UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Jacob Mílek

ICT podpora v badatelsky orientovaném vzdělávání matematice na 2. stupni základních škol

Olomouc 2020

Vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Davida Nocara, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje, ze kterých jsem vycházel. Diplomová práce byla zpracována v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o autorském právu, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění

Poděkování

Rád bych poděkoval Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za vedení mé diplomové práce, věcné připomínky a konzultace, mým rodičům za finanční podporu během celého studia, všem mým přátelům za podporu psychickou. Jmenovitě bych rád poděkoval Tomášovi Roztočilovi, za inspiraci a rady ohledně akademického psaní a Markétě Píšové, která byla vždy po ruce, když jsem potřeboval poradit s formálními záležitostmi DP.

Obsah

1. Úvod

Dnešní vzdělávání je postaveno před mnoho výzev. Nacházíme se v době velkých sociálních, kulturních, hospodářských a enviromentálních proměn, na které škola potřebuje adekvátně reagovat (OECD, 2018). Ministerstvo školství v dokumentu *„Hlavní směry vzdělávací politiky ČR 2030+“* vnímá jako vnější trend ovlivňující vzdělávání rozvoj informačních technologií a s ním spojenou proměnu dnešní společnosti. Tento rozvoj mj. zásadním způsobem proměňuje hospodářství, trh práce a požadavky na kompetence zaměstnanců. Stále více rutinních činností se automatizuje, pracovní pozice na těchto místech zanikají a vytvářejí se zcela nová pracovní místa a povolání. Zároveň roste poptávka na pozicích založených na nerutinních analytických a interpersonálních činnostech. Dnešní žáci budou pravděpodobně pracovat na pozicích a profesích, které dneska ještě ani neexistují (Autor & Price, 2013). Aby žáci a studenti tyto, ale i další výzvy zvládli, *„…musejí být schopni poznatky, dovednosti, postoje a hodnoty získané ve škole i mimo školu skutečně aplikovat a využívat. Z tohoto důvodu dochází ve vzdělávání ke zvýšení důrazu na rozvoj gramotností a kompetencí, na úkor předávání informací a znalostí. S výše uvedeným souvisí nutná potřeba proměny obsahu a způsobu vzdělávání na všech vzdělávacích stupních“* (MŠMT 2019). V souvislosti s rozvojem digitálních technologií se mluví také o tzv. digitálním vzdělávání, kterým se rozumí: „zjednodušeně *takové vzdělávání, které reaguje na změny ve společnosti související s rozvojem digitálních technologií a jejich využíváním v nejrůznějších oblastech lidských činností. Zahrnuje jak vzdělávání, které účinně využívá digitální technologie na podporu výuky a učení, tak vzdělávání, které rozvíjí digitální gramotnost žáků a připravuje je na uplatnění ve společnosti a na trhu práce“ (*MŠMT, 2014).

Jeden z vnitřních trendů v ČR, který je pokládán jako výzva vzdělávání, je dlouhodobé snižování výsledků přírodovědné a matematické gramotnosti v mezinárodních šetřeních PISA na konci ZŠ a začátek SŠ (Prokop & Dvořák, 2019) a snižování zájmu žáků o přírodovědní vědy a matematiku. Čeští žáci vnímají přírodní vědy a matematiku jako obtížné, striktně dané a náročné předměty. Tento postoj se prohlubuje s věkem žáků a přibývajícími ročníky školní docházky. Studenti středních škol tak odmítají matematiku a přírodní vědy více než žáci základních škol (White Wolf Consulting, 2009; cit. dle Papáček, 2010 b). Snižující zájem žáků a studentů o přírodovědné a technické předměty a matematiku je problém, se kterým se potýkají také ostatní země Evropské unie. Závažnost tohoto nezájmu zmiňují zprávy evropské komise (Gago, et al., 2005; Osborne & Dillon, 2008), které vidí jako jednu z příčin tohoto nezájmu způsoby, jakým jsou přírodovědné a technické předměty a matematika vyučovány a navrhují zavádění konstruktivistických metod, metod problémového vyučování a badatelsky orientovaného přírodovědného vzdělávání (IBSE-Inquiry-based science education) do přírodovědných předmětů. Také čeští autoři považují badatelsky orientované vzdělávání jako možné východisko z krize přírodovědného vzdělávání (např. Stuchlíková, 2010; Papáček, 2010 a; Nezvalová, 2010).

Téma této diplomové práce jsem si zvolil proto, že se zdá, že badatelsky orientované vzdělávání v matematice s podporou ICT odpovídá, jak požadavkům zavádění prvků pedagogického konstruktivismu a badatelsky orientovaného přístupu do vzdělávání, rozvíjení kompetencí a matematické gramotnosti žáků, tak požadavkům na smysluplnou a účinnou implementaci digitálních technologií do výuky, rozvíjení digitální gramotnosti a informatického myšlení žáků.

2. Cíle práce

Cílem práce je vytvoření souboru badatelský úloh do výuky matematiky, které využívají informační a komunikační technologie, a ukázat, jakým způsobem lze efektivně využít digitální technologie v badatelsky orientovaném vzdělávání matematiky. Cílem teoretické části je teoretické vymezení pojmu badatelsky orientované vzdělávání, badatelsky orientované vzdělávání matematiky a ICT podpory ve výuce matematiky na základě analýzy publikované literatury. Teoretická část se snaží odpovědět na otázky:

- Co je badatelsky orientované vzdělávání matematiky?
- Jaká jsou teoretická východiska badatelsky orientovaného vzdělávání?
- V čem se odlišuje badatelsky orientované vzdělávání přírodovědných předmětů a badatelsky orientované vzdělávání matematice?
- V jakých oblastech badatelské výuky matematiky lze vhodně aplikovat informační technologie?

Cílem praktické části je vytvoření souboru badatelských úloh, které využívají podpory ICT. Tyto úlohy budou obsahovat metodické pokyny pro učitele s podrobným popisem a pokyny a pracovní listy pro žáky. Tyto úlohy budou publikovány na internetových portálech a volně k dispozici jako inspirace pro učitele.

3. Teoretický úvod

3.1. Teoretická východiska badatelsky orientovaného vzdělávání

3.1.1. Empirismus, racionalismus a konstruktivismus

Než se dostaneme ke konkrétnímu vymezení pojmu badatelsky orientovaného vzdělávání a popisu charakteristiky vzdělávacího procesu zaměřeného na bádání, je potřeba uvést teoretická východiska, ze kterých badatelsky orientované vzdělávání vychází a na jakých principech staví. Jak uvádí Dostál (2015 a): *„Badatelsky orientovaná výuka je postavena na principu relativně samostatného poznávání skutečnosti učícím se jedincem, žákem, prostřednictvím aktivní učební činnosti".* Teoretická východiska tak budou vycházet z otázek poznávání skutečnosti – *epistemologii* a otázek jakým způsobem žáci poznávají skutečnost, jakým způsobem si osvojují nové pojmy – *teorie a psychologie učení.* Z epistemologického hlediska jsou při poznávání skutečnosti žákem prostřednictvím bádání uplatňovány přístupy empirismu, racionalismu a konstruktivismu.

Empirismus vychází z myšlenky, že poznání objektivní reality subjektem se uskutečňuje prostřednictvím zkušenosti (především smyslové) subjektu s objektivní realitou, kterou zaznamenává a induktivně vyvozuje pravdy z ní vyplývající. Objektivní realita je však zároveň nezávislá na smyslovém vnímání subjektu. Induktivním odvozováním konkrétností, které jsou vnímané a zaznamenávané smyslovou skutečností subjektu, dochází ke generalizace a abstrakci (Pupala, 2001). Empiristické přístupy jsou zejména využívány při badatelsky orientovaném vyučování přírodovědných předmětů, v rámci, kterých jsou uplatňovány metody pozorování a smyslového vnímání skutečnosti, měření a experimentování. Badatelsky orientované vzdělávání však nestaví na principu typickém pro empirismus, tj. že poznání je možné dosáhnout pouze prostřednictvím smyslové skutečnosti, nýbrž na tezi, že: *„smyslová skutečnost hraje při poznávání významnou roli"* (Dostál, 2015 a).

Racionalismus poukazuje na fakt, že ne všechno poznání lze získat smyslovou skutečností a induktivním vytvářením pojmů – např. matematicko-logické poznání, jazyk. Racionalisté vnímají matematické entity jako nezávislé od materiálního světa (tzv. věčné ideje) a jejich porozumění, nemůže být vysvětlené jen na bázi pozorování, nebo přímé zkušenosti. Do poznání skutečnosti vstupují mentální procesy (především rozum), které subjektu umožňují tyto entity „uchopit". Racionalismus tak přináší ideu predeterminovanosti poznání. *„Z hlediska vysvětlení predeterminovanosti jde o to, že tyto entity (ideální obsahy poznání) jsou buď umístěné někde mimo člověka, který je musí uchopit jinou než induktivní cestou poznávání,* *anebo jsou tyto entity umístěné v samotném subjektu, který je v průběhu svého života „rozbaluje" deduktivní cestou" (*Pupala, 2001). V badatelsky orientovaném vzdělávání nejsou rozum a smyslová skutečnost v rozporu. Stejně jako u I. Kant (2001), který při pokusu o syntézu empirismu a racionalismu konstatoval, že lidské poznání se děje skrze smyslové poznání, i skrze rozum (Dostál, 2015 a).

Jak empirismus, tak racionalismus vnímá původ poznání, jako kategorii nezávislou na aktivitě subjektu (Kašpárková, 2006). Oproti tomu **konstruktivismus** chápe poznání jako důsledek činnosti člověka, který vstupuje do interakce s prostředím (Pupala, 2001). Určující prvek v procesu poznávání je v konstruktivistickém pojetí *reflexe* zkušenosti subjektu s objektivní realitou. Podle konstruktivistů, tak subjekt interpretuje a konstruuje realitu na základě své vlastní zkušenosti (Nezvalová, 2006).

3.1.2. Konstruktivistické teorie jako klíčové východisko

Dostál (2015 a) považuje právě konstruktivistické teorie jako klíčové východisko pro badatelsky orientované vzdělávání. V pedagogickém slovníku se konstruktivismus popisuje jako: *„Široký proud teorií ve vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující jak aktivní úlohu subjektu a význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, tak důležitost jeho interakce s prostředím a společností."* (Průcha, Walterová & Mareš; 2001). V souvislosti s konstruktivismem bývají zmiňovány především osobnosti Jeana Piageta (1896-1980) – představitel personálního či kognitivního konstruktivismu a Lva Semjonoviče Vygotského (1896-1934) – představitel sociálního konstruktivismu.

3.1.3.Jean Piaget a personální konstruktivismus

Jean Piaget je považován za zakladatele genetické epistemologie, tj. vědního oboru, který se zabývá vývojem poznávacích procesů u člověka a vytvářením poznávacích struktur. Piaget tvrdí, že si dítě aktivně konstruuje své chápání světa prostřednictvím interakcí s ním (Hill, 2004). K tomu mu slouží inteligence, která dítěti umožňuje adaptaci na prostředí. Dítě si na základě interakce se světem vytváří tzv. **poznávací schémata**, pomocí nichž si interpretuje okolní svět. V procesu poznávání a učení jsou nové zkušenosti a poznatky konfrontovány s již existujícími schématy (Švec, 2006). Jestliže nová zkušenost či informace nezapadá do kognitivní struktury (schématu) dítěte, dochází k nerovnováze a je potřeba jejího vyvážení (ekvilibrace). Ekvilibrace probíhá prostřednictvím **asimilace** a **akomodace**. Při asimilaci, je nová zkušenost, objekt, nebo myšlenka pochopena pomocí již existujícího schématu a je do něj začleněna. Akomodace nastává tehdy, jestliže novou zkušenost či informaci, nelze začlenit do existujícího schématu a je potřeba toto schéma rozšířit, přetvořit – rekonstruovat, nebo vytvořit nové schéma (Kašpárková, 2006). Dítě si tak díky procesům asimilace a akomodace vytvoří dokonalejší úroveň myšlení, než byla ta předchozí, a dosáhne vyššího stupně adaptability. Podle Piageta probíhá kognitivní vývoj člověka v různých etapách, která odrážejí narůstající složitost kognitivních operací u dítěte. Kognitivní vývoj rozčlenil na 4 hlavní období – senzomotorické, předoperační, konkrétních operací, formálních operací (Kašpárková, 2006).

Piaget (1979) shrnoval závěry svého bádání těmito slovy: *„Padesát let experimentování nás naučilo, že neexistuje žádné poznání, které by bylo výsledkem pouhého zaznamenávání pozorovaného a jež by nebylo strukturované aktivitou subjektu. Avšak (u člověka) neexistuje ani žádné apriorní či vrozené struktury poznání – dědičnou je jedině sama inteligence a z té apriorní či vrozené struktury poznání – organizováním postupných aktivit vykonávaných s předměty. Plyne z toho, že epistemologie respektující psychogenetické danosti nemůže být ani empirická, ani preformistická, může být chápána jedině jako konstruktivismus, v němž jsou nové operace a struktury průběžně vytvářeny“.*

3.1.4. Lev Semjonovič Vygotskij a sociální konstruktivismus

Druhou významnou osobností pojící se ke konstruktivismu je ruský psycholog Lev Semjonovič Vygotskij, který byl současníkem Piageta a jedním z jeho kritiků. Piagetovi vytýkal především to, že ve své teorii o kognitivním vývoji nebral v úvahu sociální a kulturní faktory. Podle Vygotského je pro kognitivní vývoj a učení dítěte určující sociální prostředí, se kterým je v interakci. Poznávání je sociálně zprostředkované, protože si žák osvojuje znalosti v již hotových kognitivních kategoriích, které mu poskytuje kultura. Vygotskij zdůrazňuje roli **sociální interakce** (především interakce mezi učitelem a žákem a žáky navzájem) a roli **jazyka** jako klíčové faktory ovlivňující učení a kognitivní vývoj dítěte (Kašpárková, 2006).

Své poznatky ohledně vztahu mezi jazykem a řečí předkládá v publikaci „Myšlení a řeč“. Pro didaktiku přírodovědných předmětů a badatelsky orientované vzdělávání je významná především kapitola „Výzkum vývoje vědeckých pojmů v dětském věku“. Vygotskij rozlišuje mezi vědeckými a spontánními pojmy u dětí školního věku a všímá si odlišností při jejich vývoji. Spontánní neboli „běžné“ pojmy jsou pojmy, které se utvářejí v běžném životě dítěte na základě jeho aktivní interakce s jeho okolím. Zatímco vědecké pojmy jsou utvářeny v cíleném procesu vyučování, při osvojování vědeckých poznatků. Vychází z předpokladu, že jak spontánní, tak vědecké pojmy prochází procesem vývoje, čímž se staví proti tehdy přetrvávajícímu názoru, že si dítě osvojuje vědecké pojmy v hotové podobě, nebo že je přejímá ze sféry myšlení dospělých, tedy že vědecké pojmy neprocházejí procesem vývoje (Vygotskij, 1970). Na základě experimentálního zkoumání vývoje vědeckých pojmů ve školním prostředí, dospěl k závěru, že: *„vývoj vědeckých pojmů předbíhá vývoj spontánních pojmů“ (Vygotskij, 1970).* Tuto specifičnost vývoje vědeckých pojmů vysvětluje tím, že jsou předávány v organizovaném systému a sestupují od obecného ke konkrétnímu, zatímco vývoj běžných pojmů probíhá mimo určitý systém a jde vzhůru od konkrétního k obecnému. Určujícím faktorem pro vývoj vědeckých pojmů je prvotní verbální učení a specifická spolupráce dítěte s dospělým.

Prvotní verbalismus je zároveň slabostí vědeckých pojmů a může být hrozbou v jejich vývoji, pokud není dostatečně podložen konkrétními jevy, zkušenostmi, experimenty, pozorováním atd. Tento verbalismus je však při vhodně vedeném vyučování postupně nahrazen konkretizací. Škoda a Doulík (2005) v této souvislosti zmiňují nebezpečí prázdného osvojení slov bez hlubšího porozumění při převládajícím transmisivním vyučování. Dostál (2015 a) spatřuje jako vhodné řešení při osvojování vědeckých pojmů badatelsky orientované vzdělávání (BOV).

Specifická spolupráce dítěte s dospělým nebo se svými vrstevníky je sociálními konstruktivisty včetně Vygotského považována jako klíčový moment v procesu učení. Dítě je totiž schopné dosáhnout vyšší potenciální úrovně intelektuálních schopností, jestliže spolupracuje se zkušenější osobou. Vzdálenost mezi potenciální úrovní vývoje (úroveň stanovená, pokud dítě řeší problém pod vedením dospělého nebo zkušenějších vrstevníků) a aktuální úrovní vývoje (úroveň stanovená při samostatném řešení problémů) definoval Vygotskij jako **zónu nejbližšího vývoje** (Hill, 2004).

3.1.5. Pedagogický konstruktivismus

Práce konstruktivistů J. Piageta, L. S. Vygotského, ale také J. Brunera na poli psychologie a teorie učení se staly východiskem pro další výzkumy a jejich myšlenky se uplatnili také v pedagogické praxi a rozpracování konstruktivistických didaktik. Namátkou lze zmínit *Alosterický model* (Giordan, 1990 cit. dle Molnár, Schubertová & Vaněk, 2008) nebo teorii *epistemologického rušení* (Larochelle & Desautels, 1990 cti. dle Molnár, Schubertová & Vaněk, 2008). V českém didaktickém prostředí vypracovali autoři M. Hejný a F. Kuřina (1998, 2001) tzv. *didaktický konstruktivismus*, který F. Kuřina později upravil a přejmenoval na *realistický* *konstruktivismus*, aby lépe odpovídal reálným možnostem aplikace ve výuce. Z českých autorů, kteří se věnují konstruktivistickému přístupu ve výuce lze zmínit např. D. Nezvalovou (2010), J. Molnára, S. Schubertovou & V. Vaňka (2007), M. Bílka, J. Rychteru & A. Slabého (2008) nebo K. Korcovou (2007).

Pro konstruktivistický přístup ve výuce je charakteristická aktivní role žáka, který si význam sám nebo ve spolupráci se spolužáky konstruuje, podle již vytvořených mentálních struktur (Hrbáčková, 2006). Tyto již vytvořené mentální struktury bývají v konstruktivistických didaktikách označovány jako tzv. *prekoncepty*, nebo také *žákovo pojetí učiva (Mareš, 2001), jejichž* nosnou myšlenkou je, že žák přichází do výuky s již vytvořenou představou (mentálním schématem), pomocí které uchopuje nové poznatky. Tyto **prekoncepce** – prvotní představy a přesvědčení, které žák získal z vlastních zkušeností, jsou mnohdy neúplné a nedostatečné, primitivní. V jistých případech jsou žákovy představy a přesvědčení mylné a v rozporu s vědeckým pojetím. Tyto mylné představy jsou pak označovány jako **miskoncepce** (Švec, 2006)**.** V konstruktivistickém pojetí výuky je snahou učitele nejprve diagnostikovat žákovo pojetí učiva a následně vytvořit takové situace, ve kterých si žák uvědomí nedokonalost svých konceptů a je nucen tyto koncepty doplnit, pozměnit či zcela přetvořit. Ve smyslu Piagetovi teorie kognitivního vývoje je tedy snahou učitele navodit u žáků stav nerovnováhy, nebo také poznávacího konfliktu, následkem kterého je žák nucen pomocí asimilace či akomodace rekonstruovat svou dosavadní koncepci (Molnár, Schubertová & Vaněk, 2007).

Principy pedagogického konstruktivismu mohou být shrnuty následujícími tezemi podle Nezvalové (2006):

1. *„Znalosti jsou učícím se jedincem aktivně konstruovány. Učení není pasivní činností.*
2. *Učení je jak individuální, tak sociální záležitostí.*
3. *Učení je procesem autoregulačním. Každý jedinec se učí odlišným způsobem jednak podle vnitřních dispozic a také s ohledem na vnější faktory. Tudíž si tento proces v konečné podobě řídí sám.*
4. *Učení je řídící proces, který umožňuje lidem porozumět světu. Z konstruktivistického pohledu je to právě ekvilibrace, která navozuje stabilitu a vnitřní soudružnost svého systému poznatků. Nové informace mohou podléhat asimilaci (tj. zahrnout nové poznatky do existujícího schématu) nebo pokud jsou v rozporu se zkušenostmi či původními koncepty dochází k akomodaci (tj. vytvořit nové schéma v souladu s novými informacemi).*

5. *Poznání slouží k uspořádání zkušenostního světa, nikoli objektivní reality. Pravda je životaschopná (podléhá adaptaci člověka ke světu a pomáhá mu v tomto světě přežít), nikoli zákonitě platná. Cílem učení je vést k uspořádání, pochopení vlastního zkušenostního světa.*
6. *Realita představuje interpretaci. Informace jsou vstřebávány člověkem a pronikají k němu skrze vlastní interpretaci (nikoli jako nedotknutá „pravda o světě“). Tu si člověk vytváří, sám v sobě konstruuje.*
7. *Učení je sociálně kontextová aktivita, rozvíjená v podnětném prostředí. K rekonstrukci vlastního poznání a k objevení vlastních schémat může dojít za podpory ostatních.*
8. *Jazyk hraje v procesu učení podstatnou roli. Myšlení se odehrává v komunikaci. Konstruktivisté zdůrazňují úlohu jazyk jako nástroje, který umožňuje vytvoření spojení mezi tím, co jsme se v minulosti naučili a tím, co je výsledkem učení, tedy samotný proces konstrukce, který vyúsťuje v individuální poznání.*
9. *Motivace je klíčovým faktorem učení. Odměny a tresty jsou považovány za vnější motivační prostředky, stěžejním motivačním zdrojem je pro konstruktivisty spíše vnitřní (individuální) potřeba porozumění světu a vlastního poznání“.*

V konstruktivisticky pojatém vyučování matematiky se uplatňují zásady didaktického konstruktivismu, které vypracoval M. Hejný spolu s F. Kuřinou (2001):

1. *„Aktivita – matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, nejen jako její výsledek, který se obvykle formuluje do souboru definic, vět a důkazů.*
2. *Řešení úloh – podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování.*
3. *Konstrukce poznatků – poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka. Přenosné (z knih, časopisů, přednášek a různých médií) jsou pouze informace.*
4. *Zkušenosti – tvorba poznatků (např. v oblasti pojmů, postupů, představ, domněnek, tvrzení, zdůvodnění) se opírá o informace, je však podmíněno zkušenostmi poznávajícího. Zkušenosti si žák přináší z části z kontaktu s realitou svého života, měl by však mít dostatek příležitostí nabývat zkušeností i ve škole.*
5. *Podnětné prostředí – základem matematického vzdělávání konstruktivistického typu je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost. Nutným předpokladem je tvořivý učitel a dostatek vhodných podnětů (otázky, úlohy, problémy atd.) na straně jedné a sociální klima třídy příznivé tvořivosti na straně druhé.*

6. *Interakce – i když je rekonstrukce poznatků proces individuální, k rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě (diskuse, srovnávání výsledků, pokusy o formulace domněnek a tvrzení, argumentace, hledání důkazů atd.).*
7. *Reprezentace a strukturování – pro konstruktivistický přístup k vyučování je charakteristické pěstování různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa. Dílčí zkušenosti a poznatky jsou různě orientovány, tříděny, hierarchizovány, vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.*
8. *Komunikace – značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky (neverbální vyjadřování, matematická symbolika). Dovednost vyjadřovat vlastní myšlenky a rozumět jazyku druhých je třeba systematicky pěstovat.*
9. *Vzdělávací proces – je nutno jej hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky. Pro porozumění matematice má zásadní význam vytváření představ, pojmů a postupů, uvědomování si souvislostí. Rozvíjení matematického řemesla vyžaduje trénink, případně paměťové zvládnutí určitých pravidel, algoritmů a definic. Aplikace matematiky nemusí být jen vyvrcholením vzdělávacího procesu, mohou hrát i roli motivační.*
10. *Formální poznání – vyučování, které má charakter předávání informací (transmisivní vyučování) nebo vyučování, které dává pouze návody, jak postupovat (vyučování instruktivní), vede především k ukládání informací do paměti. To umožňuje v lepším případě jejich reprodukci, obvykle jsou však rychle zapomínány. Takové poznání je pseudopoznáním, je formálním poznáním*".

V konstruktivisticky pojaté výuce se proměňuje také role učitele. Novotný (2002) roli učitele charakterizuje jako:

1. *„Facilitátora – který podporuje učební procesy (uspořádává učební materiál, pomáhá stanovovat cíle) a vyhledává skrytý potenciál žáka.*
2. *Koordinátora – který uspořádává společné aktivity žáků, dává prostor sdílení poznatků, spolupráci, sociální dimenzi učení.*
3. *Učitele participujícího na procesech učení – který se zapojuje do učebních aktivit a stává se modelem učícího se jedince".*

3.2. Teoretické vymezení a charakteristika badatelsky orientovaného vzdělávání

S BOV se lze setkat stále častěji. Za posledních deset let, kdy Stuchlíková (2010) s Papáčkem (2010 a) otevřeli odbornou diskusi o BOV v českém didaktickém prostředí, se tento pojem dostává do stále širšího povědomí jak didaktiků z akademického prostředí, tak učitelů ze školního prostředí. S používáním těchto pojmů se však pojí také terminologické nejasnosti a nedostatky, které mohou vést k odlišnému vnímání toho, co se pod těmito pojmy skrývá. Samková, Hošpesová, Roubíček &Tichá (2015) vidí důvody těchto nejasností jako souhru několika faktorů, mezi které patří např., že: (i) většina dostupných zdrojů o BOV je v angličtině, (ii) česká terminologie BOV není zcela v souladu s anglickou terminologií BOV. Cílem této kapitoly je vymezit a objasnit terminologii spojenou s BOV a charakterizovat BOV.

3.2.1. Objasnění terminologie

Jako problematická se jeví již samotná zkratka BOV. Co je tímto pojmem myšleno? Badatelsky orientované vzdělávání, badatelsky orientovaná výuka nebo badatelsky orientované vyučování? Různí autoři používají pod zkratkou BOV různé pojmy. Papáček (2010 a) termínem BOV rozumí badatelsky orientované vyučování, které překládá z anglického termínu IBE – inquiry based education. Anglický termín education však bývá překládán ve smyslu 1) vzdělání, vzdělávání, 2) výchovy 3) společného názvu pro výchovu, vzdělání a vzdělávání 4) pedagogiky – viz (Mareš & Gavora, 1999). V této práci je termín BOV používán jako *badatelsky orientované vzdělávání (*angl. IBE = *Inquiry – based education)* a BOVM jako *badatelsky orientované matematické vzdělávání (*angl. IBME = *Inquiry – based mathematic education)*. Termín IBT = *inquiry – based teaching* je překládán jako *badatelsky orientované vyučování,* IBL = *inquiry – based learning* jako *badatelsky orientované učení* a IBI = *inquiry – based instruction* jako *badatelsky orientovaná výuka.* Jednotlivé pojmy se od sebe významově odlišují a popisují odlišnou část vzdělávacího procesu (Dostál, 2015 a). Velmi často se lze setkat v anglicky psaných textech o BOV s termínem *science* (např. *inquiry-based science education, science inquiry, natur of science* apod.). Tento termín se objevuje v podobě substantiva i adjektiva. Jako substantivum se pojem *science* používá ve třech významech: (i) věda jako disciplína; (ii) věda jako odborná znalost; (iii) označení skupiny předmětů (biologie, fyziku, chemie) na všech stupních škol. Do češtiny překládáno jako *přírodovědné předměty* (Mareš & Gavora, 2013,). Adjectivum *scientific* se překládá jako *vědecký* a patří k významům (i), (ii), adjectivum *science* patří k významu (iii) a je překládáno jako *přírodovědný*. V tomto smyslu se pak slovní spojení *scientific inquiry* překládá jako vědecké bádání a rozumí se jím bádání používané ve vědě. Slovní spojení *science inquiry* je přákládáno jako přírodovědné bádání a odkazuje na bádání v rámci přírodovědných předmětů (Samková, Hošpesová, Roubíček &Tichá).

3.2.2. Vymezení termínu inquiry

Badatelsky orientované vzdělávání je úzce spjato s termínem inquiry = bádání, zkoumání nebo také hledání pravdy (Stuchlíková, 2010). Termín inquiry se poprvé objevil v práci filozofa, psychologa a představitele americké pragmatické pedagogiky Johna Deweye (1859–1952), který položil jeho teoretické základy ve svém díle *Logic: The theory of inquiry.* Jeho definice inquiry je:

„Inquiry is the controlled or directed transformation of an indeterminate situation into one that is so determinate in its constituent distinctions and relations as to convert the elements of the original situation into a unified whole“ (Dewey, 1938).

„Bádání je kontrolovaná nebo řízená transformace neurčité situace v situaci, která je určitá do té míry, nakolik to vyžaduje zařazení prvků původní situace do nějakého jednotného celku“ (Samková, 2014).

Dewey dále objasňuje, že:

„Ta počáteční neurčitá situace není pouze „otevřená“ bádání, ale je také otevřená v tom smyslu, že její součásti nedrží pohromadě…Neurčité situace mohou být charakterizovány různými pojmenováními. Jsou znepokojivé, svízelné, nejednoznačné, popletené, plné protichůdných tendencí, mlhavé apod.“ (Samková, 2014).

Ve stejné kapitole (*The structure of inquiry and the construction of judgment)* dále rozebírá schéma bádání, která je složeno z několika na sebe navazujících částí:

1) Prvotní podmínky pro bádání: Neurčitá situace - angl. *The antecedent Conditions of Inquiry: The Indeterminate situation*

2) Stanovení problému - angl. *Institution of a Problem*

3) Stanovení řešení problému - angl. *The determination of a Problem – Solution*,

4) Usuzování - angl. *Reasoning,*

5) Činnostní charakter významů faktů – angl. *The operational character of Facts – Meanings* (Dewey, 1938 stránky 101-119).

V pedagogickém kontextu se termín inquiry začal používat více až v 60. letech (např. J. R. Suchman (1966) ve své publikaci *Developing inquiry*). V současné době se při vymezování bádání odkazuje na autory Linn, Davis & Bell (2004) a na Americké národní *standardy přírodovědného vzdělávání* (1996).

Stuchlíková (2010)**:** *„Bádání je cílevědomý proces formulování problémů, kritického experimentování, posuzování alternativ, plánování zkoumání a ověřování, vyvozování závěrů, vyhledávání informací, vytváření modelů studovaných dějů, rozpravy s ostatními a formování koherentních argumentů“* dle (Linn, Davis & Bell, 1999).

Samková (2015)***: „****Bádání zahrnuje činnosti žáků, při kterých rozvíjejí své znalosti a porozumění vědeckým myšlenkám. Konkrétně bádání zahrnuje: pozorování; kladení otázek; vyhledávání informací v knihách a dalších zdrojích (aby žáci zjistili co je již známo); plánování výzkumu; navrhování postupů zkoumání; přezkoumávání toho, co je již známo na základě experimentálních výsledků; využívání nástrojů pro sběr, analýzu a interpretaci dat; formulování odpovědí, vysvětlení a předpovědí; sdělování závěrů“* dle (National research council, 1996).

Samková (2010)**:** *„Bádání je činnost, při které pozorujeme, dedukujeme, nabízíme hypotézy a snažíme se je ověřit, nemusíme však dojít k žádnému konečnému závěru – závěry závisí na našem momentálním rozhledu a různí badatelé mohou interpretovat stejná fakta různě. Poslední tři znaky bádání v sobě skrývají onen most mezi teorií a praxí, mezi učebnicí a každodenní realitou. Jsou klíčem ke správnému chápání světa kolem nás.“*

Z výše uvedených definic vyplývá, že je bádání pro žáky aktivní činnost, pomocí které přistupují k různým neurčitým situacím, fenoménům, problémům, které se snaží vysvětlit nebo vyřešit. Při této činnosti žáci postupují způsobem, který se podobá vědeckému přístupu zkoumání pravdy. Bádání je tak proces, při kterém žáci získávají nové poznatky aktivní a relativně samostatnou činností nebo ve spolupráci se spolužáky a tím rozvíjí svou poznatkovou strukturu, kompetence a komunikační schopnosti, a zároveň je to proces, pomocí kterého si osvojují způsoby a metody vědecké práce a základní povahu vědy jako takové (angl. *Nature of science*). Učitel má v tomto procesu roli facilitátora, který žáky bádáním provází. Poznatky tak nepředává transmisivně v hotové podobě, ale prostřednictvím badatelských úloh a systémem kladených otázek (tzv. *talking science*) - Papáček, 2010 b. Z výše uvedených definic rovněž vyplývá, že bádání se skládá z jednotlivých dílčích kroků a aktivit, které na sebe navazuj a přibližně odpovídají vědeckému bádání:

- *„pozorování a popis skutečnosti (vjemů, poznatků),*
- *formulace problému/výzkumné otázky,*
- *formulace hypotéz (návrh vysvětlení s obecnou platností, logická indukce),*

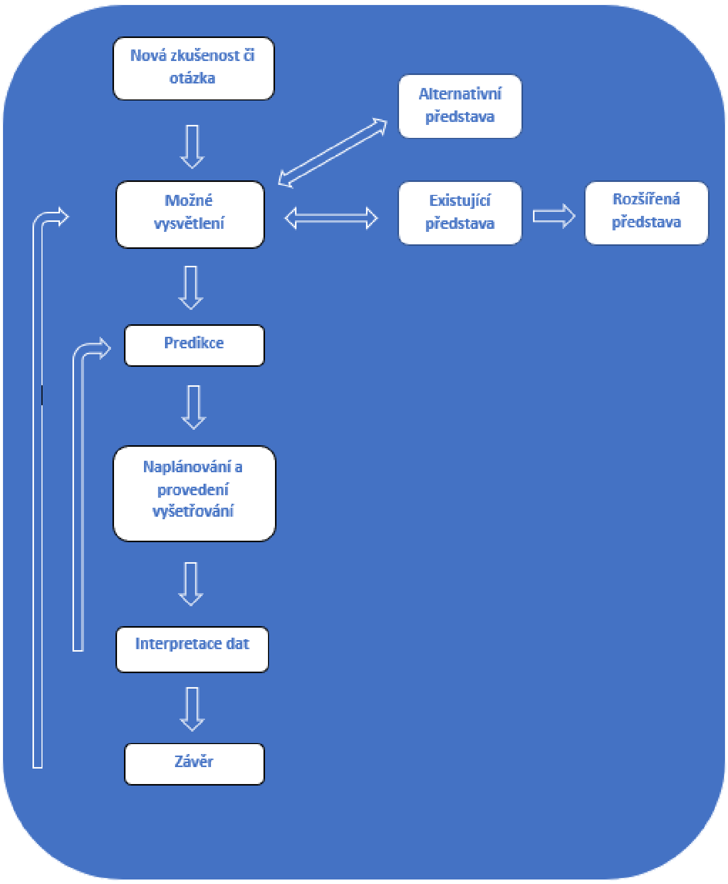
- *předvídání (logická dedukce z hypotéz),*
- *ověření souladu skutečnosti s předpovědí (buď aplikací předpovědi na experiment, nebo aplikací na soubor dat získaný jinak) a ověření logické správnosti předchozích kroků“* (Dostál, 2015 a).

3.2.2.1. Model bádání

Pro hlubší pochopení toho, jakým způsobem probíhá učení založené na bádání, byly vytvořené různé modely bádání, které tento proces vysvětlují. Pro účely této práce bude použit model bádání vytvořený v rámci mezinárodního projektu FIBONACCI, zaměřeného na šíření badatelsky orientovaného přírodovědného a matematického vzdělávání, do kterého se zapojila Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích.

Na začátku bádání je snaha o vysvětlení určitého fenoménu, nebo snaha odpovědět na otázku, proč se něco chová určitým způsobem, nebo nabírá právě takovéto podoby. Při počátečním zkoumání jsou zapojovány a využívání předchozí znalosti a zkušenosti (prekoncepty a miskoncepty) pomocí kterých se žáci snaží předložit možná vysvětlení. Z většího množství nápadů je vybráno jedno možné vysvětlení – hypotéza, která je dále ověřována.

Žáci v další fázi zkoumají, jak užitečný jimi vybraný nápad je a vytvářejí předpověď (predikci) založenou na hypotéze. Aby mohli ověřit vytvořenou předpověď, sbírají nová data, která následně vyhodnocují a výsledky s ní porovnávají. Tomu odpovídají tyto kroky: predikce – plánování a provedení vyšetřování – interpretace dat – viz obr.1.



Obr. 1: Model bádání (převzato a upraveno podle Artique et al. 2012)

Na základě těchto výsledků lze vyvodit předběžný závěr ohledně prvotní představy. V případě, že se ukážou prvotní představy jako správné a poskytují dobré vysvětlení, tyto se stávají mocnějšími („většími“), jelikož je lze nyní použít k vysvětlení širšího rozsahu jevů. I v případě, že se prvotní představy ukážou jako chybné, nevyhovující a je potřeba vyzkoušet alternativní představu, tak tato zkušenost pomohla k upřesnění prvotní představy a tím rozšířila poznatkovou strukturu žáka (Artique, et al., 2012).

Tento proces vytváření znalostí na základě sbírání důkazů k ověření možných vysvětlení a myšlenek, ukrývajících se za nimi, vědeckým způsobem se nazývá učení založené na vědeckém bádání. V tomto modelu je možné spatřit, jak jsou menší představy (představy vztahující se ke konkrétnímu objektu či fenoménu) postupně rozvíjené ve „větší“ představy (představy vztahující se k širší škále spolu souvisejících objektů nebo fenoménů). Nabízí se srovnání s konstruováním poznatkových struktur v přístupu pedagogického konstruktivismu zmíněného v dřívější kapitole. Jednotlivé kroky bádání uvedené v tomto modelu, ač jinak pojmenované, se shodují s kroky bádání uvedených J. Dostálem (2015 a).

3.2.2.2. Typy bádání

Na základě míry zapojení žáků do jednotlivých dílčích kroků bádání je možné rozlišit několik typů bádání. J. Dostál (2015 a) či I. Stuchlíková (2010) uvádí následující dělení (dle Banchi & Bell, 2008; či Eastwell, 2009):

- *potvrzující bádání* – otázka i postup jsou studentům poskytnuty, výsledky jsou známy, jde o to je vlastní praxí ověřit;
- *strukturované bádání* – otázku i možný postup sděluje učitel, studenti na tomto základě formulují vysvětlení studovaného jevu;
- *nasměrované bádání* – učitel dává výzkumnou otázku, studenti vytvářejí metodický postup a realizují jej;
- *otevřené bádání* – studenti si kladou otázku, promýšlejí postup, provádějí

Potvrzující bádání (*confirmation inquiry)* je pro žáky z hlediska kognitivní náročnosti nejjednodušší a nejvíce řízena učitelem. Žáci postupují podle předem připraveného návodu učitele a jejich úkolem je potvrdit a vlastní praxí ověřit předložené zákonitosti či tvrzení. Cílem tohoto typu bádání není rozvíjení kompetencí k řešení problému, nýbrž rozvíjení badatelských dovedností – pozorování, provádění experimentů, sběr a vyhodnocování dat, analytické schopnosti apod.

I při strukturovaném bádání (*structured inquiry)* je určující role učitele, který žákům předkládá výzkumnou otázku, na kterou mají žáci odpovědět a vysvětlit jí. Společně formulují hypotézy. Postup učitel žákům buď přímo sděluje, žáky směřuje návodnými otázkami. Na žácích je, aby na základě vlastního bádání (provedení pokusu, kritického vyhodnocení předložených informací a dat apod.) ověřili nebo vyvrátili své hypotézy a odpověděli na výzkumnou otázku.

Nasměrované bádání (*guided inquiry*) je charakteristické větší mírou samostatnosti žáků, kteří již mají zkušenosti s předchozími typy bádání a osvojili si potřebné badatelské dovednosti, aby byli schopni si s tímto typem bádání poradit. Učitel se stává průvodcem, který je žákům při jejich bádání nápomocen. Žáci společně s učitelem formulují výzkumnou otázku. Formulace hypotézy, návrh a provedení postupu jejich ověření a následné vyhodnocení a formulace závěrů je již v rukou žáků samotných, kteří většinou pracují ve skupinách. Při tomto typu bádání, žáci již projevují velkou míru tvůrčího myšlení a mohou tak uplatnit a použít již osvojené znalosti a dovednosti. Učitel do procesů žáků však stále, byť v malé míře zasahuje a žáky směřují. Například může učitel nechat žáky vymyslet vlastní postup bádání, a následně s nimi prodiskutuje, který z uvedených návrhů je nejvhodnější.

Poslední úrovní je otevřené bádání (*open inquiry)*, při kterém žáci samostatně vymezují problém, formulují výzkumnou otázku, navrhnou metody a postup bádání, vyhodnocují získané údaje a vyvozují závěry. Učitel do procesu bádání žáků téměř nezasahuje. Nechává odpovědnost zcela na samotných žácích. Otevřené bádání vyžaduje vysoké kognitivní úroveň žáků a schopnost tvůrčího myšlení, osvojené praktické badatelské dovednosti a komunikační schopnosti (Dostál, 2015 a).

3.2.3. Vymezení badatelsky orientované výuky

Vymezením badatelsky orientované výuky a analýzou různých pojetí v české pedagogické teorii se podrobně zabýval J. Dostál (2015 a), který rozlišuje dva hlavní směry. První směr podle něj chápe badatelsky orientovanou výuku v *užším smyslu a* podstatu badatelské výuky omezují na řešení problémů prostřednictvím bádání. V tomto pojetí se badatelsky orientovaná výuka výrazně překrývá s problémovou výukou (viz např. Petr, 2010; Papáček, DiBi 2010, 2010 a). Druhý směr vymezuje badatelsky orientovanou výuku v *širším pojetí*. Řešení problému při něm hraje významnou roli, avšak svou charakteristikou badatelsky orientovaná výuka přesahuje rámec problémové výuky, od které se liší i svými cíli (viz např. Artique & BlomhØj, 2013; National Research Council, 2000; Samková, 2011).

J. Dostál se přiklání ke směru, který vymezuje badatelsky orientovanou výuku v *širším pojetí.* Tezi, že se badatelsky orientovaná výuka nezaměřuje pouze na řešení problémů a že se tedy nejedná o jednu z metod problémové výuky, opírá J. Dostál (2015 a) jednak o členění bádání dle H. Banchiho & R. Bella (2008), z kterého vyplývá, že se při potvrzujícím bádání řešení problému neuplatňuje, a jednak o klasifikaci výukových metod I. J. Lernera (1986). J. Dostál (2015 a) vychází z jednotlivých prvků sociálních zkušeností, které určují obsah vzdělávání.

„1) poznatky (resp. osvojené poznatky – vědomosti) o světě (tj. o přírodě, společnosti a technice) a způsobech činnosti,

2) zkušenosti z realizace způsobů činnosti – dovednosti a návyky,

3) zkušenosti z tvůrčí badatelské činnosti, projevující se ve schopnosti řešit nové problémy,

4) zkušenosti ze vštípených potřeb, motivů a emocí, které podmiňují vztah ke světu a hodnotový systém osobnosti" (Lerner, 1986; cit. dle Dostál, 2015 a).

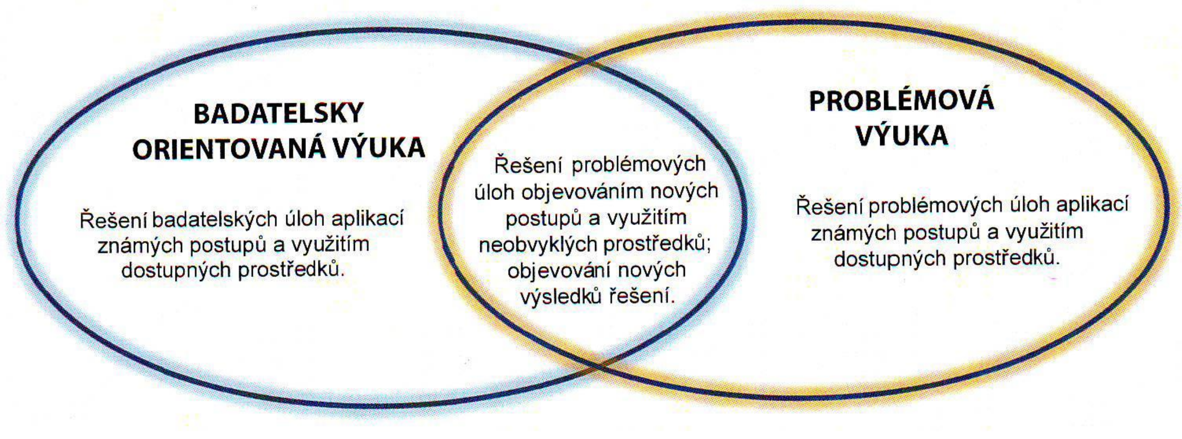
S badatelsky orientovanou výukou úzce souvisí třetí oblast sociálních zkušeností – *zkušenosti z tvůrčí badatelské činnosti, projevující se ve schopnosti řešit nové problémy*. K metodám naplňující tento prvek obsahu vzdělávání patří zejména metoda problémového výkladu, heuristická metoda, výzkumná metoda (Lerner, 1986). J. Dostál (2015 a) tvrdí, že badatelsky orientovaná výuka je více než výuková metoda, jelikož pojetí badatelsky orientované výuky zasahuje do všech složek výuky, nejen do vyučovacích metod. A proto odmítá názory, že je *„badatelsky orientovaná výuka jednou účinných aktivizačních metod"* (Limity a šance zavádění badatelsky orientovaného vyučování přírodopisu a biologie v České republice., 2010 a) nebo že je *„badatelsky orientovaná výuka vyučovací metoda, která staví na přirozené zvídavosti žáků"* (www.badatele.cz). Odraz charakteru badatelsky orientované výuky v jejich jednotlivých složkách shrnuje J. Dostál (2015 a) v tabulce č. 1.

Tabulka 1: Složky výuky a jejich charakter při realizaci badatelsky orientované výuky (Dostál, 2015 a)

Složky výuky	**Charakter při badatelsky orientované výuce**
Cíl	Osvojení znalostí souvisejících s předmětem poznávání, badatelských metod a postojů, rozvoj vnímání, emocí a myšlení.
Učitel	Vyučování prostřednictvím badatelských aktivit, příprava vhodných situací pro bádání. Kompetence k realizaci BOV.

Žák	Učení prostřednictvím badatelských aktivit, objevování. Učení se badatelským postupům.
Obsah vzdělávání	Poznatky získané prostřednictvím badatelských aktivit a osvojované badatelské metody – experimentování, měření, pozorování aj.
Metodické podmínky	Metoda problémového výkladu, heuristické metody, metoda vysvětlování, instruktáž, metoda předvádění, metoda diskuzní, projektová metoda, dramatizace, inscenační metody aj.
Organizační podmínky	Skupinová výuka, exkurze, projektová výuka aj.
Materiální podmínky	Laboratorní pomůcky, experimentální soupravy, materiál aj.

Vztah mezi badatelsky orientovanou výukou a problémovou výukou vyjadřuje obr. 2, ze kterého lze vyčíst také jejich rozdíl. Existují totiž badatelské úlohy, které nespočívají v řešení problémů. Například laboratorní práce nebo pozorování v rámci strukturovaného bádání, kdy žáci předem znají výsledek a ověřují jeho platnost. Žáci při těchto úlohách neřeší žádný problém. Zároveň existují problémové úlohy, které nevyžadují bádání a objevování nových postupů, úlohy, které mají specifické cíle, jasně definovaná řešení a jasná očekávání řešení (Dostál, 2015 b).



Obr. 2: Vztah badatelsky orientované výuky a problémové výuky (Dostál, 2015 a)

Badatelsky orientovanou výuku pak jednoznačně vymezuje Dostál (2015 b) takto:

- *„BOV zahrnuje bádání, jehož cílem je uvědomění si problémové situace a objevení problému, stejně jako bádání, které má neproblémový charakter*
- *bádání realizované v rámci BOV nelze ztotožňovat s vědeckým bádáním, lze však hledat paralely, provádět komparace a podrobovat obojí dalšímu zkoumání*
- *existuje vzdělávací obsah, který lze realizovat pouze prostřednictvím badatelských aktivit žáků*
- *v rámci BOV jsou využívány různé vyučovací metody, především problémové*
- *realizace BOV se projevuje ve všech složkách výuky, nikoliv pouze v metodách BOV se vztahuje jak k žákovi, tak i k učiteli*
- *veškerá doba BOV nemusí být věnována pouze přímému bádání*
- *je vhodné, aby BOV zahrnovala i multioborová badatelská témata*
- *BOV předpokládá využití badatelských metod nejen empirického, ale i teoretického charakteru“*

A badatelsky orientovanou výuku definuje jako:

- „…činnost učitele a žáka zaměřená na rozvoj vědomostí, dovedností a postojů žáka na základě aktivního a relativně samostatného poznávání skutečnosti, kterou se sám učí objevovat a objevuje“ (Dostál, 2015 b).

3.3. Badatelsky orientované vzdělávání matematiky

Dosud byla vymezena a charakterizována badatelsky orientovaná výuka v obecné podobě. Nejčastěji se s ní lze setkat v souvislosti s výukou přírodovědných předmětů, ve kterých má BOV v mezinárodním kontextu relativně dlouhou tradici. V matematickém vzdělávání takovou tradici nemá a výzkum BOV probíhal dlouho odděleně od výzkumu v oblasti didaktiky matematiky (Samková, 2014). Implementace BOV do matematického vzdělávání je tak podle Roubíčka (2012) výzvou. Do matematického vzdělávání byla BOV začleněna díky mezinárodním projektům zaměřených na implementaci BOV do výuky jak přírodovědných, tak matematických předmětů. Namátkou můžeme zmínit projekty uskutečněné v Německu – POLLEN, SINUS TRANSFER či projekty, kterých se účastnili i univerzity z České republiky – FIBONACCI, ASIST ME, MASCIL. Přijetí terminologie a přístupů BOV do matematického vzdělávání je dán sdíleným názorem o blízkosti a propojenosti přírodních věd a matematiky a také faktem, že ačkoliv je matematika vědou založenou na logických dedukcích, má i silnou experimentální složku (Artique & Blomhøj, 2013).

Jaká jsou specifika BOVM, v čem se odlišuje od BOV přírodovědných předmětů a co mají naopak společného? Koresponduje pojetí BOVM s již existujícími teoriemi v didaktice matematiky a jak by měli vypadat matematické úlohy, které vedou k badatelským aktivitám žáků? Na tyto otázky se snažil odpovědět kolektiv autorů L. Samková, A. Hošpesová, F. Roubíček & M. Tichá (2015) v publikaci *Badatelsky orientované vyučování matematice.* Vycházeli z přehledové studie *Conceptualizing inquiry-based education in mathematics* (Artique, et al., 2013). Studiem tuzemské odborné literatury lze dospět ke zjištění, že ostatní vymezení a pojetí BOVM jsou ve shodě s vymezením prezentovaném Samkovou et al. (2015) a odkazují na publikace vzniklé v rámci již zmíněného projektu FIBONACCI (Artique & Babtist, 2012; Artique, et al., 2012 ; Babtist, et al., 2012).

3.3.1. Specifika badatelsky orientovaného vzdělávání matematiky

Předmětem zkoumání matematiky jsou převážně abstraktní konstrukce (čísla, geometrické tvary, algebraické struktury) a vztahy mezi nimi. Tento abstraktní charakter předmětu zkoumání však nebrání tomu, aby vyvstával i z pozorování přírodního světa, z otázek objevujících se v ostatních vědných oborech či z technických problémů. Matematika je převážně deduktivní věda, v rámci, které jsou problémy zvažovány a důkaz, jestli je tvrzení pravdivé či nepravdivé vychází z logické dedukce. Nicméně matematika má také významnou experimentální složku, jejíž přínos se stává viditelnější s rozvojem digitálních technologií.

Matematické poznatky představují velice mocnou formu poznání a jsou využívány v mnoha různých oblastech vědy i společnosti jako takové (Artique, et al., 2011). Mnoho každodenních jevů lze popsat, zkoumat nebo pochopit pomocí matematiky v kombinaci s přírodní vědou, nebo *„zdravým rozumem"*. Tyto otázky vyvstávající ze světa okolo nás mohou být zdrojem pro badatelsky orientovaných aktivit matematiky i přírodovědných předmětů. Nicméně nesmíme zapomenout na matematické objekty jako takové (čísla, geometrické tvary, algebraické symboly, grafy a další objekty), které jsou také zdrojem pro matematické bádání (Artique & Blomhøj, 2013).

BOVM je rozuměno takové vzdělávání, které: „studentům *a žákům neprezentuje matematiku jako hotovou strukturu k osvojení. Spíše jim nabízí příležitost zažít*:

- *jak se tvoří matematické znalosti prostřednictvím osobních i kolektivních pokusů odpovědět na otázky objevující se v různých sférách lidské činnosti, od pozorování až po matematiku jako takovou;*
- *jak mohou matematické pojmy a struktury vzniknout z výsledných konstrukcí a být dále využívány k zodpovězení nových a náročných problémů (*Artique, et al., 2011; cit. dle Samková, et al., 2015)".

Dále pak uvádí: *„Badatelsky – orientovaný přístup v matematice vyžaduje různé aktivity jako: artikulace a rozpracování otázek, aby byli přístupné pro matematickou práci; matematické modelování a matematizace; prozkoumávání a experimentování; vytváření domněnek; testování, vysvětlování, zdůvodňování, tvrzení a dokazování; definování a strukturování; propojování, reprezentování a komunikování. BOVM zapojuje žáky do těchto aktivit a podporuje rozvoj příslušných dovedností*" (Artique & Babtist, 2012; vlastní překlad).

Z výše uvedeného vyplývá, že cílem IBME je podobně jako při IBSE, osvojení znalostí souvisejících s předmětem zkoumání pomocí bádání (- osobní a kolektivní pokusy odpovědět na otázky). Přičemž badatelské otázky při IBME mohou pocházet z reálného svět (první odrážka vymezení) nebo ze světa matematiky jako takové (druhá odrážka vymezení). První typ otázek vycházející z reálného světa nazývají Artique et al. (2012) jako vnější otázky (*external questions*), druhý typ otázek vycházející z matematiky označují jako vnitřní otázky (*internal questions*). Badatelské úlohy pro BOVM tak mají velice široké a různorodé pole působnosti a mohou pocházet např. z:

- přírodních jevů

- technických problémů
- umění
- problémů běžného života
- matematické objekty jako takové

Při porovnání aktivit zapojených při BOVM uvedených v Artique & Babtist (2011) s aktivitami BOV uvedených Dostálem (2015 a) je patrné, že se bádání při BOVM skládá ze stejných dílčích kroků a aktivit jako bádání při BOV obecně, nicméně má svá specifika. Těmi jsou: rozpracování otázek, aby byli přístupné matematické práci; matematické modelování a matematizace. Tyto aktivity souvisejí zejména s tzv. vnějšími typy otázek pocházejících reálného světa. Při hledání odpovědí na tyto otázky vstupuje do badatelského procesu tzv. matematické modelování.

Další specifikum matematiky jako takové, a tedy i matematického bádání je její kumulativní charakter, tj. že nové matematické poznatky nutně navazují na již dříve získané poznatky. Aby se z matematických poznatků získaných při řešení konkrétních problémů, staly metody a techniky pro řešení celých tříd problémů, je potřeba aby jednotlivé poznatky na sebe navazovali. Vzájemné propojování jednotlivých oblastí matematiky hraje základní roli při osvojování matematiky žáky. Proto je při zavádění BOVM důležité, aby se žáci nezabývali pouze izolovanými problémy, jakkoli náročné mohou být, jelikož jim neumožní rozvoj zastřešujících matematických konceptů (Artique, et al., 2012).

3.3.2. BOVM v kontextu již existujících teoretických rámců

Přestože je používání terminologie BOVM a její implementace do matematického vzdělávání v ČR trendem posledního desetiletí, je možné najít její myšlenky a principy v již existujících teoriích a přístupech, které rovněž vycházejí z myšlenek Deweye. V českém prostředí mezi ně patří učení řešením úloh a problémů (*problem solving*), teorie didaktických situací (TDS), reálné matematické vzdělávání (RMS), matematické modelování, dialogický přístup, tvoření úloh (*problem posing)*, projektové metody, podnětná výuková prostředí a budování schémat, konstruktivistické přístupy k vyučování (Samková, et al., 2015). V této práci jsou uvedeny pouze 4 nejdůležitější, které mají velký přínos pro konceptualizaci BOVM (Artique & Blomhøj 2013).

Učení řešením úloh a problémů (problem solving)

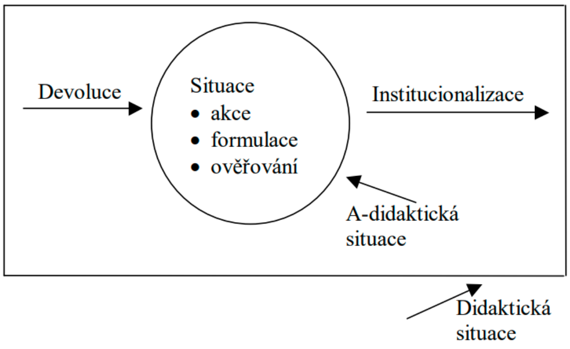
Jak již bylo uvedeno výše BOV a učení řešením úloh a problémů (problémová výuka) mají k sobě velmi blízko a navzájem se překrývají. V některých vymezeních je BOVM redukováno na řešení problémů – např. evropský projekt ASSIST-ME. Při učení řešením úloh a problémů je důraz kladen na rozvoj kompetencí a myšlenkových návyků, které žákům umožní úspěšné vyřešení ne-rutinních a náročných problémových úloh uvnitř matematiky nebo pomocí matematiky. Dle Caie (2010) začíná vyučování prozkoumáváním problému, což by mělo umožnit studentům porozumět důležitým aspektům matematického pojmu. Úlohy a problémy jsou otevřené a nabízejí více způsobů jejich řešení a mnohdy i více správných odpovědí. Po individuálních pokusech pod vedením učitele, je kladen důraz na kolektivní sdílení a diskutování různých přístupů a výsledků. V konečné fázi, učitel provede stručné shrnutí a vede studenty k tomu, aby porozuměli klíčovým aspektům matematického pojmu. Souvislost s BOVM je patrná zejména při řešení ne-rutinních úloh, kdy žáci musí přijít na nový postup řešení – viz obr. 2.

Teorie didaktických situací

Jak název napovídá, je v TDS pozornost zaměřena na různé typy situací probíhající ve výuce a vedoucí žáky k získání nových znalostí a dovedností. V tomto teoretickém rámci se G. Brousseau (Brousseau, 1979) snažil začlenit myšlenku epistemologických překážek do matematického vzdělávání a všímá si zejména procesů probíhající mezi žáky, žákem a učitelem v *didaktických* či *a-didaktických situacích*. *Didaktickou situací* se rozumí systém interakcí mezi žákem, nebo skupinou žáků, učitelem a nějakou matematickou znalostí. Její účelem je získání určité matematické znalosti. Speciálním typem didaktické situace je *a-didaktická situace*, při které učitel umožní žákům dojít k poznatku samostatně, bez jeho přímé intervence (Novotná, et al., 2006). Důraz je při tom kladen na to, aby žáci přijmuli úlohy vyžadující vyřešení určité situace za své a přebrali za její řešení odpovědnost. Brousseau toto vystihuje pojmem *devolution (devoluce)*. Je předpokládáno že žáci vytvoří nový matematický poznatek kolektivně, přičemž je občas potřeba, aby odmítli či poupravili své původní strategie, či představy. Matematická znalost, kterou si mají žáci osvojit, se v TDS jeví jako optimální řešení situace v interakci s vhodným prostředím. Brousseau podobně jako Dewey vnímá učení jako proces, ve kterém hraje důležitou roli adaptace, nicméně v TDS hraje důležitou roli také akulturace (diskuze a interakce mezi žáky navzájem, při objevování nového poznatku).

Ve spojitosti s BOVM je důležité zmínit jednotlivé etapy *a-didaktických situací (viz obr. 3).*

- *„Akce – výsledkem je předpokládaný (implicitní) model, strategie, počáteční taktika*
- *Formulace – zformulování podmínek, ve kterých bude strategie fungovat*
- *Ověření (validace) – ověření platnosti strategie (funguje, nefunguje)“* (Novotná, et al., 2006).



Obr. 3: Etapy a-didaktických situací (Novotná, et al., 2006)

Učitel má v tomto procesu (podobně jako konstruktivistických přístupech) roli facilitátora, či koordinátora, který usměrňuje diskusi. Na závěr učitel *institucionalizuje* výsledky, na které žáci přišli, tj. společně s žáky shrne důležité znalosti a ukáže žákům jak se tyto znalosti, použité k vyřešení této úlohy dají využít k vyřešeních dalších úloh, dalších situacích (Novotná, et al., 2006). Je patrné, že si žák v TDS zvyká na samostatné objevování, nicméně rozvoj badatelského myšlení není primárním cílem (Artique, et al., 2013). V českém prostředí se didaktickými situacemi zabývá kolektiv kolem Novotné (viz Novotná, et al., 2006; Nováková, 2013).

Realistické matematické vzdělávání

Realistické matematické vzdělávání (RMV) vychází z prací Freudenthala a jeho *didaktické fenomenologie* (Freudenthal, 1973). Hlavní myšlenka RMV je, že učení se matematice by mělo být součástí žákovi reality. Realitou přitom Freudenthal rozumí vše, co je prožíváno jako skutečné. Gravemeijer (1999) přichází s pojmem *experientially real situation (*zkušenostně reálná situace), aby zdůraznil, že realita může být konstruována ve vyučovacím procesu. Paul Drijvers (2018) k tomu dodává, že reálnými se stanou takové situace, či matematické objekty, které žákům dávají smysl, které spatřují jako smysluplné, skutečné. S odkazem na Piageta, lze říct, že se jedná o takové situace, které je žák schopen zařadit do svého myšlenkového schématu. Nezůstanou pouhými abstraktními pojmi, ale stanou součástí žákovi reality, se kterou může dále pracovat. Situace mohou pocházet z každodenního života nebo z matematiky jako takové, neboť si žák matematické objekty postupně osvojuje do své reality. Hlavní činnosti při RMV je matematizace, přičemž se rozlišuje horizontální a vertikální matematizace. Horizontální matematizací se rozumí transformace každodenních problémů do matematických pojmů a modelů, zatímco vertikální matematizace odkazuje na transformaci v rámci matematických systémů. Freudenthalovo pojetí matematizace je úzce spjato s jeho chápáním matematiky jako lidské činnosti a jeho pohledem na učení jako na znovuobjevování. *Řízené (znovu) objevování* je další klíčový pojem RMV. Odkazuje na myšlenku, že by žáci měli mít možnost vytvořit si svojí vlastní matematiku a postupně proměnit neformální a smysluplné strategie řešení problémů ve více formalizované metody. Jinými slovy, aby mohli zažít matematické objevy, jako skutečné objevy. Zásadní je přitom role učitele, který žákovo objevování řídí a vytváří proto vhodné prostředí, vhodné situace (Artique & Blomhøj, 2013).

V česku se řízeným objevováním a znovuobjevováním zabýval Vyšín (1976), který jej považoval jako součast tzv. *genetického přístupu.*

Matematické modelování

Matematické modelování získává stále větší význam ve výzkumu matematického vzdělávání. Zaměřuje se na aplikaci matematiky při řešení mimo-matematických situací (angl. Extra – mathematical situations). Takováto aplikace vyžaduje vytvoření matematického modelu, který propojuje mimo-matematickou situaci s matematickým modelem. Matematické modelování, tak jak jej popisují Blomhøj & Jensen (2003) má šest fází:

- *„Formulace problému (vice či méně explicitní), která vede k identifikaci charakteristik reality, jež má byt modelována.*
- *Výběr relevantních objektů a vztahů z původní oblasti bádání a jejich idealizace tak, aby byla umožněna matematická reprezentace.*
- *Převod těchto objektů a vztahů z oblasti jejich původního výskytu do matematiky.*
- *Využiti matematických metod k dosaženi matematických výsledků a závěrů.*
- *Jejich převod do původní oblasti bádání.*
- *Vyhodnoceni platnosti modelu ve srovnání s pozorovanými či předpokládanými daty nebo s teoreticky podloženými znalostmi“* Blomhøj & Jensen, 2003; cit. dle Samková, et al., 2015).

Proces modelování je často cyklický, jelikož průběžná reflexe v určitém kroku, může vést k nutné změně v krocích předchozích a tím pádem vede k vytvoření smyčky uvnitř procesu modelování. Matematické modelování nabízí pro BOVM možnost, jak systematicky porozumět a pracovat se vztahem mezi matematikou a problémovou situací či jevem v jiných přírodovědných předmětech (tzv. *vnějšími otázkami – external questions*). V procesu učení nabízí matematické modelování propojení mezi matematickými koncepty a pojmy a zkušenostmi z každodenního života (Artique, et al., 2013).

Shrnutí

Výše byly uvedeny hlavní teoretické rámce v matematickém vzdělávání, které se odvolávají na myšlenky Deweye a které svým přístupem v menší či větší míře obsahují i myšlenky BOVM a podporují žáky v rozvoji badatelského myšlení, přestože se jednotlivé rámce zaměřují a vyzdvihují různé aspekty procesu učení. Samková et al. 2015 soudí, že BOVM jednotlivé teoretické rámce zastřešuje a že BOVM má určité charakteristiky, které jednotlivé rámce různě intenzivně používají.

3.4. ICT podpora v matematickém vzdělávání

Rozvoj digitálních technologií zásadním způsobem proměňuje téměř všechny oblasti našeho života a stávají se jeho součástí. I ve vzdělávání hrají digitální technologie stále větší roli a otázkou již není, jestli digitální technologie do výuky implementovat, či nikoliv. Otázkou je, jak? Jak digitální technologie efektivně zařadit do výuky, aby toto zařazení bylo skutečně prospěšné. Snahu o implementaci a účinné využívání digitálních technologií ve vzdělávání dokládá např. v úvodu zmíněná *Strategie digitálního vzdělávání do roku 2020* (MŠMT, 2014). Digitální technologie mají veliký potenciál v matematickém vzdělávání a staly se nástrojem pro zkvalitnění procesu získávání matematických znalostí i nástrojem pro motivaci žáků (Vondrová, Novotná & Tichá; 2015). Vaníček (2010) uvádí, že: *„Technologie, které jsou doplněné adekvátním kurikulem a připraveným učitelem, mají obrovský vzdělávací potenciál pro výuku matematiky. Pomocí aktivit, spočívajících v manipulaci s objekty různé povahy, umožňují učícímu se odhalovat invarianty při změně jejich nepodstatných vlastností a získávat zkušenosti pro budování mentálních modelů při uchopování nového pojmu*.“ Mezi oblasti školské matematiky, kde vhodné použit ICT patří: matematické modelování, důkazy a argumentace, algebra a zobecňování, statistické uvažování (Vondrová, Novotná & Tichá; 2015).

3.4.1. Kognitivní technologie

Pojem digitální technologie je široký a lze pod něj zahrnout různé druhy technologií od počítačů, tabletů, přes interaktivní tabule a projektory, po specializovaný software. Vaníček (2010) rozlišuje mezi:

- *informačními technologiemi* (internet a jeho služba web, hromadné zpracování dat, portály, úložiště a sdílení souborů a řešení, softwarové agenty),
- *komunikačními technologiemi* (e-mail, online komunikace typu messenger, what’s up, skype nebo chat, e-mailové konference, blogy a elektronické diskusní skupiny, sociální sítě, videokonference, mobilní telefonování a sociální sítě),
- *kognitivními technologiemi* (technologie přítomné při poznávání a během poznávacího procesu, pro něž právě používáme název kognitivní technologie).

Jako kognitivní technologie lze chápat technologie, které umožňují přesáhnout omezenou schopnost jedince v aktivitách spojených s přemýšlením, učením či řešením problémů (Pea, 1987 cit. dle Vaníček, 2010). Vaníček vnímá kognitivní technologie jako *„**počítačové***

prostředky přítomné při poznávání, či umožňující a zkvalitňující poznání“. Odlišením kognitivních technologií od ostatních technologií zdůrazňuje jejich bezprostřední vliv na rozvoj matematické gramotnosti či matematického uvažování. V hodinách matematiky se používají následující typy kognitivních technologií:

- *počítačové algebraické systémy* (CAS, např. Mathematica, Derive, *wxMaxima*)
- *prostředí dynamické geometrie* (DGS, např. Cabri, Cabri 3D, *GeoGebra*)
- *mikrosvěty* (microworlds, např. Logo, Scratch, Imagine)
- *tabulkové procesory* (spreadsheets, např. MS Excel, *OpenOffice Calc*)
- *počítačové laboratoře* (computer labs, např. ISES, Lego Mindstorms)
- *grafické kalkulačky* (graph calculators, např. od TI, Casio)
- *uzavřená výuková prostředí* (CLE, standardní výukové programy, výuková videa atd.)
- *interaktivní tabule* (např. Smart Board, Aktiv Board)

V této práci se zaměříme na možnosti, které nabízí CAS, DGS a tabulkové procesory v BOVM.

Tabulkové procesory

Ve výuce matematiky jsou Tabulkové procesory (Excel, OpenOffice Calc) vhodné při vizualizaci a znázornění velkého množství dat, objevování funkčních souvislostí a vizualizaci funkcí na základě jejich grafů. Tabulkové kalkulátory se dají zapojit pří výuce témat funkčních souvislostí, statistiky nebo pravděpodobnosti, kde je možné využít možnosti simulace náhodných jevů (Schroeders, 2018).

Počítačové algebraické systémy – CAS

Použití počítačových algebraických systémů (TI-Nspire, Maxima, Derive, CASIO, Classpad, GeoGebra, nebo Mathematica) se nabízí pro lepší porozumění symbolickým výpočtům pomocí termů a proměnných, rovnic a systémů rovnic či funkčních souvislostí. Potenciál CAS ve výuce matematiky lze předložit v následujících tezích, vytvořené na základě rozsáhlé literární rešerše jejíž úkolem bylo zmapovat aktuální stav výzkumů zapojení CAS do výuky matematiky (Berzel, 2012).

Vliv CAS na učení

- Pomocí CAS je možné přispět k rozvoji konceptuálních znalostí
- CAS přispívá k získávání počítačových dovedností
- CAS podporuje a rozvíjí používání matematického jazyka

- Technické dovednosti mohou nahradit odborné cíle

Vliv CAS na vyučování

- CAS může poskytnout komplexní, genetickou výstavbu obsahu vyučování
- CAS podporuje integraci otevřených úloh do výuky
- CAS zvyšuje počet možných individuálních způsobů řešení jedné úlohy

Softwary dynamické geometrie – DGS

Softwary dynamické geometrie – DGS (GeoGebra, GeoNext, GeoNet, Cabri, Cinderella) se používají při geometrických konstrukcích, objevování vlastností geometrických objektů a geometrických souvislostí. Výhodou DGS je, jak název napovídá, jejich dynamičnost, tedy možnost pohybovat s body, přímkami, úsečkami, nebo grafy funkcí tak, aby se náležitě pozměnil i zbytek geometrické konstrukce. To jim dává potenciál pro zapojení heuristických a badatelských metod při objevování geometrických souvislostí (Gleich, 2018; Nocar, Polejová & Laitochová, 2017).

3.5. ICT podpora BOVM

„Má-li se stát BOVM více než pouhým sloganem, je žádoucí rozvoj vhodných vzdělávacích strategií. Tyto strategie musí uznat experimentální dimenzi matematiky a nových možností, které v tomto ohledu nabízejí digitální technologie“ (Artique, et al., 2012 ; vlastní překlad).

Lze vyvodit, že kognitivní technologie mají v BOVM svojí významnou roli a přestavují mocné nástroje pro podporu BOVM. Díky zapojení technologií do výuku mají žáci možnost přistoupit k matematice jako k experimentální vědě, kde se počítač stává jejich laboratoří a dynamické prostředí na obrazovce virtuálním pokusem (Artique, et al., 2012). Jejich využití se ukazuje jako přínosné při experimentování a objevování (Nocar & Zdráhal 2015, aj.); při sběru, analýze a vyhodnocení dat; vytváření, ověřování a dokazování domněnek (Babtist, et al., 2012); matematickém modelování (Kopecký, 2015., Samková, 2011; 2012; 2013). Pro podporu experimentální praxe se nejčastější používají DGS a tabulkové kalkulátory.

3.5.1. Dynamické pracovní listy

Dynamické pracovní listy se v hodinách matematiky používají stále častěji. Podobně jako tradiční pracovní listy i dynamické vedou, provázejí a směřují proces učení žákům, pomocí souboru otázek, na které se snaží žák odpovědět a úloh, které žák řeší. Dynamické pracovní listy mají podobu html souboru obsahující applety. Žák je vidí a zpracovává na počítači nebo tabletu. Jejich výhodou je, že umožňují propojení textu, grafických prvků, videí a dynamických konstrukcí čímž se rozšiřují možnosti, jakými lze žáka vést k novému poznatku. Dynamické prostředí umožňuje např. větší zapojení experimentální složky při objevování, nebo ověřování domněnek. Další výhodou dynamických pracovních listů je, že umožňují dát okamžitou zpětnou vazbu (Artique, et al., 2012).

3.5.2. Zapojení dynamických pracovních listů do hodiny

Artique & Babtist (2012) navrhují, aby učební proces se zapojením dynamických pracovních listů obsahoval tři fáze:

- Samostatná práce
- Práce ve dvojici či menších skupinkách
- Společná diskuse s celou třídou a/nebo učitelem

Nejprve žáci pracují samostatně s dynamickým pracovním listem. Následně své nápady a výsledky prodiskutují se spolužákem/skupinou spolužáků, aby je porovnali a zpřesnili. Tím se učí formulovat a vyjadřovat své myšlenky v matematických pojmech a vede je to k hlubšímu porozumění. Učitel v závěrečné diskusi shrne a upozorní na nové matematické poznatky, které žáci objevili a uvede je do širších souvislostí.

Při práci s dynamickými pracovními listy, nebo i při práci ve specializovaném matematickém softwaru je vhodné, práci na počítači propojit se zapisováním do sešitu pomocí tužky a papíru. Do svých sešitů si žáci mohou vytvářet nákresy, popisovat své pozorování, rozpracovat předpoklady, sepsat důkazy, vyjádřit své vlastní postřehy a komentáře. Tím se stane jejich práce hmatatelná a výsledek jejich práce nezůstane pouze ve virtuálním prostředí (Artique, et al., 2012). *„Mezi výhody využívání dynamických pracovních listů patří např. fakt, že jsou studenti aktivní, rozvíjí samostatné učení, mohou si zvolit vlastní tempo učení, experimentální přístup vzbuzuje u žáků zájem, žáci nepotřebují mít dřívější zkušenosti s matematickými programy“* (Artique, et al., 2012).

Je důležité mít na paměti, že přestože technologie nabízí nové přístupy, není snaha, aby zcela nahradili přístupy tradiční. Virtuální experimenty by neměli nahradit ty reálné a podobně není možné rozvinout prostorové a geometrické znalosti pouze pomocí DGS. Je potřeba, aby žáci pracovali také se skutečnými objekty, a ne pouze objekty virtuálními (Artique & Babtist, 2011).

3.5.3. GeoGebra

Program GeoGebra se stal v posledních letech velmi populární a patří v současné době mezi nejčastěji používaný matematický software (Hašek & Pech, 2015). Jedná se o tzv. open source program, který volně dostupný na stránce www.geogebra.org. Obsahuje prostředí pro dynamickou geometrii v rovině (*nákresna)* i prostoru (*grafický náhled 3D)*, počítačovou algebru (*CAS*) a tabulkový procesor (*Tabulka)*, které jsou vzájemě propojené. GeoGebru lze stáhnout do počítače nebo využívat v online verzi. Po registraci je možné ukládat vytvořené soubory na online uložiště a zpřístupnit je ostatním uživatelům. To umožňuje snadnější sdílení výukových materiálů. Ovládání GeoGebry je snadné a intuitivní což umožňuje jeho implementaci do výukou formou „learning by doing", kdy se žáci učí s programem pracovat samostatně a prostřednictvím zadaných úloh postupně objevují jednotlivé funkce.

Ověření a důkaz hypotéz a vět pomocí DGS

Důkazy patří k nejtěžším částem kurikula matematiky na všech úrovních škol a žáci i studenti s nimi mají potíže. DGS mohou proces dokazování usnadnit. Pomocí DGS studenti sice neprovedou důkaz v pravém slova smyslu (pouze ověří, jestli je domněnka nebo věta pravdivá), nicméně toto experimentální ověření usnadňuje cestu k následnému důkazy a dokazování obecně (Artique, et al., 2012). Rolí DGS při ověřování a dokazování hypotéz se zabývala např. Robová (2013). Ve své publakaci uvádí závěry, některých výzkumů, které se tímto problémem zabívali. Z těchto výzkumů vyplývá, že používání DGS k experimentování a ověřování hypotéz příspívá u žáků k uvědomění si role důkazů (Abdelfatah, 2011; Marrades, et al., 2000; cit. dle Robová 2013). Také bylo zjištěno, že žáci potřebují poměrně dlouhou dobu strávit experimentálním ověřováním, než jsou schopni přejít k deduktivnímu důkazu. Podle Robové (2012) procházejí studenti při práci s DGS třemi etapami:

- *„etapou experimentování s objekty v daném prostředí a s využitím dynamických atributů programu,*
- *etapou objevení a zformulování hypotézy včetně její verifikace s využitím nástrojů dynamické geometrie,*
- *etapou teoretického zdůvodnění, deduktivního důkazu hypotézy"*.

Ověřování v DGS má několik základních kroků:

- Studenti ověří předložené tvrzení v několika konkrétních situacích, např. pomocí pravítka a kružítka; toto je tradiční přístup

- DGS umožňuje ověřit tvrzení v *nekonečném* množství situacích
- Jestliže je tvrzení platné, při tažení (*dragging)* všech volných parametrů, pak je tvrzení pravdivé s vysokou pravděpodobností

Toto ověření poskytne žákům/studentům důvěru, že je tvrzení platné a že nyní potřebují nalézt logický důkaz. Je však důležité, aby si pokaždé uvědomili, že se nejedná o důkaz, ale pouze o ověření (Pech, 2012).

3.6. Přehled domácích vědeckých studií a publikací zabývající se badatelsky orientovaný vzděláváním

Pojem badatelsky orientované vyučování je v českém didaktickém prostředí relativně nový. Poprvé tento pojem použili Janoušková, Novák a Maršál (2008). Podrobněji se badatelsky orientovanému vyučování věnovali až Stuchlíková (2010) a Papáček (2010 a), kteří tuto problematiku otevřeli a vymezili její základní terminologii (Činčera, 2014). Papáček (2010 a) vysvětluje pojem badatelské vyučování a uvádí, proč je potřebné jeho zavádění do přírodovědného vzdělávání a navrhuje organizační model jeho zavádění, zároveň diskutuje možné omezení, které mohou tomuto zavádění bránit.

Studie věnované BOV v českém prostředí lze rozdělit do několika skupin (Činčera, 2014). První skupinou jsou studie, které mají charakter kvalitativního popisu a obecně charakterizují BOV, vymezují jeho terminologii a metody, objasňují jeho původ a vysvětlují důvody potřeby implementace BOV do přírodovědného vzdělávání. Do této skupiny lze zařadit např. práce (Papáček 2010 a, 2010 b; Kubicová, 2013; Zámečníková, 2013). Na nejasnosti a nejednoznačnosti v používané terminologii reaguje Dostál (2013 a, 2013 b, 2015 a), který vymezuje a odlišuje základní pojmy pojící se k BOV. Podrobněji se Dostál věnuje BOV ve své monografii (Dostál, 2015 b).

Do druhé skupiny patří práce vzniklé v rámci oborových didaktik, které předkládají návrhy badatelských úloh, pracovních listů či celých vyučovacích hodin podle principů BOV. Využití BOV ve výuce chemie navrhují Bílek a Hrubý (2014). Petr (2010) pak předkládá úlohy z biologické olympiády jako inspiraci pro badatelsky orientované vyučování přírodopisu. Badatelské úlohy ve výuce matematiky vytvořila např. Samková (2011, 2012, 2016) či Roubíček (2012). Na konferenci setkání učitelů matematiky Samková (2014), Roubíček (2014), Hošpesová a Tichá (2014) představili různé typy badatelských úloh podle charakteru vstupních informací v sérii tří článků *Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice*. Jejich cílem bylo pomocí příkladů vyjasnit podstatu badatelsky orientovaného vyučování matematice. Samková, Hošpesová, Roubíček, Tichá (2015) shrnují dosavadní poznatky o badatelsky orientovaném vyučování matematiky (BOVM), charakterizují jeho specifika a zasazují ho do širšího rámce didaktiky matematiky, zároveň ukazují různé náměty úloh podporujících badatelskou aktivitu žáků.

Podpoře technologií v BOV matematiky a informatiky se věnuje publikace Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky (Pech et al. 2015). Potenciál možného využití technologií, konkrétně programů dynamické geometrie v BOVM popisují Nocar &Zdráhal (2015 a, 2015 b).

Třetí skupinou jsou studie kvantitativního charakteru, předkládající výsledky z výzkumu efektivity BOV, pohledu učitelů a žáků na BOV, aktuálního stavu implementace BOV do školního prostředí včetně pregraduální budoucích učitelů. Ryplová a Řeháková (2011) zkoumali vliv BOV využívající interaktivní tabuli na znalosti žáků. Činčera (2011) sledoval rozvoj výzkumných kompetencí žáků v rámci programu o Jizerských horách. Tyto kompetence sledoval Činčera a Mašková (2011) u programu GLOBE koordinovaného sdružením TEREZA. Vácha a Ditrich (2016) hodnotili efektivitu BOV na prvním stupni základních škol s využitím prostředí školních zahrad a statistiky prokázali pozitivní vliv na osvojování znalostí a na vzrůstající oblíbenost výuky u žáků. Zároveň došli k závěru, že je důležité BOV zařazovat do výuky pravidelně a s častější frekvencí již na primárním stupni ZŠ, aby bylo docíleno úspěšné aplikace BOV ve výchovně vzdělávacím procesu. Radvanová, Čížková, Martinková, (2018) realizovali v letech 2012–2017 výzkum, který sledovali posun ve vnímání a používání BOV učitelů přírodopisu základních škol. Výsledky ukazují, že došlo k: „*statisticky signifikantnímu posunu ve znalosti podstaty termínu BOV a míře jejího využívání učiteli. Ukazuje se však, že naši učitelé mají ne zcela jasný pohled na bádání, a ne vždy správně termín chápu*.“ Téměř 65 % dotazovaných odpovědělo, že znají termín badatelsky orientovaná výuka a ví o co se jedná. Podobné výzkumné šetření provedli Nocar, Polejová & Laitochová (2015), kteří sledovali mj. povědomí učitelů matematiky 2. ZŠ o BOV, zda tento přístup využívají ve výuce a jestli při něm využívají podpory ICT. Bylo zjištěno, že BOV zná přibližně 40 % respondentů, avšak ve výuce jí využívá pouze 22 % vyučujících. Další studie zabývající se pohledem učitelů na BOV nabízí např. (Novák & Nováková, 2014; Radvanová, Čížková & Martinková, 2018).

4. Praktická část

4.1. Úvod

V této části práci jsou předloženy vypracované badatelské úlohy, které lze použít ve výuce matematiky. Tyto badatelské úlohy ukazují, jakým způsobem lze využít podpory ICT v badatelském přístupu výuky matematiky. Úlohy byly vybírány napříč ročníky druhého stupně ZŠ. Součástí úlohy je metodický list pro učitele a pracovní list pro žáky. Úlohy zároveň odkazují na dynamické applety, které jsou k dispozici online. V úvodu metodického listu pro učitele je obecná charakteristika a popis úlohy, jsou uvedeny vzdělávací cíle, tematický okruh a očekávané výstupy v RVP ZŠ, rozvíjené badatelské dovednosti, organizační forma výuky a časová dotace, ročník a předpokládané znalosti žáků. Dále je popsán průběh hodiny, jednotlivé kroky bádání a role žáků a učitele v jednotlivých krocích. Pracovní listy žákům slouží jako průvodce při bádání. Zároveň do nich žáci zapisují své nápady, postřehy a závěry. Pracovní listy doplňují činnost a roli učitele, nejsou určeny k zcela samostatné práci žáků. Jejich zapojení je popsáno v metodických pokynech pro učitele.

4.2. Metodické náměty

4.2.1. Námět č.1: Thales

Anotace	Tato úloha je zaměřena na objevení Thaletovy věty a její důkaz. Je inspirovaná úlohou z (Heinz, et al., 2017).
Vzdělávací cíle	Žák na základě pozorování formuluje znění Thaletovy věty a sám, či s pomocí nápovědy provede její důkaz. Žák aplikuje znalosti ohledně vlastností rovnoramenného trojúhelníku.
Tematický okruh RVP ZV	Geometrie v rovině
Očekávané výstupy RVP ZV	M-9-3-05 Žák využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh.
Učivo	Konstrukční úlohy – množiny všech bodů dané vlastnosti – Thaletova kružnice
Badatelské dovednosti	Vyvození závěrů na základě pozorování, formulace výzkumné otázky, formulace hypotézy, její experimentální ověření a následné dokázání na základě logických argumentů.
Organizační forma výuky	Samostatná práce, práce ve dvojicích, skupinová práce
Ročník	8. ročník
Předpokládané znalosti a dovednosti žáka	Druhy trojúhelníků a jejich vlastnosti.
Časová dotace	90 min.

Průběh vyučovací hodiny:

Začátek vyučovací hodiny může proběhnout buď ve třídě nebo na dvoře. Žáci dostanou za úkol vyřešit jednu akční úlohu, která slouží jako počáteční motivace, představení tématu a vtažení žáků do problematiky. Poté mají žáci za úkol vypracovat pracovní listy s využitím

GeoGebra appletů, které je vedou k objevení souvislostí mezi úhlem γ v trojúhelníku ABC a kružnicí nad přeponou AB, k formulaci Thaletovy věty a jejího dokázání.

1) Motivace

Žáci jsou ve třídě, nebo na školním dvoře.

Zadání:

- Postavte se do kruhu (pozn. geometricky správně by bylo vytvořte kružnici. Na to lze žáky upozornit a zeptat se na rozdíl kruhu a kružnice)
- Jeden žák S se postaví doprostřed.
- Vyberte dva žáky A, B tak, aby jejich spojnice tvořila průměr vaší kružnice. Tj. aby žák S byl ve středu mezi žáky A a B. (Pro lepší názornost mohou žáci A, B držet provaz. Žák S se musí toho provazu také držet).
- Nastavte vaše chodidla tak, aby jedno chodidlo ukazovalo na žáka A a druhé na žáka B. Křídou vyznačte úhel, který vaše chodidla svírají a změřte ho úhloměrem.

Žáci mají objevit, zjistit, že jednotlivé velikosti úhlů, které svírají jejich chodidla se pohybují okolo 90°. Nyní je učitel vyzve, aby toto měření zopakovali, ale vybrali jiné žáky A, B (žák ve středu S se může také vyměnit). Žáci zjistí, že se hodnota úhlu opět blíží 90 °. Podle časových možností a zapojení žáků je možné toto měření zopakovat i několikrát. Na konec učitel vyzve žáky, aby zjistili, co se stane, když žáci A, B, budou vybráni tak, že žák S nebude v jejich středu.

Role učitele:

Učitel uvede zadání úkolu. Následně řídí a usměrňuje objevy žáků a vede je systémem kladených otázek.

- Na co jste přišli? Jaký je úhel, který svírají vaše chodila?

- Můžeme z tohoto pozorování vyvodit nějaké dílčí závěry?

- Myslíte si, že tyto závěry budou platit i v jiných případech?

- Co bychom mohli ještě pozměnit, abychom ověřili platnost našeho tvrzení?

2) Kladení otázek a výběr badatelské otázky

Role žáka:

Žáci jsou již v lavicích a každý má k dispozici počítač, nebo tablet. Jsou jim rozdány pracovní listy, které mají za úkol vypracovat. Pracovat mohou samostatně a své postřehy sdílet a porovnat následně ve dvojici, nebo mohou úkoly vypracovávat ve skupinách. Jednotlivé kroky jsou následně diskutovány s učitelem a celou třídou.

Nejprve mají žáci za úkol svými slovy popsat na co přišli a geometricky znázornit (načrtnout) předešlou situaci. Poté spolu s učitelem a zbytkem třídy hledají vhodnou badatelskou otázku. Lze využít různé brainstormingové metody. Následně je vybrána jedna výzkumná otázka.

Možné znění badatelská otázka: *Jaký je vztah mezi úhlem γ trojúhelníku ABC a kružnicí s průměrem AB*.

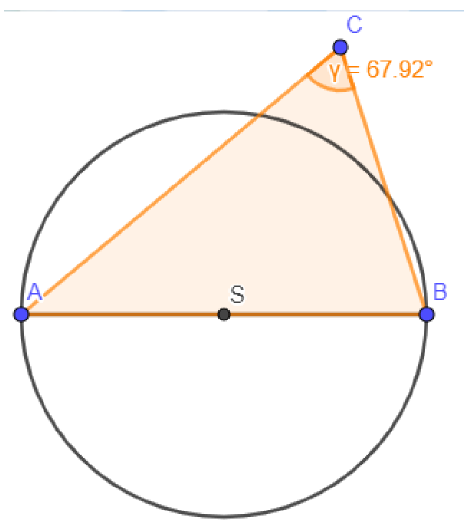
Role učitele: Motivuje žáky k formulaci a hledání různých otázek. Jejich odpovědi zaznamenává a směřuje je k badatelské otázce.

3) Formulace hypotézy

Role žáka:

Žáci si otevřou applet *Thaletova kružnice* a samostatně zpracovávají zadané úlohy. Úlohy je vedou k poznatku, že množina všech pravých úhlů ACB je kružnice sestrojená nad průměrem AB. Nebo jinými slovy, sestrojí-li kružnici t nad průměrem AB (kružnice t = (S; |AS|=|BS|) a bod C leží na kružnici t, pak je úhel ACB pravý.

Na základě svého pozorování mají zformulovat hypotézu/matematickou větu (samostatně, ve dvojici, skupinkách či společně s celou třídou a učitelem).



Obr. 4: Screenshot z appletu Thales

Role učitele:

Podle úrovně badatelských dovedností žáků, jim učitel pomáhá při vytváření hypotézy/matematické věty. Shromažďuje nápady, řídí diskusi, systémem kladených otázek žáky směřuje ke správnému znění hypotézy/věty.

Je důležité žákům připomenout, že matematická věta v první části obsahuje podmínku, která musí být splněná, aby platilo nějaké tvrzení. Druhá část věty je samotné tvrzení.

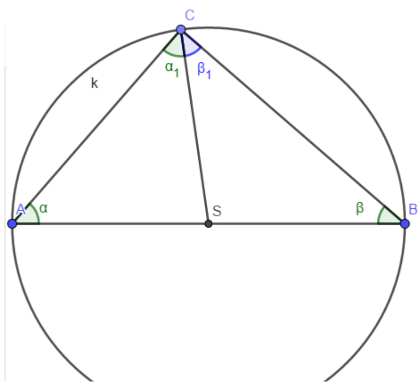
Znění Thaletovy věty:
„Jestliže je ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, leží vrchol C na kružnici k s průměrem AB“ (Odvárko & Kadleček, 2004).
„Všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé“ (Pálková, 2007).

4) Důkaz Thaletovy věty

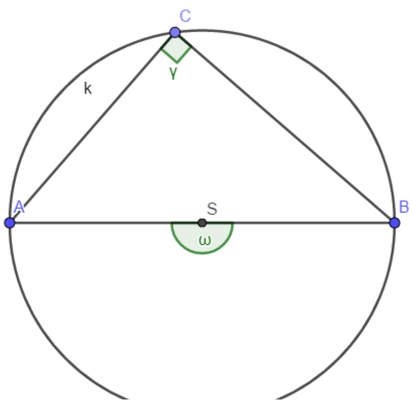
Role žáka:

Nyní mají žáci za úkol Thaletovu větu dokázat. K tomu jim pomůže applet *Důkaz Thaletovy věty*. Applet je vytvořen tak, že si žáci můžou nechat zobrazit nápovědy, které jim s důkazem pomůžou. Nadanější žáci mohou důkaz zvládnout bez nápovědy, ti méně nadaní s nápovědou. Důkaz však provedou relativně samostatně (byť s pomocí nápovědy). Nákresy, myšlenky a nápady zaznamenávají do pracovního listu. Po samostatné práci žáci porovnají a prodiskutují své výsledky se spolužákem/spolužačkou. Na závěr učitel provede spolu s celou třídou důkaz na tabuli a žáci důkaz pečlivě zaznamenají do pracovního listu.

Role učitele:
Na závěr provede spolu s žáky důkaz na tabuli.
Důkaz Thaletovy věty:



Obr. 5: Důkaz Thaletovy věty pomocí vlastností rovnoramenných trojúhelníků



Obr. 6: Důkaz Thaletovy věty pomocí věty o středovém a obvodovém úhlu

Spojíme-li bod C se středem S, vzniknou dva trojúhelníky ASC a SBC. Jelikož |AS|=|CS|= r a |BS|=|CS|= r, jsou trojúhelníky ASC a SBC rovnoramenné. Z vlastností rovnoramenných trojúhelníků (úhly při základně jsou shodné) vyplývá, že $\gamma = \alpha + \beta$.

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABC = 180 °. Tedy:

$$180 = \alpha + \beta + (\alpha + \beta)$$

$$180 = 2 \cdot (\alpha + \beta)$$

$$90 = \alpha + \beta$$

$$90 = \gamma$$

Další důkaz vychází ze vztahu mezi středovým a obvodovým úhlem. *„Velikost středového úhlu příslušného k danému oblouku je rovna dvojnásobku velikosti libovolného obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku"* (Pálková, 2007). V našem případě je středový úhel **ω** roven 180 ° takže obvodový úhel **γ** je roven 90°.

5) Formulace závěrů a návrat k hypotéze

Hypotézu/ Thaletovu větu jsme dokázali. Můžeme jí potvrdit a přijmout jako platné tvrzení.

Kružnice k opsaná nad průměrem AB se nazývá Thaletova kružnice. Definice Thaletovy kružnice:

„Množina vrcholů všech pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma body A, B je kružnice k s průměrem AB kromě bodů A, B" (Odvárko & Kadleček, 2004).

6) Hledání souvislostí – Použití Thaletovi věty v konstrukčních úlohách

Nyní lze žákům zadat několik konstrukčních úloh, při kterých využijí vlastnosti Thaletovi kružnice.

Např.

- Sestroj trojúhelník PQR s pravým úhlem při vrcholu P, je-li p = 6 cm, q = 4 cm.
- Sestroj trojúhelník MNO s přeponou o = 5 cm a úhel MNO má velikost 37°.

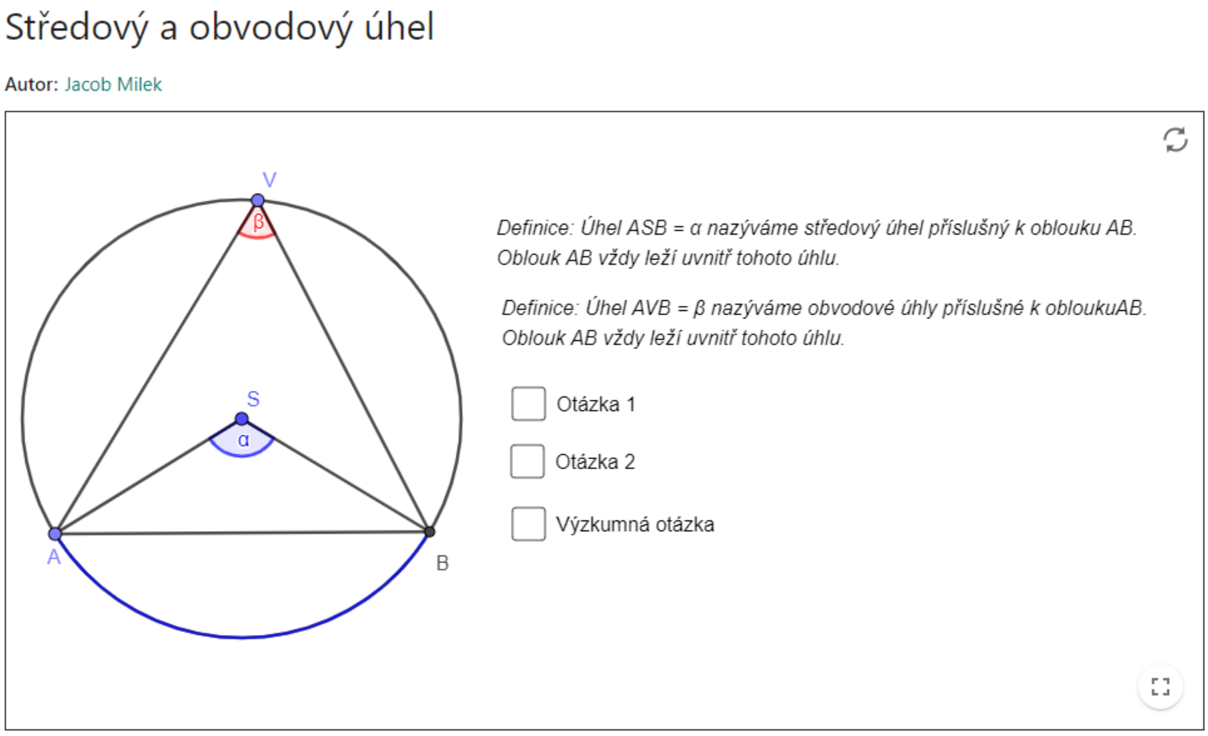
4.2.2. Námět č. 2: Středový a obvodový úhel

Anotace	Tato úloha se zaměřuje na zavedení pojmů středový a obvodový úhel kruhového oblouku, objevení vztahu mezi středovým a obvodovým úhlem v kružnici. Žák pomocí pracovního listu a GeoGebry vypozoruje a následně dokáže vztah mezi obvodovým a středovým úhlem v kružnici.
Vzdělávací cíle	Žák objasní pojem středový a obvodový úhel a vysvětli jejich vzájemný vztah. Toto tvrzení je schopný dokázat. Žák aplikuje dřívější poznatky k logické argumentaci důkazu.
Tematický okruh RVP ZV	Geometrie v rovině
Očekávané výstupy RVP ZV	M-9-3-05 Žák využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh.
Učivo	Konstrukční úlohy – množiny bodů dané vlastnosti-Obvodový a středový úhel
Badatelské dovednosti	Žák pozoruje, formuluje hypotézu,
Organizační forma výuky	Samostatná práce, práce ve dvojicích či skupinová práce
Ročník	8. ročník
Předpokládané znalosti a dovednosti žáka	Druhy trojúhelníků a jejich vlastnosti.
Časová dotace	60 min.

Průběh hodiny:

Na začátku hodiny jsou žáci seznámeni s novými pojmy obvodový a středový úhel kruhového oblouku a s některými jejich vlastnostmi. Na konci této fáze je položena badatelská otázka, na kterou se žáci snaží pomocí appletu v GeoGebře odpovědět. Pracovní list má badatelský charakter a provází žáky jednotlivými kroky bádání.

1) ***Motivace***



Obr. 7: Screenshot z appletu Středový a obvodový úhel

V této fázi je dominantní role učitele, který žáky seznámí s novými pojmy: *středový a obvodový úhel kruhového oblouku.* Používá přitom metody výkladu, či dialogickou metodu. Jako pomůcku lze použít applet: *Středový a obvodový úhel.*

Applet je dynamický – dá se pohybovat bodem A po kružnici, bod B je navázaný na bod A tak, aby jejich spojnice byla vodorovná (pro lepší názornost). Žákům lze demonstrovat případ, kdy je kruhový oblouk, a tedy i středový úhel nekonvexní. Žáky je dobré upozornit, že kruhový oblouk leží uvnitř středového i obvodového úhlu.

Po kliknutí na otázku 1 se objeví otázka: „*Kolik středových úhlů má kruhový oblouk?“*

Po kliknutí na otázku 2 se objeví otázka: „*Kolik obvodových úhlů má kruhový oblouk?“*

Tyto otázky žáky upozorní na fakt, že je středový úhel určen jednoznačně (kruhový oblouk má pouze jeden střed), zatímco obvodových úhlů může být nekonečně mnoho.

Po kliknutí na badatelskou otázku se objeví otázka: „Jaký *je vztah mezi středovým a obvodovým úhlem?“*

Učitel žákům sdělí, že tuto hodinu budou hledat odpověď na tuto badatelskou otázku.

2) ***Badatelská otázka***

Badatelská otázka je sdělena žákům učitelem na konci úvodní fáze motivace.
Znění badatelské otázky: *Jaký je vztah mezi středovým a obvodovým úhlem?*

3) ***Formulace hypotézy***

Žáci hledají pomocí pracovního listu a GeoGebry odpověď na výzkumnou otázku. Žáci mohou pracovat buď samostatně a své postřehy si následně vyměnit se spolužákem / spolužačkou, nebo pracovat rovnou ve dvojicích.

Role učitele:

Na konci této fázi žáky vyzve, aby se podělili o návrhy svých hypotéz. A společně vyberou nejvhodnější formulaci.

Možné znění hypotézy:

- *„Pro libovolnou kružnici platí, že velikost středového úhlu kruhového oblouku je dvojnásobek velikosti obvodového úhlu kruhového oblouku*.“
- *„Pro všechny kružnice platí, že Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného témuž oblouku.“*

4) ***Potvrzení či vyvrácení hypotézy***

Žáci se snaží potvrdit či vyvrátit hypotézu. Hypotézu potvrdí, provedou-li matematický důkaz. Tento provedou v appletu: *Středový a obvodový úhel – důkaz,* který je provede jednotlivými případy závislé na poloze středu vůči obvodovému úhlu – viz obr. Žáci mohou použít nápovědy, které jim s důkazem pomohou. Žáci provedou samostatně důkaz prvních dvou případů, poslední již provedou společně s učitelem (kvůli úspoře času).

Důkaz žáci následně pečlivě zaznamenají do pracovního listu.

Role učitele:

Je žákům k dispozici při jejich samostatné práce. Předvede důkaz posledního případu.

5) ***Formulace závěr a návrat k hypotéze***

Žáci společně s učitelem reflektují proběhlou aktivitu, vyvodí závěr a shrnují nové poznatky.

6) ***Hledání souvislostí***

Učitel žákům sdělí, že se dají znalosti o středovém a obvodovém úhlu využít např. při konstrukčních úlohách.

4.2.3. Námět č. 3: Experimentální směsi

Anotace	Tato úloha se zaměřuje na experimentální využití MS Excelu při řešení slovních úloh o směsích. Úloha je inspirovaná publikací *systematické experimentování ve výuce matematiky* (Eisenmann & Přibyl, 2013).
Vzdělávací cíle	Žák je schopen použít MS excel k experimentálnímu vyřešení slovních úloh o směsích.
Tematický okruh RVP ZV	Číslo a proměnná
Očekávané výstupy RVP ZV	M-9-1-08 Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav
Učivo	Slovní úlohy o směsích
Badatelské dovednosti	Žák používá odhadu, navrhuje postup jeho experimentálního ověření pomocí MS Excel.
Organizační forma výuky	Frontální výuka, samostatná práce
Ročník	8. – 9.
Předpokládané znalosti a dovednosti žáka	Provádění jednoduchých výpočtů pomocí MS Excel
Časová dotace	60 min.
Mezipředmětové vztahy	Informatika – MS Excel

1) Motivace

Motivací této úlohy je vyřešení problému, který je zadán slovní úlohou.

Ze dvou druhů čaje byla vytvořena směs o hmotnosti 10 kg. Cena čaje A byla 160 Kč/kg a čaje B 170 Kč/kg. Cena směsi je 166 Kč/kg. Kolik kilogramů čaje A a kolik kilogramů čaje B bylo třeba smíchat?

Tuto úlohu nebudou žáci řešit výpočtem, nýbrž experimentálně v Excelu.

2) Badatelská otázka

Badatelská otázka je daná slovní úlohou – *Kolik kilogramů čaje A a kolik kilogramů čaje B bylo třeba smíchat?*

3) Vytváření Hypotézy

Žáci mají za úkol odhadnout odpověď na slovní úlohu, na základě jejich intuice a již osvojených matematických znalostí. Tento odhad je zároveň jejich hypotézou.

4) Experimentální ověření hypotézy

Žáci navrhují, jakým způsobem by se dala slovní úloha vyřešit pomocí MS Excel. Ve dvojicích vymýšlejí a zkoušejí různé strategie. Žáci pracují samostatně a snaží se vyřešit zadaný problém. Myšlenka experimentálního ověření – viz obr: Víme, že výsledná směs má vážit 10 kg a má stát 166 Kč/kg. Necháme zobrazit všechny možné kombinace hmotností směsi A a směsi B, které dohromady váží 10 kg a necháme zobrazit jejich cenu, kterou následně vydělíme 10. V prvním sloupci je hmotnost A s krokem 0,5 kg, v druhém sloupci je cena čaje A (= hmotnost A · 160), ve třetím sloupci hmotnost čaje B (= 10 – hmotnost A), ve čtvrtém sloupci je cena čaje B (= hmotnost B · 170), v pátém sloupci je cena za 10 kg směsi (= cena A + cena B), v posledním sloupci je cena za 1 kg směsi (= cena za 10 kg / 10). V případě, že by nám nevyšla přesná

čaj A = 160 Kč/kg
čaj B = 170 Kč/kg
výsledná směs = 166 Kč/kg
hmotnost výsledné směi 10Kg

hmotnost A	cena A	hmotnost B	cena B	cena za 10 kg	cena za kg
0	0	10	1700	1700	170
0,5	80	9,5	1615	1695	169,5
1	160	9	1530	1690	169
1,5	240	8,5	1445	1685	168,5
2	320	8	1360	1680	168
2,5	400	7,5	1275	1675	167,5
3	480	7	1190	1670	167
3,5	560	6,5	1105	1665	166,5
4	640	6	1020	1660	166
4,5	720	5,5	935	1655	165,5
5	800	5	850	1650	165
5,5	880	4,5	765	1645	164,5
6	960	4	680	1640	164
6,5	1040	3,5	595	1635	163,5
7	1120	3	510	1630	163
7,5	1200	2,5	425	1625	162,5
8	1280	2	340	1620	162
8,5	1360	1,5	255	1615	161,5
9	1440	1	170	1610	161
9,5	1520	0,5	85	1605	160,5
10	1600	0	0	1600	160

Obr. 8: Screenshot řešení příkladu v MS Excel

hodnota, je potřeba zmenšit krok na 0,2 či 0,1.

Role učitele:

Nechává žáky pracovat samostatně. Motivuje je k hledání správného řešení, je jim k dispozici v případě dotazů.

5) Závěr a návrat k hypotéze

Žáci vytvoří odpověď na slovní úlohu a porovnají výsledek se svým odhadem.

Odpověď na slovní úlohu:

K vytvoření 10 kg čajové směsi, jejíž cena je 166 Kč/kg, je potřeba namíchat 4 kg čaje A a 5 kg čaje B.

6) Diskuse

Učitel řídí diskusi s žáky, během které sdílejí, jakým způsobem úlohu řešili, jaké strategie použili a jestli byli úspěšní.

4.2.4. Námět č. 4: Rodokmen včely medonosné

Anotace	V této úloze žáci objeví Fibonacciho posloupnost a její souvislost s číslem Φ (úloha je inspirována publikací (Livio, 2006)).
Vzdělávací cíle	Žák je schopen odvodit vztah mezi jednotlivými členy Fibonacciho posloupnosti a napsat její rekurentní vyjádření.
Tematický okruh RVP ZV	Nestandartní aplikační úlohy a problémy.
Očekávané výstupy RVP ZV	M-9-4-01 Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.
Učivo	Číselné a logické řady
Badatelské dovednosti	Žák vyvozuje logické vztahy na základě pozorování.
Organizační forma výuky	Frontální výuky, samostatná práce, skupinová práce
Ročník	8.- 9.
Předpokládané znalosti a dovednosti žáka	Základní početní operaci v Excelu
Mezipředmětové vztah	Přírodopis – partenogenetické / haplodiploidní rozmnožování včel

Popis a průběh vyučovací hodiny:

Tato úloha se dá použít buď v hodině matematiky, nebo v hodině přírodopisu při probírání blanokřídlého hmyzu – včel. Na začátku hodiny učitel sdělí žákům, že se budou zabývat výskytem matematiky v přírodě a zeptá žáků, jestli znají příklady nějakých úkazů či jevů v přírodě, ze kterých se dají vyčíst matematické vztahy. Poté dostanou žáci pracovní list, který je vede k objevení Fibonaccioho posloupnosti, Fibonacciho čísel a jejich vztahu s číslem Φ.

Motivace

Učitel se zeptá žáků, kde všude si myslí, že se lze v přírodě setkat s matematikou, a jestli se již setkali s nějakými příklady výskytu matematiky v přírodě. Žáci formou brainstormingu předkládají své nápady a zkušenosti.

Po skončení brainstormingu učitel žákům rozdá pracovní list a sdělí jim zajímavý fenomén spojený s rozmnožováním včel, které se rozmnožují partenogeneticky, nebo také haplodiploidně. To znamená, že se z oplozených vajíček včelí královny se líhnou dělnice, které nejsou schopné se rozmnožovat. Z dělnice se může vyvinout nová včelí královna/matka, pokud je krmena mateří kašičkou, ta je již schopná se rozmnožovat. Včelí trubci se líhnou z neoplozených vajíček (Tautz, 2010). A že je zvědavý, jestli se tam náhodou neobjeví nějaká matematika.

Samostatná práce

Žáci dostanou k vypracování pracovní listy a mají za úkol přijít na úlohu:

1) *Nakresli rodokmen trubce. Kolik předků má trubec v 5. generaci?*

Počet předků v jednotlivých generacích je shodný s členy Fibonacciho posloupnosti. V dalším kroku (2) mají žáci za úkol všimnout si vztahu mezi předchozím a následujícím členem této posloupnosti a odhadnout kolik předků bude v sedmé generaci. Tento odhad a poznatky, na které přišli, poté prodiskutují se svým spolužákem (3).

Role učitele:

Zadá žákům úkol a nechá je samostatně pracovat. Po splnění prvních 3 úkolů v pracovním listu, s celou třídou rozebere, jak žákům úloha vyšla a na co přišli. Sdělí jim, že se jedná o Fibonacciho posloupnost, což je nekonečná posloupnost přirozených čísel, kde každé číslo vznikne součtem předchozích dvou čísel. A vybídne žáky, jestli by přišli na rekurentní zadání této posloupnosti, jestliže nultý člen je $F_0 = 0$ a první člen $F_1 = 1$.

4) Rekurentní zadání posloupnosti:

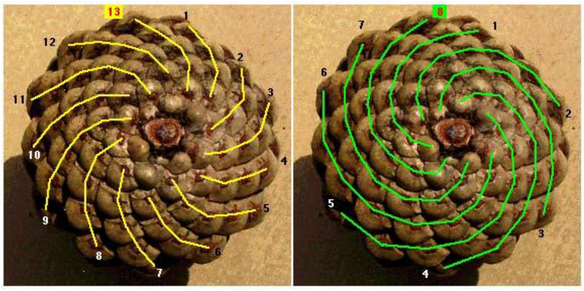
$F_0 = 0$

$F_1 = 1$

$F_n + 2 = F_n + F_{n+1}$ nebo $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

5) Tento vztah nyní žáci aplikují, při vypočítání 20, 21 a 22 členu posloupnosti pomocí Excelu. Učitel je nechává pracovat samostatně.

Učitel nyní žákům ukáže, že je Fibonacciho posloupnost nesmírně zajímavá, jelikož se s ní můžeme setkat i jinde v přírodě. Např. Semínka v slunečnici jsou uspořádané do pravotočivých a levotočivých spirál, přičemž počet spirál je nejčastěji 55 a 34, což jsou čísla Fibonacciho posloupnosti – viz obr. Také šišky borovice jsou uspořádané do spirál -13 levotočivých a 8 pravotočivých (Nocar & Bartkova, 2011) – viz obr. 10.



Obr. 9: Uspořádání šupin u šišky borovice (Nocar & Bartkova, 2011)

Obr. 10: Uspořádání semen v květu slunečnice (Nocar & Bartkova, 2011)

6) *Vypočítej v GeoGebře hodnoty řetězového zlomku a zapiš je vedle ve tvaru zlomku:*

Žáci zadají do CAS okna GeoGebry jednotlivé zlomky a do pracovního listu zapíšou výslednou hodnotu, kterou jim GeoGebra vrátí ve tvaru zlomku. Jednotlivé zlomky budou mít v čitateli a jmenovateli vždy po sobě jdoucí členy Fibonacciho posloupnosti.

Role učitele:

Poté co žáci splní tento úkol a objeví souvislost mezi jednotlivými členy Fibonacciho posloupnosti, provede výpočet na tabuli, aby žáci lépe porozuměli, jak z řetězového zlomku vznikne zlomek, který má ve jmenovateli a čitateli po sobě jdoucí členy Fibonacciho posloupnosti.

7) Ruční Výpočet:

$$1+\frac{1}{1}=2$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=1+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{5}{5}+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=1+\frac{1}{\frac{8}{5}}=\frac{8}{8}+\frac{5}{8}=\frac{13}{8}$$

8) Jaký je podíl po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti? Pomocí Excelu vypočítej hodnotu podílů prvních dvaceti členů Fibonacciho posloupnosti.

Žáci by měli společně s učitelem dospět k poznatku, že podíl po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti konverguje k iracionálnímu číslo Φ = 1,618 …

4.2.5. Námět č. 5: Mona Lisa

Anotace	V této úloze, žáci pomocí GeoGebry ověří platnost tvrzení ohledně výskytu proporce zlatého řezu ve vybraných uměleckých dílech.
Vzdělávací cíle	Žák dokáže aplikovat znalosti o zlatém řezu a jeho souvislostí s Fibonacciho čísly při sestrojení zlatého obdélníku a zlaté spirály pomocí GeoGebry.
Tematický okruh RVP ZV	GEOMETRIE V ROVINĚ
Očekávané výstupy RVP ZV	M-9-3-06 Žák načrtne a sestrojí rovinné útvary.
Učivo	Zlatý řez
Badatelské dovednosti	Žák navrhne a provede ověření předložené hypotézy a rozhodne o její pravdivosti.
Organizační forma výuky	Skupinová práce, samostatná práce
Ročník	8. ročník
Výtvarná výchova	Estetika. Renesanční malíři. Leonardo Da Vinci.

Průběh hodiny

Tato badatelská úloha může navazovat na předchozí úlohu – *Rodokmen včely medonosné,* ve které žáci objevili Fibonacciho posloupnosti, Fibonacciho čísla a jejich souvislost s číslem Φ. Na začátku této hodiny učitel představí žákům zlatý řez, číslo Φ, zlatý obdélník a zlatou spirálu. Poté žákům ukáže vybraná umělecká díla a přečte, tvrzení, která poukazují na výskyt zlatého řezu v těchto dílech. Úkolem žáků je vymyslet, jakým způsobem tato tvrzení mohou ověřit a toto ověření pomocí GeoGebry provést. Žáci ve skupinkách navrhují postup ověřování a stanoví, jakým způsobem budou postupovat. Samotné prověření již provedou žáci samostatně. Na konci hodiny jednotlivé skupiny prezentují své výsledky.

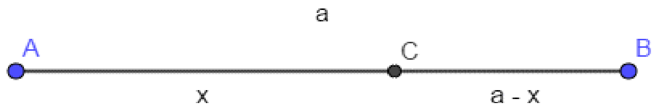
1) Motivace

Role učitele:

Zlatý řez:

Zlatý řez dostaneme, když rozdělíme úsečku AB bodem C tak, že poměr délky celé úsečky AB ku délce větší části je roven poměru délky větší části ku délce menší části – viz obr. 11. Čili:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$



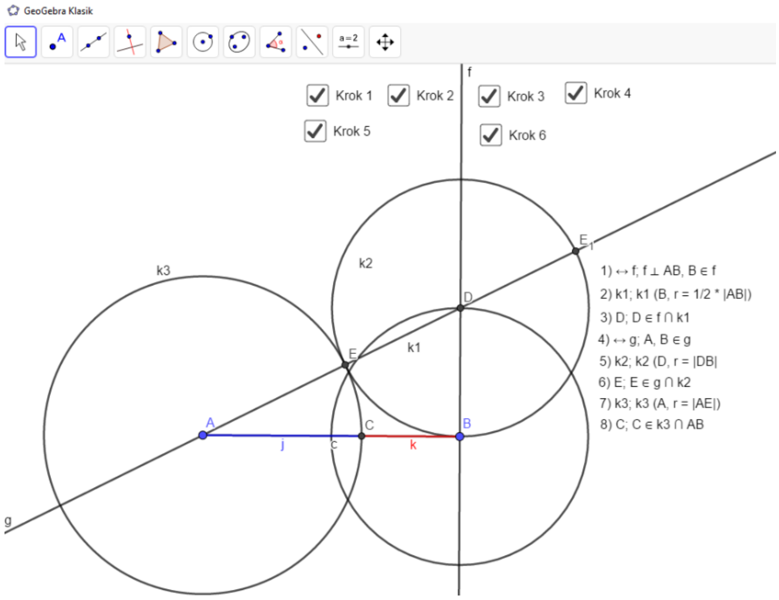
Obr. 11: Rozdělení úsečky v poměru zlatého řezu

Delší úsečka bývá označována jako major a kratší jako minor – viz obr. 12.

Obr. 12: Úsečka rozdělení úsečky v poměru zlatého řezu – major a minor.

Zlatý poměr je číslo vyjadřující poměr $\frac{a}{x}$, za předpokladu, že platí $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$. Označuje se řeským písmenem ϕ „fí“, jedná se o iracionální číslo s hodnotou ϕ = 1, 61803398874... (Stelzner, 2003).

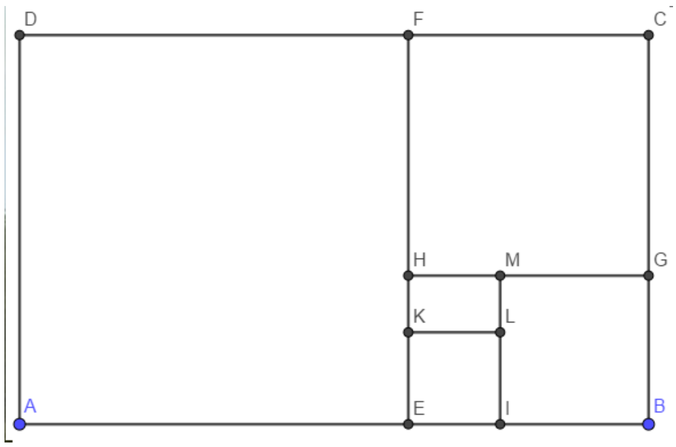
Konstrukce zlatého řezu:



Obr. 13: Screenshost z appletu Konstrukce zlatého řezu

Zlatý obdélník

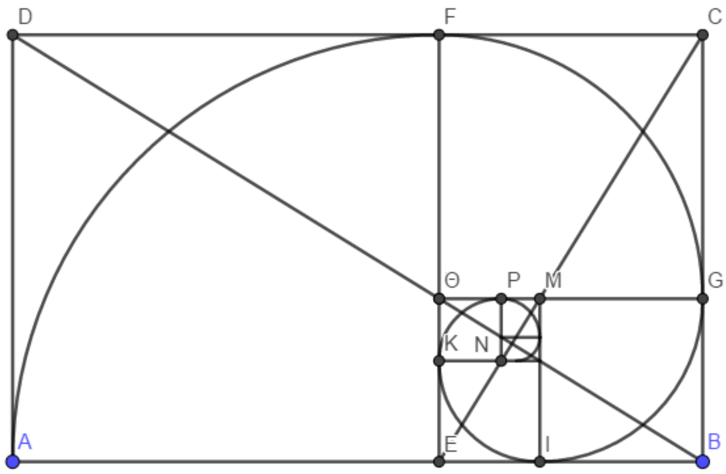
Zlatý obdélník je takový obdélník, jehož delší strana a kratší strana jsou v poměru zlatého řezu. Pokud ve zlatém obdélníku ABCD vytvoříme čtverec AEFD, pak jsou strany obdélníka EBCF opět v poměru zlatého řezu – viz obr.13. Tento proces lze opakovat nekonečně mnohokrát a pokaždé vzniknout nové zlaté obdélníky.



Obr. 14: Zlatý obdélník

Zlatá spirála

Vytvořením kruhového oblouku AF kružnice k1; k1 (E, r = |EA|), kruhového oblouku FG kružnice k2; k2 (H, r = |HF|), kruhového oblouku GI kružnice k3; k3 (M, r = |MG|), kruhového oblouku IK kružnice k4; k4 (L, r = |LI|), kruhového oblouku KQ kružnice k4; k4 (N, r = |KN|) …, vznikne spirála. Tato spirála se přibližuje zlaté spirále, která rovněž prochází body A, F, G, I, K,



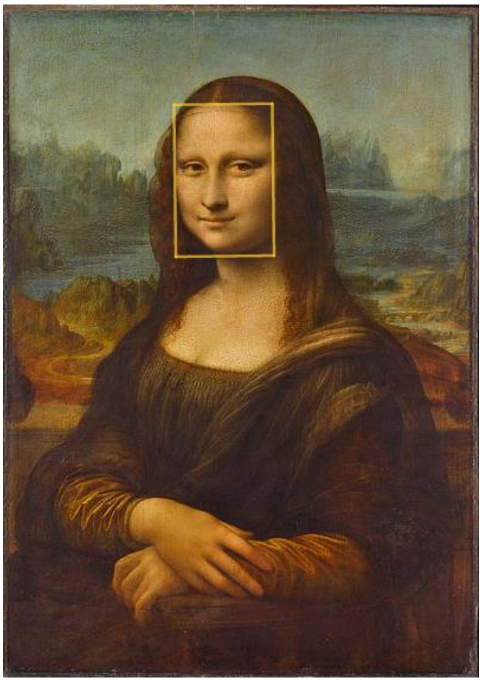
Obr. 15: Fibonacciho spirála

Q … a která má svůj pól v bodě P, který je průsečíkem úhlopříčky DB obdélníku ABCD a úhlopříčky EC obdélníku EBCF.

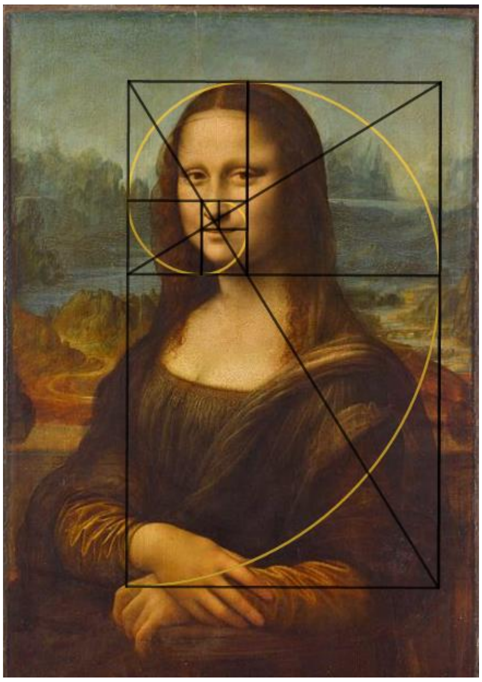
Učitel nyní žákům ukáže umělecká díla, ve kterých se údajně vyskytuje zlatý řez, a přečte následující tvrzení:

Jedním z malířů, v jehož dílech se vyskytují proporce zlatého řezu a je možné v nich nalézt zlaté obdélníky je Leonardo Da Vinci. V jeho nejslavnějším obraze je možné nalézt hned několik zlatých obdélníků. Pokud narýsujeme obdélník, kolem její tváře, zjistíme, že se jedná o zlatý obdélník – obr.15. Pokud rozdělíme tento obdélník přímkou, která prochází jejími oči, dostaneme další zlatý obdélník (mathcentral.uregina.ca).

Často lze spatřit také obraz Mona Lisy se zlatou spirálou, která se rozvíjí z jejího nosu a obtáčí se kolem její brady, temene hlavy a končí u jejích rukou – viz obr.16.



Obr. 16: Mona Lisa a zlatý obdélník (převzato a upraveno z (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ec/Mona_Lisa%2C_by_Leonardo_da_Vinci%2C_from_C2RMF_retouched.jpg)



Obr. 17: Mona Lisa a zlatá spirála, převzato a upraveno z (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ec/Mona_Lisa%2C_by_Leonardo_da_Vinci%2C_from_C2RMF_retouched.jpg)

2) Badatelská otázka

Učitel žákům sdělí, že v dnešní hodině bude jejich úkolem prozkoumat, jestli jsou tato tvrzení pravdivá, jestli Leonardo Da Vinci namaloval Mona Lisu v poměru zlatého řezu.

Žáci vymýšlejí znění badatelské otázky

Možné znění badatelské otázky*: Je obraz Mona Lisy skutečně namalován podle proporcí zlatého řezu?*

3) Hypotéza

Žáci ve skupině formulují hypotézu.

Možné znění hypotézy:

Ano, obraz Mona Lisy je namalován podle proporcí zlatého řezu.

a) Obdélník vytvořený kolem její tváře je zlatý obdélník.

b) Přímka protínající oči Mona Lisy dělí tento obdélník v poměru zlatého řezu.

c) Lze vytvořit zlatou spirálu, která má pól v místě, kde má Mona Lisa nos. Ramena této spirály se dotýkají její brady a temene hlavy.

Učitel nechává žáky vymýšlet hypotézy. Do procesu příliš nezasahuje. Podle schopností žáků a podle jejich zkušenostech s BOVM, je nechá učitel pracovat buď zcela samostatně, nebo s žáky na konci tohoto kroku prodiskutuje jejich návrhy formulací s případně je upřesní.

4) Návrh postupu ověření

Žáci navrhují postup, jakým ověří platnost hypotézy.

Učitel do této části aktivity již nezasahuje a nechává žáky pracovat samostatně. V případě dotazů, žáky navede na správnou cestu.

5) Závěr a návrat k hypotéze

Žáci formulují závěry, ze svého pozorování.

6) Prezentace výsledků a diskuse

Žáci prezentují výsledky svého pozorování ve skupinách.

V diskusi se učitel zeptá žáků, jestli si myslí, že jsou jejich závěry spolehlivé, jestli metoda jejich ověření je spolehlivá?

Určení správnosti jednotlivých tvrzení není tak snadné, jak se na první pohled zdá a v případě Mona Lisy se o tom vedou rozsáhlé diskuse s protichůdnými názory. V našem případě zlatého obdélníku a zlaté spirály je problematické, že není přesně definováno, jakými body by měl procházet. A tak pokud vytvoříme zlatý obdélní, či zlatou spirálu je snadné to je „nainstalovat“ tak, aby to odpovídalo naší představě.

Nicméně faktem zůstává, že se Leonardo Da Vinci zlatým poměrem zabýval. Dozvěděl se o ni od Františkánského mnicha a matematika Lucy Pacioliho, který se zlatým řezem zabýval ve své knize De divina proportione (božská proporce). A údajně shledáváme objekty v tomto poměru jako estetické, krásné (Mario Livio).

4.2.6. Námět č. 6: Antický ideál krásy

Anotace	Tato úloha se zabývá proporcemi lidského těla. Žáci provedou měření, aby zjistili, jestli jsou proporce lidského těla skutečně v poměru zlatého řezu. Úloha se zaměřuje jednak na návrh postupu získávání dat, ale především na jejich vyhodnocení a vyvození závěrů. K tomu žáci použijí tabulkový kalkulátor.
Vzdělávací cíle	Žák je schopen použít tabulkový kalkulátor ke sběru a zaznamenání dat, jejich grafického znázornění a následného vyhodnocení statistického souboru.
Tematický okruh RVP ZŠ	Závislost, vztahy a práce s daty
Očekávané výstupy RVP ZŠ	M-9-2-01 Žák vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data
Učivo	grafy, tabulky; četnost znaku, aritmetický průměr
Badatelské dovednosti	Žák vybírá a formuluje výzkumnou otázku, formuluje hypotézu, navrhuje postup ověření hypotézy, sbírá a zaznamenává data, která následně vyhodnocuje, formuluje závěry
Organizační forma výuky	Skupinová práce
Ročník	7. - 9.
Časová dotace	2 až 4 vyučovací hodiny
Mezipředmětové vztahy	Přírodopis – biologie člověka, genetika – dědičnost kvantitativních znaků

1) Motivace

Role učitele

Učitel seznámí žáky se zlatým řezem s číslem Φ a ukáže jim pár obrázků, kde všude se v přírodě zlatý řez a zlatý poměr vyskytuje - viz. Obr. Rozdělí žáky do skupin po 4 a ukáže jim obrázek Vitruviova muže – obr. a obr., který znázorňuje idealizovanou postavu lidského těla ve zlatém poměru a vyzve žáky, aby ve skupinkách popsali, co na obrázku vidí a jaké je k tomu napadají výzkumné otázky, které by mohli v dnešní hodině prozkoumat.

Zlatý řez:

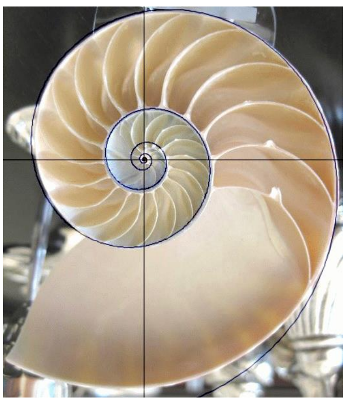
Zlatý řez dostaneme, když rozdělíme úsečku AB bodem C tak, že poměr délky celé úsečky AB ku délce větší části je roven poměru délky větší části ku délce menší části. Čili:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

Delší úsečka bývá označována jako major a kratší jako minor.

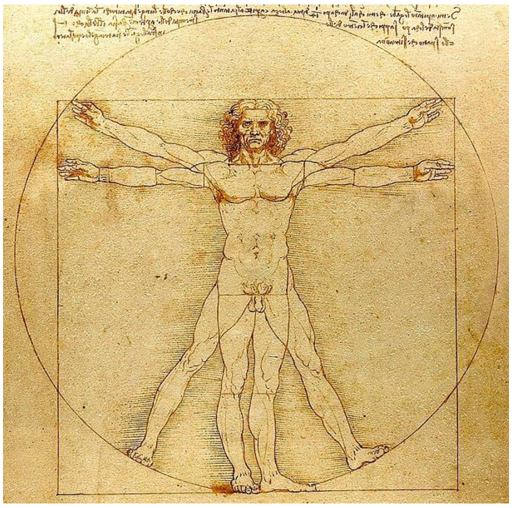
Zlatý poměr je číslo vyjadřující poměr $\frac{a}{x}$, za předpokladu, že platí $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$. Označuje se řeským písmenem ϕ „fí“, jedná se o iracionální číslo s hodnotou ϕ = 1, 61803398874... (Stelzner, 2003).



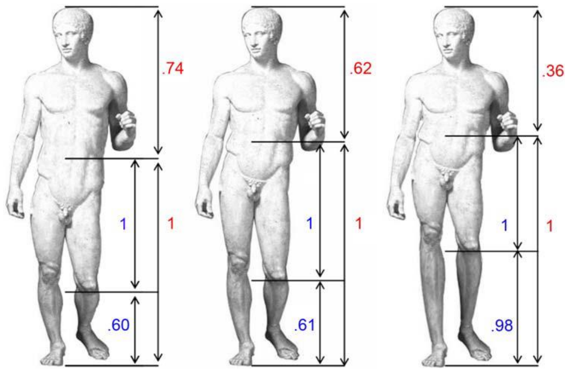
Obr. 20: Schránka Nautilus, převzato z (https://www.goldennumber.net/nautilus-spiral-golden-ratio/)

Obr. 19: Zlatý řez v architektuře, převzato z http://www.golden-section.eu/kapitel5.html

Obr. 18: Okvětní plátky růže (převzato z Nocar & Bartkova 2011)



Obr. 21: Vitruviuv muž, převzato z (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:0_The_Vitruvian_Man_-_by_Leonardo_da_Vinci.jpg)



Obr. 22: Socha Doryfora a zlatý řez, převzato z Di Dio, et al, 2007

Role žáků:

Ve skupinkách popisují, co mohou vyčíst z obrázků a vymýšlejí potenciální výzkumné otázky.

2) Výběr badatelské otázky

Role učitele:

Řídí a usměrňuje diskusi, ve které jednotlivé skupinky představují své návrhy na výzkumné otázky. Zaznamenává výzkumné otázky na tabuli, či interaktivní tabuli. Formou dialogu koriguje výběr výzkumných otázek, a klade žákům otázky, jestli si myslím, že je reálné na tyto otázky najít během 2-3 hodin odpověď.

Role žáků:

Předkládají návrhy výzkumných otázek. Vybírají si jednu výzkumnou otázku, kterou se budou zabývat.

Pozn. V této badatelské úloze je uplatněno nasměrované až otevřené bádání. Žáci si tedy sami mohou zvolit výzkumnou otázku a každá skupinka může mít jinou.

Možné návrhy výzkumných otázek:

- *V jakém poměru je délka spodní částí lidského těla (od chodidel k pupku) a délka horní částí lidského těla (od pupku po temeno hlavy).*
- *V jakém poměru je výška postavy a délka spodní části lidského těla (od chodidel k pupku)?*

- *Jaký je vztah mezi výškou postavy člověka a rozpětím jeho paží?*

3) Formulace hypotézy

Role žáků:

Žáci mají za úkol ve skupince zformulovat hypotézu.

Role učitele:

Učitel žáky vede k tomu, aby hypotézu zformulovali, co nejpřesněji, nejkonkrétněji. Aby jí žáci měli skutečně šanci potvrdit nebo vyvrátit.

Možné znění hypotézy:

- *V naší třídě je poměr délky spodní části lidského těla (od chodidel k pupku) a délky horní částí lidského těla (od pupku po temeno hlavy) v průměru v poměru zlatého řezu a rovná se Φ≈1,681.*
- *V naší třídě je poměr výšky postavy člověka a délka od chodidel k pupku je roven v průměru poměru zlatého řezu a rovná se Φ≈1,681.*
- *V naší třídě je výška postavy člověka v průměru rovna délce rozpětí jeho paží.*

4) Návrh postupu měření, získávání dat a jejich vyhodnocení (metodika)

Role žáků:

Žáci navrhnou a popíší postup, jakým potvrdí/vyvrátí hypotézu. V jednotlivých krocích popíšou, jak budou při měření postupovat, jakým způsobem budou měřit, zaznamenávat a následně vyhodnocovat data.

Role učitele:

Je žákům k dispozici, motivuje je a povzbuzuje v jejich práci, upřesňuje případné nejasnosti apod.

5) Měření

Samotné měření bude probíhat následující hodinu. Je na žácích, aby se domluvili, jakým způsobem bude měření probíhat tak, aby bylo co nejefektivnější.

Ideální způsob na zaznamenání dat je vytvoření online dokumentu, do kterého budou výsledky měření zaznamenávat. V případě, že žáci ověřují hypotézu: *„V naší třídě je poměr výšky postavy člověka a délka od chodidel k pupku je roven v průměru poměru zlatého řezu a rovná se Φ≈1,681“,* vytvořená tabulka bude obsahovat sloupce: jméno a příjmení; třída; výška postavy; pozorovaná délka od chodidel k pupku; očekávaná délka od chodidel k pupku; $\frac{(P-O)^2}{O}$ (viz obr.). Takže je důležité, aby žáci v tomto kroku zaznamenali první čtyři sloupce.

Role žáků:

Domluvit se na způsobu spolupráce a sdílení naměřených dat napříč skupinkami. Provést samostatné měření.

Role učitele:

Učitel nechává žáky pracovat samostatně, pozoruje je při měření, je jim k dispozici v případě potřeby, dohlíží na udržení pracovní atmosféry a kázně.

Jméno a příjmení	Třída	Výška postavy v cm	Pozorovaná vzdálenost od chodidel k pupku v cm	Očekávaná vzdálenost od chodidel k pupku	$\frac{(P-O)^2}{O}$
Jaromír Jágr	9.A	189	120		
David Pastrňák	9.A	183	112		
Davi Krejčí	9.A	183	110		
Dominik Hašek	9.A	185	116		
Michal Frolík	9.A	185	116		
Jakub Voráček	9.A	188	120		
				$\sum_{i=0}^{n}\frac{(P_i-O)^2}{O}$	

Obr. 23: Vzor tabulky v MS Excel k zaznamenání výsledků měření (screenshot)

6) *Vyhodnocení dat*

Nyní je potřeba naměřená data vyhodnotit. Naměřená/pozorovaná data většinou neodpovídají teoretické předpovědi. Je potřeba počítat s drobnými odchylkami. Jak ale žáci poznají, že jsou odchylky ještě v souladu a my můžeme přijmout naši hypotézu? K tomu slouží různé statistické testy významnost. V tomto případě použijeme test dobré shody Chí – kvadrát. Tento test ověřuje, zda se četnosti získané měřením statisticky významně shodují/odlišují od teoretického předpokladu. V našem případě budeme zkoumat, zda se naměřený poměr výšky postavy ku délky od chodidel k pupku shoduje s očekávaným poměrem zlatého řezu. Nebudeme však porovnávat poměry, nýbrž pozorovanou délku od chodidel k pupku (P)

$= B3 * 0{,}618$

$= \frac{(D3-E3)^2}{E3}$

	A	B	C	D	E	F
1–2	Jméno a příjmení	Třída	Výška postavy v cm	Pozorovaná vzdálenost od chodidel k pupku v cm	Očekávaná vzdálenost od chodidel k pupku	$\frac{(P-O)^2}{O}$
3	Jaromír Jágr	9.A	189	120	116,8	0,087671233
4	David Pastrňák	9.A	183	112	113,1	0,010698497
5	Davi Krejčí	9.A	183	110	113,1	0,084969054
6	Dominik Hašek	9.A	185	116	114,3	0,025284339
7	Michal Frolík	9.A	185	116	114,3	0,025284339
8	Jakub Voráček	9.A	188	120	116,2	0,124268503
9						
10					$\sum_{i=0}^{n}\frac{(P_i-O)^2}{O} = \chi^2 =$	0,358175965
11						
12						

Obr. 24: Vzor tabulky a použité vzorce v MS Excel (screenshot)

$= SUMA(F3{:}F8)$

a očekávanou délku od chodidel k pupku (O). Tu získáme vynásobením výšky postavy krát $\frac{1}{\emptyset} \approx 0{,}618$. Nyní se vypočítá hodnota $\chi^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{(P_i - O)^2}{O}$, kde n je počet. Tato hodnota se následně porovná s kritickou hodnotou chí-kvadrát pro n-1 stupňů volnosti a hladinu významnosti 0,05 (kritická hodnota pro 5 stupňů volnosti a hladinou významnosti je 1,15 – viz cit.vfu.cz). Chí kvadrát vyšel přibližně 0,3581 < 1,15, takže můžeme přijmout hypotézu s rizikem 0,05% chybovosti.

Role učitele:

Učitel žákům ukáže a vysvětlí princip statistického testu Chí-kvadrát. Na interaktivní tabuli či projektoru promítne žákům postup.

Role žáků:

Ve skupinkách provedou test Chí-kvadrát.

Pozn. S tímto souborem dat se dá pracovat i v dalších hodinách, ve kterých se mohou žáci zabývat popisnou statistikou a pomocí tabulkového kalkulátoru vytvořit statistický soubor, který by popisoval rozložení výšky postavy žáků ve třídě. Žáci by mohli určit: průměrnou výšku, horní a dolní kvartil, medián, modus, vytvořit histogram četností a porovnat ho s Gaussovou křivkou.

7) Formulace závěrů a návrat k hypotéze

Žáci formulují závěry a ověřují, zda můžou hypotézu přijmout.

8) Hledání souvislostí

Žáci společně s učitelem hledají souvislosti, které souvisejí například s výskytem zlatého řezu v přírodě, nebo s tím, kde a jakým způsobem se využívají statistické metody.

5. Závěr

BOV vychází z konstruktivistických přístupů, navazující na práce J. Piageta a L. S. Vygotského, podle kterých se žák aktivně podílí na konstruování nového poznání, které zařazuje do svých již existujících poznatkových struktur. Pozornost se tak při výuce přesouvá na aktivitu žáka, zatímco se aktivita učitele oproti tradičnímu přístupu proměňuje. Učitel vytváří vhodné prostředí, podmínky či situace, kterými žáka provází. BOV rovněž navazuje na dílo J. Deweye, který jako první přišel s modelem bádání, jako modele pro poznávání skutečnosti.

BOV je komplexní přístup ke vzdělávání, který zasahuje do všech složek výuky, a je tedy více než vzdělávací metodou. Často bývá BOV spojováno s problémovou výukou, avšak přestože se s problémovou výukou v mnoha oblastech překrývá, neomezuje se BOV pouze na řešení problémů. Cílem a záměrem BOV je, aby se žáci aktivně účastnili procesu poznávání prostřednictvím bádání a osvojili si tak badatelské dovednosti a povahu vědy.

Zatímco zahraniční výzkumy BOV mají v didaktice přírodovědného vzdělávání poměrně dlouhou tradici, je BOV v didaktice matematiky relativně novou záležitostí. Přesto již existující teoretické rámce s BOV souvisejí a ve větší či menší míře badatelské přístupy využívají. BOVM má oproti BOV přírodovědných předmětů svá specifika. Těmi jsou různé druhy badatelských úloh, které mohou být podle svého původu dvojího druhu – vnější a vnitřní. Vnější otázky jsou takové otázky, které vyvstávají z vnějšího reálného světa a jsou řešitelné pomocí matematiky. Důležitou roli zde má matematické modelování. Badatelské úlohy vnitřního typu se zaobírají otázkami a problémy pocházející z matematiky samotné. Při jejich zodpovídání hraje důležitou roli vertikální matematizace, propojování jednotlivých matematických oblastí.

ICT podpora se nabízí v různých fázích BOV. Dynamičnosti, které umožňují DGS, se dá použít při zkoumávání a hledání vztahů a zákonitostí v geometrii a v BOVM mohou sloužit v úvodní motivaci, při hledání hypotézy a při jejím ověřování. Ověřování hypotézy, nebo matematické věty pomocí DGS přispívá k vnímání podstaty matematických důkazů. Pomocí tabulkových procesorů je možné zapojit do BOVM virtuální experimenty a počítačové simulace, zároveň lze pomocí tabulkových procesorů zpracovávat a matematicky vyhodnocovat badatelské úlohy z jiných přírodovědných předmětů. Jako vhodný prostředek pro BOVM se ukazují být dynamické pracovní listy, které žáka procesem bádání provází, umožňují mu pracovat vlastním tempem, umožňují mu experimentovat v dynamickém prostředí a dávají mu okamžitou zpětnou vazbu.

Použitá literatura

ABDELFATAH, Hussein. A Story-based Dynamic Geometry Approach to Improve Attitudes toward Geometry and Geometric Proof. *The International Journal on Mathematics Education*. 2011, 43 (3), s. 441–450

AUTOR David H. a Brendan PRICE. The Changing Task Composition of the US Labor Market: An Update of Autor, Levy, and Murnane (2003) [online]. 2013. Dostupné z: https://economics.mit.edu/ faculty/dautor/papers/inequality

ARTIQUE Michèle, Justin DILLON, Wynne HARLEN a Pierce LÉNA. Learning through inquiry [Online]. 2012. Dostupné z: https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/ minisites/action_internationale/learning_through_inquiry.pdf.

ARTIGUE, Michèle a Morten BLOMHØJ. Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM* [online]. 2013, **45**(6), 797-810. ISSN 1863-9690. Dostupné z: doi:10.1007/s11858-013-0506-6

ARTIQUE Michèle a Peter BABTIST. Inquiry in Mathematics Education [Online]. 2012. ISBN 978-3-00-040752-9. Dostupné z: http://www.fibonacci-project.eu/.

BABTIST Peter, Toni CHEHLAROVA, Mathias EHMANN, Peter GALLIN, Michael GERHÄUSER, Roman HAŠEK, Markus JETZER-CAVERSACCIO, Petar KENDEROV, Carsten MILLER, Pavel PECH, Vladimíra PETRÁČKOVÁ, Dagmar RAAB, Libuše SAMKOVA, Evgenia SENDOVA, Jörg TRIEBEL, Volker ULM, Haiko Vogel a Alfred WASSERMANN**.** *Implementing inquiry in mathematics education [online]. Fibonacci project,* 2012. ISBN 978-3-00-040752-9. Dostupné z: http://fibonacci.uni-bayreuth.de/fileadmin/Dokumente/startingpackage/companion/implementing_inquiry_mathematics_education_web.pdf

BANCHI, Heather a Randy BELL. The many levels of inquiry [online]. Science and children. 2008, 46 (2), s. 26-29. ISSN: 0036-8148. Dostupné z: http://www.gstboces.org/stem/docs/2019STEMArticle-Many-Levels-of-Inquiry.pdf

BERTRAND, Yves**.** *Soudobé teorie vzdělávání.* Praha: Portál, 1998. ISBN 80-7178-216-5.

BERZEL, Barbara. *Commputeralgebra im Mathematikunterricht. Ein Mehrwert aber wann?.* Münster: Waxmann verlag, 2012. ISBN 978-3-8309-7627-1

BÍLEK, Martin a Jaroslav HRUBÝ. *Počítačem podporovaný školní chemicky experiment jako prostředek badatelsky orientované výuky* [online]. 2014. Dostupné z: https://chemistrynetwork.pixel-online.org/data/SUE_db/doc/56_Chemistry%20-%20Bilek%20-%20Hruby.pdf

BÍLEK Martin, Jiří RYCHTERA a Antonín SLABÝ. *Konstruktivismus ve výuce přírodovědných předmětů* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2008. ISBN 978-80-244-1882-7

BLAŽEK Radek, Zuzana JANOTOVÁ, Eva POTUŽNÍKOVÁ a Josef BASL. Mezinárodní šetření Pisa 2018. Národní zpráva. Praha: Česká školní inspekce, 2019. ISBN 978-80-88087-24-3

BLOMØJ Morten a Tomas Højgaard JENSEN. Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA [online].* 2003, 22 (3), s. 123-139. DOI: 10.1093/teanat/22.3.123 Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/290429778 _Developing_mathematical_modelling_competence_Conceptual_clarification_and_educational_planning

BROUSSEAU, Guy. *The theory of didactical situations in Mathematics.* Dordrecht: Kluwer, 1979. ISBN 978-0-7929-4526-8

CIT.VFU.CZ. *Statistické tabulky* [online]. Dostupné z: https://cit.vfu.cz/statpotr/POTR/Teorie/tabulky. htm#chi2

ČINČERA Jan. Význam nezávislých expertních center pro šíření badatelsky orientované výuky v České republice. *Scientia in educatione [online].* 2014, 5 (1), s. 74-81. Dostupné z: https://doi.org/ 10.14712/18047106.1604

ČINČERA Jan a Veronika MAŠKOVÁ. GLOBE in the Czech Republic: a program evaluation. *Environmental Education Research*. 2011, 17 (4), s. 499-517. Dostupné z: https://doi.org/10.1080/ 13504622.2011.557497

ČINČERA, Jan. Rozvoj výzkumných kompetencí žáků na základní škole - zkušenosti z evaluace programu o Jizerských horách. *Envigogika: Charles University E-journal for Environmental Education.* 2011, 6 (3). ISSN 1802-3061. Dostupné z: http://dx.doi.org/10.14712/18023061.63

DEWEY, John. *Logic: The theory of inquiry.* New York: Henry hold and company, 1938. Dostupné z: https://academiaanalitica.files.wordpress.com/2016/10/john-dewey-logic-the-theory-of-inquiry.pdf

DI DIO Cinzia, Emiliano MACALUSCO a Giacomo RIZZOLATTI. The Golden Beauty: Brain response to Classical and Renaissance Sculptures [online]. *PLoS ONE.* 2007, 2 (11). DOI: 10.1371/journal.pone.0001201. Dostupné také z: https://www.researchgate.net/publication/ 5817749_The_Golden_Beauty_Brain_Response_to_Classical_and_Renaissance_Sculptures

DOSTÁL, Jiří. Badatelsky orientovaná výuka jako trend soudobého vzdělávání [online]. *E - pedagogium [online].* 2013 a, 13 (3), s. 81-93. DOI: 10.5507/epd.2013.034.

DOSTÁL, Jiří**.** *Badatelsky orientovaná výuka: pojetí, podstata, význam a přínosy* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015 a. ISBN 978-80-244-4393-5. Dostupné z:

https://www.researchgate.net/publication/278406065_Badatelsky_orientovana_vyuka_pojeti_podstata_vyznam_a_prinosy

DOSTÁL, Jiří. Experiment jako součást badatelsky orientované výuky [online]. *Trendy ve vzdělávání.* 2013 b, 6 (1), s. 9-19. ISSN 1805-8949. Dostupné z: https://tvv-journal.upol.cz/artkey/tvv-201301-0002_EXPERIMENT_JAKO_SOUCAST_BADATELSKY_ORIENTOVANE_VYUKY.php

DOSTÁL, Jiří. The definition of the term "Inquiry-based instruction" [online]. *International Journal of Instruction.* 2015 b, 8 (1), s. 69-82. e-ISSN: 1308-1470 DOI: 10.12973/iji.2015.826a. Dostupné také z: https://www.researchgate.net/publication/279293930_The_definition_of_the_term_Inquiry-based_instruction

DRIJVERS, Paul. Contexts in RME [video]. In: *Youtube* [online]. Publikováno 4. 12. 2018. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=ujqs2I9Kljo

EISENMANN Petr a Jiří PŘIBYL. Systematické experimentování vevýuce matematiky. In: *Sborník příspěvků 6. Konference Užití počítačů ve výuce matematiky* [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2013, s. 85-93. ISBN 978-80-7394-448-3 Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/ ~upvvm/ 2013/sbornik/sbornik/Sbornik_UPVM2013.pdf

FREUDENTHAL, Hans. *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Riedel, 1973. ISBN 978-94-010-2903-2

GAGO José Mariano, John ZIMAN, Paul CARO, Costas CONSTANTINOU, Graham DAVIES, Ilka PARCHMANN, Miia RANNIKMÄE a Svein SJØBERG. *Europe Needs More Scientists: Report by the High Level Group on Increasing Human Resources for Science and Technology.* Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2004. ISBN 92-894-8458-6

GIORDAN, André. Vers un modéle didactique dˇapprentissage allostérique. In: *Construction des savoirs, Obstacles & conflicts.* Montreál: Éditions Agency d'Arc et CIRADE, 1989, s. 240-257. ISBN: 2-89022-152-0

GLEICH, Stephanie. *Medien im Mathematikunterricht Band 6.* Hildesheim: Franzbecker Verlag, 2018. 978-3-88120-842-0

HAŠEK Roman a Pavel PECH. Program Geogebra v badatelsky orientované výuce matematiky. In: *Badatelsky orientovaná výka matematiky a informatiky s podporou technologií* [online]. České Budějovice: JCU, 2015. ISBN: *978-80-7394-531-2. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/stru/ katedry/m/samkova/gaju_komplet.pdf*

HEINZ Gaby, Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Heinz LAAKMANN, Hubert LANGLOTZ, Michael RÜSING, Florian SCHACHT, Reinhard SCHMIDT a Carsten Tietz. *Werkzeugkompetenzen – Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben* [online]. Menden: Medienstatt GmbH, 2017, s. 44-51 . ISBN 978-3-938052-15-0. Dostupné z: http://www.mnu.de/weko/Werkzeugkompetenzen_ 2017_MO.pdf

HEJNÝ Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola, matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4.

HEJNÝ Milan a František KUŘINA. *Konstruktivistický přístup k vyučování matematice.* Praha: MFI, č. 7., 1998, s. 385-395.

HILL, Graham. *Moderní psychologie.* Prah: Portál, 2004. ISBN 80-7178-641-1.

HRBÁČKOVÁ, Karla. Konstruktivismus – teoretická východiska. In: *Konstruktivismus a jeho aplikace v integrovaném pojetí přírodovědného vzdělávání.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2006, s. 7-16. ISBN 80-244-1258-6

JANOUŠKOVÁ S., NOVÁK, J. a MARŠÁK, J. Trendy ve výuce přírodovědných oborů z evropského pohledu. *Acta Facultatis Paedagiogicae Universitas Trnaviensis.* 2008, 2 (12), s. 129-132.

KANT, Immanuel. *Kritika čistého rozumu.* Praha: Oikomenh, 2001. ISBN 80-7298-035-1.

KAŠPÁRKOVÁ, Svatava. Od epistemologických východisek k teoriím učení: různé úhly pohledu. In: *Konstruktivismus a jeho aplikace v integrovaném pojetí přírodovědného vzdělávání.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2006, s. 17-29

KOPECKÝ, Jiří. Simulace náhodných množin. In: *Badatelsky orientovaná výka matematiky a informatiky s podporou technologií* [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2015. ISBN: *978-80-7394-531-2. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/samkova/gaju_komplet.pdf*

KORCOVÁ, Kateřina. Učí učitelé konstruktivisticky? In: *Svět výchovy a vzdělávání v reflexi současného pedagogického výzkumu: sborník anotací XV. konference České asociace pedagogického výzkumu s mezinárodní účastí ...: České Budějovice 12.-14. září 2007.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2007. ISBN 978-80-7040-987-9.

KUBICOVÁ, Svatava. Enviromentální vzdělávání žáků ZŠ a SŠ s edukační podporou „inquiry“ činností. In: *Sborník rozšířených anotací Balíčků odborných kompetencí [online]*. Ostrava: Ostravská univerzita, 2013, s. 56-59. ISBN 978-80-7464-354-5. Dostupné z: https://projekty.osu.cz/ okapousu/sbornik/sbornik_2_dil.pdf

LAROCHELLE Marie a Jacques DESAUTELS. *Á force de regarder, ca donne tojours la meme schose!*. Lval: Universit´Laval, 1990.

LERNER, Isaak Jakovlevič. *Didaktické základy metod výuky.* Praha: SPN, 1986.

Level Group on Increasing Human Resources for Science and Technology [online]. Brussel: European Commission, DG Research, Science and Society Programme, 2005. ISBN: 92-894-8458-6. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/259705752_Europe_Needs_More_ Scientists_Report_by_the_High_Level_Group_on_Increasing_Human_Resources_for_Science_and_Technology

LINN Maria C., Elisabeth A. DAVIS a Philip BELL. *Internet enviroments for science education* [online]. New Jersey: Lawrence Erlbaum, Mahwah, 1999. eISBN 978-14-1061-039-3. Dostupné z: doi: *10.4324/9781410610393*

LIVIO, Mario. *Zlatý řez: příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Argo, 2006. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 80-7203-808-7.

Mathcentral. Math Beyond School. In: *mathcentral-uregina.ca* [online]. [cit. 2020-12-08]. Dostupné z: http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Art/DaVinci.html

MARRADES Rámon a Ángel GUTIERRéZ. Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics. 2000, 44 (1–2), s 87–125.

MAREŠ Jiří a Peter GAVORA**.** *Anglicko - český pedagogický slovník.* Praha: Portál, 2013. 978-80-262-0872-3

MAREŠ, Jiří. Dětské interpretace světa a žákovo pojetí učiva. In: *Psychologie pro učitele.* Prah: Portál, 2001. 80-86078-50-7

MOLNÁR Josef, Slavomíra SCHUBERTOVÁ a VLadimír VANĚK. *Konstruktivismus ve vyučování matematice* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2008. Dostupné z: http://esfmoduly.upol.cz/texty/konstr_m.pdf

MŠMT. *Hlavní směry vzdělávací politiky ČR do roku 2030* [online]. Praha: 2019. Dostupné z: https://www.msmt.cz/file/51582/

MŠMT. *Strategie digitálního vzdělávání do roku 2020* [online]. 2014. Dostupné z: https://www.msmt.cz/uploads/DigiStrategie.pdf.

National research council**.** *National science education standarts.* Washington, DC: National Academy Press, 1996.

NEZVALOVÁ, Danuše. *Inovace v přírodovědném vzdělávání.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. ISBN 978-80-244-2540-5

NEZVALOVÁ, Danuše. *Konstruktivismus a jeho aplikace v integrovaném pojetí přírodovědného vzdělávání.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2006. ISBN 80-244-1258-6

NOCAR David & Eva BÁRTKOVÁ. Výskyt zlatého čísla φ v přírodě [online]. In: *Matematyka w przyrodzie - matematyka i przyroda w kształceniu powszechnym Edition: 1*. Wydawnicteo Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Nowym Sączu. 2011. Dostupné z: https://www.researchgate.net/ publication/296702616_Vyskyt_zlateho_cisla_ph_v_prirode

NOCAR David, Pavla POLEJOVÁ a Jitka LAITOCHOVA. ICT podpora badatelsky orientovaného přístupu ve výuce matematiky na 2. stupni základních škol [online]. *South Bohemia Mathematical Letters.* 2017, 25 (1), s. 66-86. ISSN 2336-2081. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/ uploads/Nocar.pdf

NOCAR David a Tomáš ZDRÁHAL**.** The Potential of Dynamic Geometry for Inquiry Based Education [online]. In: 7*th International Conference on Education and New Learning Technologies (EDULEARN 2015).* Barcelona: EDULEARN15 Proceedings, 2015. ISBN 978-84-606-8243-1

NOCAR David a Tomáš ZRÁHAL**.** Badatelsky orientovaná výuka s Cabri v přípravě budoucích učitelů*.* In: *Sborník příspěvků 7. konference Užití počítačů ve výuce matematiky.* České Budějovice: Jihočeská univerzita. 2015*,* s. 174-195. ISBN 978-80-7395-549-7.

NOVÁK Bohumil a Eva NOVÁKOVÁ. Inquiry based mathematics education (IBME) and its reflection by primary school teachers [online]. *Scientific Issues Jan Długosz University in Czestochowa.* CZESTOCHOWA: JAN DŁUGOSZ UNIVERSITY in CZESTOCHOWA, 2014, 19, s. 121-128. ISSN 1896-0286 2014. Dostupné z: http://yadda.icm.edu.pl/baztech/element/bwmeta1.element.baztech-7342e289-77b8-4765-ba2c-534f7a2acf28

NOVÁKOVÁ, Hana. Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku. *Scientia in educatione* [online]. 2014, **4**(2), 20-51. ISSN 1804-7106. Dostupné z: doi:10.14712/18047106.70

NOVOTNÁ Jarmila, Alena PELANTOVÁ, Hana HRABÁKOVÁ a Magdaléna KRÁTKÁ. Příprava a analýza didaktických situací [Online]. Praha: JČMF 2006. Dostupné z: https://people.fjfi.cvut.cz/ novotant/jarmila.novotna/D02%20DidSituace.pdf

NOVOTNÝ, Petr. Výukový proces z pohledu současné školní didaktiky. In: *Vybrané kapitoly ze školní pedagogiky.* Brno: MU FF, 2002. ISBN 80-210-3020-8.

O metodě [online]. 2014. Dostupné z: http://badatele.cz/cz/o-metode.

OECD. *The future of education and skills - Education 2030* [online]. Paris: OECD, 2018. Dostupné z: https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf

OSBORNE Jonathan a Justin DILLON. Science Education in Europe: Critical Reflections [online]. London: King's College London. 2008. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/ 252404504_Science_Education_in_Europe_Critical_Reflections

PAPÁČEK, Miroslav. Badatelsky orientované vyučování - cesta pro biologické vzdělávání generací Y,Z a alfa? [online] *Scientia in educatione.* 2010 b, 1 (1), s. 33-49. ISSN 1804-7106. Dostupné z: https://ojs.cuni.cz/scied/article/view/4/5

PAPÁČEK, Miroslav. Limity a šance zavádění badatelsky orientovaného vyučování přírodopisu a biologie v České republice*.* In: *České republice 2010 a bydatelsky orientované učení* [online].České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2010 a, s. 145-162. ISBN 978-80-7394-210-6. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kbi/wp-content/uploads/2018/ 11/DiBi2010.pdf

PECH, Pavel. The use of dynamic geometry systems (DGS) and computer algebra systems (CAS) in IBME [online]. *Implementing inquiry in mathematics education.* 2012. ISBN 978-3-00-040752-9. Dostupné z: http://fibonacci.uni-bayreuth.de/fileadmin/Dokumente/startingpackage/ companion/implementing_inquiry_mathematics_education_web.pdf

PECH Pavel, Lenka ČINČUROV8, Martin GÜNZEL, Radka HÁJKOVÁ, Roman HAŠEK, Antonín HRANÍČEK, Martin KAZDA, Jiří KOPECKÝ, Michala KOTLASOVÁ, Vladimíra PETRÁKOVÁ, Libuše SAMKOVÁ, Tereza SUCHOPÁROVÁ, Václav ŠIMANDL a Jiří VANÍČEK. *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2015. ISBN 978-80-7394-531-2.

PETR, Jan. Biologická olympiáda - inspirace pro badatelsky orientované vyučování přírodopisu a jeho didaktiku. In: *Didaktika biologie v české republice 2010 a badatelsky orientované vyučování* [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2010, s. 136-144. ISBN 978-80-7394-210-6. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kbi/wp-content/uploads/2018/11/ DiBi2010.pdf

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Praha: Prometheus. 2004. ISBN 80-7196-276-7.

PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. ISBN 978-80-7358-083-4.

PIAGET, Jean. La psychogénese des connaissances et sa signification épistémologique. *Centre Royaumont pour une sciences de l'homme, Théories du langage, théories de l'apprentissage.* Paris : Seuil, 1979.

PIAGET, Jean. *Psychologie inteligence.* Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-309-9

PRIMAS. IBL implementation survey report. [Online] 2011. Dostupné z: https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/PRIMAS_D-9.3_IBL-Implementation-survey-report.pdf.

PROKOP Daniel a Tomáš DVOŘÁK. *Analýza výzev vzdělávání v České republice* [online]. Praha: Eduzměna nadační fond, 2019. [cit. 2020-09-22]. Dostupné z: https://eduzmena.cz/wp-content/ uploads/2019/04/Eduzme%CC%8Cna_A4_Studie-Z%CC%8CA%CC%81CI_III.pdf

PRUCHA Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník.* Praha: Portál, 2003. ISBN 80-7178-772-8

PUPALA, Branislav. Epistemologická východiska vyučovania a didaktiky. In: *Předškolní a primární pedagogika.* Praha: Portál, 2001. ISBN 978-80-7367-828-9

RADVANOVÁ, Sabina, Věra ČÍŽKOVÁ a Patrícia MARTINKOVÁ. Mění se pohled učitelů na badatelsky orientovanou výuku? *Scientia in educatione* [online]. 2018, **9**(1). ISSN 1804-7106. Dostupné z: doi:10.14712/18047106.1054

ROBOVÁ, Jarmila. *Integrace ICT jako prostředek aktivního přístupu žáků k matematice.* Praha: Pedagogická fakulta UK, 2012. ISBN 978-80-7290-583-6

ROCARD Michel, Peter CSERMELY, Doris JORDE, Dieter LENZEN, Harriet WALBERG-HENRIKSSON a Valerie HEMMO. *Science Education NOW: A Renew Pedagogy for the Future of Europe* [online]. Brussels: European Commision, 2007. Dostupné z: https://www.eesc.europa.eu/sites/default/ files/resources/docs/rapportrocardfinal.pdf

ROUBÍČEK, Filip. Badatelsky orientované aktivity v geometrii. In: Sborník konference: *Setkání učitelů matematiky - všech typů škol 2012* [online]. Plzeň: Vydavatelský servis, 2012, s. 161. ISBN 978-80-86843-51-3.

ROUBÍČEK, Filip**.** Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice II. In: *Sborník konference: Setkaní učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014.* Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 169-174. ISBN 978-80-86843-45-2.

RYPLOVA, Renata a Jarmila REHÁKOVÁ. Přínos badatelsky orientovaného vyučování (BOV) pro environmentální výchovu: Případová studie implementace BOV do výuky na ZŠ. *Envigogika* [online]. 2011, **6**(3). ISSN 1802-3061. Dostupné z: doi:10.14712/18023061.65

SAMKOVÁ, Libuše, Alena HOŠPESOVÁ, Filip ROUBÍČEK a Marie TICHÁ. Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione* [online]. 2015, **6**(1), 91-122 [cit. 2020-12-07]. ISSN 1804-7106. Dostupné z: doi:10.14712/18047106.154

SAMKOVÁ Libuše, Alena HOŠPESOVÁ a Marie TICHÁ**.** Role badatelsky orientované výuky matematiky v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. *Pedagogika* [online]. 2016, 66 (5), s. 549-569. Dostupné z: https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=11619&lang=cs

SAMKOVÁ, Libuše. Badatelsky orientované vyučování. In: *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií* [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2015. ISBN 978-80-7394-531-2 Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/samkova/gaju_ komplet.pdf

SAMKOVÁ, Libuše. Badatelsky orientované vyučování matematiky. In: *Sborník 5. konference Užití počítačů ve výuce matematiky* [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2011. ISBN 978-80-7394-324-0. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2011/sbornik/sbornik/Sbornik_ UPVM2011.pdf

SAMKOVÁ, Libuše. Badatelsky orientované vyučování matematie v přípravě budoucích prvostupňových učitelů. In: EME Proceedings [online]. Olomouc: Univerzita Palackého, 2016, s. 9-14. ISBN 978-80-905281-3-0. Dostupné z: http://eme.upol.cz/proceedings/EME2016.pdf

SAMKOVÁ, Libuše. Jak velká je třetina koule? *South Bohemia Mathematical Letters.* 2012, 20 (1), s. 25-29. ISSN 1804-1450. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/ samkova1.pdf

SAMKOVÁ, Libuše. Modelování reálných situací v matematice na SŠ - Stěhovací problém. *Sousth Bohemia Mathematical Letters.* 2013, 21 (1), 67-75. ISSN 1804-1450. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/samkova_web.pdf

SAMKOVÁ, Libuše. Pracovní listy pro badatelsky orientované vyučovaní matematiky. In: *Sborník konference Setkaní učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2012.* Plzeň : Vydavatelský servis, 2012, s. 167-172. ISBN 978-80-86843-23-0.

SAMKOVÁ, Libuše. Uplatnění otevřeného přístupu k matematice v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ – empirická studie v kontextu badatelsky orientovaného kurzu. *Studia paedagogica* [online]. 2018, **23**(3), 49-67. ISSN 2336-4521. Dostupné z: doi:10.5817/SP2018-3-3

SAMKOVÁ, Libuše. Ohlédnutí za sedmi podobami badatelsky orientovaného vyučování matematice [online]. In: *Setkání učitelů matematiky 2016*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2016. s. 113-118. ISBN 978-80-86843-51-3. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/samkova/srni2016.pdf

SAMKOVÁ, Libuše. Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice I. In: *Sborník konference Setkaní učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014.* PLzeň: Vydavatelský servis, 2014. s. 186-192. ISBN 978-80-86843-45-2.

SCHROEDERS, Nicolai. Simulationen im Stochastic Unterricht. In: *Mediem im Mathematikunterricht. MaMut - Materialien für den Mathematikunterricht Band 6.* Hildesheim: Verlag Franzebecker, 2018. ISBN 978-3-88120-842-0

STELZNER, Ruben. Der Goldene Schnitt - Das mysterium der Schönheit [online] 2003. Dostupné z: http://www.golden-section.eu/kapitel5.html.

STUCHLÍKOVÁ, Iva. Badatelsky orientované vyučování. In: *Didaktika biologie v České republice 2010 a badatelsky orientované učení [online].* České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2010, s. 129-135. ISBN978-80-7394-210-6. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kbi/wp-content/uploads/2018/11/DiBi2010.pdf

SUCHMAN, J. Richar**d.** *Developing of inquiry.* Chicago: Science research associates, 1966.

ŠKODA Jiří a Pavel DOULÍK. Základní teoretická paradigmata psychogeneze dětských pojetí [online]. In: *Sborník z mezinárodní konference "Pedagogicko - psychologické aspekty dětských pojetí".* Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, 2005, s. 117–131. ISBN 80-7044-740-0. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/fsps/podzim2013/np2270/um/Skoda_Doulik_Vygotskyj.pdf

ŠVEC, Vlastimil. Konstrukce poznání. In: *Konstruktivismus a jeho aplikace v integrovaném pojetí přírodovědného vzdělávání.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2006, s. 30-40. ISBN 80-244-1258-6

TAUTZ, Jürgen. *Fenomenální včely: biologie včelstva jako superorganizmu*. Praha: Brázda, 2010. ISBN 978-80-209-0379-2.

TICHÁ Marie a Alena HOŠPESOVÁ. Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice III. In: *Sborník konference Setkaní učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014.* Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 217-224. ISBN 978-80-86843-45-2.

TOMÁŠEK Vladislav, Josef BASL a Svatava JANOUŠKOVÁ. *Mezinárodní šetření Timms 2015. Národní zpráva.* Praha: Česká školní inspekce, 2019. ISBN 978-80-88087-07-6

VÁCHA, Zbyněk a Tomáš DITRICH. Efektivita badatelsky orientovaného vyučování na primárním stupni základních škol v přírodovědném vzdělávání v České republice s využitím prostředí školních zahrad. *Scientia in educatione* [online]. 2016, **7**(1), 65-79. ISSN 1804-7106. Dostupné z: doi:10.14712/18047106.293

VANÍČEK, Jiří. Příprava učitelů na používání technologií při výuce matematiky a její rizika. *Pedagogika* [online]. 2010, 60 (2). ISSN 2336-2189 Dostupné z: https://pages.pedf.cuni.cz/ pedagogika/ ?p=934&lang=cs

VONDROVÁ Naďa, Jana NOVOTNÁ a Marie TICHÁ. Didaktika matematiky: historie, současnost a perspektivy s důrazem na empirické výzkumy. In: *Oborové didaktiky: vývoj - stav - perspektivy* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2015. ISBN 978-80-210-7884-0. Dostupné z: https://munispace.muni.cz/library/catalog/book/549

VYGOTSKIJ, Lev Semjonovič. *Myšlení a řeč.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970. s 196-174.

White Wolf Consulting. *Důvody nezájmu žáků o přírodovědné a technické obory.* Výzkumná zpráva [online]. 2009. Dostupné z: http://vzdelavani.unas.cz/duvody_nezajmu_obory.pdf

ZÁMEČNÍKOVÁ Veronika. Badatelsky orientovaná výuka se zaměřením na obecnou a anorganickou chemii. In: *Metodologické přístupy v pedagogických a doktorských výzkumech* [online]. Praha : Univerzia Karlova, 2013, s. 54-61. ISBN 978-80-7290-698-4. Dostupné z: https://pages.pedf.cuni.cz/konference13/files/2013/12/Sbornik-2013-Metodologick%c3%a9-p%c5%99%c3%adstupy.pdf

Seznam obrázků

Seznam příloh

Příloha č. 1: Thales – pracovní list pro žáka

Thales

Badatelský pracovní list

Popiš svými slovy, na co jsme právě přišli, při předchozí aktivitě v kruhu.

____

____

____

____

____

____

____

Vyjádři situaci geometricky. Načrtni geometrický nákres, který bude vystihovat předešlou situaci.

3) *Kladení otázek a hledání badatelské otázky*

____

____

____

____

4) *Formulace hypotézy*

Otevři applet *Thaletova kružnice*.

Popiš své pozorování. Zaznamenej své odpovědi.

Co nejpřesněji zformuluj hypotézu, ve tvaru matematické věty.

____

____

____

____

____

Thaletova věta:

5) Důkaz Thaletovy věty:

Otevři applet *Důkaz Thaletovy věty* a dokaž Thaletovu větu. Své pozorování, nápady a výpočty zaznamenej v rámečku.

Důkaz Thaletovy věty.

6) *Formulace závěrů a návrat k hypotézy*

____

____

____

____

Thaletova kružnice:

____

____

____

____

7) Hledání souvislostí – Použití Thaletovi věty v konstrukčních úlohách

Příloha č. 2 Středový a obvodový úhel – pracovní list pro žáka

Středový a obvodový úhel

Badatelský pracovní list

1) Narýsuj kružnici k, obvodový oblouk AB a vyznač jeho středový a obvodový úhel.

2) *Badatelská otázka*

Jaký je vztah mezi středovým a obvodovým úhlem?

3) *Vytváření hypotézy*

Pomocí GeoGebry vypozoruj, jaký je vztah mezi středovým a obvodovým úhlem a vytvoř hypotézu.

Hypotéza:

____

____

____

____

____

3) *Důkaz hypotézy*

Otevři applet: *Středový a obvodový úhel – důkaz* a potvrď nebo vyvrať svoji hypotézu. Své poznámky, postřehy, nápady a výpočty zaznamenávej do rámečku.

Do rámečku pečlivě zaznamenej důkaz prvního případu.

4) *Formulace závěrů a návrat k hypotézy*

____

____

____

____

____

____

____

5) *Hledání souvislostí*

Vztahu mezi středovým a obvodovým úhlem lze využít při konstrukčních úlohách.

Příloha č. 3 Experimentální směsi – pracovní list pro žáky

Experimentální směsi

Badatelský pracovní list

Slovní úloha

Ze dvou druhů čaje byla vytvořena směs o hmotnosti 10 kg. Cena čaje A byla 160 Kč/kg a čaje B je 170 Kč/kg. Cena směsi je 166 Kč/kg. Kolik kilogramů každého druhu bylo třeba smíchat?

1) Odhadni kolik kilogramů čaje A a kolik kilogramů čaje B bylo třeba smíchat?

2) V MS Excel experimentálně ověř svůj odhad. Napiš, jak jsi postupoval a popiš myšlenku, která za tím postupem byla.

4) Shoduje se tvůj odhad s výsledkem, který jsi získal v Excelu?

____

____

____

Příloha č. 4 Rodokmen včely – pracovní list pro žáky

Rodokmen včely medonosné

Obr.1: Včela medonosná (commons.wikimedia.org)

V jednom včelstvu se nacházejí: Královna, dělnice a trubci. Pouze královna může snášet vajíčka. Z oplozeného vajíčka se vylíhne samička, ze které se stane buď dělnice, nebo další královna (podle péče). Z neoplozeného vajíčka se vylíhne trubec.

1) Nakresli rodokmen trubce. Kolik předků má trubec v 5. generaci?

Trubec má v 5. generaci ____ předků.

2) Podívej se na počet předků v jednotlivých generacích. Na základě svého pozorování odhadni, kolik předků bude mít trubec v 7. generaci.

Zde napiš svůj odhad

3) Porovnej svou domněnku se spolužákem/spolužačkou a prodiskutujte na co jste přišli. Jaké pravidlo se v této posloupnosti ukrývá?

____

____

____

____

____

Název této posloupnosti:

4) Rekurentní vyjádření ________________ posloupnosti.

5) Pomoci Excelu urči 20, 21 a 22 člen této posloupnosti.

6) Vypočítej hodnoty řetězového zlomku a zapiš je vedle ve tvaru zlomku:

$1+\frac{1}{1}=$

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=$

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=$

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=$

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=$

Všimnul sis něčeho nápadného?

____

____

____

____

7) Ruční výpočet

8) Jaká je podíl po sobě jdoucích členů Fibonacciho poslopnosti? Pomocí Excelu vypočítej hodnotu podílů prvních dvaceti členů Fibonacciho posloupnosti.

Co je to za číslo?

Příloha č. 5 Mona Lisa – pracovní list pro žáka

Mona Lisa

Badatelský pracovní list

V této úloze se budeme zabývat obrazem Mona Lisy. Mnozí badatelé tvrdí, že ji Leonardo Da Vinci namaloval v proporcích zlatého řezu. Na internetu můžeme nalézt mnoho obrázků, které zobrazují, že se dá do obrazu Mona Lisy vepsat několik zlatých obdélníků. Např. pokud narýsujeme obdélník, kolem její tváře, zjistíme, že se jedná o zlatý obdélník. Pokud rozdělíme tento obdélník přímkou, která prochází jejími oči, dostaneme další zlatý obdélník. Nebo lze spatřit obraz Mona Lisy se zlatou spirálou, která se rozvíjí z jejího nosu a obtáčí se kolem její brady, temene hlavy a končí u jejích rukou.

1) ***Badatelská otázka***

Ve skupině navrhněte badatelskou otázku.

____

____

____

____

2) ***Formulace hypotézy***

Jaká je vaše hypotéza?

____

____

____

____

____

____

3) Návrh postupu ověření hypotézy

Navrhněte a popište postup, jakým budete hypotézu ověřovat. K ověření použijte program

GeoGebra.

4) Závěr a návrat k hypotéze

Ověření proveďte každý samostatně a společně prodiskutujte závěry z vašeho pozorování a sepište je.

Příloha č. 6 Antický ideál krásy – pracovní list pro žáky

Antický ideál krásy

Badatelský pracovní list

1) *Kladení otázek a výběr badatelské otázky*

Prohlédněte si předložené obrázky. Jaké otázky vás k tomu napadají?

Vybraná badatelská otázka:

____

____

____

2) *Formulace hypotézy*

Naše hypotéza:

____

____

____

____

____

____

3) *Plánování, příprava a provedení měření*

Výsledky svého měření zaznamenejte do tabulky v Excelu.

4) *Formulace závěrů a návrat k hypotéze*

5) *Hledání souvislostí*

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Jacob Mílek
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2020

Název práce:	ICT podpora badatelsky orientovaného vzdělávání matematiky na 2. stupni základních škol
Název práce v angličtině:	ICT support of inquiry – based mathematics education at secondary school
Anotace:	Cílem této práce bylo vytvoření souboru úloh pro badatelsky orientovanou výuku matematiky, podporované ICT. Na základě literární rešerše dostupných domácích i zahraničních zdrojů je v teoretické části vymezeno a charakterizováno badatelsky orientované vzdělávání, jsou uvedena specifika badatelsky orientovaného vzdělávání matematice. Dále je vymezena výuka matematiky podporovaná informačními a digitálními technologiemi a demonstrováno, jak mohou tyto technologie efektivně podpořit badatelsky orientované vzdělávání matematice. V praktické části bylo vytvořeno 6 badatelských úloh pro žáky druhého stupně základní školy. Tyto úlohy obsahují pracovní listy pro žáky včetně odkazů na dynamické applety a metodické listy pro učitele s popisem úloh.
Klíčová slova:	Badatelsky orientovaná výuka matematiky, ICT podpora matematiky, konstruktivismus, didaktika matematiky, GeoGebra
Anotace v angličtině:	The aim of the thesis was to create a set of tasks for inquiry-based mathematics education, supported by ICT. In the theoretical part of the thesis, the inquiry-based education and inquiry-based mathematics education is defined and characterised, based on a research of available resources. The mathematics education supported with ICT is further defined and characterised alongside effective support materials that could be used in inquiry based mathematics education.
Klíčová slova v angličtině:	Inquiry based mathematics education, ICT support in mathematics education, didactics of mathematic, GeoGebra