UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vyhodnocení formulí výrokové logiky

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Miloslav Závodný**
Vypracoval(a): **Lucie Šuráňová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2016

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Lucie Šuráňová

Název práce: Vyhodnocení formulí výrokové logiky

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Miloslav Závodný

Rok obhajoby práce: 2016

Abstrakt: Práce je zaměřena na různé metody vyhodnocování formulí klasické výrokové logiky. Kromě klasické tabulkové metody bude ukázáno, jak lze s formulemi pracovat analogicky jako s algebraickými výrazy. První kapitola pojednává o vybraných termínech výrokové logiky, jejichž znalost je pro vyhodnocování nezbytná. Druhá kapitola se zabývá různými metodami vyhodnocování formulí. Poslední kapitola je věnována aplikacím výrokové logiky a slovním úlohám, které lze prostřednictvím výrokové logiky snadno vyřešit.

Klíčová slova: výrok, výrokové spojky, logické funkce, formule výrokové logiky, formační strom, tabulka pravdivostních hodnot, numerické vyhodnocování formule, věta o nahrazení, tautologie, kontradikce, splnitelná formule

Počet stran: 44

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Lucie Šuráňová

Title: Evaluation of formulas of propositional logic

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Miloslav Závodný

The year of presentation: 2016

Abstract: Bachelor's thesis focuses on various methods of evaluation formulas of classical propositional logic. To evaluate formulas of classical propositional logic will be used the following methods: expression tree, truth table, numerical evaluation of formulas, rules of replacement. The first chapter describes the terms of propositional logic, whose knowledge is very important to evaluations. The next charter contains some examples of formulas that are evaluated using mentioned methods. The last charter deals with applications of propositional logic.

Key words: proposition, logical connectives, logical operators, well-formed formulas of propositional logic, expression tree, truth table, numerical evaluation of formulas, rules of replacement, tautologies, contradictions

Number of pages: 44

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Miloslava Závodného a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala panu RNDr. Miloslavu Závodnému, vedoucímu mé bakalářské práce, za čas, který mi věnoval, pomoc při zpracovávání práce a za ochotný a vstřícný přístup.

Obsah

Úvod

Tématem bakalářské práce je vyhodnocování formulí výrokové logiky. Práce je zaměřena na klasickou, tj. dvouhodnotovou a extenzionální logiku.

První kapitola je věnována vybraným termínům klasické výrokové logiky, jejichž znalost je pro správné vyhodnocení formule nezbytná. Mimo jiné se dozvíme co to vlastně výrok je a jak jej správně rozpoznat, seznámíme se s jazykem výrokové logiky.

Druhá kapitola se bude zabývat vyhodnocováním formulí výrokové logiky. Budou uvedeny různé způsoby, jak lze formule výrokové logiky vyhodnocovat. Ke každému způsobu bude uvedeno několik řešených příkladů, aby bylo zřejmé, jak daná metoda funguje v praxi. Na příkladech ukážeme výhody i nevýhody jednotlivých metod. Formule výrokové logiky lze vyhodnocovat i numericky, i to zde bude ukázáno. Kapitolu uzavřeme příkladem, který bude vyřešen všemi uvedenými metodami.

Poslední kapitola bude věnována aplikacím výrokové logiky, dozvíme se v ní, jak lze úsudky z běžného jazyka převést do jazyka výrokové logiky a v tomto jazyce je vyřešit. Pro zajímavost ukážeme, jak lze výrokovou logiku aplikovat na slovně formulované úlohy a jak je lze pomocí výrokové logiky snadno řešit. Budou vybrány úlohy z běžného života, abychom viděli, že i tady může výroková logika pomoct při rozhodování mezi několika nabízejícími se variantami jejich chápání.

V práci tedy ukážeme, jak lze formule výrokové logiky vyhodnocovat, jaké způsoby jsou pro určitou formuli nejvhodnější, jakých hodnot může formule nabývat a vysvětlit, co konkrétní výsledek vyhodnocení znamená.

Kapitola 1

Klasická výroková logika

Logikou se zabývali již staří Řekové – Aristoteles sestavil souhrn pravidel správného uvažování a nazval jej logikou. Výsledkem úvahy byl buď platný, anebo neplatný závěr. Třetí možnost neexistovala. Takovou logiku v níž pravdivostní hodnota každého tvrzení nabývá právě jedné ze dvou hodnot pravda, nepravda, označujeme jako *dvouhodnotovou*. Každý jazykový výraz má svojí extenzi (to, co označuje) a svoji intenzi (to, co vyjadřuje). Logika, která uvažuje pouze extenze výrazů se kterými pracuje a jejich intenze zanedbává, se nazývá *extenzionální*. Logika je *klasická*, právě když je extenzionální a dvouhodnotová. [3]

Existují i logiky vícehodnotové. Například *tříhodnotová logika*, kterou se zabýval polský matematik Jan Lukasiewicz. Usuzoval totiž, že existují i výroky, které nejsou ani pravdivé ani nepravdivé a je tedy potřeba zavést třetí hodnotu, kterou budou ohodnoceny právě tyto výroky. Označil ji $\frac{1}{2}$, jako prostřední hodnotu mezi pravdou (1) a nepravdou (0). Uvažujeme-li *n-hodnotovou logiku*, kde $n \geq 2$ a za hodnoty této logiky se berou konstanty $0, 1, \ldots, n-1$ uspořádané $0 < n-1 < n-2 < \cdots < 2 < 1$, hovoříme o *vícehodnotové logice Postově*. [5]

1.1. Výrok

Tato podkapitola je zpracována pomocí literatury [2, 3, 7].

Definice 1. Výrokem nazveme jakýkoliv jazykový výraz, o němž má smysl uvažovat, zda je či není pravdivý.

V klasické logice neuvažujeme o tom, že by jazykový výraz byl více či méně pravdivý, tím se zabývají neklasické nebo vícehodnotové logiky. „Za výroky tak lze považovat oznamovací věty, kterými se srozumitelně sděluje něco, co může být buď jen pravdivé, anebo jen nepravdivé.“ ([2], str. 4) Věty tázací a rozkazovací za výrok nepovažujeme.

Mezi charakteristické vlastnosti výroku tak patří zejména tyto tři:

1. Každému výroku lze jednoznačně přiřadit jednu ze dvou pravdivostních hodnot pravda, nebo nepravda.
2. Z každého výroku lze vytvořit nový výrok, který má opačnou pravdivostní hodnotu než výrok původní.
3. Libovolné výroky lze spojovat pomocí vhodných jazykových výrazů, tzv. výrokových spojek, tak, že výsledkem je zase výrok.

Definice 2. Pravdivému výroku přiřadíme hodnotu 1, nepravdivému výroku přiřadíme hodnotu 0. Říkáme, že jsme výrok ohodnotili.

Značení pravdivostních hodnot výroků prostřednictvím 0 a 1 je nejznámější a nejčastěji používané. Můžeme se však setkat i s jiným značením. T (z anglického True) označuje pravdu a naopak F (z anglického False) značí nepravdu, nebo $\top$ pro pravdu a $\perp$ pro nepravdu.

Výrok, který již dále nelze z logického hlediska dělit na jednodušší, je *výrok jednoduchý (elementární).* Z elementárních výroků lze za pomoci vhodných jazykových výrazů (výrokových spojek) získat výrok složený. *Složený výrok* tedy můžeme definovat jako výrok obsahující výrokové spojky.

1.2. Výrokové spojky

Inspirací k této části byla literatura [1] a [3].

Existuje mnoho jazykových výrazů umožňujících spojovat výroky. Výroková logika si vybírá jen některé, jejichž jazykový význam zhruba odpovídá tomu, co provádějí s pravdivostními hodnotami spojovaných výroků. Protože ale potřebujeme znát pravdivostní hodnotu složených výroků jednoznačně, je nutné výrokové spojky definovat přesně, nejlépe pomocí tzv. pravdivostní tabulky. Takto definované výrokové spojky jsou extenzionální, tj. pravdivostní hodnota výsledného výroku je jednoznačně určena pouze danou spojkou a pravdivostními hodnotami všech výchozích výroků.

1.2.1. Negace ($\neg$)

Negaci definujeme jako logickou funkci, která výroku uděluje právě opačnou pravdivostní hodnotu. Nejčastěji ji značíme $\neg P$, P', ale můžeme se setkat i s následujícím značením $\sim P$, non P, NOT P aj.

Negaci výroku vyslovujeme *Není pravda, že...* – na místo teček přidáme výrok původní. Výraz *Není pravda, že...* můžeme jednoduše nahradit předponou *ne*, ale musíme být opatrní, jelikož tento způsob negování není vždy vhodný. Další možnost, jak negovat výrok, je nahradit původní výrok výrokem novým, který zahrnuje všechny zbývající možnosti, tj. vylučuje platnost negovaného výroku. Každý výrok musí mít negaci, což nám může usnadnit rozhodování, zda je jazykový výraz výrok, či nikoliv.

Negaci můžeme definovat následující tabulkou

P	$\neg P$
1	0
0	1

1.2.2. Konjunkce ($\wedge$)

Konjunkce je logická funkce, která nabývá pravdivostní hodnoty 1 pouze tehdy, jsou-li oba dva spojované výroky pravdivé. Jinak je konjunkce nepravdivá, tj. její pravdivostní hodnota je 0. Slovně ji vyjadřujeme ... *a zároveň* ...

Nejčastěji používaný způsob značení pro konjunkci je $\wedge$. Existují i alternativní možnosti značení, například $P \,\&\, Q$, $P \cdot Q$, $P \cap Q$, P AND Q aj.

Konjunkce se též nazývá logický součin, odtud značení $P \cdot Q$.

Pro přehledný zápis použijeme následující tabulku, kde mimo jiné můžeme vidět, že je konjunkce komutativní.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

resp.

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

1.2.3. Disjunkce ($\vee$)

Disjunkcí rozumíme logickou funkci, která přiřadí pravdivostní hodnotu 1, jestliže je alespoň jeden z výroků pravdivý. Jsou-li oba výroky nepravdivé, pak je i disjunkce nepravdivá, tj. přiřadí pravdivostní hodnotu 0.

Vyslovujeme: ... *nebo* ... *(před nebo nesmí být čárka, jelikož se nejedná o vylučovací výnam)*. V případě vylučovacího významu bychom použili *buď* ..., *nebo*, *buď* ..., *anebo*. Nejčastěji disjunkci značíme $\vee$, ale můžeme použít i následující označení $P + Q$, $P \cup Q$, P OR Q aj.

Disjunkce se též nazývá *logický součet*, odtud označení $P + Q$.

V následující tabulce můžeme vidět, že disjunkce je komutativní.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

resp.

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

1.2.4. Implikace ($\Rightarrow$)

Implikací nazveme logickou funkci, která přiřadí pravdivostní hodnotu 0 pouze tehdy když, pravda implikuje nepravdu. Ve všech ostatních případech je implikace pravdivá. Slovně vyjadřujeme *Jestliže ..., pak....*
Značíme $P \Rightarrow Q$, případně $P \rightarrow Q$, $P \subset Q$ aj.

V následující tabulce můžeme vidět, že implikace není komutativní.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

resp.

$\Rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

Výrok P nazýváme předpokladem a výrok Q tvrzením. Můžeme také říci, že P je postačující podmínka pro Q nebo Q je nutná podmínka pro P.
Je-li $P \Rightarrow Q$ pravdivá, říkáme, že z P logicky vyplývá Q.
Je-li $P \Rightarrow Q$ pravdivá a zároveň $Q \Rightarrow P$ pravdivá, říkáme, že P a Q jsou logicky ekvivalentní.

1.2.5. Ekvivalence ($\Leftrightarrow$)

Ekvivalence je logická funkce, která přiřadí pravdivostní hodnotu 1 právě tehdy, když oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu (oba jsou buď pravdivé, nebo jsou oba nepravdivé). Slovně vyjadřujeme *..., právě tehdy když ....*
Často se setkáme i s vyjádřením *P je ekvivalentní Q, jestliže P, pak Q a naopak.*

Nejčastěji značíme: $P \Leftrightarrow Q$. Jiné značení: $P \leftrightarrow Q$, $P \equiv Q$, P IFF Q aj.

Ekvivalenci definujeme následující tabulkou, kde mimo jiné vidíme, že ekvivalence je komutativní.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

resp.

$\Leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

Je-li $P \Leftrightarrow Q$ pravdivá, říkáme, že P a Q jsou ekvivalentní.

Ekvivalenci můžeme vyjádřit i pomocí implikace a konjunkce, jelikož zápis $P \Leftrightarrow Q$ je ekvivalentní zápisu $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Logickým spojkám můžeme přiřadit prioritu: $\neg$ má přednost před všemi ostatními logickými spojkami, $\wedge$ a $\vee$ jsou rovnocenné a mají přednost před též rovnocennými spojkami $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$. Stanovení priority spojek umožňuje omezit používání pomocných symbolů vyznačujících strukturu složeného výroku – závorek.

1.3. Systém pravdivostních funkcí

Následující text je zpracován pomocí literatury [3].

Uvedli jsme 5 logických spojek – 1 jednoargumentovou (negaci) a 4 dvouargumentové (konjunkci, disjunkci, implikaci, alternativu).

Poznámka 1. Vzhledem k tomu, že $P \equiv Q$ lze vyjádřit jako $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ a $P \Rightarrow Q$ je totéž co $\neq P \vee Q$, vystačili bychom jen s negací a konjunkcí a disjunkcí. Navíc platí, jak ukážeme později, že $P \wedge Q$ je ekvivalentní s $\neg(\neg P \vee \neg Q)$, tj. stačí nám pouze negace a disjunkce, nebo negace a konjunkce, nebo negace a implikace.

Systém všech jednoargumentových pravdivostních funkcí

Existují pouze 4 jednoargumentové pravdivostní funkce, které lze vyjádřit mnoha různými výrazy.

P	Φ_1^1	Φ_2^1	Φ_3^1	Φ_4^1
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0
	verum, 1	opakování	negace	falzum, 0
	$P \Rightarrow P$	P	$\neg P$	$\neg(P \Rightarrow P)$
	$\neg P \vee P$	$P \vee P$	$\neg\neg\neg P$	$P \wedge \neg P$
		$P \wedge P$		

Systém všech dvouargumentových pravdivostních funkcí

Existuje právě 16 dvouargumentových pravdivostních funkcí.

Na každém místě uspořádané dvojice spojovaných výroků se může vyskytovat 0, nebo 1, každé místo dvojice tak lze vyplnit 2 způsoby. Všechna místa dvojice lze tedy vyplnit $2 \cdot 2 = 4$ způsoby, existují tedy čtyři možné vzory – $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ –, jimž je třeba přiřadit hodnotu.

Pravdivostní funkce přiřadí prvnímu vzoru buď 1, nebo 0 – existují tedy 2 možnosti přiřazení. Ať je prvnímu vzoru přiřazena kterákoliv možnost, druhému vzoru je opět přiřazena jedna ze dvou možností. Při jakékoliv kombinaci přiřazení prvním dvěma vzorům, je třetímu vzoru opět přiřazena jedna ze dvou možností a při jakékoliv kombinaci přiřazení předešlým třem vzorům, je čtvrtému vzoru opět přiřazena jedna ze dvou možností. Funkce je určena, když je toto přiřazení provedeno pro všechny vzory zároveň, tedy podle obecného principu kombinatoriky je celkový počet dvouargumentových pravdivostních funkcí dán součinem možných přiřazení, tj. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.
(Počet n-argumentových pravdivostních funkcí by byl $\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^n\text{-krát}}$, 2^n je počet vzorů)

P	Q	Φ^2_1	Φ^2_2	Φ^2_3	Φ^2_4	Φ^2_5	Φ^2_6	Φ^2_7	Φ^2_8	Φ^2_9	Φ^2_{10}	Φ^2_{11}	Φ^2_{12}	Φ^2_{13}	Φ^2_{14}	Φ^2_{15}	Φ^2_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Φ^2_1 – verum dvouargumentové, true (dvouargumentové)

Φ^2_2 – disjunkce

Φ^2_3 – obrácená implikace (Q implikuje P)

Φ^2_4 – druhé opakování P

Φ^2_5 – implikace (P implikuje Q)

Φ^2_6 – druhé opakování Q

Φ^2_7 – ekvivalence

Φ^2_8 – konjunkce

Φ^2_9 – antikonjunkce, Sheffer (Shefferův operátor)

Φ^2_{10} – antivalence

Φ^2_{11} – druhé opakování $\neg Q$

Φ^2_{12} – antiimplikace, inhibice (nemá českou spojku)

Φ^2_{13} – druhé opakování $\neg P$

Φ^2_{14} – obrácená inhibice

Φ^2_{15} – antidisjunkce, Peircův operátor

Φ^2_{16} – falzum dvouargumentové, false (dvouargumentové)

1.4. Jazyk výrokové logiky

Ke zpracování této části jsem využila literaturu [4, 7, 3].

Aby bylo možno pracovat s výroky bez ohledu na to, o čem se v nich hovoří (protože nás zajímá pouze zda jsou nebo nejsou pravdivé), je vhodné výrokovou logikou tzv. formalizovat. Výrok zde nahradíme *výrokovou proměnnou*, jejímž oborem proměnnosti je množina $\{0, 1\}$. Výrokové proměnné představují základní stavební jednotky (výrokových) formulí.

Z výrokových proměnný a dalších symbolů sestavujeme pomocí syntaktických pravidel *formule* výrokové logiky a pomocí sémantických pravidel formule ohodnocujeme – používáme jazyk výrokové logiky.

Jazyk výrokové logiky tvoří abeceda, syntaktická a sémantická pravidla.

1.4.1. Abeceda výrokové logiky

Definice 3. Abeceda výrokové logiky obsahuje:

1. Všechny výrokové proměnné.
2. Výrokové spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.
3. Pomocné symboly (,).

1.4.2. Syntax výrokové logiky

Syntaktická pravidla určují, které výrazy jsou považovány za formule. Tato pravidla také určují, jakým způsobem lze z jedněch formulí tvořit formule složitější, tj. jak lze tedy z formulí skládat formule jiné.

Definice 4. Formule výrokové logiky:

1. Každá výroková proměnná je formule.
2. Jsou-li P, Q formule, pak také $(\neg P)$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \Rightarrow Q)$, $(P \Leftrightarrow Q)$ jsou formule.
3. Každá výroková formule vznikne konečným počtem užití pravidel 1 a 2.

Formule, které byly použity při sestavování formule podle pravidel 1 a 2 nazýváme *podformulemi* dané formule. Nejjednodušší podformulí je tak proměnná.

Pomocné symboly (,) vyznačují strukturu formule. Vnější pomocné závorky se obvykle vynechávají, stejně jako některé závorky uvnitř formule, není-li vzhledem k prioritě použitých výrokových spojek o struktuře formule pochyb. Píšeme například $\neg P \Rightarrow Q$, i když přísně vzato, museli bychom podle naší definice psát $((\neg P) \Rightarrow Q)$. Při tomto zápisu formule není potřeba prioritu výrokových spojek vůbec definovat.

Pomocné závorky se vynechávají hlavně z důvodu, že je-li jich v jednotlivých formulích příliš mnoho, může se formule jevit složitější než ve skutečnosti je. Vypuštění závorek však nesmí narušit strukturu formule. V další části práce budeme používat abecedu výrokové logiky rozšířenou o pomocné symboly [a]. Umožní nám to přehledněji zaznamenat strukturu formulí.

1.4.3. Sémantika výrokové logiky

Zda je či není formule pravdivá určují sémantická pravidla, formule výrokové logiky je jimi ohodnocena. Pravdivost formule se přitom odvíjí od pravdivosti jejích podformulí a použitých výrokových spojek.

Definice 5. (Pravdivostním) ohodnocením (valuací) výrokové formule nazveme zobrazení (ozn. e), které každé formuli přiřadí buď hodnotu 0, anebo 1, takto:

1. Je-li P výroková proměnná, je $e(P)$ prvek množiny $\{0, 1\}$.
2. Není-li P výroková proměnná, pak postupujeme úplnou indukcí podle složitosti (struktury) formule. Jsou-li P, Q výrokové formule, $e(\neg P)$, $e(P \vee Q)$, $e(P \wedge Q)$, $e(P \Rightarrow Q)$, $e(P \Leftrightarrow Q)$ se v závislosti na $e(P)$ a $e(Q)$ definuje podle následující tabulky:

$e(P)$	$e(Q)$	$e(\neg P)$	$e(P \wedge Q)$	$e(P \vee Q)$	$e(P \Rightarrow Q)$	$e(P \Leftrightarrow Q)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kapitola 2

Vyhodnocování formulí klasické výrokové logiky

Tato kapitola byla zpracována pomocí literatury [1, 2, 3, 6].

Při vyhodnocování formulí zjišťujeme, zda jsou či nejsou pravdivé. Jak již bylo uvedeno, pravdivost formule se odvíjí od pravdivostí jejich podformulí. Vyhodnocovanou formuli proto postupně rozkládáme na podformule až po výrokové proměnné, které je nutné ohodnotit nejprve. Není-li dáno, pro jaké hodnoty proměnných má být formule vyhodnocena, musíme ji prozkoumat pro všechna možná ohodnocení, kterých je pro n proměnných 2^n. Při vyhodnocování podformulí začínáme tedy od ohodnocení proměnných a postupujeme podle její struktury až k samotné formuli. Říkáme, že postupujeme *indukcí podle složitosti formule.*

V klasické výrokové logice existují po vyhodnocení formule tři možné závěry, vždy však může nastat pouze jeden z nich. Formulí klasické výrokové logiky může být *tautologie, kontradikce* nebo *splnitelná formule.*

Definice 6. Výroková formule P se nazývá *tautologie* (tautologicky pravdivá, logický zákon), právě když pro libovolné ohodnocení e je $e(P) = 1$. (Formule je vždy pravdivá.)

Výroková formule Q se nazývá *kontradikce* (nesplnitelná), jestliže pro libovolné ohodnocení e je $e(Q) = 0$. (Formule je vždy nepravdivá.)

Výroková formule R se nazývá *splnitelná*, jestliže existuje takové ohodnocení, že $e(R) = 1$.

2.1. Formační strom formule

Inspirací k této části byl text [6].

Jak se postupuje při vyhodnocování formulí indukcí podle její složitosti můžeme nejlépe ilustrovat pomocí *formačního stromu* formule.

Formační strom formule výrokové logiky je konečný binární strom, jehož všechny uzly jsou označeny návěštími – podformulemi dané formule tak, že platí:

1. Kořen má úroveň 0 a je označen danou formulí.
2. Jestliže je uzel označen některým z návěští $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$, kde P, Q jsou formule, pak uzly bezprostředně následující úrovně nesou po řadě (zleva doprava) návěští P, Q.
3. Je-li uzel označen podformulí $\neg P$, pak uzel bezprostředně následující úrovně nese jako návěstí podformuli P.
4. Listy jsou označeny atomickými formulemi vyskytujícími se v dané formuli.

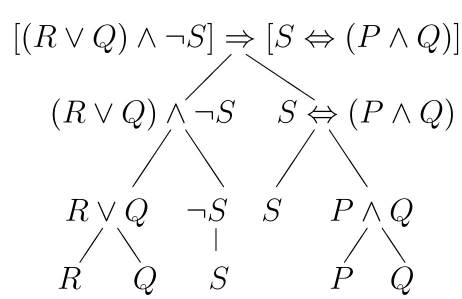
Ke každé výrokové formuli existuje jediný odpovídající formační strom.

Příklad 1. Nechť je dána formule

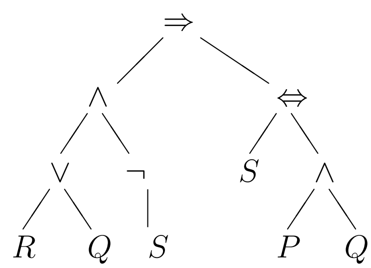
$$\varphi\colon [(R \vee Q) \wedge \neg S] \Rightarrow [S \Leftrightarrow (P \wedge Q)].$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že je dáno ohodnocení jednotlivých proměnných, a to: $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$ a $S = 1$.

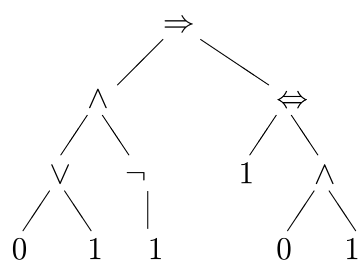
Nejprve sestavíme formační strom (stromový graf) formule φ dle výše uvedené definice.

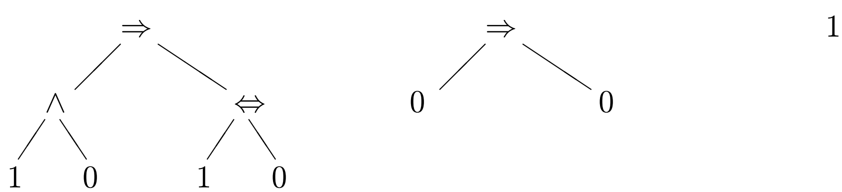


Lze také použít zkrácený zápis, kde návěští formačního stromu tvoří jen výrokové spojky



Nyní do stromového grafu doplníme známé hodnoty výrokových proměnných a postupně (zdola nahoru) vyhodnocujeme podformule tvořící návěští uzlů formačního stromu, až dojdeme ke kořenu stromu, tj. samotné formuli.





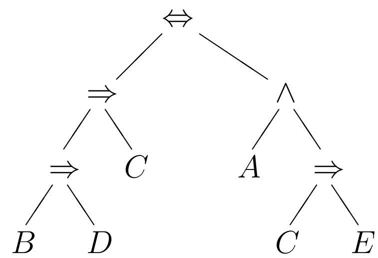
Výsledkem vyhodnocení formule φ je 1. Daná formule je pro ohodnocení $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$, $S = 1$ pravdivá.

Příklad 2. Uvažujme formuli φ ve tvaru:

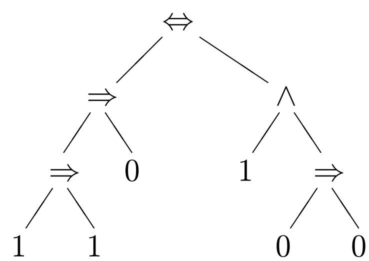
$$[(B \Rightarrow D) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [A \wedge (C \Rightarrow E)]$$

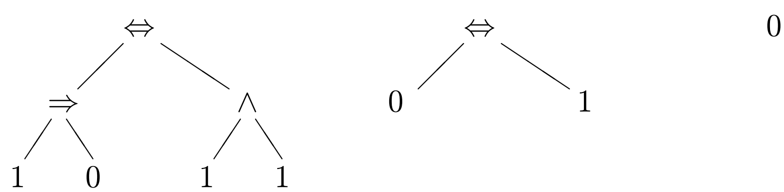
Předpokládejme dané ohodnocení proměnných $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 0$.

Nejprve vytvoříme stromový graf



Nyní budeme vyhodnocovat (obdobně jako v předchozím příkladě) dle zadaných ohodnocení proměnných





Daná formule je pro ohodnocení proměnných $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 0$ nepravdivá, jelikož $\mathrm{ph}(0 \Leftrightarrow 1) = 0$.

Výhodou stromového grafu je přehlednost struktury vyhodnocované formule i to, že při sestavování stromového grafu se možnosti, jak formuli rozložit, nabízejí skoro samy.

2.2. Tabulková metoda

Tuto část jsem zpracovala za pomoci literatury [1] a [3].

Následující metodu nazýváme tabulková, neboť hodnoty jednotlivých proměnných a podformulí, z nichž se vyhodnocovaná formule skládá, se zaznamenávají do tabulky, tzv. *pravdivostní tabulky.* Výhodou této metody je přehlednost hodnot formule a schopnost v jedné tabulce obsáhnout všechna možná ohodnocení proměnných. Nevýhodou tabulkové metody je její pracné vyplňování, když formule obsahují větší počet proměnných. Potom má tabulka pro n proměnných 2^n řádků – pro čtyři proměnné je to 16 řádků, pro pět proměnných 32 řádků a jejich počet roste geometrickou řadou.

V záhlaví tabulky uvedeme výrokové proměnné a podformule vyhodnocované formule. Počet sloupců tabulky není dán žádným pravidlem, závisí na tom, jak složitou formuli vyhodnocujeme a jaké a kolik podformulí v záhlaví uvedeme. Zpočátku uvádíme v záhlaví (mimo proměnných) všechny podformule, později můžeme v záhlaví uvést pouze formuli, sloupce s podformulemi si jen „představovat“ a zapisovat hodnoty do příslušného místa, které by odpovídalo sloupci podformule, jak ukážeme dále. Lze také přistoupit ke „zkrácenému“ vyhodnocování, kdy o hodnotě formule rozhodneme bez ohodnocení všech podformulí, např. $1 \vee x = 1$, pro $x = 1$ i $x = 0$.

V následujících příkladech ukážeme, jak pravdivostní tabulka vypadá.

Příklad 3. Je dána formule

$$\varphi\colon (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q).$$

Rozhodněte, zda jde o tautologii, kontradikci nebo splnitelnou formuli.
Řešení: Formule obsahuje 2 výrokové proměnné, tudíž se tabulka bude skládat ze 4 řádků. Tím pokryjeme všechna možná ohodnocení. Pro tento konkrétní příklad zvolíme 7 sloupců (pro P, Q, $\neg P$, $\neg Q$, $\neg P \wedge \neg Q$, $P \wedge Q$, φ). Do těla tabulky zaznamenáváme 0 nebo 1, podle pravdivosti podformule příslušného sloupce vzhledem k ohodnocení proměnných příslušného řádku.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \wedge Q$	φ
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Uvedená formule φ je kontradikce, neboť ve všech případech ohodnocení jejích proměnných je nepravdivá.

Trochu složitějším případem jsou formule se třemi výrokovými proměnnými. Tabulka bude obsahovat $2^3 = 8$ řádků.

Příklad 4. Je dána formule

$$\varphi\colon [(A \wedge C) \vee \neg B] \Leftrightarrow [(C \Rightarrow A) \wedge (C \vee \neg B)].$$

Rozhodněte o její pravdivosti.

Řešení: Vyplníme tabulku

A	B	C	$\neg B$	$A \wedge C$	$(A \wedge C) \vee \neg B$	$C \Rightarrow A$	$C \vee \neg B$	$(C \Rightarrow A) \wedge (C \vee \neg B)$	φ
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1

Vidíme, že v předposledním řádku je pravdivost formule φ porušena, což znamená, že daná formule nemůže být tautologií. Nemůže být ani kontradikcí, jelikož je nesplnitelná pouze v jednom případě, a to když je pravdivá jen proměnná C. Vyhodnocovaná formule je tedy splnitelná.

Příklad 5. Je dána formule

$$\varphi\colon [(R \Rightarrow Q) \wedge P)] \wedge [(P \wedge Q) \Rightarrow R].$$

Rozhodněte o její pravdivosti.

Řešení:

P	Q	R	$R \Rightarrow Q$	$(R \Rightarrow Q) \wedge P$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	φ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0

Uvedená formule φ je splnitelná. Pravdivá je pouze ve dvou případech, když všechny tři proměnné nabývají hodnoty 1 a nebo když je pravdivá pouze proměnná P.

Bylo uvedeno, že tabulku není nutné vyplňovat úplně a že lze využít znalostí o pravdivostních funkcích.

Příklad 6. Rozhodněte o pravdivosti formule

$$[\neg B \vee (A \wedge C)] \wedge [(A \Rightarrow C) \wedge (\neg C \Rightarrow B)].$$

Řešení:

A	B	C	$[\neg B$	$\vee$	$(A \wedge C)]$	$\wedge$	$[(A \Rightarrow C)$	$\wedge$	$(\neg C$	$\Rightarrow B)]$
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0				
1	0	1	1	1		1	1	1	0	1
1	0	0	1	1		0	0			
0	1	1	0	0	0	0				
0	1	0	0	0	0	0				
0	0	1	1	1		1	1	1	0	1
0	0	0	1	1		0	1	0	1	0

Zkoumaná formule je splnitelná.

Tabulková metoda slouží také k hledání neznámých pravdivostních hodnot výrokových proměnných.

Příklad 7. Jsou dány dvě formule I: $(A \Rightarrow B) \wedge C$ a II: $(A \Leftrightarrow C) \Rightarrow B$. Máme zjistit, jaké trojce hodnot může trojce proměnných (A, B, C) nabývat, platí-li (a) aspoň jedna z formulí, (b) obě formule.

Řešení: Vyplníme tabulku úsporným způsobem (zjistíme-li, že některý z výroků neplatí, nemusíme v příslušném řádku dál pokračovat).

			I			II			(a)	(b)
A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$\wedge$	C	$(A \Leftrightarrow C)$	$\Rightarrow$	B	$\mathrm{I} \vee \mathrm{II}$	$\mathrm{I} \wedge \mathrm{II}$
1	1	1	1	1	1		1	1	1	1
1	1	0		0	0		1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0		0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1		1	1	1	1
0	1	0		0	0		1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0		0	0	1	0	0	0	0

Z tabulky vidíme, že v případě (a) první nebo druhý výrok neplatí pouze pro dvě kombinace hodnot proměnných (A, B, C) a to pro $(1, 0, 1)$ a $(0, 0, 0)$, v případě (b) první a zároveň druhý výrok platí pro trojice $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ a $(0, 0, 1)$.

Příklad 8. Víme, že platí $(\neg A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C$ a zároveň $\neg B \wedge (A \wedge C)$. Máme zjistit, jaké trojce hodnot může trojce proměnných (A, B, C) nabývat.

Řešení: Vyplníme tabulku úsporným způsobem

A	B	C	$(\neg A$	$\Leftrightarrow B)$	$\Rightarrow C$	$\neg B$	$\wedge$	$(A \wedge C)$
1	1	1	0		1	0	0	
1	1	0	0	0	1	0	0	
1	0	1	0		1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1		1	0	0	
0	1	0	1	1	0	0	0	
0	0	1	1		1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0

Z tabulky vidíme, že oba výroky platí pouze pro jednu trojici hodnot výrokových proměnných A, B, C (v tomto pořadí), a to pro $(1, 0, 1)$.

2.3. Numerické vyhodnocení formule

Inspirací k této části byl text [3].

„Vzhledem k tomu, že pravdivostní hodnotou výroku je jedno z čísel 0, 1, lze najít matematický předpis, který charakterizuje každou logickou funkci.“ ([3], str.52) Platí:

- $\mathrm{ph}(\neg A) = 1 - \mathrm{ph}(A)$
- $\mathrm{ph}(A \wedge B) = \mathrm{ph}(A)\,\mathrm{ph}(B)$
- $\mathrm{ph}(A \vee B) = \mathrm{ph}(A) + \mathrm{ph}(B) - \mathrm{ph}(A)\,\mathrm{ph}(B)$
- $\mathrm{ph}(A \Rightarrow B) = 1 - \mathrm{ph}(A) + \mathrm{ph}(A)\,\mathrm{ph}(B)$

- $\mathrm{ph}(A \Leftrightarrow B) = 1 - \mathrm{ph}(A) - \mathrm{ph}(B) + 2\,\mathrm{ph}(A)\,\mathrm{ph}(B) = 1 - \big(\mathrm{ph}(A) - \mathrm{ph}(B)\big)^2$

Při numerických úpravách lze využít vztahy

$$\mathrm{ph}(X)^n = \mathrm{ph}(X), \quad \mathrm{ph}(X)\cdot\mathrm{ph}(\neg X) = 0, \quad \mathrm{ph}(X) + \mathrm{ph}(\neg X) = 1. \qquad (*)$$

Pro přehlednější zápis budeme pravdivostní hodnotu proměnné A značit v této sekci a, resp. a' pro $\neg A$. Pomocné vztahy $(*)$ mají potom tvar: $a^n = a$, $aa' = 0$ a $a + a' = 1$.

Příklad 9. Rozhodněte o pravdivostní hodnotě formulí:

a) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Řešení: (a)

$$\mathrm{ph}((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) = 1 - \mathrm{ph}(\neg A \Rightarrow \neg B) + \mathrm{ph}(\neg A \Rightarrow \neg B)\,\mathrm{ph}(B \Rightarrow A) =$$

$$= 1 - (1 - a' + a'b') + (1 - a' + a'b')(1 - b + ba) =$$

roznásobíme třetí člen

$$= 1 - (1 - a' + a'b') + (1 - a' + a'b' - b + a'b - a'b'b + ba - baa' + aba'b') =$$

třetí člen upravíme s využitím $(*)$

$$= 1 - (1 - a' + a'b') + (1 - a' + a'b' - b + a'b + ba) =$$

odstraníme závorky

$$= 1 - 1 + a' - a'b' + 1 - a' + a'b' - b + a'b + ba =$$

$$= 1 - b + a'b + ba = 1 - b + b(a' + a) =$$

a vzhledem k $(*)$ dostaneme

$$= 1 - b + b = 1$$

Formule je tautologií.

(b)

$$\mathrm{ph}((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) = 1 - \mathrm{ph}(A \Rightarrow B) + \mathrm{ph}(A \Rightarrow B)\,\mathrm{ph}(B \Rightarrow A) =$$

můžeme vytknout $\mathrm{ph}(A \Rightarrow B)$ z druhého a třetího členu

$$= 1 - \mathrm{ph}(A \Rightarrow B)\big(1 - \mathrm{ph}(B \Rightarrow A)\big) =$$
$$= 1 - (1 - a + ab)(1 - (1 - b + ba)) = 1 - (1 - a + ab)(b - ba)) =$$
$$= 1 - (b - ab + ab - ba + ba - ab) = 1 - b + ab$$

Z výsledku $1 - b + ba$ je zřejmé, že formule (b) je splnitelná, např. pro $b = a = 0$ je pravdivá, pro $b = 1$, $a = 0$ nikoliv. Je z něho dokonce vidět, že je to implikace $B \Rightarrow A$.

(c)

$$\mathrm{ph}((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)) = 1 - (\mathrm{ph}(A \Rightarrow B) - \mathrm{ph}(\neg A \vee B))^2 =$$
$$= 1 - (1 - a + ab - (a' + b - a'b))^2 = 1 - (1 - a + ab - a' - b + a'b)^2 =$$
$$= 1 - (1 - a + ab - 1 + a - b + (1 - a)b)^2 =$$
$$= 1 - (1 - a + ab - 1 + a - b + b - ab)^2 = 1 - 0 = 1$$

Formule je tautologií.

Pomocí tohoto aparátu lze formule převést na algebraické výrazy a ty upravovat stejně jako matematické formule.

2.4. Věta o nahrazení

Tato část je zpracována pomocí literatury [3] a [7].

I když jsou tabulková metoda i metoda formačního stromu hezky přehledné a snadné, nemusí vždy být tou nejlepší volbou, numerické vyhodnocování nevyjímaje. V případě složitějších formulí (složitost formule se odvíjí od počtu výrokových proměnných a logických spojek ve formuli obsažených) mohou být tyto metody velmi pracné. V těchto případech lze použít větu o nahrazení, pomocí které lze formuli vyhodnotit pomocí podobných úprav, jako v případě vztahů elementární matematiky.

Věta 1 (o nahrazení). *Buďte φ, ψ, η, χ výrokové formule a P výroková proměnná vyskytující se v φ. Pak platí:*

1. *Je-li φ tautologie, pak nahrazením všech výskytů výrokové proměnné P ve formuli φ formulí ψ získáme opět tautologii.*
2. *Je-li $\eta \Leftrightarrow \chi$ tautologie a ψ formule vzniklá z φ nahrazením některých výskytů podformule η formulí χ, pak $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautologie.*

Užitím věty o nahrazení nezměníme pravdivost formule. „Tautologie zůstane tautologií, i když v ní za proměnnou dosadíme cokoliv nebo když nahradíme některou formuli jinou s ní ekvivalentní formulí.“ ([3], str. 68)

Dříve než ukážeme, jak větu o nahrazení použít na konkrétním příkladě, uvedeme některé tautologie, které vyhodnocování usnadní.

2.4.1. Některé důležité tautologie

Uvedeme jen ty nejčastěji používané při vyhodnocování formulí:

- Zákon dvojí negace: $(\neg\neg P) \Leftrightarrow P$
- Zákon vyloučení třetího: $P \vee \neg P$
- Zákon sporu: $\neg(P \wedge \neg P)$
- Tranzitivita implikace: $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$
- Zákon kontrapozice (transpozice): $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
- Antisymetrie implikace: $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$
- Komutativita konjunkce, disjunkce a ekvivalence
- Asociativita konjunkce: $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$
- Asociativita disjunkce: $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$
- Distributivita $\vee$ vzhledem k $\wedge$: $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

- Distributivita $\wedge$ vzhledem k $\vee$: $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$
- De Morganův zákon pro konjunkci: $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
- De Morganův zákon pro disjunkci: $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
- Zákony absorpce: $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ a $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

Užitím věty o nahrazení dokážeme, že následující formule jsou tautologiemi.

Příklad 10.

1. Je dána formule $P \Leftrightarrow [P \vee (P \wedge Q)]$. Použijeme zákon absorpce a dostaneme $P \Leftrightarrow P$. Je hned zřejmé, že se jedná o tautologii.

2. Je dána formule $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. Užitím zákona distributivity $\vee$ vzhledem k $\wedge$ dostaneme $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. Na pravé i levé straně ekvivalence je stejný výraz, formule je tedy tautologie.

3. Je dána formule $[(P \wedge Q) \wedge (R \wedge S)] \Rightarrow P$.

V prvním kroku se zbavíme logického operátoru implikace tím, že formuli nahradíme ekvivalentní formulí (hodnota původní formule tedy zůstává nezměněna), získáme formuli $\neg[(P \wedge Q) \wedge (R \wedge S)] \vee P$.

Dále využijeme De Morganův zákon, dle kterého je $\neg[(P \wedge Q) \wedge (R \wedge S)]$ ekvivalentní s $\neg(P \wedge Q) \vee \neg(R \wedge S)$, převedli jsme tak původní formuli do tvaru $\neg(P \wedge Q) \vee \neg(R \wedge S) \vee P$. Opakovaným použitím De Morganova zákona máme $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee \neg S \vee P$. Vzhledem k zákonu komutativity konjunkce nezáleží na pořadí jednotlivých proměnných, můžeme psát $\neg P \vee P \vee \neg Q \vee \neg R \vee \neg S$.

Jelikož platí zákon vyloučení třetího ($\neg P \vee P$ je tautologie) a vzhledem k tomu, že zbývající logické operátory jsou disjunkce, bude formule nabývat pravdivostní hodnoty 1 při jakémkoli ohodnocení zbývajících proměnných. Dokázali jsme, že daná formule je tautologií.

4. Formule φ je tvaru $[C \wedge (A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow [(C \wedge \neg A) \vee (C \wedge B)]$.

Nahradíme podformuli $A \Rightarrow B$ na levé straně ekvivalentní formulí $\neg A \vee B$, dostaneme $[C \wedge (\neg A \vee B)] \Leftrightarrow [(C \wedge \neg A) \vee (C \wedge B)]$.

Nyní využijeme zákon distributivity $\wedge$ vzhledem k $\vee$ na levé straně ekvivalence, máme $[(C \wedge \neg A) \vee (C \wedge B)] \Leftrightarrow [(C \wedge \neg A) \vee (C \wedge B)]$. Hodnota formule φ bude pro všechna možná ohodnocení proměnných nabývat hodnoty 1, formule je vždy pravdivá.

5. Je dána formule $[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)]$. Nejprve odstraníme implikace jejich nahrazením pomocí tautologie $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. Máme $[\neg A \vee (B \vee C)] \Leftrightarrow [(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee C)]$. Nyní užijeme na pravé straně zákon asociativity disjunkce, dostaneme $\neg A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow [(\neg A \vee \neg A) \vee (B \vee C)]$. Vzhledem k tomu že $\neg A \vee \neg A$ odpovídá hodnotě $\neg A$, dostaneme obdobně jako v předchozím příkladu stejný výraz na pravé i levé straně ekvivalence. Uvedená formule je tautologie.

Jak je na příkladu 10 vidět, je při tomto postupu dobré převést formule do tvaru, kdy obsahují pouze negaci, konjunkci a disjunkci. Pak stačí používat pouze několik úprav, založených na vlastnostech těchto logických funkcí plynoucích z jejich definice, distributivní zákony, De Morganovy zákony a zákony absorpce.

Nyní si pro srovnání ukážeme všechny uvedené způsoby vyhodnocování na jedné formuli.

Příklad 11. Vyhodnoťte formuli

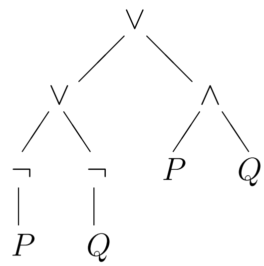
$$\varphi\colon (\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge Q).$$

1. Tabulková metoda:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \wedge Q$	φ
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

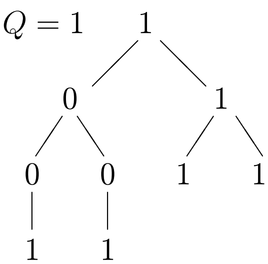
Pro všechna možná ohodnocení je formule φ pravdivá, je tedy tautologií.

2. Formační strom formule:

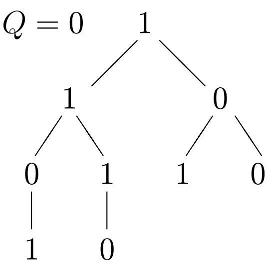


Jelikož není zadáno pro které hodnoty proměnných máme formuli vyhodnotit, je třeba ji vyhodnotit pro všechna možná ohodnocení proměnných (P, Q), tj. pro dvojice $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$.

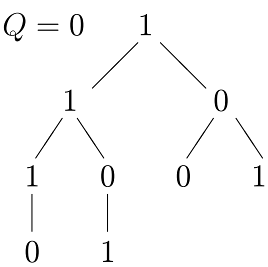
$P = 1,\ Q = 1$



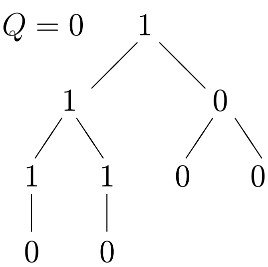
$P = 1,\ Q = 0$



$P = 0,\ Q = 0$



$P = 1,\ Q = 0$



Vidíme že pro všechna možná ohodnocení proměnných nabývá formule φ hodnoty 1. Daná formule φ je tautologie.

Poznámka 2. Formační strom formule se někdy nekreslí a proměnné se dosazují přímo do formule, v našem případě do $(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge Q)$:

$P = 1,\ Q = 1$: $(\neg 1 \vee \neg 1) \vee (1 \wedge 1) = (0 \vee 0) \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$

$P = 1,\ Q = 0$: $(\neg 1 \vee \neg 0) \vee (1 \wedge 0) = (0 \vee 1) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$

$P = 1,\ Q = 1$: $(\neg 0 \vee \neg 1) \vee (0 \wedge 1) = (1 \vee 0) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$

$P = 1,\ Q = 1$: $(\neg 0 \vee \neg 0) \vee (0 \wedge 0) = (1 \vee 1) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$

To jsou ale řádky naší tabulky (a méně přehledné), postup je vhodný pouze pro prozkoumání několika málo hodnot proměnných.

3. Numerické vyhodnocení formule:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{ph}((\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge Q)) = \\
= \mathrm{ph}(\neg P \vee \neg Q) + \mathrm{ph}(P \wedge Q) - \mathrm{ph}(\neg P \vee \neg Q)\,\mathrm{ph}(P \wedge Q) = \\
= (p' + q' - p'q') + pq - (p' + q' - p'q')pq = \\
= p' + q' - p'q' + pq - p'pq - q'pq + p'q'pq = \\
= p' + q' - p'q' + pq = 1 - p + 1 - q - (1-p)(1-q) + pq = \\
= 2 - p - q - 1 + p + q - pq + pq = 1
\end{gathered}
$$

Formule je tautologie.

4. Využití věty o nahrazení:

Na první závorku formule $(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge Q)$ aplikujeme De Morganův zákon $(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$, dostaneme $\neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$. Ze zákona vyloučení třetího již plyne, že jde o tautologii.

Kapitola 3

Aplikace výrokové logiky

Inspirací k této kapitole byl text [1, 2, 3].

Výrokovou logiku nyní použijeme k analýze úsudků, vyslovených v běžném jazyce, pomocí jazyka výrokové logiky. Zde se ukazuje důležitým především význam spojek. Musíme mít jasno v tom, co použitý jazykový výraz ve významu spojky znamená. (Například u spojky nebo odlišujeme vylučovací význam od významu slučovacího pomocí čárky před nebo.) Použité jazykové výrazy nemusí být vždy jednoznačné, často je tak význam použité spojky nutné rovněž analyzovat. K tomu může opět pomoci tabulková metoda. Jsme-li schopni intuitivně pochopit, co autor výroku danou spojkou myslí, lze vyplnit tabulku a k ní nalézt příslušnou pravdivostní funkci. Existuje totiž algoritmus, který ke každé tabulce najde odpovídající formuli.

Příklad 12. Mějme např. tabulku

X	Y	?
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Řešení: Algoritmus nalezení odpovídající formule je tento: Vezmeme řádky tabulky, kde je výsledný výrok 1 (resp. 0) a sestavíme disjunkci z konjunkcí pravdivých hodnot odpovídajících proměnných. Dostaneme tak hledaný výrok (resp. jeho negaci).

Hledaný výrok má tvar

$$(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y), \quad \text{resp.} \quad \neg(X \wedge Y).$$

Získaný výrok lze obvykle dále upravovat.

Příklad 13. Na návštěvu byl pozván Karel a Pavel. Víme, že buď přišel Karel sám, anebo nepřišel nikdo. Najděte formuli, která tuto skutečnost vystihuje.
Řešení: Označíme výrok „Přišel Karel“ symbolem K a výrok „Přišel Pavel“ symbolem P.

Sestavíme tabulku, která vystihuje uvedenou skutečnost:

K	P	?
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Hledaná formule je tedy $(K \wedge \neg P) \vee (\neg K \wedge \neg P)$, resp. $\neg[(K \wedge P) \vee (\neg K \wedge P)]$.

Je třeba poznamenat, že ne vždy je vyplnění třetího sloupce tabulky snadné. Mnohé termíny českého jazyka nejsou jednoznačné.

3.1. Řešení slovních úloh

Prostřednictvím výrokové logiky budeme nyní řešit slovní úlohy. Řešení slovních úloh pomocí výrokové logiky má tři základní fáze:

1. přechod od slovní úlohy k úloze o výrocích, kterou získáme na základě výrokové analýzy textu
2. vyřešení úlohy o výrocích a formulace výsledku
3. vyjádření výsledku v termínech slovní úlohy

Na následujících příkladech si ukážeme, jak řešit slovní úlohy pomocí výrokové logiky.

Výběr strojů

Ředitel výrobního podniku zvažuje nákup nových strojů. Jelikož je to velká investice, ví, že musí volbu dobře zvážit. Chce variantu, která bude pro podnik nejpříznivější. To znamená s nejnižšími možnými náklady a nejvyšším výkonem. Nevybírá jen podle ceny stroje, ale také podle výkonu, vedlejších pořizovacích nákladů, provozních nákladů, nákladů na údržbu, náročnosti obsluhy stroje a délky doby životnosti. Je též potřeba zohlednit, že některé stroje nemohou pracovat současně. V úvahu připadají tři stroje A, B a C. Každý z nich je v něčem lepší, ale na první pohled nelze říct, který stroj, případně která kombinace strojů by byli pro podnik ideální. Omezení na spolupráci strojů jsou následující:

- Jestliže se podnik rozhodne pro zakoupení stroje B, pak bude potřeba ještě alespoň jeden ze strojů A nebo C.
- Pokud nebude mít stroj A, nemůže mít ani stroj C.
- A jestliže podnik nebude mít stroj C, nemůže mít ani stroj B.

Rozpočet na nákup je omezený, podnik si může dovolit nejvýše dva nové stroje. Jaká varianta bude pro podnik za daných podmínek nejlepší?

Řešení: Nejprve je potřeba analyzovat a převést dané podmínky z běžného jazyka do jazyka výrokové logiky. Výrokové proměnné A, B a C znamenají, že byl zakoupen daný stroj. Uvedené podmínky lze v jazyce výrokové logiky zapsat:

- $B \Rightarrow (A \vee C)$
- $\neg A \Rightarrow \neg C$
- $\neg C \Rightarrow \neg B$

Nyní dané podmínky vyhodnotíme pro všechna možná ohodnocení proměnných. Pro přehlednost zvolíme tabulkovou metodu.

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$A \vee C$	$B \Rightarrow (A \vee C)$	$\neg A \Rightarrow \neg C$	$\neg C \Rightarrow \neg B$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1

Možné kombinace zakoupení strojů udávají hodnoty proměnných (1 znamená koupit stroj, 0 znamená nekoupit stroj). Ideální kombinace pro podnik jsou takové, které splňují všechny tři podmínky současně. Jsou to takové kombinace hodnot proměnných, v jejichž řádku nabývají všechny tři formule $B \Rightarrow (A \vee C)$, $\neg A \Rightarrow \neg C$ a $\neg C \Rightarrow \neg B$ hodnoty 1. Z tabulky je vidět, které řádky to jsou. Jedná se o první, třetí, čtvrtý a osmý řádek. Z těchto možností vypustíme první a poslední, jelikož první možnost by znamenala nákup všech tří strojů, což není možné – podnik si může dovolit zakoupit nejvýše dva stroje. A poslední možnost říká nekupovat žádné stroje, což podnik též nechce. Zbývají tedy dvě možnosti. Buď podnik zakoupí jen jeden stroj A, nebo zakoupí stroje dva, a to A a C.

V případě, že by nebyly splněny všechny zadané podmínky ani pro jednu možnost ohodnocení, došli bychom k závěru, že úloha nemá za daných podmínek řešení.

Narozeninový dort

Pro dvojčata se chystá narozeninová oslava. Jedním z dárků bude dort, připravený podle přání dvojčat. Paní cukrářka připravila základ (piškot a krém). Zbývá vybrat dozdobení dortu, výběr záleží na dvojčatech. Mají ale trochu rozdílné chutě i představy o tom nejlepším dortu. Na výběr mají čokoládu, šlehačku a ovoce. Jedno by si přálo dort s čokoládou a bez šlehačky. Nebo pokud bude se šlehačkou, tak jedině i s ovocem. Druhé preferuje ovocný s čokoládou nebo jestliže nebude čokoládový, tak musí být se šlehačkou. Nakonec se ještě dvojčata shodla na tom, že ozdoba dortu musí mít alespoň dvě ingredience. Jakou kombinaci cukrářka zvolí, aby byla dvojčata spokojena?

Řešení: Nejprve zadané podmínky převedeme do jazyka výrokové logiky. Výrokové proměnné budou představovat použití jednotlivých ingrediencí, a to konkrétně C = je použita čokoláda, S = je použita šlehačka, O = je použito ovoce. Podmínky v jazyce výrokové logiky tak budou ve tvaru:

- $(C \wedge \neg S) \vee (S \Rightarrow O)$
- $(O \wedge C) \vee (\neg C \Rightarrow S)$

Nyní tyto formule vyhodnotíme pomocí věty o nahrazení. Obě podmínky musí platit současně, tedy

$$[(C \wedge \neg S) \vee (S \Rightarrow O)] \wedge [(O \wedge C) \vee (\neg C \Rightarrow S)].$$

Implikace nahradíme s využitím tautologie $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$, dostaneme

$$[(C \wedge \neg S) \vee (\neg S \vee O)] \wedge [(O \wedge C) \vee (C \vee S)].$$

Použijeme distributivní zákon a vlastnosti konjunkce a disjunkce

$$(C \vee \neg S \vee O) \wedge (\neg S \vee O) \wedge (O \vee C \vee S) \wedge (C \vee S),$$

$$[C \vee (\neg S \vee O)] \wedge (\neg S \vee O) \wedge [O \vee (C \vee S)] \wedge (C \vee S).$$

Formuli zjednodušíme užitím zákony absorpce $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$, máme

$$(\neg S \vee O) \wedge (C \vee S),$$

$$(\neg S \wedge C) \vee (O \wedge C) \vee (O \wedge S),$$

když jsme použili distributivní zákon a vypustili člen $\neg S \wedge S$.

Nyní již můžeme učinit závěr. Formule je splněna, je-li pravdivý aspoň jeden její člen, tedy:

1. je-li pravdivý právě 1. člen: $S \to 0$, $C \to 1$,
2. je-li pravdivý právě 2. člen: $O \to 1$, $C \to 1$,
3. je-li pravdivý právě 3. člen: $O \to 1$, $S \to 1$,
4. je-li pravdivý právě 1. člen a 2. člen: nepřináší nic nového,
5. je-li pravdivý právě 1. člen a 3. člen: nelze $S \to 0$ a zároveň $S \to 1$,
6. je-li pravdivý právě 2. člen a 3. člen: $O \to 1$, $C \to 1$, $S \to 1$,
7. pravdivé všechny 3 členy: jako v případu 5 to nelze.

Zde $X \to x$ značí $\text{ph}(X) = x$.

Cukrářka má tři možnosti jak dozdobit dort tak, aby byla dvojčata spokojena. Buď použije všechny tři ingredience (ad 6), nebo čokoládu a ovoce (ad 2), nebo ovoce se šlehačkou (ad 3). Samotnou čokoládu (ad 1) použít podle zadání nemůže.

Příklad vyřešíme i tabulkovou metodou:

C	S	O	$C \wedge \neg S$	$S \Rightarrow O$	$(C \wedge \neg S) \vee (S \Rightarrow O)$	$O \wedge C$	$\neg C \Rightarrow S$	$(O \wedge C) \vee (\neg C \Rightarrow S)$
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0

Obě formule $(C \wedge \neg S) \vee (S \Rightarrow O)$ a $(O \wedge C) \vee (\neg C \Rightarrow S)$ jsou pravdivé v prvním, třetím, čtvrtém a pátém řádku tabulky. Čtvrtý řádek vyloučíme, jelikož hodnotu 1 nabývá pouze jedna proměnná (C), tudíž by nebyla splněna podmínka použití alespoň dvou ingrediencí. Opět vidíme, že cukrářka má tři možnosti jak dozdobit dort tak, aby byla dvojčata spokojena. Buď použije všechny tři ingredience, nebo čokoládu a ovoce, anebo ovoce se šlehačkou.

Šaty pro družičky

Nevěsta bude mít na svatbě tři družičky. Chce aby měly všechny stejné šaty a aby byly všechny spokojeny s tím, co mají obléknutého. Proto jim dala možnost navrhnout, jak budou šaty vypadat a podle jejich přání budou šaty ušity. Nevěsta dodala následující podmínky. Družičky si mohou vybrat ze tří barev látek, modrou, růžovou a bílou. Šaty mohou být buď jednobarevné, anebo dvoubarevné. Pokud budou šaty jednobarevné, nesmí být bíle, jelikož bílé šaty bude mít jen nevěsta. V kombinaci s jinou barvou však bílá látka pro družičky být použita může. Každá družička vyslovila kterou z nabízených barev by chtěla, případně nechtěla. Varianty, ke kterým se družičky nevyjádřily jsou pro ně neutrální.

Řešení: Podmínky družiček jsou tyto:

- První družička si přeje šaty modré nebo případně pokud by nebyly modré, tak si přeje šaty růžové a bílé barvy.
- Druhá družička si přeje šaty modré nebo růžové.
- Třetí družička má jedinou podmínku, aby šaty nebyly růžové.

Uvažujme následující výroky:
M = šaty obsahují modrou barvu, R = šaty obsahují růžovou barvu, B = šaty obsahují bílou barvu.

Podmínky zapsané v jazyku výrokové logiky jsou:

- $M \vee (\neg M \Rightarrow (R \wedge B))$
- $R \vee M$
- $\neg R$

Pokusíme se tyto podmínky vyhodnotit numericky:
Formuli $\neg M \Rightarrow (R \wedge B)$ lze přepsat do podoby $1 - m' + m'rb$, máme tedy

- $m + (1 - m' + m'rb) - m(1 - m' + m'rb) =$

  $= m + 1 - m' + m'rb - m + mm' - mm'rb = 1 - m' + m'rb,$

  vzhledem k tomu, že $mm' = 0$.

- $r + m - rm$
- r'

Všechny 3 podmínky musí být splněny, tj. $r'(r + m - rm)(1 - m' + m'rb) = 1$.

Roznásobíme levou stranu rovnice a dostaneme

$r'(r + m - rm)(1 - m' + m'rb) = 1$

$(rr' + r'm - r'rm)(1 - m' + m'rb) = 1$

$r'm(1 - m' + m'rb) = 1$

$r'm - r'mm' + r'mm'rb = 1$

$r'm = 1$

Musí tedy platit $m = 1$ a zároveň $r = 0$, hodnota b může být libovolná, tj. 0 nebo 1. Na šatech musí být modrá barva, růžová látka nesmí být použita. Na šaty lze využít i bílou látku, ale není to nutné. Šaty budou buď celé modré, anebo modrobílé.

Pro srovnání ukážeme i tabulkovou metodu:

M	R	B	$\neg M$	$R \wedge B$	$\neg M \Rightarrow (R \wedge B)$	$M \vee (\neg M \Rightarrow (R \wedge B))$	$R \vee M$	$\neg R$
1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1

Všechny tři podmínky družiček jsou současně splněny ve třetím a čtvrtém řádku tabulky. Z tabulky je zřejmé, že existují dvě možnosti jak šaty navrhnout, aby bylo vyhověno přání každé družičky. Šaty mohou být buď jen modré, anebo modrobílé.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo ukázat, jakými metodami lze formule klasické výrokové logiky vyhodnocovat a určit, co výsledek vyhodnocení o dané formuli říká. Byly použity čtyři různé metody vyhodnocování, formační strom formule, tabulková metoda, věta o nahrazení a numerické vyhodnocování.

Výsledkem vyhodnocení formule může být jedna z těchto tří možností: tautologie, kontradikce, splnitelná formule. Na konkrétních příkladech jsme si ukázali, že volba vhodné metody záleží na složitosti formule, informacích o hodnotách jednotlivý proměnných a na výsledku, který chceme obdržet – zda nás zajímá pravdivost formule pro všechna možná ohodnocení proměnných, nebo zda máme zjistit, pro jaké hodnoty proměnných bude daná formule pravdivá.

Formační strom formule a tabulková metoda jsou výhodné především pro svoji přehlednost, struktura vyhodnocované formule je v nich dobře vidět. Tabulková metoda navíc může sloužit i jako pomocník při analýze jazykových výrazů přirozeného jazyka, které nejsou zcela jednoznačné. Nevýhodou těchto metod ovšem je, že nejsou při vyhodnocování formulí s větším počtem proměnných nejpohodlnější. V případě tabulkové metody je nutné vyplnit značný počet řádků. Použití věty o nahrazení je mnohdy rychlejší než tabulková metoda nebo metoda formačního stromu. U některých příkladů stačí někdy pouze „dva kroky řešení“ a hned víme, zda je formule tautologií. Nemusíme tak zdlouhavě vypisovat a vyhodnocovat jednotlivé podformule pro všechna možná ohodnocení proměnných, což vyhodnocování formule usnadní a ušetří náš čas.

Poslední kapitola byla věnována aplikacím výrokové logiky a řešení slovních úloh jejím prostřednictvím. Zde jsme uplatnili především analýzu výrokových spojek, bez čehož bychom se při převádění úsudků a podmínek z běžného jazyka do jazyka výrokové logiky neobešli.

Literatura

[1] J. Nolt, D. Rohatyn, A. Varzi: *Logic – theory and problems*. McGraw–Hill, New York, 1998.

[2] J. Šedivý, J. Lukátšová, O. Odvárko, M. Zöldy: *Úlohy o výrocích a množinách*. SPN, Praha, 1972.

[3] M. Závodný: *Úvod do matematiky*. Vydavatelství UP, Olomouc, 2013.

[4] J. Peregrin: *Logika a logiky. Systém klasické výrokové logiky, jeho rozšíření a alternativy*. Academia, Praha, 2004.

[5] I. Chajda *Algebry formalizující výrokové logiky*. Vydavatelstí UP, Olomouc 2013.

[6] A. Lukasová *Formální logika v umělé inteligenci*. Computerpress, Brno, 2003.

[7] P. Jirků, J. Vejnarová: *Logika. Neformální výklad základů formální logiky*. VŠE (Oeconomica), Praha, 2007.