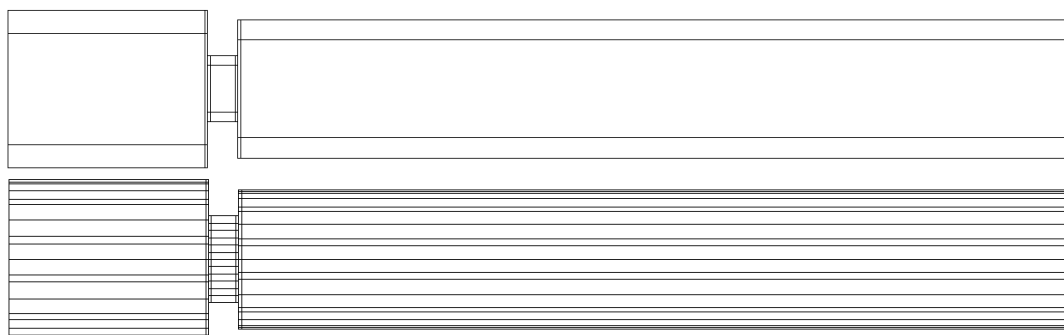
Pro clonu s otvorem ve tvaru von Kochovy vločky byl jediný rozdíl geometrie v místě clony, kdy místo kruhu s průměrem 24 mm byl vytvořen průřez ve tvaru von Kochovy vločky (podle obr. 6.2)



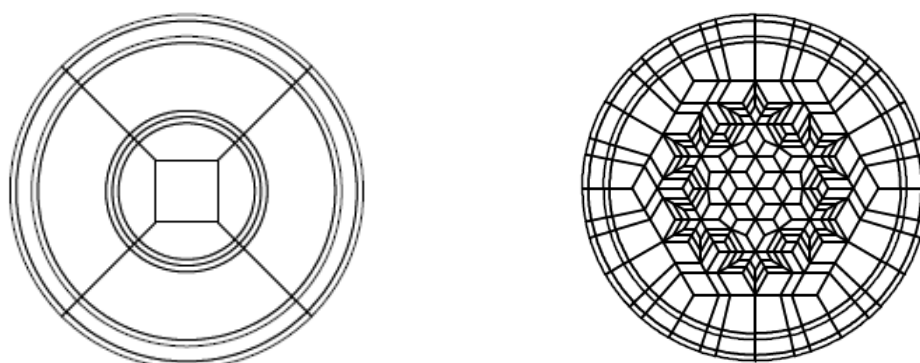
Obr. 6.2. Tvar otvoru clony podle von Kochovy vločky

6.1.1 Dekompozice výpočetní oblasti

Abychom byli schopni vytvořit hexahedrální síť (buňky ve tvaru kvádrů), bylo nutné provést vhodnou dekompozici, tj. rozdělení celkového objemu na dílčí oblasti. Dalším aspektem ovlivňujícím přesnost výpočtu je vytvoření takové sítě, která by měla kolmo na stěny (okrajové podmínky wall) co nejtenčí buňky, které by se postupně zvětšovaly. Z těchto důvodů je nutné přistoupit na poměrně složitou dekompozici, zejména pro von Kochovu clonu, viz obr. 6.3, 6.4.



Obr. 6.3. Dekompozice výpočetní oblasti – pohled na rovinu YZ (nahore oblast s kruhovou clonou, dole s von Kochovou clonou)



Obr. 6.4. Dekompozice výpočetní oblasti – pohled na rovinu XY (vlevo oblast s kruhovou clonou, vpravo s von Kochovou clonou)

6.2 Vytvoření sítě

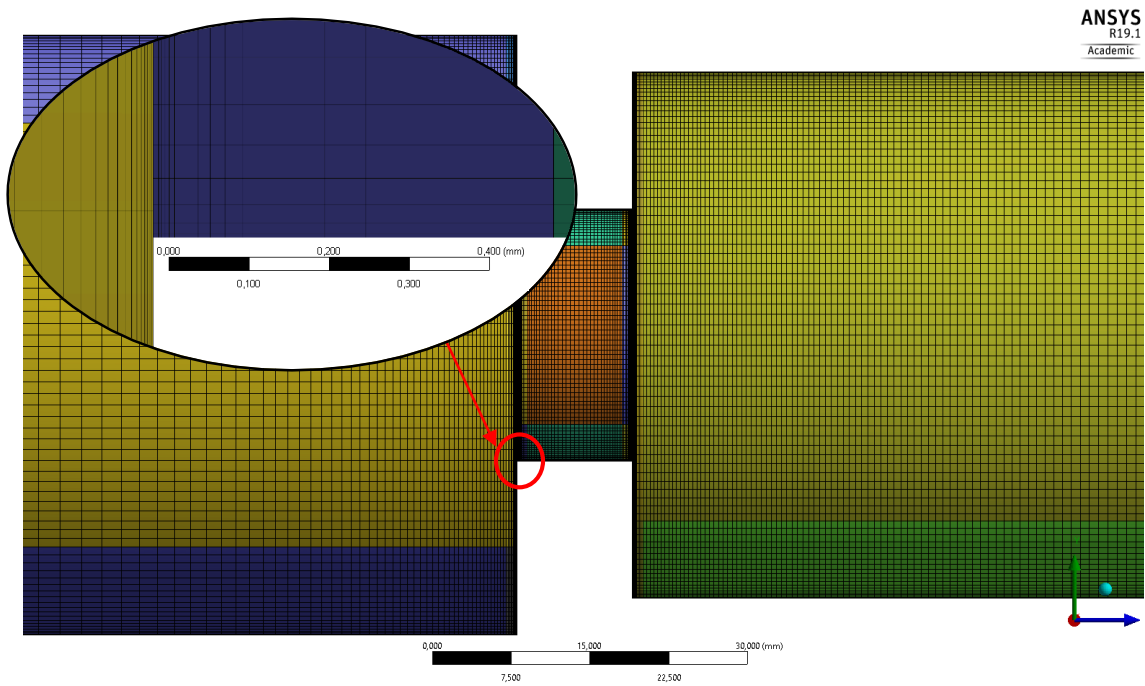
Díky vhodně vytvořené dekompozici geometrie bylo možné vytvořit síť složenou pouze z hexahedrálních prvků. Ta je pro CFD nejvhodnější, jelikož s ní lze snadno vytvořit strukturovanou síť a výpočet je nejpřesnější. Zároveň bylo možné vytvořit dostatečně jemnou mezní vrstvu.

K vytvoření sítě se použila na všech hranách metoda Sizing, pomocí které lze přesně určit, na kolik částí chceme danou hranu rozdělit. Zároveň může být určen směr, v jakém je požadováno zhušťování rozdělení hrany (tedy směrem ke stěnám), tzv. Bias factor. Pomocí této metody se povedlo zmenšit velikost hrany kolmé na stěnu až na jednotky mikrometru, aby se pak postupně zvětšovala až na desetiny milimetru. Na celou výpočetní oblast byla také použita metoda Face Meshing, která vynucuje dodržování funkce Sizing.

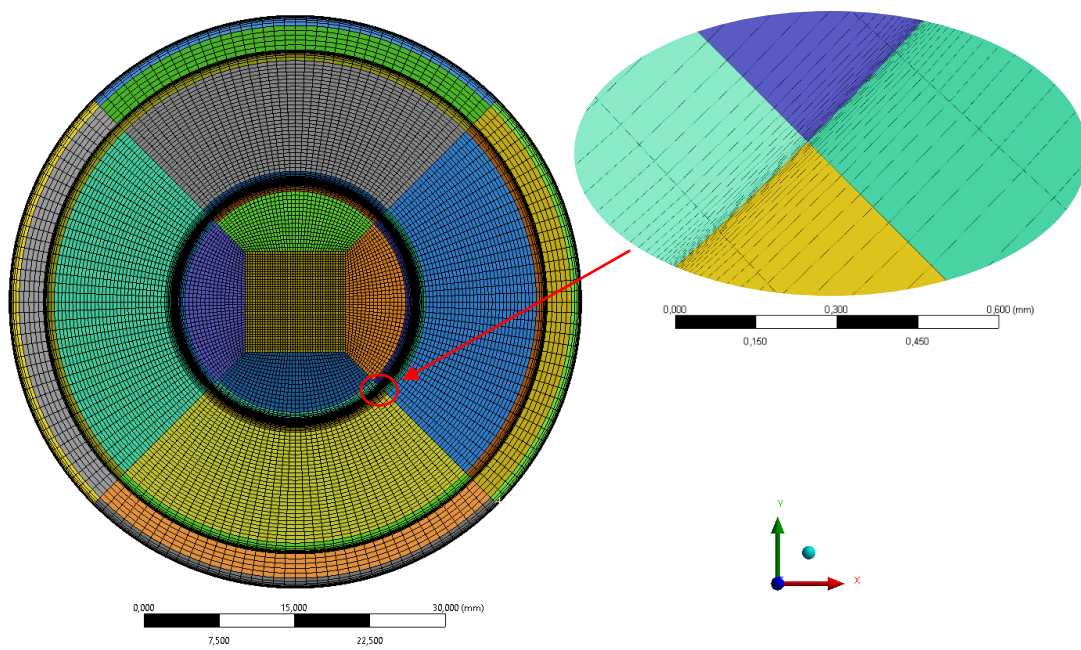
Details z jednotlivých částí výpočetních oblastí jsou na obr. 6.5 - 6.8. V tab. 1 jsou shrnuty základní údaje o sítích: počet elementů sítě.

Typ clony	Kruhová	Von Kochova
Počet elementů	5 544 000	12 780 794

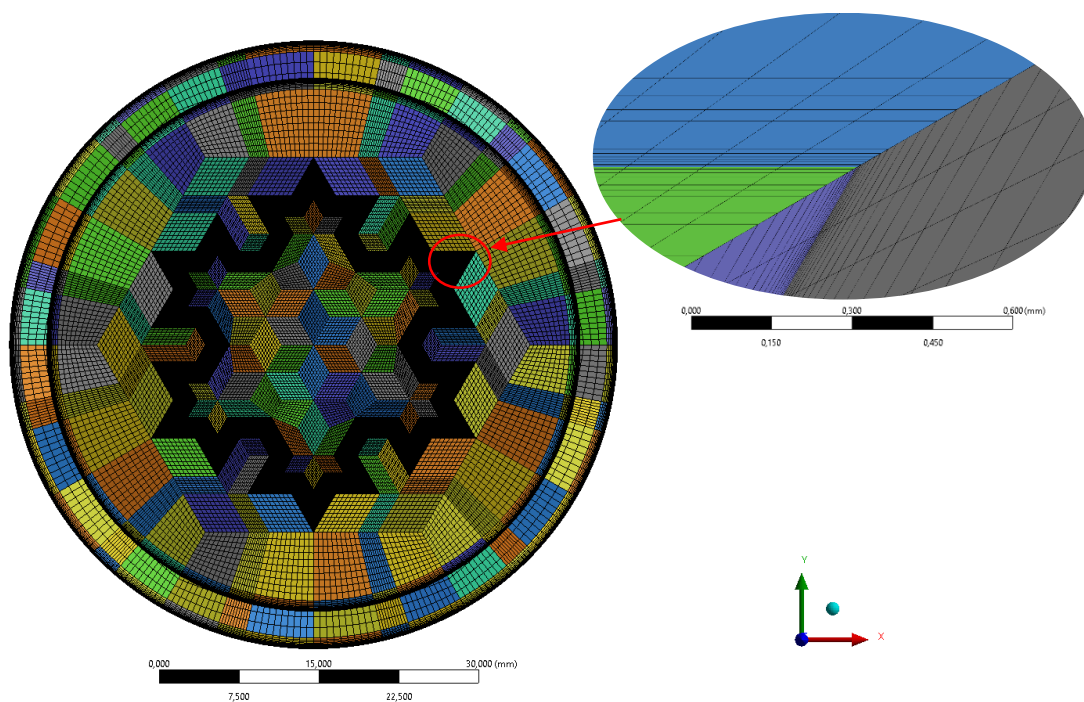
Tab. 1. Počet elementů sítí



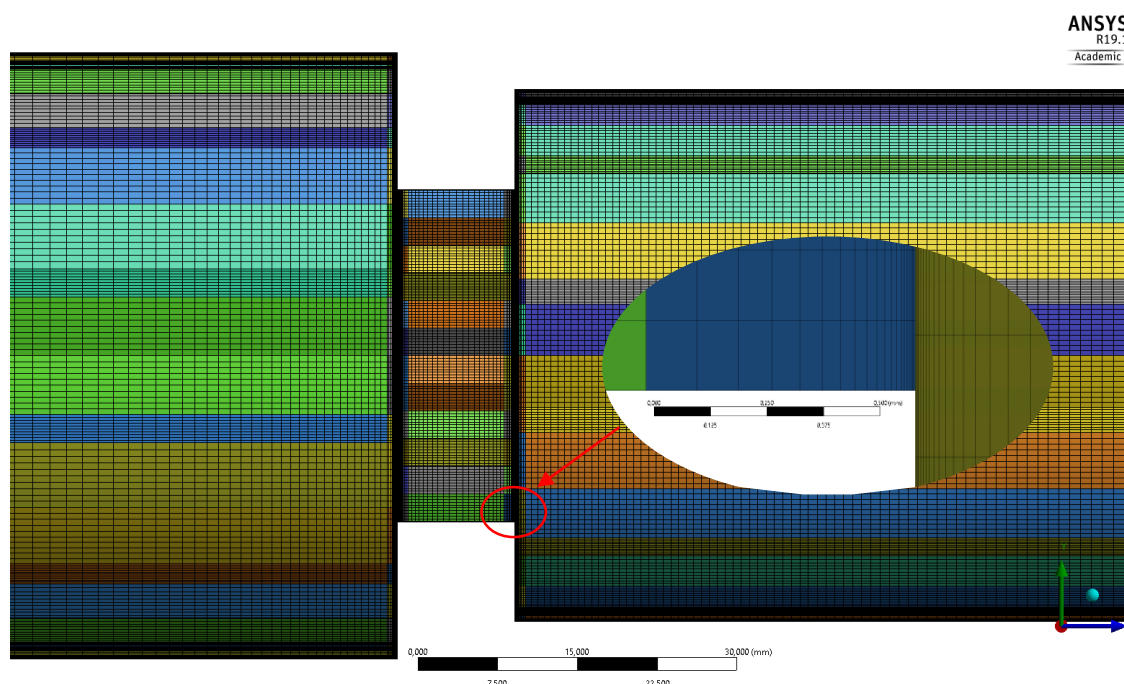
Obr. 6.5. Část sítě kolem místa s kruhovou clonou s detailem na mezní vrstvu



Obr. 6.6. Pohled na síťování příčného průřezu s detailem mezní vrstvy
- clona s kruhovým otvorem



Obr. 6.7. Pohled na síťování příčného průřezu s detailem mezní vrstvy
- clona s otvorem ve tvaru von Kochovy vločky



Obr. 6.8. Část sítě kolem místa s von Kochovou clonou s detailem na mezní vrstvu

6.3 Okrajové podmínky [2], [3]

Pro získání konkrétních výsledků v libovolné úloze ve výpočtovém modelování je nutné zadat okrajové podmínky na hranicích výpočtové oblasti. Tyto pak řídí samotné proudění. Definování okrajových podmínek zahrnuje určení hraničních míst (vstupní nebo výstupní

plochy, stěny...) s následným dodáním potřebných hodnot. Data dodávaná pro okrajové podmínky záleží na jejich typech (tlak, průtok...). Hodnoty zadávané do okrajových podmínek musí být co nejpřesnější, protože i malé odchylky v zadaných hodnotách mohou vést k úplně rozdílným výsledkům, a to v důsledku turbulentního proudění, které se chová jako deterministický chaos, viz kap. 2.1.

Pokud je proudění nestacionární, je třeba dodat také počáteční podmínky.



Obr. 6.9. Definované okrajové podmínky

6.3.1 Vstupní okrajová podmínka

Vstupní okrajová podmínka (ve Fluentu se nazývá inlet) představuje plochu výpočtové oblasti, přes kterou vstupuje do oblasti tekutina. Podle veličiny, která je definovaná na vstupu, existuje několik základních typů vstupní okrajové podmínky.

Na vstupu je nutné také definovat turbulentní veličiny (pouze v případě laminárního proudění nejsou pochopitelně potřebné). Ty se zadávají bez zřetele na použitý model turbulence.

V následujících výpočtech se vstupní okrajová podmínka definovala pomocí rychlosti proudění, a to jejími složkami v kartézských souřadnicích a hodnoty turbulentních veličin pro turbulentní kinetickou energii k a specifickou disipace energie ω . Pro dosažení co nejpřesnějších výsledků byli předpočítány rychlostní profily, jež se pak načítali na vstupní okrajovou podmínku velocity inlet. Profily se předpočítávaly na jiné, pomocné výpočetní oblasti o konstantním průřezu, které mělo stejnou světlost jako vstupní okrajová podmínka ve výchozí výpočetní oblasti (konkrétně průměr $D = 57 \text{ mm}$, viz obr. 6.9). Tato pomocná oblast simulovala ustálení proudění v potrubí, ustalovací délka byla $10D$. Vstupy do těchto oblastí byly rychlosti kolmé ke vstupu, které odpovídaly průtokům naměřeným z [11], jako turbulentní veličiny se zadávaly intenzita $I = 8\%$ a hydraulický průměr $D_h = 0,057 \text{ m}$. Přenášené profily potom obsahovaly hodnoty složek rychlostí v kartézských souřadnicích a hodnoty k a ω v jednotlivých uzlech sítě.

6.3.2 Výstupní okrajová podmínka

Výstupní okrajová podmínka (ve Fluentu označovaná jako outlet) představuje plochu výpočtové oblasti, přes kterou tekutina z oblasti vytéká. Stejně jako vstupní okrajová podmínka má i výstupní okrajová podmínka několik základních typů podle veličiny, která je definována na výstupu.

V případě, že tlak těsně před výstupní okrajovou podmínkou je menší než tlak definovaný na výstupu, může dojít ke zpětnému proudění, tedy že se tekutina vrací z výstupní okrajové podmínky zpátky do výpočetní oblasti. Pro zpětné proudění je možné přednastavit hodnoty turbulentních parametrů.

Ve všech následujících výpočtech je jako výstupní okrajová podmínka použitý statický tlak 0 Pa . Pro zpětné proudění je nastavena intenzita turbulence $I = 10 \%$ a hydraulický průměr $D_h = 0,05 \text{ m}$, který odpovídá průměru výstupní plochy, viz obr. 6.9.

6.3.3 Stěnová okrajová podmínka

Stěnová okrajová podmínka (ve Fluentu se označuje jako wall) představuje plochu, přes kterou nemůže protékat tekutina (tedy normálová složka rychlosti je nulová). Stěna také musí dodržovat tzv. podmínku ulpívání na povrchu (*ang.* no-slip boundary condition), která předpokládá, že tečná rychlost proudění na stěně je nulová.

6.4 Obecné nastavení numerických výpočtů

Veškeré numerické simulace proudění ve cloně byly prováděny v programu Fluent 19.1. Kvůli velkému počtu buněk ve výpočetních sítích a velkému počtu potřebných výpočtů musely být veškeré výpočty spuštěny na univerzitním clusteru THOR. Ten obsahuje 56 uzlů, každý uzel měl buď 16 nebo 28 fyzických jader s procesorem Intel Xeon E5-2690v4 s operačním systémem Linux. Pro výpočet v této práci byly využity pouze uzly s 28 jádry.

Všechny výpočty byly nastaveny jako nestacionární (*ang.* transient), jelikož jsme předpokládali výskyt nestacionárních oblastí v proudění. Byly nastaveny tyto modely turbulence – pro jednofázové proudění $k-\omega$ SST a $k-\omega$ SST SBES, pro dvoufázové proudění pouze model $k-\omega$ SST SBES. Pro dvoufázové proudění se zároveň musí nastavit druhá fáze (pára) a interakce mezi fázemi (vodou a parou) jako kavitace. Nastavení okrajových podmínek je popsáno v kap. 6.3. Pro všechny výpočty byla nejprve nastavena diskretizační schémata na první řád přesnosti. Po dosažení hladiny konvergence 10^{-3} se schémata přepnula na druhé řády přesnosti. Jedinou výjimku tvořil u vícefázového výpočtu diskretizační schéma Volume fraction, které bylo po celou dobu výpočtu ponecháno na prvním řádu přesnosti, a to z důvodu lepší konvergence. Všechny relaxační faktory pro jednofázové výpočty byly v průběhu všech výpočtů ponechány na defaultních hodnotách, jelikož všechny výpočty díky kvalitní výpočetní síti velmi rychle konvergovaly, takže je nebylo třeba měnit. Pouze pro vícefázové výpočty se musel faktor pro Volume fraction zmenšit na 0,01, a to opět z důvodu lepší konvergence výpočtu. Ve všech jednofázových výpočtech byl volen časový krok o velikosti 0,001 s. Ve všech dvoufázových výpočtech byl volen časový krok o velikosti 0,00001 s. Všechny výpočty byly spočítány pro 2000 časových kroků, každý krok obsahoval 20 iterací. Jedinou výjimku tvořily jednofázové výpočty pro model SBES, které byly provedeny pro 6000 časových kroků.

6.5 Sledované veličiny

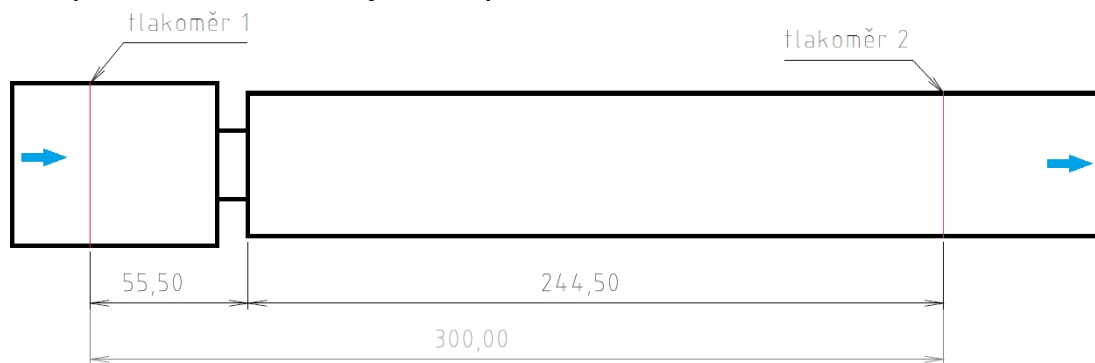
Použití metody $k-\omega$ SST je podmíněno tím, že veličina y^+ bude dosahovat hodnoty $y^+ \leq 5$. Veličina y^+ charakterizuje hustotu sítě v oblasti mezní vrstvy.

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \tag{55}$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}}$$

Kde u_τ je třecí rychlost, y vzdálenost od stěny a τ_{wall} je smykové napětí na stěně. [1]

V průběhu výpočtu se zaznamenávaly určité veličiny, pomocí kterých se následně provedlo vyhodnocení proudového pole. Konkrétně se jednalo o statický tlak, který se sledoval v místech tlakoměru 1 a 2, viz obr. 6.10. Sledování tlaku právě v těchto místech korespondovalo s umístěním tlakoměrů v experimentu podle [11]. Tlakoměry v experimentu však pochopitelně snímaly statický tlak pouze v jednom bodě průřezu. V CFD simulaci se sledovaly statické tlaky na celém obvodu konkrétního průřezu v místech tlakoměrů 1 a 2. Následně se pomocí funkce Surface integrals spočítaly průměrné statické tlaky na celém obvodu, a to pomocí funkce Vertex Average, která průměrovala hodnoty statických tlaků ve vrcholech jednotlivých elementů.



Obr. 6.10. Umístění snímačů tlaku ve výpočetní oblasti

7 VYHODNOCENÍ CFD SIMULACE

Jak již bylo řečeno výše, všechny CFD simulace vycházely z práce [21]. Jako hodnoty okrajových podmínek byly tedy nastavovány hodnoty, které byly naměřeny na reálném experimentu, aby se pak mohla data z experimentu a z CFD simulace porovnat. Hodnoty vstupní rychlosti (velocity inlet) přepočítané z experimentálně zjištěných průtoků pro obě clony jsou v tab. 2. V [11] se hodnoty průtoku nastavovaly pomocí řízení frekvence čerpadla v měřicím okruhu.

FREKVENCE ČERPADLA	KRUHOVÁ CLONA		VON KOCHOVA CLONA	
	Q [l/s]	v_{inlet} [m/s]	Q [l/s]	v_{inlet} [m/s]
15	3.767348004	1.476	3.682941	1.443
16	4.012974803	1.573	3.951514	1.549
17	4.287637231	1.680	4.214099	1.651
18	4.538140477	1.778	4.484220	1.757
19	4.78465630	1.875	4.739582	1.857
20	5.014137428	1.965	4.994879	1.957
21	5.263539946	2.063	5.248159	2.057
22	5.481580001	2.148	5.481003	2.148
23	5.707560434	2.237	5.710477	2.238
24	5.912567614	2.317	5.934476	2.326
25	6.120671203	2.399	6.149101	2.410
26	6.325162629	2.479	6.377541	2.499
27	6.559737766	2.571	6.586943	2.581
28	6.773882236	2.655	6.804820	2.667
29	6.990160557	2.739	7.023221	2.752
30	7.199571930	2.821	7.233439	2.835

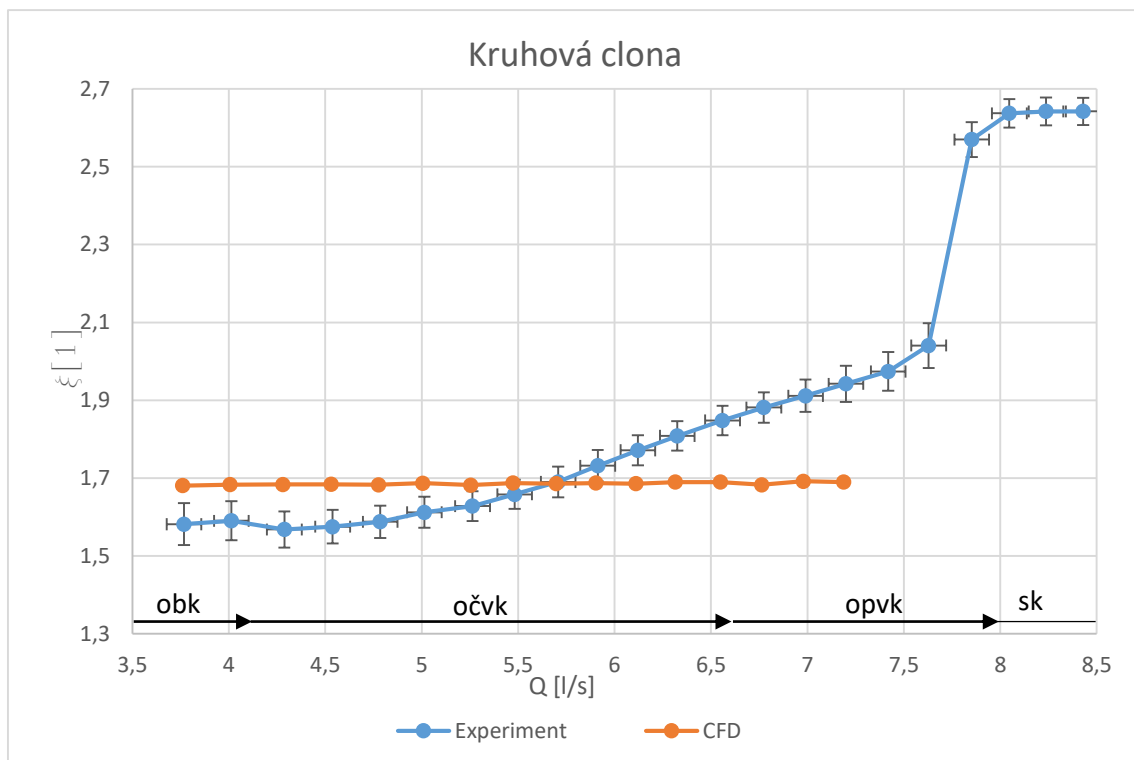
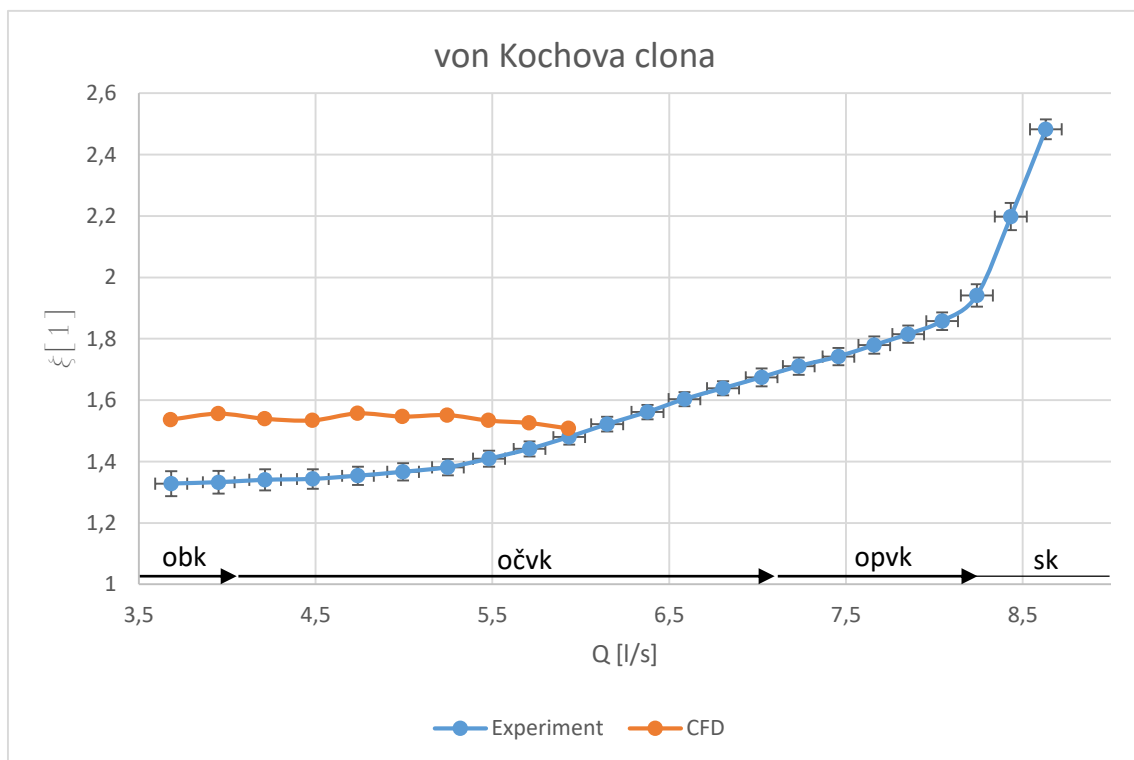
Tab. 2. Hodnoty rychlostní okrajové podmínky

Pomocí namodelovaných sítí (viz kap. 6.2) se podařilo u všech výpočtů dosáhnout hodnoty $y^+ \sim 5$, což nás opravňuje k používání modelu turbulence $k-\omega$ SST, případně SBES.

7.1 Jednofázový výpočet

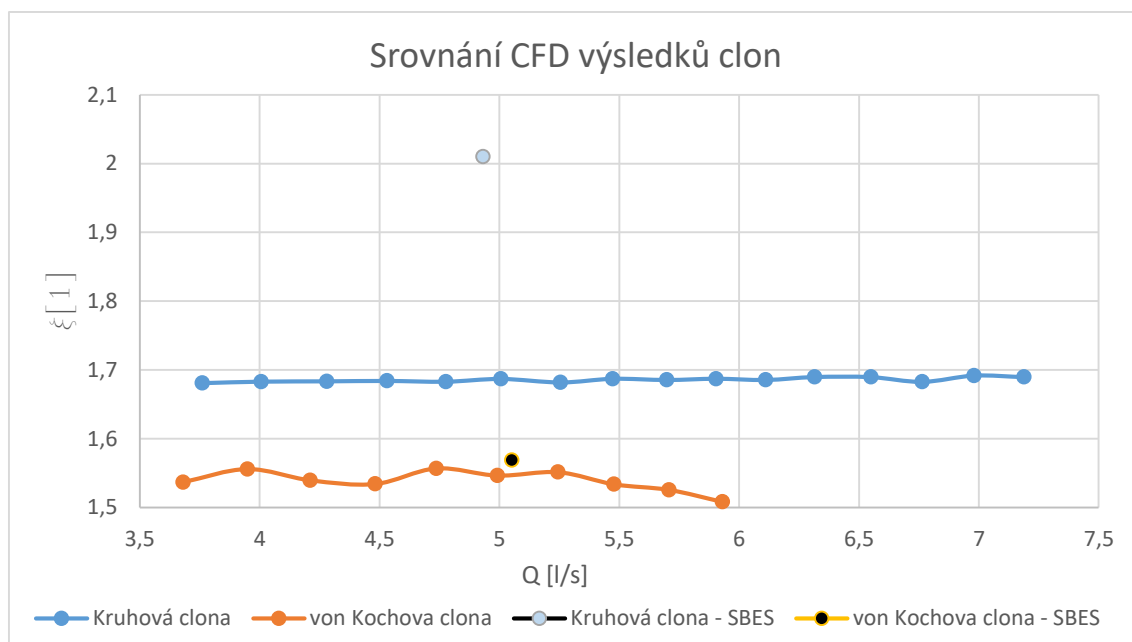
Výskyt kavitace můžeme pouze předpokládat v místech, v nichž hodnota tlaku klesne pod tlak nasycených par. Tudíž pro větší průtoky, ve kterých už kavitace citelně ovlivňuje proudění, nemá jednofázový výpočet žádné opodstatnění. Jako model turbulence byl nastaven model $k-\omega$ SST.

Následující grafy uvádí srovnání CFD simulace s experimentem pro jednotlivé clony, a to závislost průtoku Q na ztrátovém součiniteli ξ . Kvůli velmi velkým časovým nárokům jednotlivých výpočtů bylo spočítáno méně výpočtů daných průtoků pro von Kochovu clonu (10 hodnot) než pro clonu kruhovou (16 hodnot).

Graf 1a. Srovnání experimentu a CFD simulace kruhové clony – závislosti ξ na Q Graf 1b. Srovnání experimentu a CFD simulace von Kochovy clony – závislosti ξ na Q

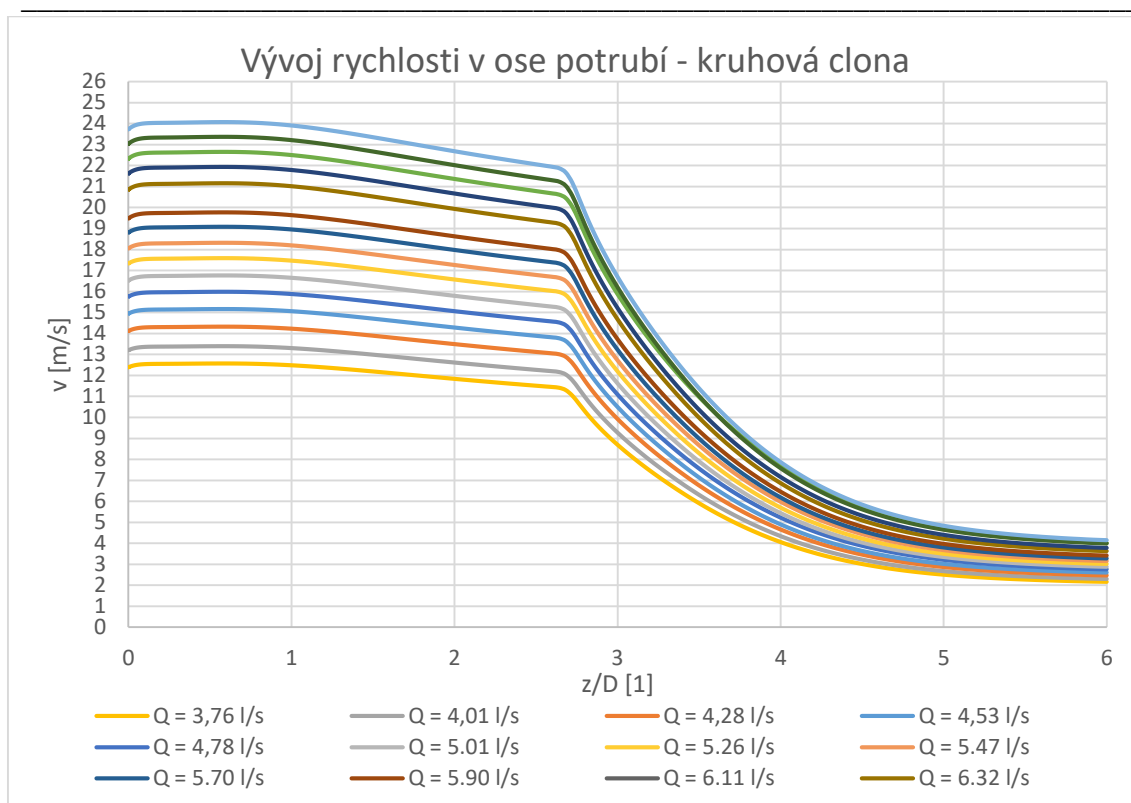
obk – oblast bez kavitace, očvk – oblast částečně vyvinuté kavitace, opvk – oblast plně vyvinuté kavitace, sk – superkavitace

V grafu 2 je zobrazena porovnání CFD simulací kruhové clony s von Kochovou clonou, a to opět závislost ξ na Q . Dále je v grafu znázorněno srovnání různých modelů turbulence pro jeden průtok jak u kruhové, tak u von Kochovy clony. Srovnávají se zde modely $k-\omega$ SST a SBES. Kvůli velké časové náročnosti byly provedeny simulace pouze pro jeden průtok. Model SBES se dále používal pouze pro vícefázové výpočty.

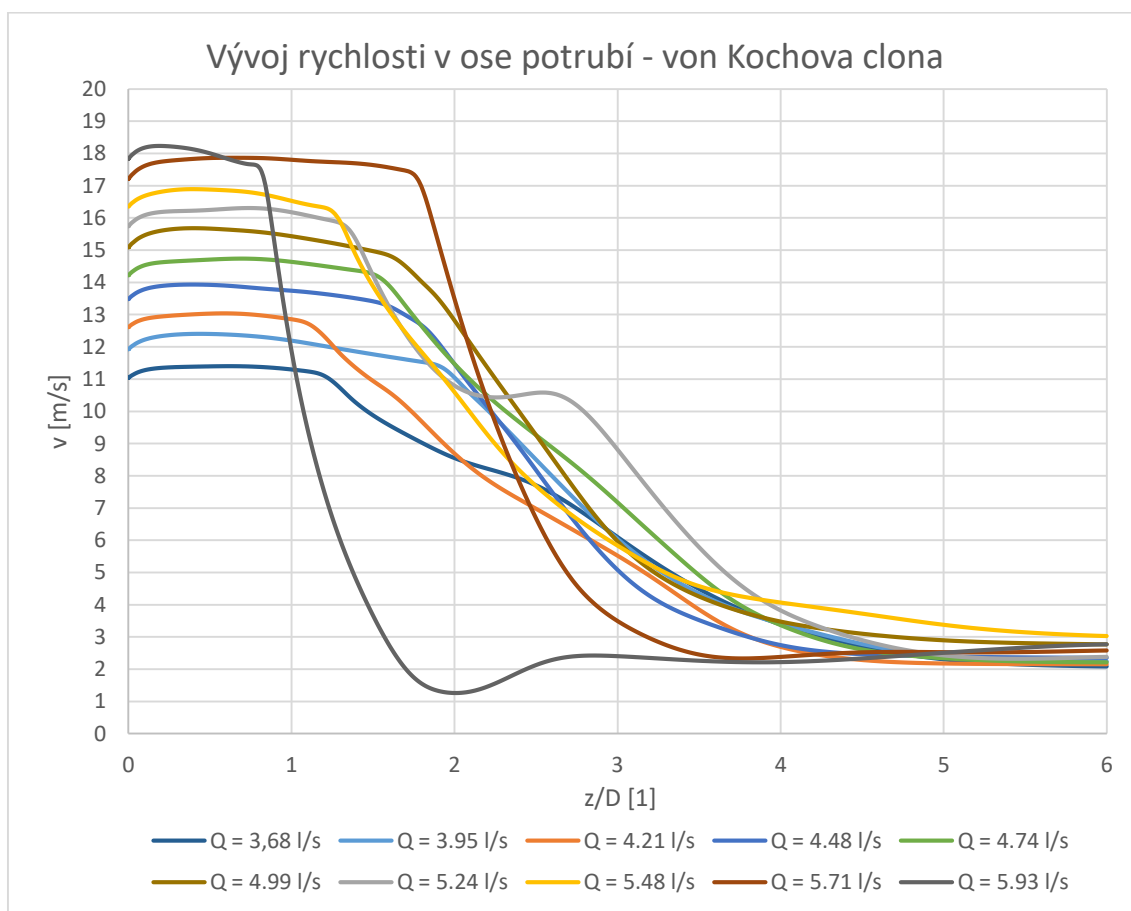


Graf 2. Srovnání clon z CFD simulace, včetně srovnání s modelem SBES

Na konci každé CFD simulace byla také vyhodnocena rychlost proudění v ose potrubí. V grafu 3a, resp. 3b je znázorněna tato rychlost v závislosti na bezrozměrné vzdálenosti od clony v potrubí, tj. vzdálenost ve směru proudění z (na výtoku ze clony je $z = 0$) vydělenou průměrem výstupního potrubí $D = 57 \text{ mm}$. Vývoj velikostí rychlostí podél výstupního potrubí za kruhovou clonou (graf 3a) má pro různé průtoky stále stejný tvar. Oproti tomu u von Kochovy clony (graf 4.) je rozložení rychlostí za clonou velmi nepravidelné, a to z důvodů odtrhávání proudu za clonou. U von Kochovy clony také dochází k rychlejší regeneraci proudění, tj. rychleji se proudění vrátí k původní osové rychlosti.

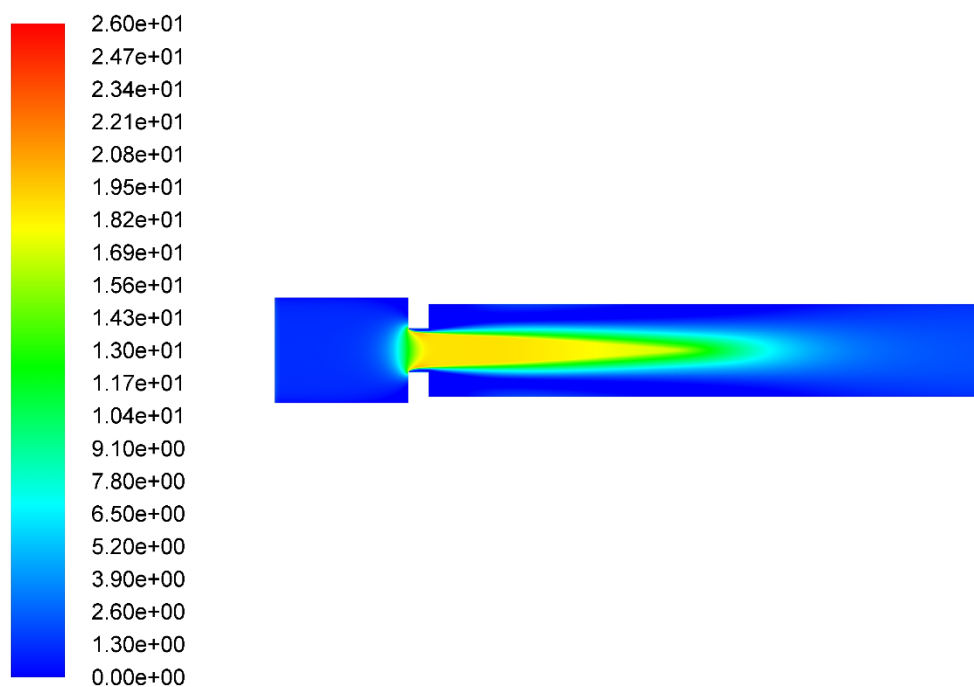


Graf 3a. Vývoj rychlosti proudění na ose potrubí za kruhovou clonou



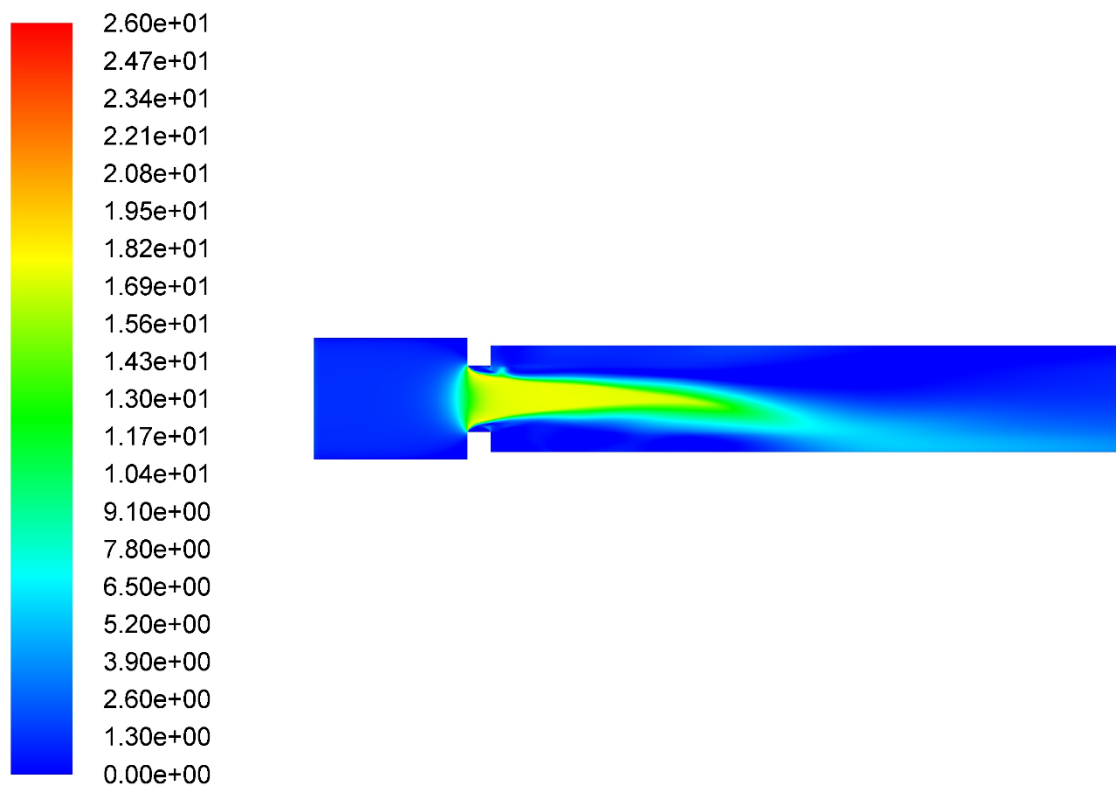
Graf 3b. Vývoj rychlosti proudění na ose potrubí za von Kochovou clonou

Kontury rychlosti pro kruhovou clonu (obr. 7.1) jasně ukazují, že proudové pole za clonou bylo souměrné kolem osy výstupního potrubí, což koresponduje s grafem 3a.

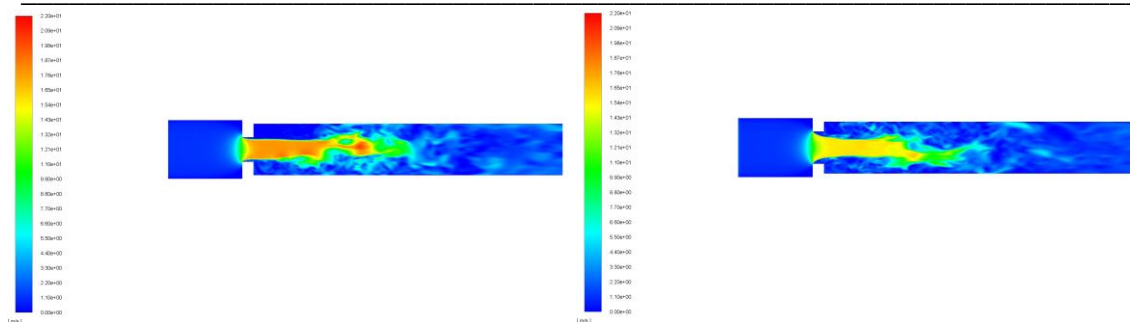


Obr. 7.1. Kontury velikostí rychlostí kolem kruhové clony (podélný průřez)

V obr. 7.2, který znázorňuje kontury velikostí rychlostí pro von Kochovu clonu, je jasně patrné odtrhávání proudu za clonou, které ovlivňuje celou oblast výstupního potrubí.



Obr. 7.2. Kontury velikostí rychlostí kolem von Kochovy clony (podélný průřez)

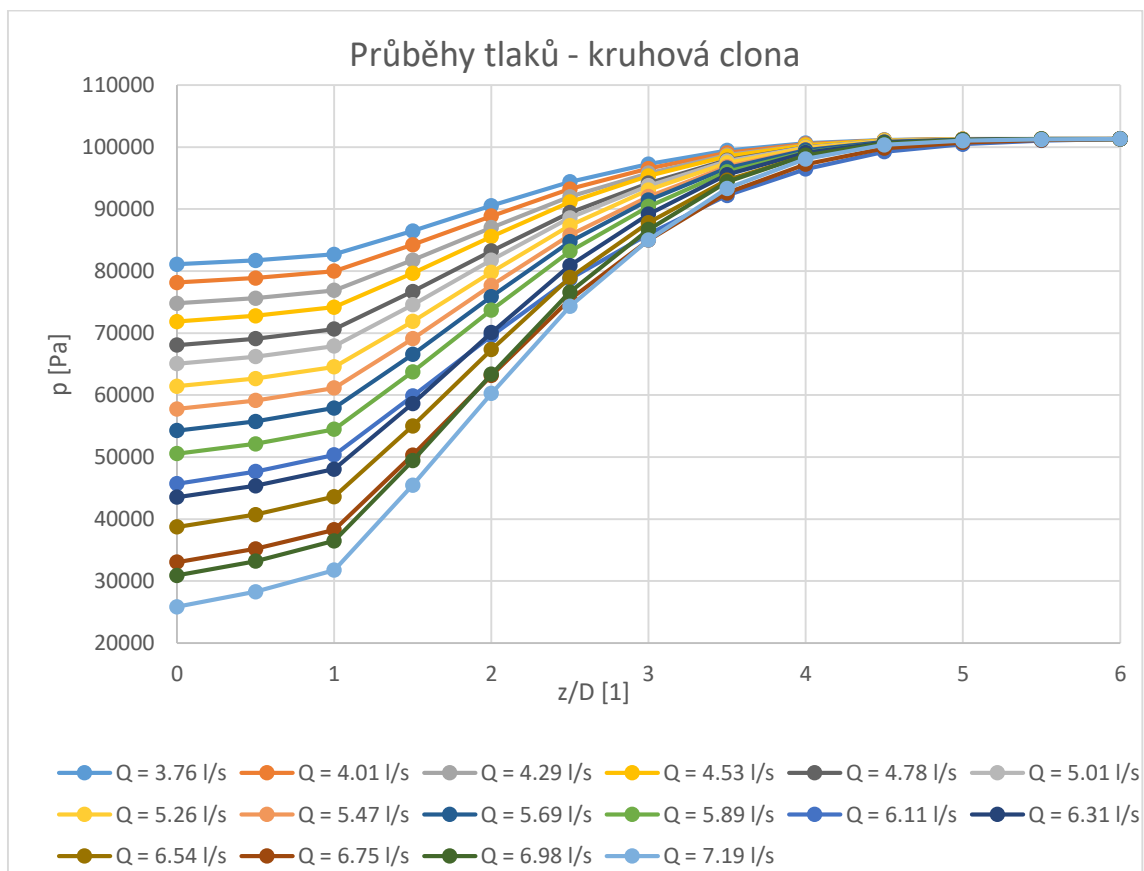


Obr. 7.3. Porovnání kontury velikostí rychlostí při jednofázovém proudění pro model turbulence SBES (vlevo kruhová clona, vpravo von Kochova clona)

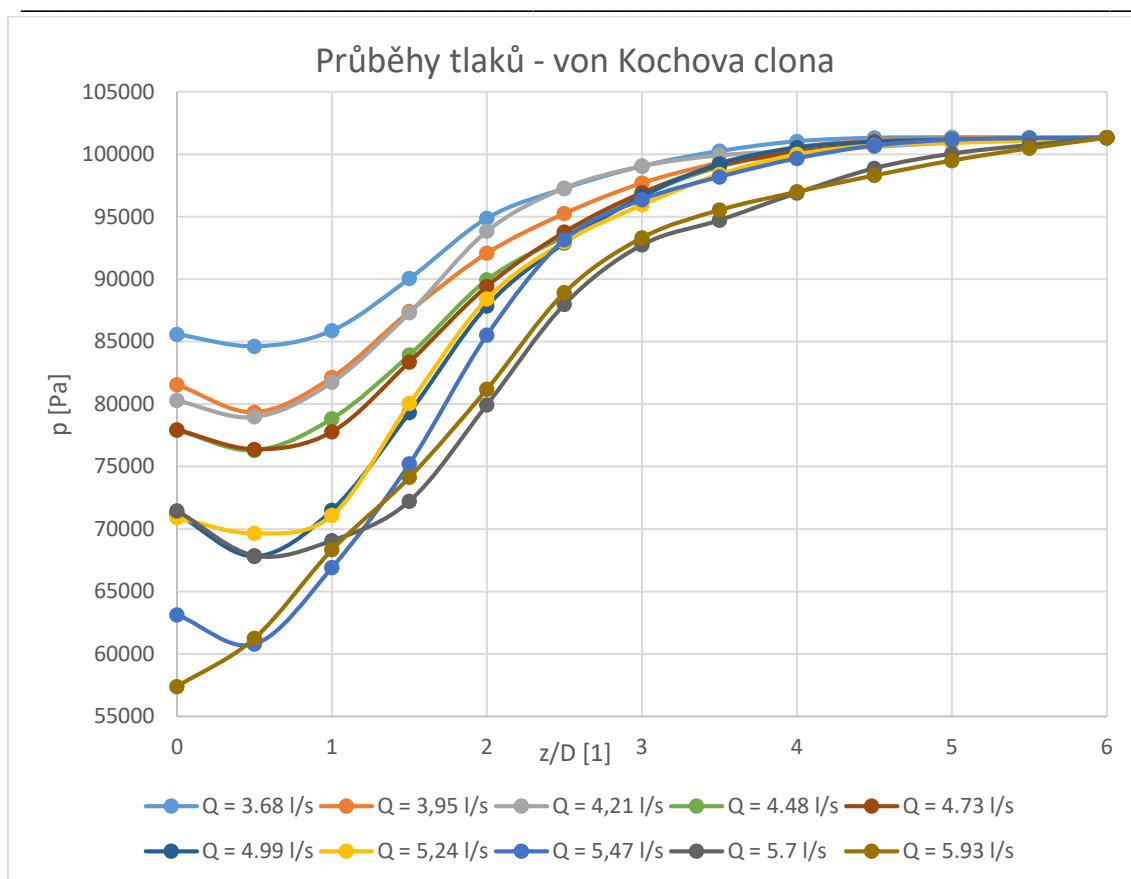
Kontury velikostí rychlostí pro ostatní průtoky jsou v Příloze A.

Vedle rychlosti na ose se na konci simulace vyhodnocoval také průběh tlaků v průřezech ve výstupním potrubí za clonou. Statické tlaky se počítaly na celém průřezu pomocí funkce Surface integrals – Mass-weighted average.

U kruhové clony (graf 4a) se podobně jako v grafu velikostí rychlostí na ose tvary křivek pro různé průtoky podobají. Pro von Kochovu clonu (graf 4b) platí, že statické tlaky nejprve ve vzdálenosti $D/2$ mírně poklesly. Výjimku zde tvořil největší průtok, který nevykazoval žádný propad. Od vzdálenosti $D/2$ se pro všechny průtoky začaly statické tlaky v průřezech nepravidelně zvyšovat. Zároveň však docházelo k rychlejší regeneraci statických tlaků.



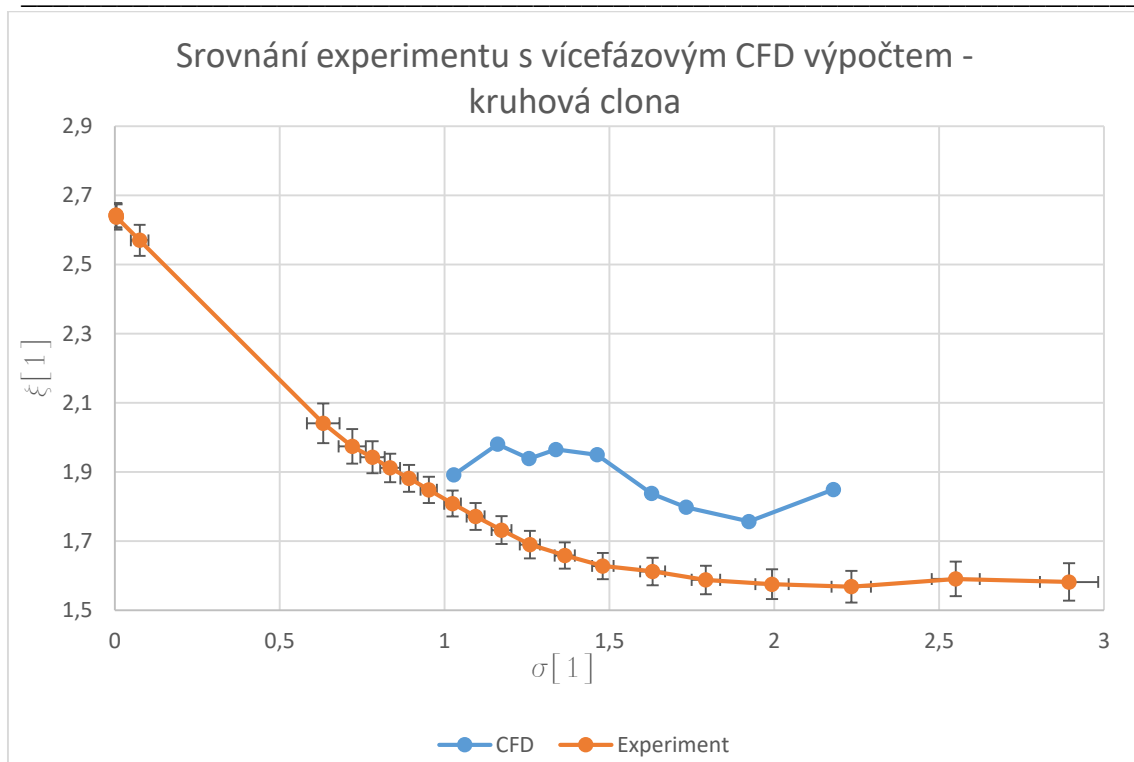
Graf 4a. Průběhy statických tlaků v průřezech za kruhovou clonou



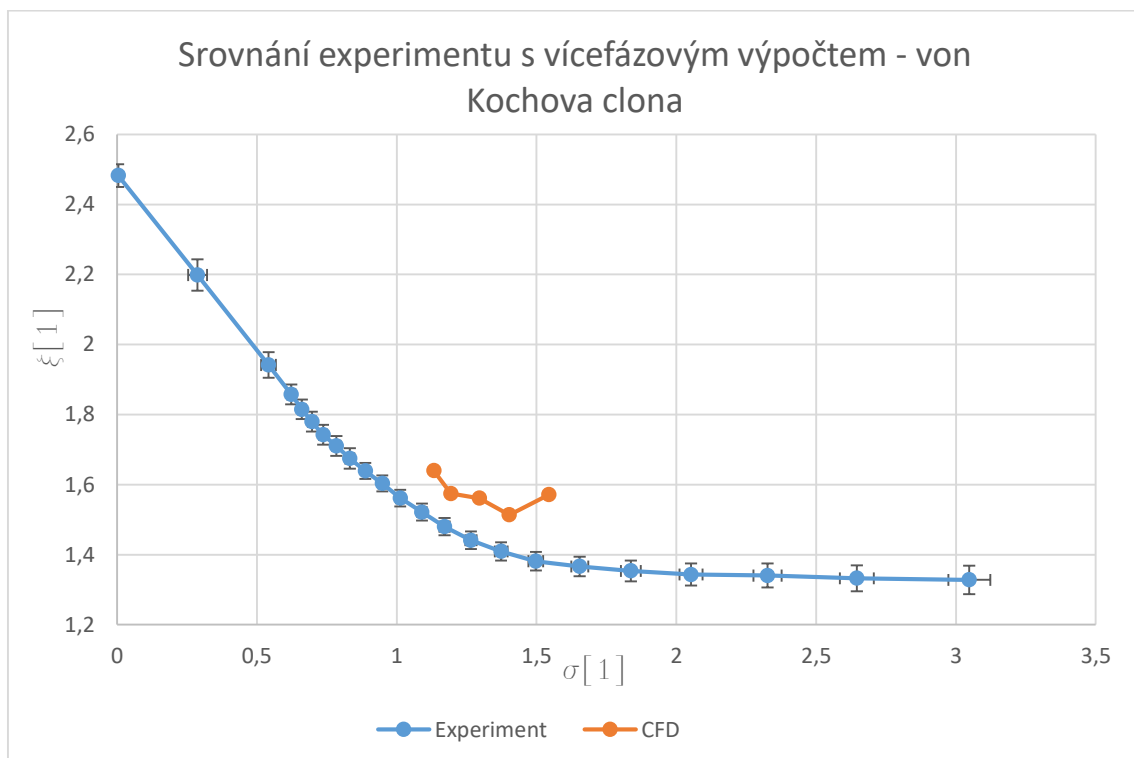
Graf 4b. Průběhy statických tlaků v průřezích za von Kochovou clonou

7.2 Vícefázový výpočet

Jak už bylo zmíněno výše, pro vícefázový výpočet se využíval model turbulence $k-\omega$ SST SBES. Pro něj bylo nutné zmenšit časový krok na $1 \cdot 10^{-5}$ s, jinak by výpočet nekonvergoval. V grafu 5 můžeme vidět srovnání skutečně naměřené charakteristiky z experimentu s CFD simulací pro kruhovou clonu, v grafu 6 stejné srovnání pro von Kochovu clonu.



Graf 5. Srovnání experimentu s vícefázovou CFD simulací pro kruhovou clonu



Graf 6. Srovnání experimentu s vícefázovou CFD simulací pro von Kochovu clonu

8 ZÁVĚR

Tato práce se zaměřuje na výpočtové modelování proudění (CFD) v jednotvorové cloně s kruhovým otvorem a cloně s otvorem ve tvaru von Kochovy vločky. Cílem je srovnat clony z pohledu hydraulických ztrát a detailně prozkoumat proudové pole.

Všechny CFD simulace byly počítány v programu Fluent. Nejprve bylo třeba vytvořit výpočetní oblast (doménu), na které se simulace prováděly. Rozměry oblasti vycházely z části měřicí trati v místech, kde byla umístěna clona (viz obr. 5.3). V experimentu se před clonou nacházel tlakoměr měřící statický tlak, pomocí něhož se experiment vyhodnocoval. Proto bylo potřeba vytvořit výpočetní oblast před clonou tak velkou, aby se v ní dal sledovat statický tlak ve stejné vzdálenosti, jako byl tlakoměr od clony při experimentu. Za clonou byla vytvořena výpočetní oblast tak velká, aby se na ní proudění ustálilo a nebylo tak ovlivněno výstupní tlakovou podmínkou.

Na celé výpočetní oblasti byla vytvořena síť pouze z hexahedrálních prvků, které poskytují nejpřesnější výsledky. Aby taková síť mohla vzniknout, bylo potřeba rozdělit výpočetní oblast na menší podoblasti (dekompozice domény). Díky vhodné dekompozici bylo možné vytvořit u stěn velmi jemnou síť. Ta vhodně modelovala mezní vrstvu a opravňovala použití modelu turbulence $k-\omega$, jehož použití je podmíněno právě jemnou sítí u stěn, neboli nízkou hodnotou funkce y^+ , která kvantitativně charakterizuje hustotu sítě u stěn.

Po zhotovení výpočetní oblasti a vytvořením sítě se provedly výpočty pro různé okrajové podmínky. Ty se nastavovaly tak, aby průtoky výpočetními oblastmi u numerických výpočtů odpovídaly experimentálně naměřeným hodnotám průtoků. Díky tomu bylo možné provést porovnání dat z CFD simulací s experimentálně získanými daty. Vstupní rychlostní podmínka se z důvodu úspory počtu uzlů (minimalizaci výpočetní oblasti před clonou) počítala zvlášť na jiném modelu, který simuloval proudění v potrubí před clonou. Z tohoto modelu se potom načel již vyvinutý rychlostní profil na vstupní okrajovou podmínku. Na výstupní okrajové podmínce byl nastaven statický tlak 0 Pa.

Při CFD simulacích se využívaly modely turbulence $k-\omega$ SST a SBES. Tyto modely jsou vhodné při modelování proudění v blízkosti stěny a v případech, kdy dochází k odtrhávání proudu. Model $k-\omega$ SST se využíval při jednofázovém výpočtu. Jelikož využívá pouze dvourovnicové RANS modely turbulence, průběhy veličin v proudovém poli se pouze průměrovaly a jak malé, tak i velké víry byly potlačovány. Oproti tomu se model SBES, který vychází z předešlého modelu, využíval převážně pro vícefázové proudění, u jednofázového proudění se počítal pouze jeden průtok pro obě clony. Model SBES je hybridní RANS-LES model, větší víry dál od stěny se modelují pomocí LES a nejsou tudíž potlačovány, což je jasně viditelné v konturách rychlostí. Pro modelování kavitace se využíval kavitační model Schnerr-Sauer. Všechny jednofázové výpočty byly počítány na přesnosti druhých řádů. Časový krok byl $1 \cdot 10^{-3} s$, v každém kroku se počítalo 20 iterací, s celkovým počtem 2000 časových kroků pro každý výpočet. Všechny vícefázové výpočty byly také počítány na přesnosti druhých řádů s výjimkou Volume fraction, která se ponechala po celou dobu na přesnosti prvního řádu kvůli rychlejší konvergenci. Časový krok byl nastaven na $1 \cdot 10^{-5} s$, v každém kroku bylo 20 iterací, celkem za jeden výpočet 2000 časových kroků. Všechny výpočty probíhaly na univerzitním clusteru THOR, z něhož se využívaly uzly s 28 jádry.

Jednofázový výpočet měl oproti vícefázovému výpočtu výhodu v rychlosti výpočtu, kdy jeden výpočet trval průměrně 2,5 dne pro kruhovou clonu a 3,5 dne pro von Kochovu clonu. Nevýhodou bylo potlačení fázové přeměny, takže pro vyšší průtoky s vyvinutou kavitačí, která už značně ovlivňovala proudění, neměl výpočet reálný základ, což je vidět

na grafu 1a, kdy hodnoty ξ v experimentu prudce rostly, kdežto v CFD simulaci zůstávaly stejné i pro vyšší průtoky. Jednofázové výpočty lze proto brát v potaz pouze pro bezkavitáční proudění, případně pro počáteční kavitaci, která nijak výrazně neovlivňuje proudění. Navzdory tomu, že výsledky CFD simulace dávaly o 15% větší absolutní hodnoty ztrátového součinitele ξ , relativní asi 9% rozdíl mezi hydraulickými ztrátami kruhové a von Kochovy clony potvrzoval závěr z experimentu, že von Kochova clona výrazně snižuje hydraulické ztráty oproti kruhové cloně. Na grafech 3a, 3b a obrázcích kontur velikostí rychlostí jde vidět, že proudění za kruhovou clonou je tvarově stálé a rychlost v celém průřezu se srovnají až ve větší vzdálenosti od clony. Za von Kochovou clonou dochází k výraznému odtrhávání proudu. Rychlosti v průřezu se však rychleji srovnají, takže proudění nepotřebuje tak velkou vzdálenost na uklidnění, než jaká je potřeba u kruhové clony.

Při srovnání turbulentních kinetických energií, které jsou přímo úměrné flukтуаčním rychlostem, je patrné, že kruhová clona generuje flukтуаční rychlosti jen ve velmi úzkém spektru energie. Tyto flukтуаční rychlosti nejsou tak rychle potlačovány, jako tomu je u von Kochovy vločky. U ní vzniká širší spektrum turbulentní kinetické energie, flukтуаční rychlosti se tak navzájem nezesilují, ale naopak rychleji utlumují. Za von Kochovou clonou tedy dochází k rychlejšímu promíchávání proudící kapaliny, než je tomu u kruhové clony. V dalším výzkumu fraktální geometrie s hybridními modely nebo plnými LES modely by bylo vhodné sestrojít spektra turbulentní kinetické energie a porovnat je se spektrem turbulence generované za clonou s kruhovým otvorem (podobně jako u [21]).

Jelikož se ve vícefázovém výpočtu počítalo s časovým krokem $1 \cdot 10^{-5}$ s a vyhodnocovalo se pouze pro 2000 časových kroků, nestihlo se celé proudové pole správně propočítat (např. ve všech výpočtech byly rozdíly v průtocích mezi vstupem a výstupem víc jak 5%). Od toho se odvíjí to, že výsledky je třeba brát jako předběžné. Ačkoli výpočty rychle konvergovaly, kvůli obrovským časovým nárokům (výpočty s největšími průtoky trvaly až 6 dní) se nepodařilo spočítat proudění pro víc časových kroků, aby bylo možné přistupovat k výsledkům seriózně. Pro věrohodné výsledky by bylo nutné výpočty nechat dokonvergovat ještě několik tisíc časových kroků, tj. v řádu několika týdnů.

Provedené CFD simulace nicméně potvrdily, že fraktální geometrie má nezanedbatelný vliv na turbulenci. Její použití při návrhu clon ukazuje, že dokáže vybudit větší spektrum turbulentní kinetické energie, tedy flukтуаčních rychlostí. Fraktálně navržená clona má tak vliv na rychlejší uklidnění proudění, snížení hydraulických ztrát a větší promíchávání tekutiny za clonou.

9 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] ANSYS FLUENT 16.2: *Theory Guide* [online]. c2015 [cit. 17.5.2019]. Dostupné z WWW: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/flu_ug/flu_ug.html
- [2] BAKKER, A. Lecture 6 - Boundary Conditions Applied Computational Fluid Dynamics. *Fluid Dynamics*, 2002 (2006), 1–31.
- [3] BLEJCHAŘ, Tomáš. *Turbulence modelového proudění – CFX: učební text*. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2012. ISBN 978-80-248-2606-6.
- [4] BRENNEN, Christopher E. *Cavitation and bubble dynamics*. ISBN 9781107644762.
- [5] ČSN EN ISO 5167-2. *Měření průtoku tekutin pomocí snímačů diferenčního tlaku vložených do zcela zaplněného potrubí kruhového průřezu – část 2: Clony*. Praha: Český normalizační institut, 2003. 52 s.
- [6] ELSAEY, A., A. ABOU EL-AZM ALY a M. FOUAD. CFD simulation of fractal-shaped orifices for flow measurement improvement. *Flow Measurement and Instrumentation* [online]. 2014, **36**, 14-23 [cit. 2019-05-15]. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2014.01.004. ISSN 09555986.
- [7] *FOCUS-IT* [online]. [cit. 2019-04-23]. Dostupný na: <http://eswt.net/cavitation>
- [8] FRANC, Jean-Pierre a Jean-Marie MICHEL. *Fundamentals of cavitation*. Boston: Kluwer Academic Publishers, c2004. ISBN 1402022328.
- [9] FRANC, Jean-Pierre. *Physics and control of cavitation*. University of Grenoble. Design and Analysis of High Speed Pumps (pp. 2-1 – 2-36). Educational Notes. Dostupné z: <http://www.rto.nato.int/abstracts.asp>
- [10] HILBORN, Robert C. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2000. ISBN 0-19-850723-2.
- [11] HOCHMAN, Ondřej. *Využití fraktální geometrie při návrhu hydraulické clony*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 46 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.
- [12] KIANIČKA, M. *Využití kavitace v technické praxi*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 52 s. Vedoucí diplomové práce prof. Ing. František Pochylý, CSc
- [13] KOZÁK, Jiří. *Cavitation induced by rotation of liquid*. Brno, 2015. Pojednání k disertační práci. VUT Brno. Vedoucí práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.
- [14] KOZÁK, Jiří. *Vírový cop při nadoptimálním průtoku Francisovou turbínou*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 125 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D
- [15] KUBINA, Dávid. *Dynamika kavitujícího proudění za clonou*. Brno, 2018, 93 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce: doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D
- [16] LECNAR, Lukáš. *Opatřebení materiálu kavitační erozí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 71 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

-
- [17] LEJDAR, Lukáš, *Modelování chaotických systém pomocí vývojového prostředí MATLAB*. Praha. UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2011. Vedoucí RNDr. Aleš Raidl, Ph.D.
- [18] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20, 130–141 (1963).
- [19] MANDELBROT, Benoît B. *The fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman, 1983. ISBN 0-7167-1186-9.
- [20] MANSHOOR, Bukhari, Izzuddin ZAMAN a Amir KHALID. Experimental Study of Pressure Drop after the Circle Grids Fractal Orifice. *Applied Mechanics and Materials* [online]. 2013, **390**, 111-115 [cit. 2019-05-15]. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.390.111. ISSN 1662-7482.
- [21] MUZTABA SALIM, S. M. a Franck NICOLLEAU. Fractality in turbulence. *Journal of Mechanical Science and Technology* [online]. 2012, 26(5), 1311-1314 [cit. 2019-05-17]. DOI: 10.1007/s12206-012-0329-3. ISSN 1738-494X.
- [22] POINCARÉ, Henri. *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*. *Acta Math.* 7 (1885), 259--380. doi:10.1007/BF02402204. <https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485888300>
- [23] RAYLEIGH, O.M. F.R.S. *On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1916. 32:192, 529-546p
- [24] RUDOLF, Pavel. *Výpočtové modelování proudění*. [přednášky vyučovaného předmětu]. Brno: VUT 2019.
- [25] RUELLE, David. *Sensitive dependence on initial condition and turbulent behavior of dynamical systems*. *Annals of the New York Academy of Sciences* [online]. 1979, 316(1), 408-416 [cit. 2019-02-18].
- [26] SCHUSTER, H. G. a Wolfram JUST. *Deterministic Chaos: An Introduction*. Weinheim, FRG: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co., 2005
- [27] ŠOB, František. *Hydromechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM s.r.o, 2002, 238 s. : il. ISBN 80-214-2037-5.
- [28] ŠTIGLER, Jaroslav. *Hydromechanika*. [přednášky vyučovaného předmětu]. Brno: VUT 2017
- [29] URUBA, Václav. *Turbulence*. 2., přeprac. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2014. ISBN 978-80-01-05600-4.
- [30] VERSTEEG, H. K. a W. MALALASEKERA. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. 2nd ed. New York: Pearson Education, 2007. ISBN 978-0-13-127498-3.
- [31] VLČEK, Petr. *Modelování turbulentního proudění*. Praha: Fakulta strojní, Ústav procesní a zpracovatelské techniky, ČVUT v Praze, 2013. ISBN 978-80-01-05285-3.

10 SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

σ	[1]	kavitační číslo
V	[m ³]	objem kapaliny
ρ	[kg.m ⁻³]	hustota
p_{va}	[Pa]	tlak nasycených par
S	[m ²]	povrch kapaliny
v_i	[m.s ⁻¹]	vektor rychlosti
n_i	[1]	jednotkový normálový vektor
x_i	[m]	směrový vektor
$a_{(f)_i}$	[m.s ⁻²]	zrychlení vyvolané vnějším polem
σ_{ij}	[Pa]	tenzor napětí
a_i	[m.s ⁻²]	vektor setrvačného zrychlení
p	[Pa]	tlak
δ_{ij}	[1]	Kroneckerovo delta
τ'_{ij}	[1]	část tenzoru napětí při uvažování třecích sil
C_{ijkl}	[1]	tenzor vyjadřující vlastnosti kapaliny
μ	[Pa.s]	dynamická viskozita
Pr	[1]	Prandtlovo číslo
Ra	[1]	redukované Rayleighovo číslo
b_l	[1]	štíhlost válce tekutiny při konvekci, tedy poměr jeho délky a průměru
b	[Pa.s]	druhá viskozita
ν	[m ² .s]	kinematická viskozita
\bar{v}	[m.s ⁻¹]	střední složka rychlosti
v'	[m.s ⁻¹]	fluktuační složka rychlosti
T	[s]	turbulentní časové měřítko
τ_{tij}	[Pa]	tenzor turbulentních napětí
μ_t	[Pa.s]	turbulentní viskozitu

k	[m ² .s ⁻²]	turbulentní kinetická energie
ε	[m ² .s ⁻³]	disipace turbulentní kinetické energie
ω	[s ⁻¹]	specifická disipace energie
σ_k	[1]	Prandtlova konstanta pro k
C_D	[1]	modelová konstanta
C_μ	[1]	modelová konstanta
l_m	[m]	směšovací délka
Γ_k	[Pa.s]	efektivní difuzivita k
\tilde{G}_k	[kg.m ⁻³ .s ⁻¹]	produkce kinetické energie turbulence k
Y_k	[kg.m ⁻³ .s ⁻¹]	disipace k vlivem turbulence
S_k	[kg.m ⁻³ .s ⁻¹]	zdrojový člen definovaný uživatelem
Γ_ω	[Pa.s]	efektivní difuzivita ω
G_ω	[kg.m ⁻³ .s ⁻¹]	generace specifické disipace energie ω
Y_ω	[kg.m ⁻³ .s ⁻¹]	disipace ω vlivem turbulence
D_ω	[kg.m ⁻³ .s ⁻¹]	příčná difuze
S_ω	[kg.m ⁻³ .s ⁻¹]	zdrojový člen definovaný uživatelem
σ_ω	[1]	Prandtlova konstanta pro ω
Re	[1]	Reynoldsovo číslo
L	[m]	charakteristická délka
p_{ref}	[Pa]	referenční tlak v určitém místě proudu
S_t	[N.m ⁻¹]	povrchové napětí
R	[m]	poloměr bubliny
v_{ref}	[m.s ⁻¹]	referenční hodnota rychlosti proudění
R_k	[m]	kritický poloměr bubliny
p_g	[Pa]	parciální tlak plynu uvnitř kavitační bubliny
p_{g0}	[Pa]	počáteční hodnota parciálního tlak plynu uvnitř bubliny
g	[m.s ⁻²]	gravitační zrychlení

p_∞	[Pa]	tlak kapaliny v okolí kavitační bubliny
T_∞	[K]	teplota kapaliny v okolí kavitační bubliny
γ	[1]	adiabatická konstanta
R_0	[m]	počáteční velikost kavitační bubliny
\dot{R}_0	[m.s ⁻¹]	počáteční rychlost rozhraní mezi kavitační bublinou a okolím
\dot{R}	[m.s ⁻¹]	rychlost rozhraní mezi kavitační bublinou a okolím
\ddot{R}	[m.s ⁻²]	zrychlení rozhraní mezi kavitační bublinou a okolím
p_B	[Pa]	celkový tlak v bublině
α_{va}	[1]	objemový zlomek disperzní (parní) fáze
α_l	[1]	objemový zlomek kapalné fáze
V_{va}	[m ³]	objem páry
V_l	[m ³]	objem kapaliny
ρ_m	[kg.m ⁻³]	hustota směsi kapaliny a páry
$v_{m,j}$	[m.s ⁻¹]	rychlost zprůměrovaná podle hmotnosti
α_k	[1]	objemový zlomek fáze k
μ_m	[Pa.s]	dynamická viskozita směsi
$v_{dr,k,i}$	[m.s ⁻¹]	unášivá rychlost
F_i	[N]	síla od tělesa
k_{eff}	[W.K ⁻¹]	efektivní vodivost
k_t	[W.K ⁻¹]	turbulentní tepelná vodivost
S_E	[J]	objemové zdroje tepla
h_k	[J]	entalpie fáze
$v_{pq,i}$	[m.s ⁻¹]	relativní rychlost
c_k	[1]	hmotnostní zlomek fáze
$v_{va,i}$	[m.s ⁻¹]	rychlost parní fáze
R_S	[kg.s ⁻¹ .m ⁻³]	zdrojový člen přenosu hmoty
n_b	[1]	počet kavitačních bublin v kapalině

D_{HB}	[1]	velikost Hausdorff-Besicovichovy dimenze
$\frac{1}{r}$	[1]	faktor změny měřítka
D_T	[1]	topologická dimenze
ξ	[1]	ztrátový součinitel
p_{tlak1}	[Pa]	tlak naměřený před clonou
p_{tlak2}	[Pa]	tlak naměřený za clonou
v_{clona}	[m.s ⁻¹]	rychlost proudění v místě clony
I	[1]	intenzita turbulence
D_h	[m]	hydraulický průměr

11 SEZNAM PŘÍLOH

Příloha A

Srovnání kontur velikostí rychlostí v podélném průřezu celou výpočetní oblastí pro různé průtoky.

Příloha B

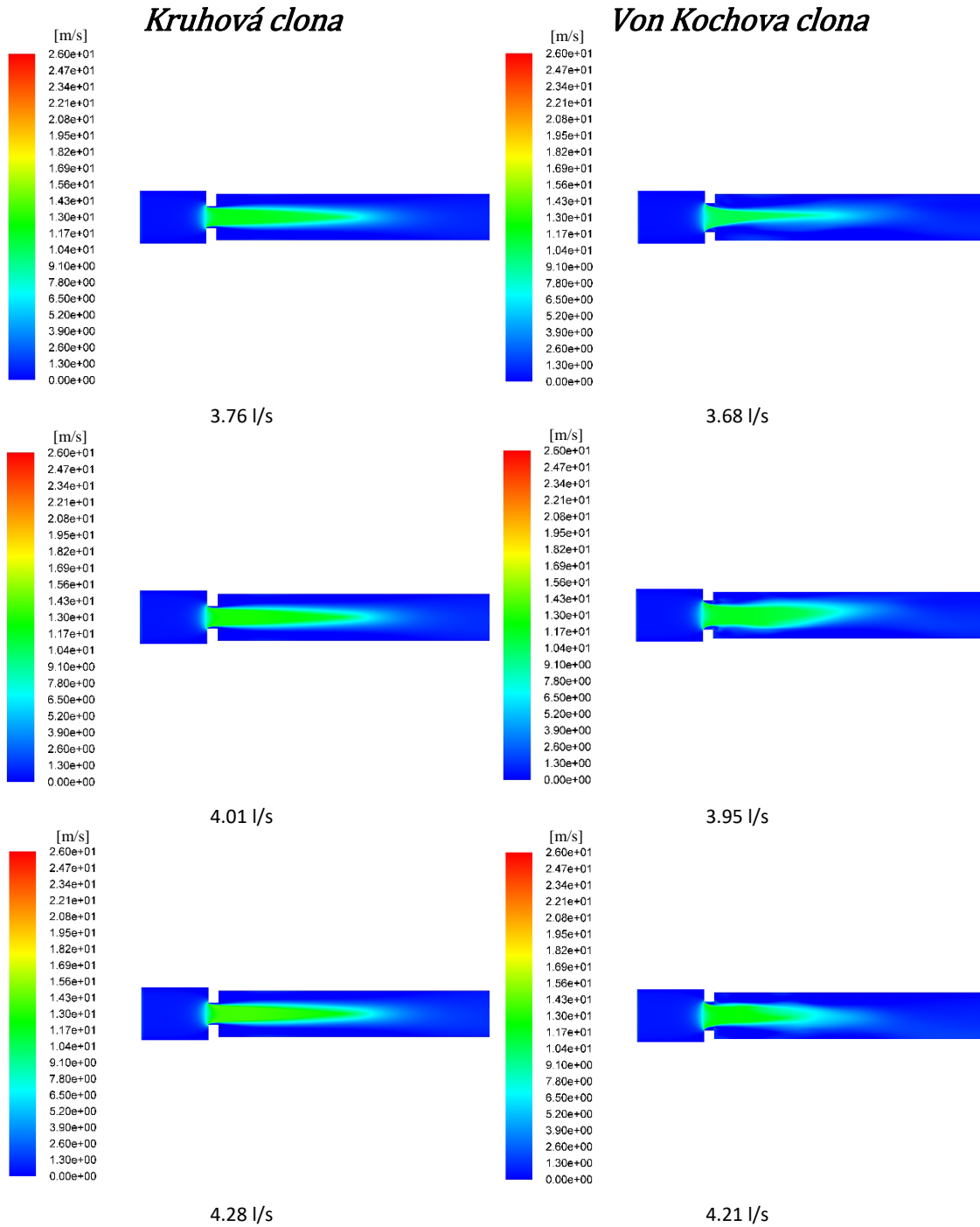
Obrázky s konturami turbulentní kinetické energie v příčných a podélných průřezích

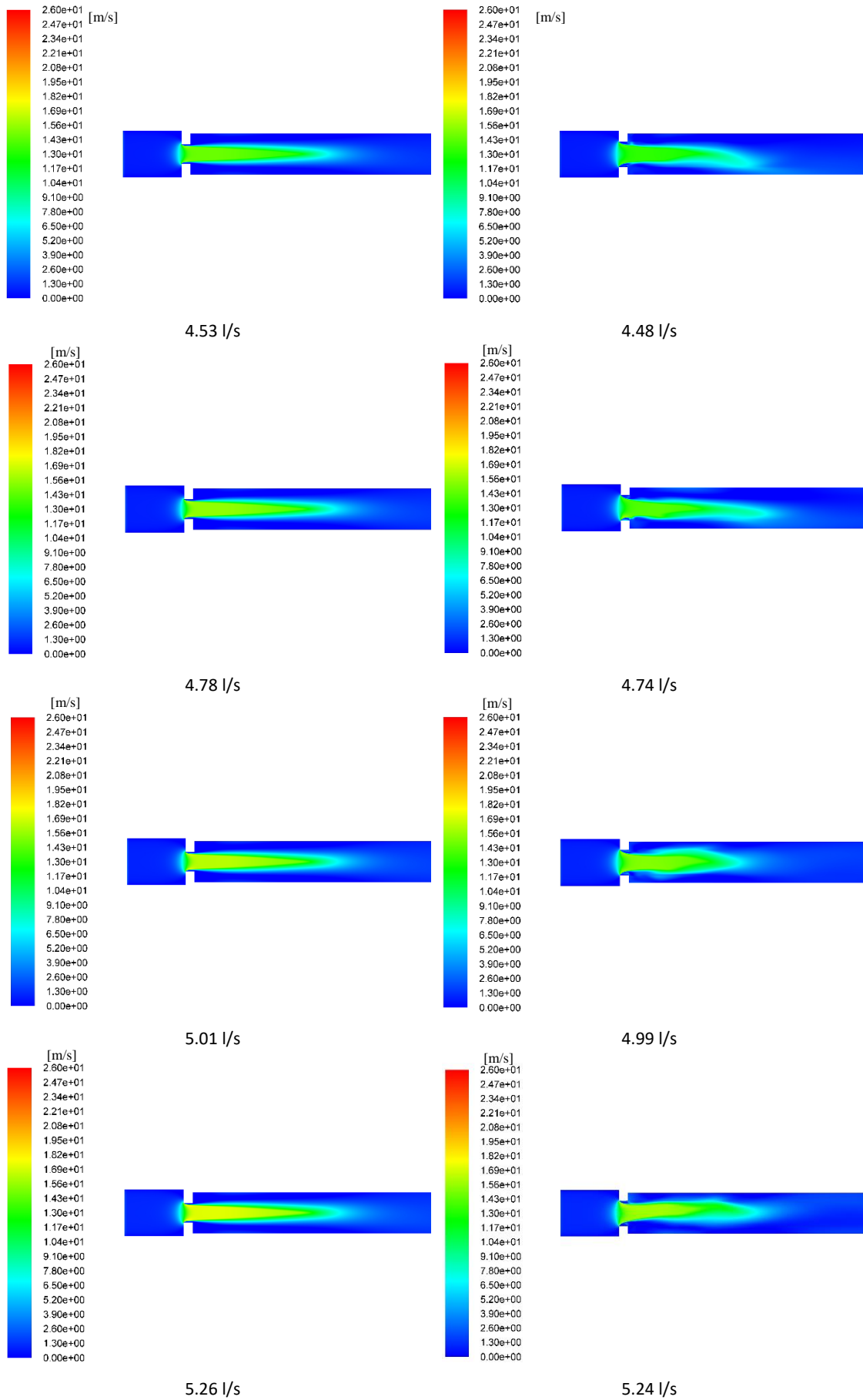
Příloha C

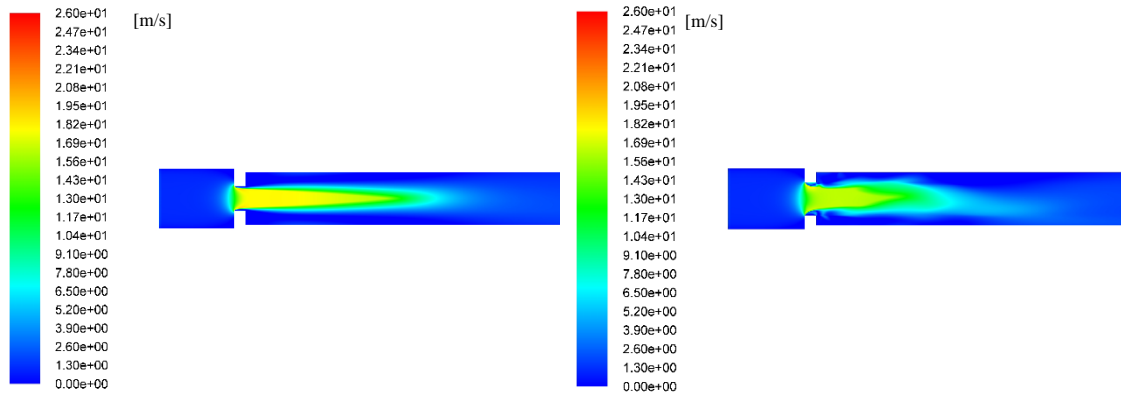
Obrázky kontur s výskytem páry (kavitace) v podélném průřezu

Příloha A

Jednofázové proudění

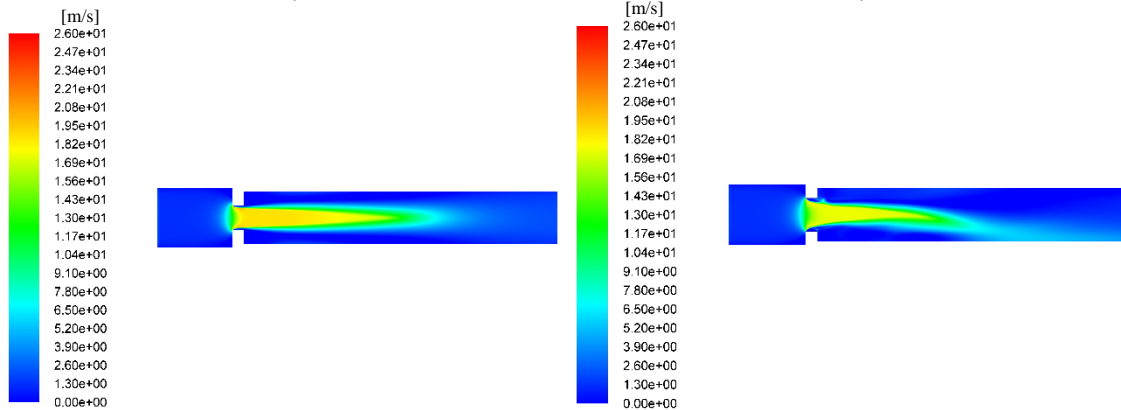






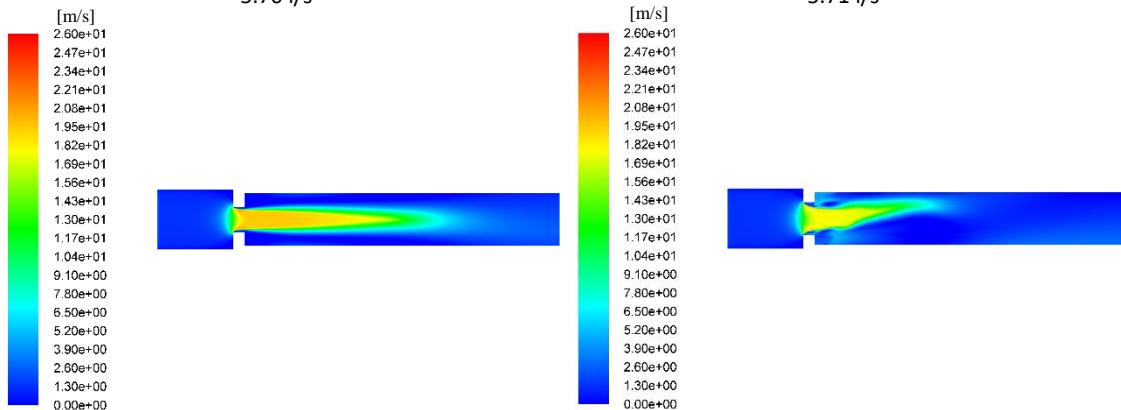
5.47 l/s

5.48 l/s



5.70 l/s

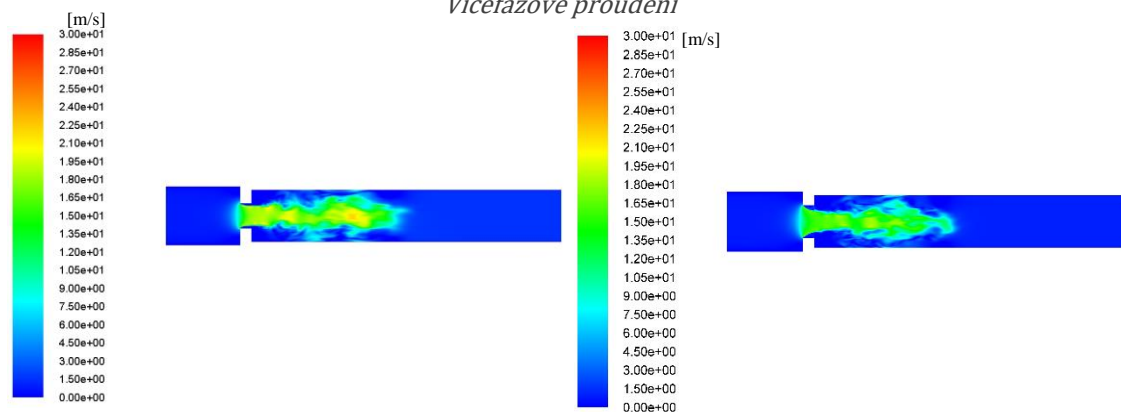
5.71 l/s



5.90 l/s

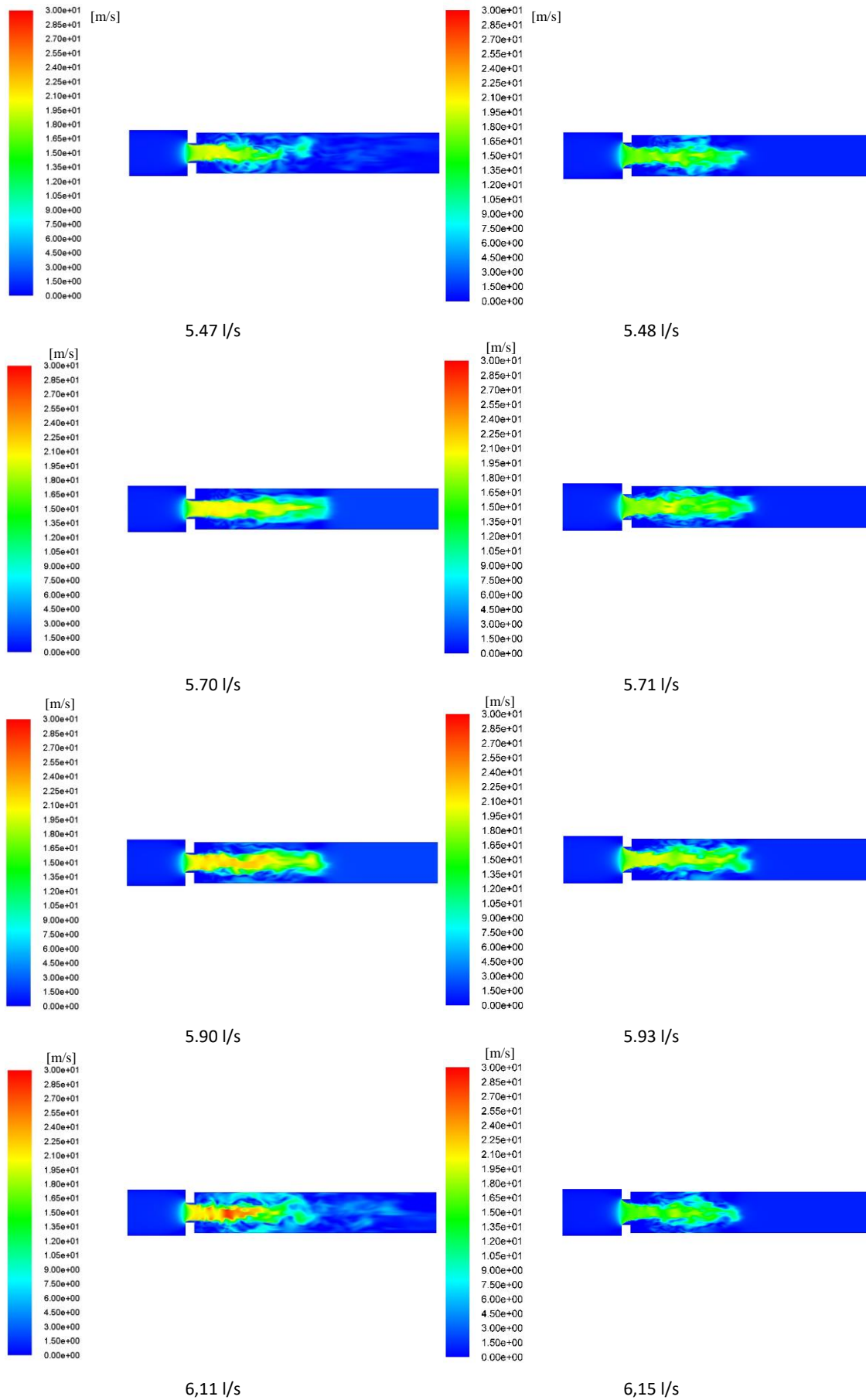
5.93 l/s

Vícefázové proudění

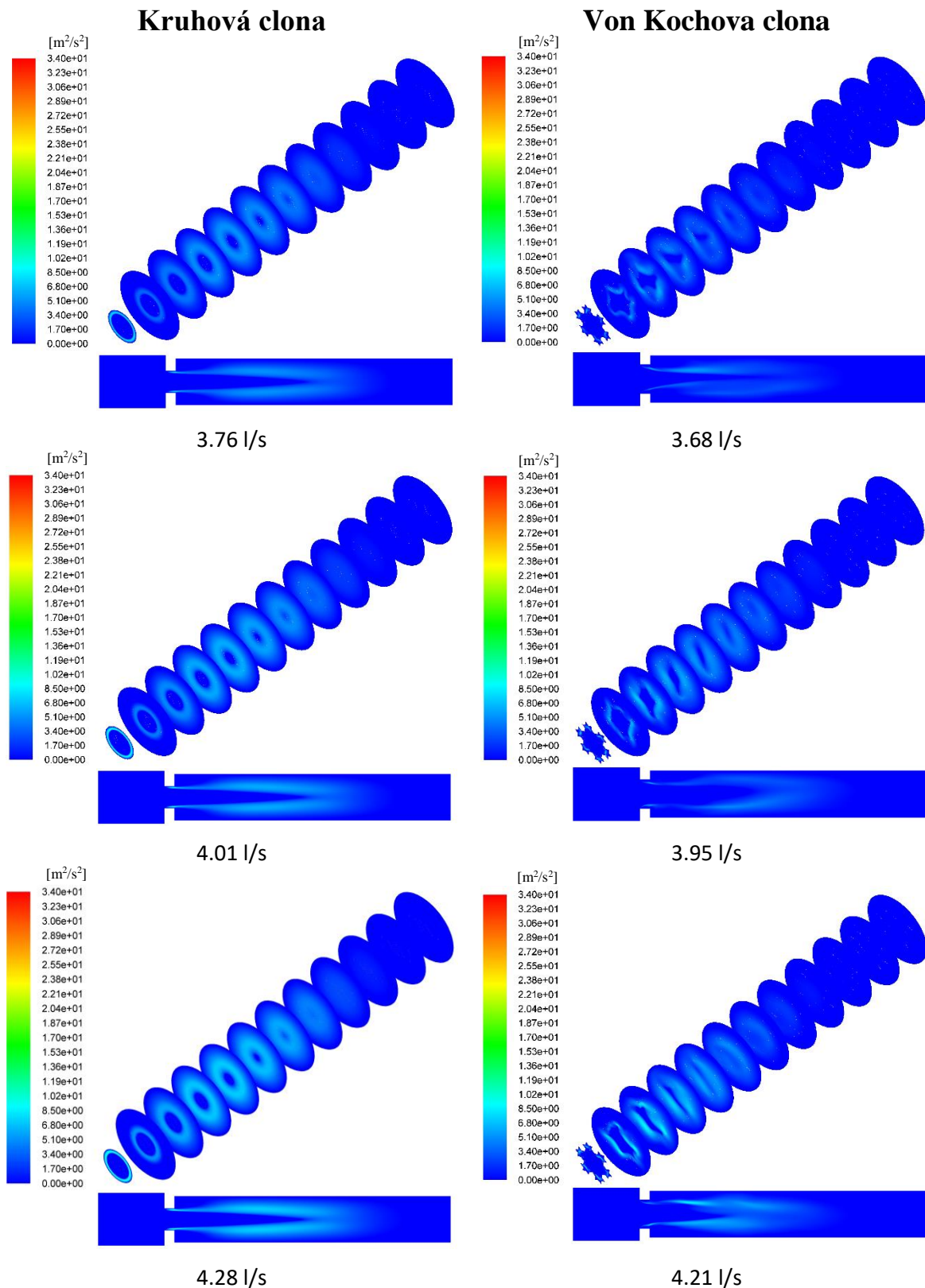


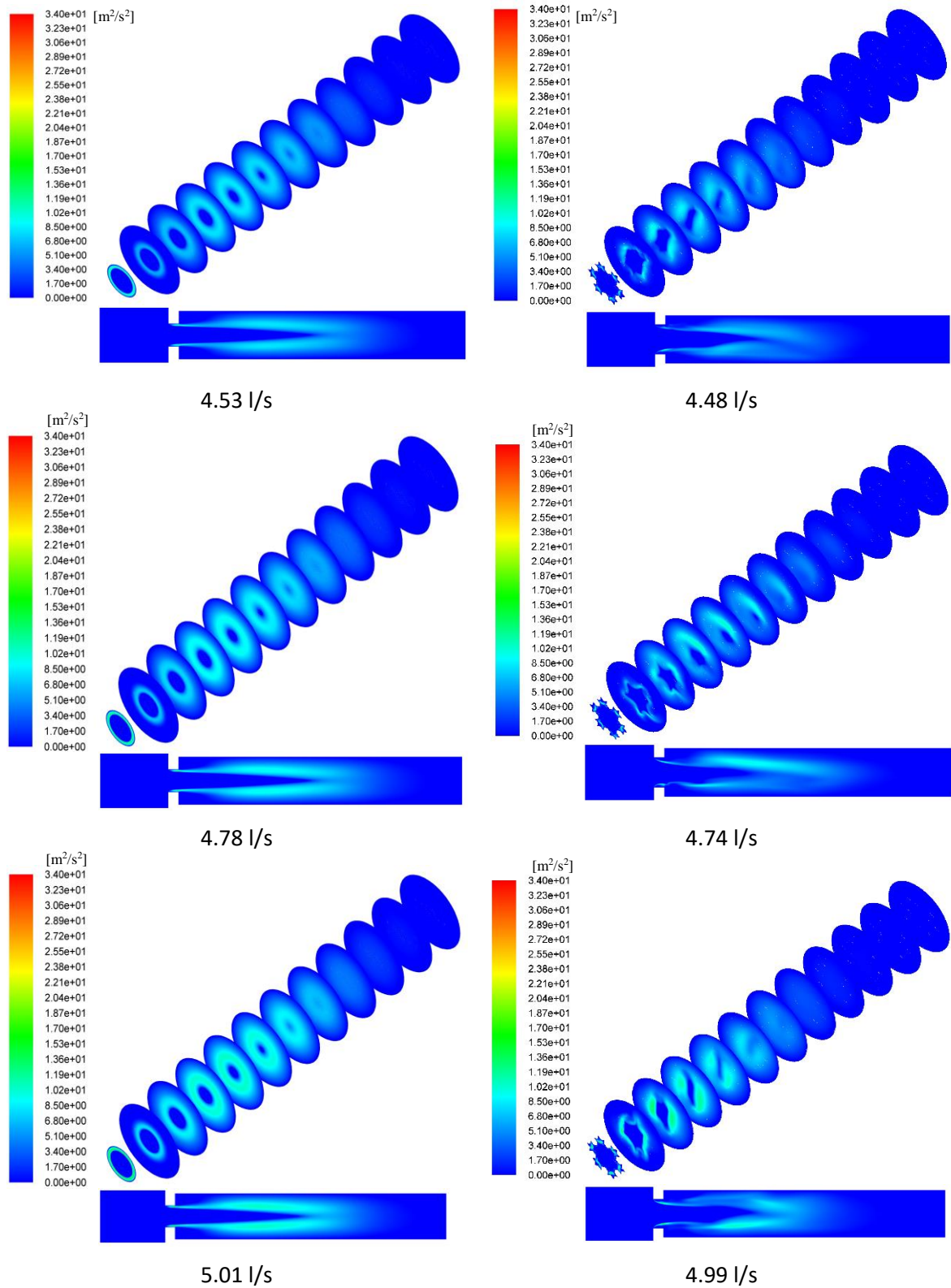
5.26 l/s

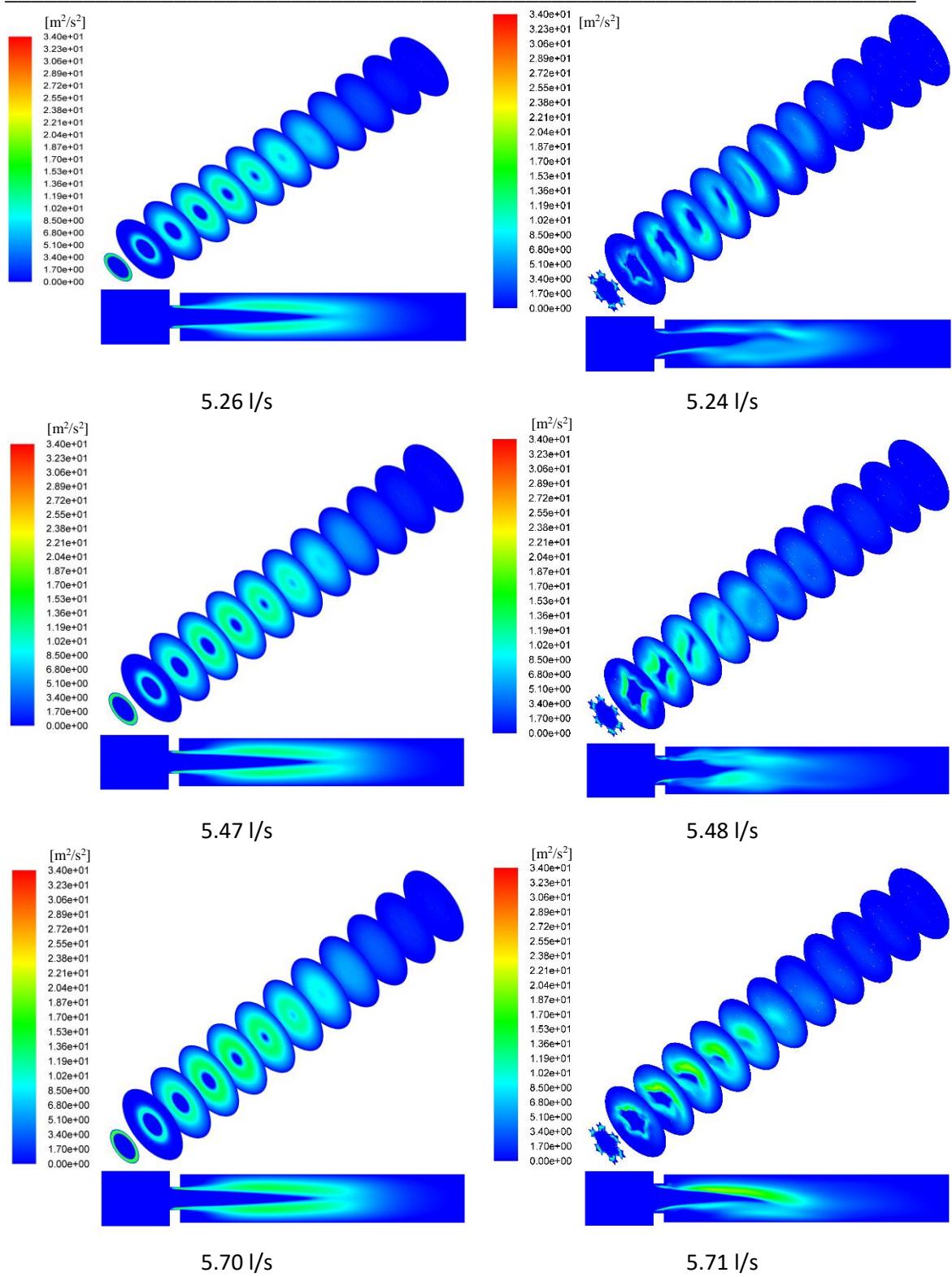
5.24 l/s

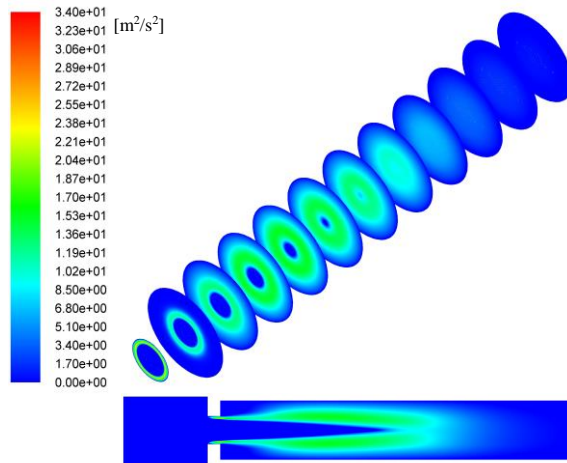


Příloha B

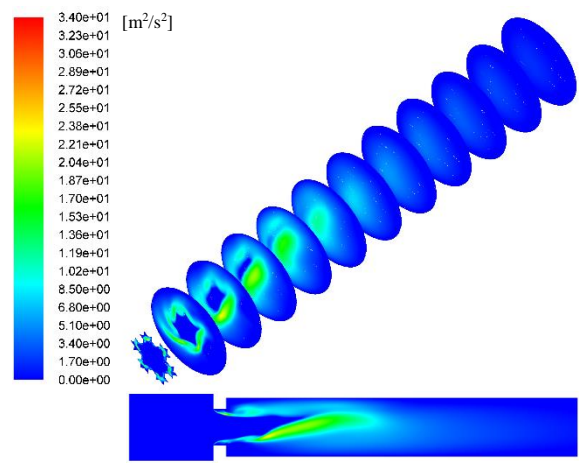








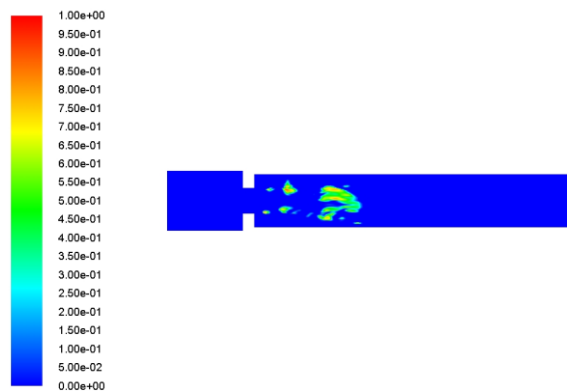
5.90 l/s



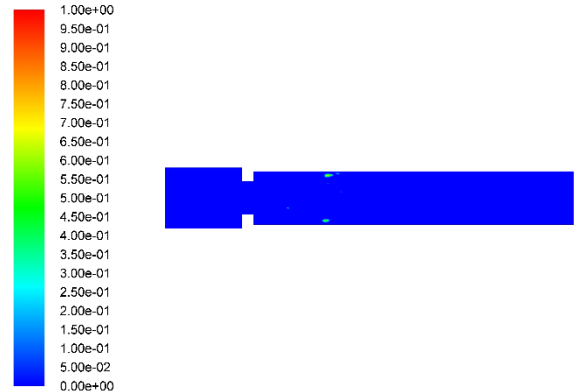
5.93 l/s

Příloha C

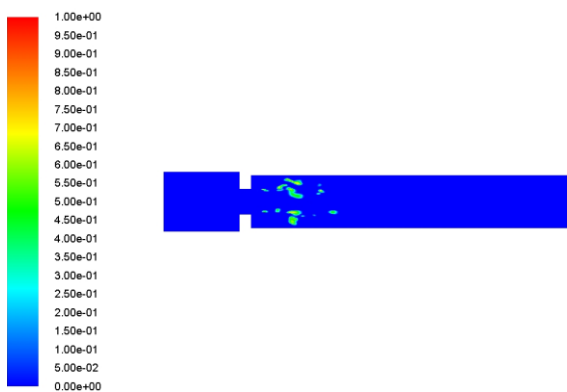
Kruhová clona



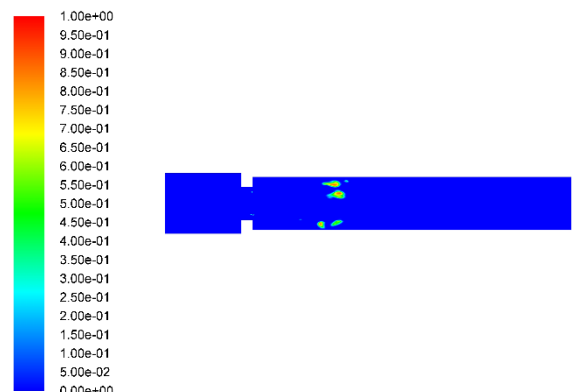
5.26 l/s



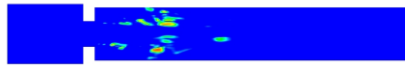
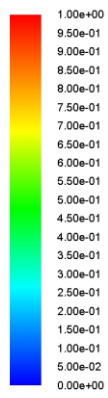
5.24 l/s



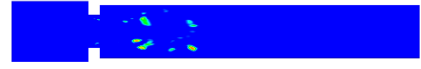
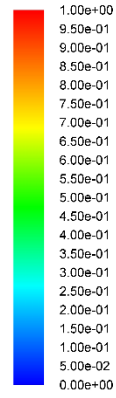
5.47 l/s



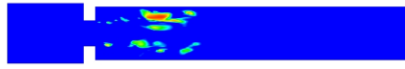
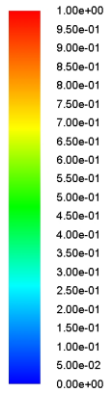
5.48 l/s



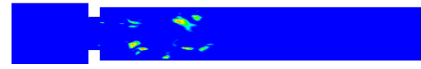
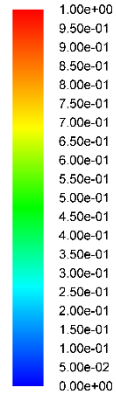
5.70 l/s



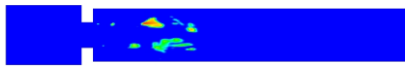
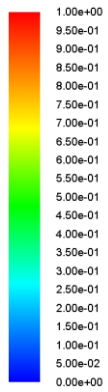
5.71 l/s



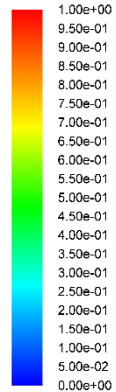
5.90 l/s



5.93 l/s



6,11 l/s



6,15 l/s