UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Jakub Dus

3. ročník

Obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání maior a Anglický jazyk se zaměřením na vzdělávání minor

Výuka matematického tématu funkce na základních a středních školách s podporou aplikace Photomath

Bakalářská práce

Olomouc 2022 Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a použil jen prameny uvedené v seznamu literatury. Souhlasím, aby tato práce byla uložena na Univerzitě Palackého v Olomouci v knihovně Pedagogické fakulty a zpřístupněna ke studijním účelům.

V Olomouci dne 17. 4. 2022 ………………………..………..

podpis

Poděkování

Děkuji všem stranám, které se podílely na úspěšném sepsání této práce. Zejména potom mojí vedoucí práce, doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc..

Obsah

1 Úvod

Žáci dnešní doby se potkávají s řadou překážek. Mají k dispozici nespočetné množství informací, které musí zpracovat. Ve škole se tyto informace snaží získávat v cílených okruzích, které mají za úkol žáky vybavit kompetencemi nezbytnými pro každodenní život. Nicméně žijeme v době internetové, kde jsou informace dostupné ihned a na požádání. To je důvod, proč se v této práci zaměříme na používání mobilní aplikace při výuce matematiky. Znalost využití této aplikace může výrazně usnadnit proces učení, protože žáci mohou dostat okamžitou zpětnou vazbu na příklad, i bez pomoci učitele. V této práci se budeme zaměřovat na příklady, které budou sloužit k demonstraci užitečnosti již výše zmíněné aplikace Photomath.

Aplikaci Photomath jsme si vybrali proto, že nabízí spoustu výhod. Nejen že aplikace umí příklad vypočítat téměř okamžitě, zároveň umí poskytnout postup řešení příkladu. Toto řešení lze postupně odkrývat dle potřeby, a to od základních kroků, až po detailní postupy výpočtu. Díky tomuto stylu odkrývání může aplikace být výborným nástrojem pro proces učení jak na základních, tak i středních školách. Kroky, které bude žák ovládat může zvládnout sám, oblasti, které plně neovládá může na druhou stranu prozkoumat v aplikaci do nejmenších detailů. Další velkou výhodou aplikace je ta, že daný příklad není nutné zadávat ručně, nýbrž je možné ho přímo naskenovat pomocí fotoaparátu. Toto řešení zadávání do aplikace umožní velkou časovou úsporu oproti klasickému zadávání, na které můžeme být zvyklí z aplikací jako je například Wolframcloud.

Ve světě mobilních aplikací je dnes spoustu možností, které slouží k řešení matematických problémů. Z tohoto důvodu si v první kapitole této práce představíme několik populárních aplikací. Shrneme si jejich dostupnost, cenu, pole zaměření a jejich výhody a nevýhody. Díky tomu si uděláme obrázek o situaci na trhu s aplikacemi. Tento souhrn a popis aplikací vznikl na základě uživatelské zkušenosti autora práce.

Třetí, ne však méně důležitou kapitolou této práce bude obecný popis jednotlivých druhů funkcí. Cílem této kapitoly bude stručně popsat specifika jednotlivých funkcí tak, abychom mohli v další části práce tyto teoretické znalosti uplatnit při vyšetřování jejich průběhu. Dodáváme zde však, že téma funkce je rozsáhlé a dala by se něm postavit samostatná práce, což není náš cíl, proto se zde snažíme pouze vytáhnout ty nejdůležitější vlastnosti. Mezi použitými zdroji však můžeme najít odkazy a citace, které se touto problematikou zabývají více do hloubky. Ministerstvo školství určilo rámcový vzdělávací program 2021 tak, že se základní školy zaměřují spíše na jednodušší práci s funkcemi a nezkoumají celý jejich průběh. Z tohoto důvodu se naše práce se zabývá zejména funkcemi na úrovni středních škol. Základním kamenem této teoretické části práce proto byla učebnice: „Matematika pro gymnázia – Funkce“.

V praktické části této práce se budeme zabývat vyšetřováním průběhu funkce. Pro každý typ funkce si předvedeme jeden vzorový příklad, který vyřešíme nejdříve bez, a následně s pomocí aplikace Photomath. Cílem praktické části je demonstrovat časovou úsporu a přesnost aplikace, oproti ručním výpočtům. Pro lepší představu o tom, jak prostředí aplikace vypadá, tato bakalářská práce obsahuje snímky obrazovky pořízené při používání aplikace. Na úplný konec každého z příkladů přiložíme i snímek obrazovky samotného grafu funkce. Všechny výše zmíněné snímky byli pořízený přímo autorem při práce s aplikací.

Hlavním cílem této práce je ukázat novou možnost výpočtů příkladů za pomocí chytrého zařízení. Za dílčí cíle považujeme shrnutí tématu funkce, vyjmenování a popis jejich vlastností, vytvoření krátkého přehledu jednotlivých typů funkce, a nakonec využití těchto poznatků při praktickém vyšetřování průběhu funkcí.

Posledním bodem této bakalářské práce bude závěr kde se pokusíme shrnout průběh práce, zhodnotíme, jak práce postupovala, uvedeme případné komplikace a podíváme se, jestli byly cíle práce naplněny. Budeme také řešit otázku užitečnosti proti možnému zneužívání aplikace při výuce.

2 Seznámení s mobilními aplikacemi

V první kapitole této práce se seznámíme s mobilními aplikacemi, které jsou určeny k řešení matematických problémů, zejména pak těch, jež se týkají studia na základních a středních školách. Cílem této části práce bude vytvořit přehled o možných alternativách k aplikaci Photomath, na kterou se budeme v naší práci zaměřovat. Podíváme se na nejpoužívanější mobilní aplikace dostupné jak přes platformu Obchod Play (aplikace společnosti Google), tak i přes konkurenční platformu App Store (aplikace společnosti Apple)

V této části práci se budeme zaměřovat na různé mobilní aplikace, které přímo slouží k výpočtu matematických problémů, nikoliv procvičování matematiky. Představíme si několik různých aplikací, shrneme si jejich výhody a nevýhody a pokusíme se jejich využití zařadit do praxe.

2.1 Wolfram Cloud

Cena aplikace: zdarma ke stažení přes Obchod Play nebo App Store

Uživatelský jazyk: angličtina

Výhody: Aplikace zvládá i výpočty na úrovni vysoké školy. Dále pak funguje na bázi ukládání do cloudu, což umožňuje velmi jednoduše pracovat z mobilu na dokumentu, který byl založen a upravován na počítači. Aplikace sama nabízí možnosti dalšího postupu, například vykreslení grafů, spočtení determinantu nebo nám aplikace nabídne další možné výpočty. Soubory je možno sdílet pomocí linku, popřípadě p aplikace obsahuje nápovědu, kde je vysvětleno, co jednotlivé příkazy dělají

Nevýhody: aplikace je kompletně v anglickém jazyce, tím pádem může být obtížnější zadávat příkazy které bychom chtěli udělat, je potřeba jistá znalost matematické angličtiny a doslovné příkazy; pro zobrazení starších souborů je potřeba platit si předplatné

Praktické využití: Aplikaci lze využít především ke studiu vysoké školy nebo při denní práci se složitějšími matematickými výpočty.

Shrnutí: Tato aplikace má velký potenciál, ale k jeho plnému využití je potřeba hlubší pochopení této aplikace a jejích jednotlivých příkazů. Překážkou může být i nedostatečná znalost anglického jazyka. Nicméně po překonání těchto překážek může být aplikace velice užitečná pro všechny, kteří potřebují řešit složité matematické problémy. Po shrnutí všech proměnných usuzujeme, že tato aplikace není velmi vhodná pro studenty základních a středních škol.

2.2 Microsoft Math Solver

Cena aplikace: zdarma ke stažení přes Obchod Play nebo App Store

Uživatelský jazyk: Aplikace má na výběr celkem třicet sedm různých jazyků včetně českého jazyka nebo například angličtiny.

Výhody: Aplikace při prvním otevření nabízí širokou škálu různých jazyků. Používání je velice intuitivní a pomocí aplikace je možné vyřešit spoust druhů příkladů, například logaritmy, goniometrické funkce, derivace a integrály. Příklady je možno řešit třemi způsoby. První způsobem je naskenování matematického problému přes fotoaparát zařízení. Aplikace umí převést psané písmo do digitální podoby. V případě potřeby lze tuto podobu upravit ručním zadáváním a dopisováním do rovnice přímo v zařízení, popřípadě můžeme celý příklad napsat rovnou do zařízení. Posledním způsobem zadávání je kombinace obou předchozích metod, která spočívá v psaní prstem, popřípadě stylusem přímo na chytré zařízení. Aplikace také nabízí možnost procvičovat si příklady které byli dříve do aplikace vloženy.

Nevýhody: Aplikace může být žáky na školách zneužívána k psaní domácích úkolů místo jejich pouhé kontroly. Díky rychlosti a flexibilitě této aplikace se zde nabízí otázka: „Proč se učit složité postupy které nám během chvíle umí chytré zařízení nabídnout?“.

Praktické využití: Tato aplikace může sloužit jako pomocný nástroj při domácím samostudiu. Dále pak k řešení příkladů na základních a středních školách rychle a efektivně díky možnosti naskenování celého příkladů místo ručního zadávání každé hodnoty do klasické kalkulačky.

Shrnutí: Při zkoumání aplikace Microsoft Math Solver jsme narazili na velmi pozitivních vlastností aplikace. Je výborně zpracovaná, umí spočítat všechny běžné příklady na úrovni základní a střední školy a zobrazuje řešení v krocích. Jako velikou přednost této aplikace musíme označit možnost přímého vyfocení příkladu. Tato možnost výrazně snižuje časovou náročnost při řešení příkladů a tím pádem může při výuce zbýt více času například na praktické využití konkrétních příkladů, namísto zdlouhavých výpočtů.

2.3 Photomath

Cena aplikace: zdarma ke stažení přes Obchod Play nebo App Store

Uživatelský jazyk: Aplikaci je možno využívat v celkem třiceti dvou různých jazycích včetně českého jazyka nebo například angličtiny.

Výhody: Používání aplikace je velmi jednoduché, navíc lze v aplikaci nalézt i krátká videa, která vysvětlují, jak danou aplikaci používat. Aplikace dokáže řešit velké množství matematických problémů jako např. rovnice, přirozený i dekadický logaritmus, limity, integrály či derivace. Zadávat matematické problémy do aplikace lze dvěma způsoby. První způsob je pomocí funkce fotoaparát, kdy lze matematický problém naskenovat a převést do digitální podoby přímo z přímo z psané formy. Druhou možností je funkce kalkulačka, kdy příklad je zadáván ručně. V obou případech aplikace poskytne podrobný postup řešení, včetně vysvětlivek, je tak snazší pochopit princip daných matematických výpočtů. Aplikace ukládá již jednou počítané příklady do paměti a je možnost si je znovu procvičovat.

Nevýhody: Aplikace velmi usnadňuje počítání a na školách mezi studenty či žáky může tedy docházet ke zneužívání aplikace. Vzhledem ke skutečnosti, že aplikace poskytuje postup řešení krok po kroku, je snazší daný příklad napsat do aplikace, což je velmi rychlé a než vyvinout vlastní úsilí k vypočítání příkladů.

Praktické využití: Pokud chceme lépe pochopit danou látku, je aplikace určitě výborný pomocník vzhledem k poskytovaným podrobně vysvětleným krokům výpočtu. Pro svou rychlost vypočítání příkladu může aplikace usnadňovat práci v hodinách matematiky.

Shrnutí: Photomath je výborně zpracovaná aplikace, jejíž pomocí lze spočítat všechny typy obvyklých příkladů, se kterými se můžeme na úrovni základní a střední školy setkat. Řešení si můžeme prohlédnout v jednotlivých krocích podrobně vysvětlených, proto pokud si nejsme jistí nějakým krokem úprav, snadno si lze zjistit, jak následně postupovat nebo pokud nevíme, kde dochází k chybě v našem výpočtu, aplikace nám to objasní.

2.4 Maple Calculator: Math Solver

Cena aplikace: zdarma ke stažení přes Obchod Play, Premium verze 109 kč za měsíc

Uživatelský jazyk: Aplikace je dostupná v deseti jazycích, například v anglickém jazyce. V českém jazyce dostupná není.

Výhody: Pomocí aplikace můžeme vyřešit velké množství matematických problémů jako např. rovnice nebo například integrály či derivace, ale aplikace vyčnívá i skvělým provedením grafických zobrazení rovnic. Grafy lze přibližovat a oddalovat pro vytvoření ideální měřítka, k dispozici jsou i průsečíky s osou x a osou y a další informace. Maple Caculator: Math Solver také disponuje dvěma způsoby zadávání příkladů do aplikace, jak tomu bylo u jiných aplikací. Prvním způsobem je pomocí funkce fotoaparát pro přepis příkladů do digitální podoby pomocí snímání psaných zadání kamerou a druhým způsobem je ruční přepis.

Nevýhody: Aplikace není dostupná v českém jazyce, proto pro uživatele, kteří nejsou zběhlí v jednom z nabízených cizích jazyků, není nejvhodnější volbou. Vkládání například mocnin nebo vyšších odmocnin není tak jednoduché jako u jiných aplikací. Navíc po vložení jednoho znaku do exponentu se kurzor vrátí do normálního řádku, proto pokud bychom do něj chtěli vložit nějaký výraz, musíme pokaždé zmáčknout umocňovací znak a byl velmi obezřetní při našem zadávání. Nicméně je aplikace stále užitečná, proto se velmi často může stát nástrojem použitý k podvádění při výpočtech ve škole či při domácích úlohách. Aplikace vypočtené příklady neukládá do historie, není možnost se k nim později vrátit bez opětovného zadání. V bezplatně dostupné verzi si lze prohlídnout řešení krok po kroku jen 2x a pak je tato funkce na 24 hodin nedostupná.

Praktické využití: Aplikace je využitelná k výpočtu zadaných příkladů, se kterými si například nevíme rady nebo chceme problematiku dané látky lépe prozkoumat. Lze ji využít ve škole nebo při domácím samostudiu pro výpočet řadu matematických problematik.

Shrnutí: Maple Calculator: Math Solver je vhodný pro uživatele, kteří rozumějí anglickému jazyku, popřípadě se orientují v jiném jazyce z nabídky. Jednotlivé kroky jsou v aplikaci vysvětlené nejen slovně ale i přímo matematickými úpravami, princip výpočtu se z nich dá pochopit i bez vysvětlivek, ale je to obtížnější. Je vhodná pro výpočet příkladů probíraných v rámci základoškolského i středoškolského studia matematiky. Ale pro používání je vhodnější placená verze kvůli velmi užitečným funkcím, které u bezplatné verze k dispozici vůbec nejsou nebo jsou omezeny počtem použití za den.

3 Téma funkce v učebnicích pro střední školy

„Funkce na množině $A \subset \mathbb{R}$ je předpis $y = f(x)$, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množina A se nazývá definiční obor funkce.“ [1]

3.1 Vlastnosti funkcí

3.1.1 Definiční obor

Definiční obor D_f (popřípadě $D(x)$) je množina, zahrnující přípustné hodnoty čísla x, kterých může dosáhnout, aby platil vztah $y = f(x)$. Jeho rozsah upravujeme vždy podle dané funkce a jejich podmínek, jenž musí splňovat. Mezi nejčastější podmínky a omezení definičního oboru patří sudá odmocnina, logaritmus, zlomek a neznámé hodnoty x v argumentu goniometrických funkcí. V případě sudé odmocniny je nutné, aby byl výraz pod odmocninou nezáporný (větší či roven nule), obdobně u logaritmu musí být argument kladný (větší než nula). Proto je nutné celý výraz pod sudou odmocninou postavit znaménku větší nebo rovno nule, pro logaritmus pak pouze větší než nula, a vyřešit rovnici platnosti. Podle výsledku se poté omezí definiční obor vyřazením takových x, které jsme vyřadili vyřešením této rovnice. Obecně platí, že nelze dělit nulou. Nachází-li se neznámá ve jmenovateli, nesmí se celý jmenovatel rovnat nule. Z definičního oboru bude vyřazena taková hodnota x, pro kterou se celý výraz rovná nule. Podmínky pro definiční obor goniometrických funkcí si vysvětlíme později v příslušné kapitole. [1], [2]

3.1.2 Monotónnost funkce, prostá funkce

To, zda nám funkce během svého průběhu roste nebo klesá, nazýváme monotónnost funkce. Monotónnost funkce je vlastnost vyjadřující, zda je daná funkce rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající nebo konstantní během určitých intervalů. Při pohledu na graf je evidentní, jaký je její průběh, občas to ale může být zřejmé už při pohledu na samotný předpis funkce. Jedním příkladem mohou být lineární funkce, kdy můžeme poznat monotónnost podle znaménka směrnice přímky. Definice jednotlivých stavů monotónnosti funkce vypadají následovně. Máme-li funkci $f(x)$ a libovolné body x_1 a x_2, pro které platí $x_1, x_2 \in Df$, poté lze o funkci říci, že:

- funkce f je rostoucí, pokud pro libovolné hodnoty x_1 a x_2 platí, že pokud $x_1 < x_2$, pak musí platit $f(x_1) < f(x_2)$,

- funkce f je klesající, pokud pro libovolné hodnoty x_1 a x_2 platí, že pokud $x_1 < x_2$, pak musí platit $f(x_1) > f(x_2)$,
- funkce f je neklesající, pokud $x_1 < x_2$, pak musí platit $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- funkce f je nerostoucí, pokud platí $x_1 < x_2$, pak musí pro jejich funkční hodnoty platit $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- funkce f je konstantní, pokud je oborem hodnot jednobodová množina neboli pokud pro jakékoliv dva x_1 a x_2 platí, že $f(x_1) = f(x_2)$.

Definice pro neklesající a nerostoucí neliší o tolik oproti rostoucí a klesající funkci. Rozdíl je v tom, že nerostoucí a neklesající počítají i s možným konečným konstantním intervalem.

Z definice funkce víme, že každému x je z předpisu přiřazeno právě jedno reálné číslo. Proto pokud by byla vedena přímka rovnoběžná s osou x a funkce byla prostá, protnula by graf funkce právě jednou. Definice prosté funkce potom zní, že funkce je prostá, pokud pro libovolné hodnoty x_1 a x_2 $(x_1, x_2 \in D_f)$ platí, že $x_1 \neq x_2$, pak to stejné platí i pro jejich funkční hodnoty, tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$. [1], [3]

3.1.3 Asymptoty funkce

Asymptota je přímka, ke které se graf funkce limitně přibližuje, ale nikdy ji neprotne. Není totiž na jejím průběhu definován. Čím více přibližujeme k hodnotě $\pm\infty$, ať už je to po ose x nebo po ose y, vzdálenost mezi grafem a touto přímkou se zmenšuje. Rozlišujeme asymptoty se směrnicí a bez směrnice. Asymptoty bez směrnice jsou rovnoběžné s osou y, nacházejí se v nevlastním bodě (bodě nespojitosti, bod vyřazený z definičního oboru) a její obecný předpis je $x = \mathrm{c}$, kde $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$. A v tomto bodě se nachází asymptota právě tehdy, existuje-li v daném bodě alespoň jedna jednostranná limita. Její výpočet (ověření, že v daném bodě je skutečně limita) poté vypadá následovně. Limitu funkce

$$\lim_{x \to \mathrm{c}} \left(f\ (x)\right)$$

bude potřeba rozdělit na část, kdy se budeme k číslu dva blížit zprava (značíme $x \to \mathrm{c}^+$) a poté zleva (značíme $x \to \mathrm{c}^-$).

$$\lim_{x \to c^+} \left(f\ (x)\right)$$

$$\lim_{x \to c^-} \left(f\ (x)\right)$$

Aby mohla býti v daném místě býti asymptota, výsledek limity musí býti být roven $\pm\infty$.

Asymptoty se směrnicí mají předpis $y = k \cdot x - q$. Aby mohla mít funkce limitu se směrnicí, musí mít opět body nespojitosti a směřovat k hodnotám $\pm\infty$, respektive alespoň k jedné z těchto hodnot. Koeficienty k, $q \in \mathbb{R}$ se poté vypočítají pomocí limit, jež mají tvar:

- pro směrnici k:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{f\ (x)}{x}\right)$$

- a pro koeficient q

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f\ (x) - k \cdot x).\ [4]$$

3.1.4 Omezenost funkce, minimum a maximum funkce

Pro omezenost funkce platí následující. Mohou být zcela omezené, to znamená, že jsou omezené i shora i zdola, dále pak můžou být omezené pouze zdola nebo naopak pouze shora. Funkce také mohou být neomezené, tudíž pro ně neplatí žádná z definic. Říkáme, že funkce $f(x)$ je:

- shora omezená, pokud existuje číslo A z množiny reálných čísel takové, že pro všechna *x* z D_f platí, že $A > f(x)$.
- zdola omezená, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in D_f$ platí, že $A < f(x)$.

Pro zcela omezené platí obě zmíněné definice současně. Určování omezenosti funkce z grafu je velmi intuitivní. Obecně lze říci, že pokud můžeme sestrojit nějakou přímku rovnoběžnou s osou x, která se nachází nad celým grafem funkce, je tato funkce shora omezená a pokud by se tato přímka nacházela pod celým grafem funkce, jednalo by se o funkci zdola omezenou.

Pokud jsou funkce nějakým způsobem omezené, můžeme nalézt v průběhu definičního oboru extrémy. Extrémy jsou myšleny maxima a minima dané funkce. Funkce může mít ve svém průběhu extrémy oba, popřípadě jen jeden, ale také nemusí mít ve svém průběhu žádný. Může se také stát, že se v průběhu funkce objeví pár lokálních extrémů, což jsou extrémy pouze pro určitý interval jejího průběhu. Z pohledu definice má funkce f v bodě $A \in Df$ globální:

- maximum, pokud je v daném bodě nejvyšší funkční hodnota, kterou můžeme ve funkci najít. |Funkce f má tedy v bodě $A \in D(f)$ globální maximum, pokud platí, že pro všechna x patřící do $D(f)$ platí $f(x) \leq f(A)$,

- minimum, pokud platí, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \geq f(A)$. Bod A má tedy nejmenší funkční hodnotu, kterou lze ve funkci najít. [1], [3], [5]

3.1.5 Sudost a lichost funkce

O sudosti či lichosti funkce rozhoduje jejich souměrnost. Sudé funkce jsou souměrné podle počátku a krásným příkladem je funkce $y = x^2$. Lichá funkce je souměrná podle počátku [0;0] a předpis funkce, jejíž graf odpovídající dané souměrnosti, je například $y = x^3$. Některé funkce ale často nesplňují ani podmínku pro lichou funkci ani pro sudou funkci. Sudost a lichost funkce definujeme tak, že funkci $f(x)$ nazveme:

- sudou, pokud pro všechna *x* z definičního oboru D_f platí, že $f(-x) = f(x)$.
- lichou, pokud pro všechna *x* z definičního oboru D_f platí, že $f(-x) = -f(x)$. [1]

3.1.6 Konkávnost a konvexnost funkce

Konvexní a konkávní vlastnost funkce popisuje jejich zakřivenost. Pro lepší zapamatování zakřivenosti jednotlivých funkcí, můžeme použít písmenko „V“ a „Á“ ze slov konvexní a konkávní, kdy zakřivenost těchto písmen připomíná zakřivenost funkce.

Konvexní funkce jsou obecně funkce, které na určitém svém intervalu postupně zrychlují svůj růst či pouze zpomalují svůj pokles, a jejich graf je tedy zakřivený nahoru (do tvaru písmene „U“). Řekneme, že funkce je ryze konvexní na intervalu *I*, právě když pro libovolná čísla x_1, x_2 a $x_3 \in I$ platí nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$. Dalším důležitým faktorem je, že bod určen souřadnicemi $[x_2;\ f(x_2)]$ leží pod přímkou, která prochází body o souřadnicích $[x_1;\ f(x_1)]$ a $[x_3;\ f(x_3)]$.

Pro konkávní funkce je charakteristické, že je graf zakřiven směrem dolů (do tvaru převraceného písmene „U“) a platí, že funkce $f\ (x)$ se nazývá ryze konkávní v intervalu *I*, právě když pro libovolná čísla x_1, x_2 a $x_3 \in I$, která opět splňují nerovnost $x_1, < x_2 < x_3$, platí, že bod $[x_2;\ f(x_2)]$ leží nad přímkou procházející body $[x_1;\ f(x_1)]$ a $[x_3;\ f(x_3)]$. Často grafy přechází mezi konkávním a konvexním zakřivením grafu, dobrým příkladem mohou být goniometrické funkce. Přechod mezi konkávní a konvexní funkcí se nazývá inflexní bod. [3]

3.1.7 Periodičnost

Periodické funkce jsou funkce, jejichž funkční hodnoty se pravidelně opakují. Opakují se s určitou periodou *p*, která patří do množiny reálných čísel. Řekneme, že funkce je periodická právě když:

- pro všechna x z definičního oboru D_f platí, že v definičním oboru leží i bod $(x + p)$
- a jestliže pro všechna $x \in D_f$ platí $f\ (x + p) = f\ (x)$.

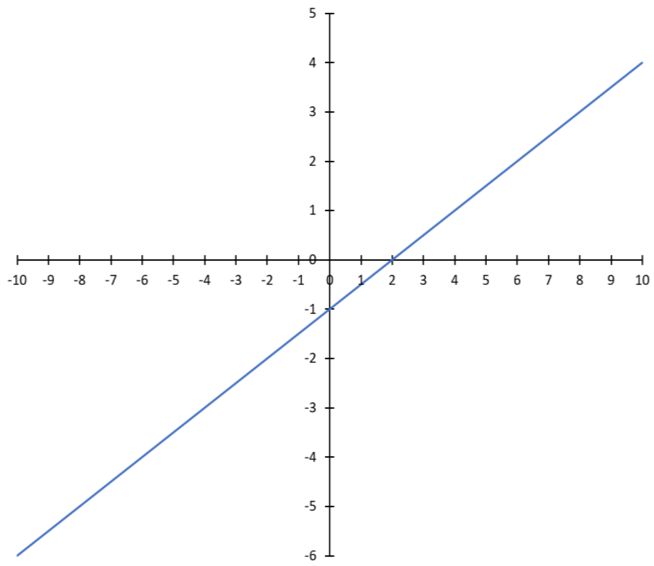
Příkladem periodických funkcí jsou funkce goniometrické. Funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou periodické funkce, jejichž perioda p je rovna 2π. Dalšími základními goniometrickými funkcemi jsou $y = \tan\ x$ a $\mathrm{y} = \mathrm{cotg}\, x$, jejich perioda je rovna pouze π. [6]

3.1.8 Absolutní hodnota

Absolutní hodnota z čísla je vždy číslo nezáporné. To znamená, že výsledek je větší, popřípadě roven nule. Absolutní hodnota z čísla kladného, je hodnota daného čísla. Ovšem absolutní hodnota ze záporného čísla bude hodnota čísla opačného. Co se týče grafického vyjádření, zápornou část grafu funkce překlopí podle osy x do kladného intervalu. To znamená, že interval oboru hodnot je tedy omezen na $H_f = \langle 0; \infty)$. Funkce s absolutní hodnotou nikdy nejsou prosté. Tím, že dochází k převrácení křivky podle osy x, můžeme proto sestrojit takovou přímku rovnoběžnou s osou x, která protne alespoň 2 body grafu funkce. Další výše zmíněné vlastnosti závisí na jednotlivých typech funkcí a také na posutí ose x či ose y vůči počátku. [7]

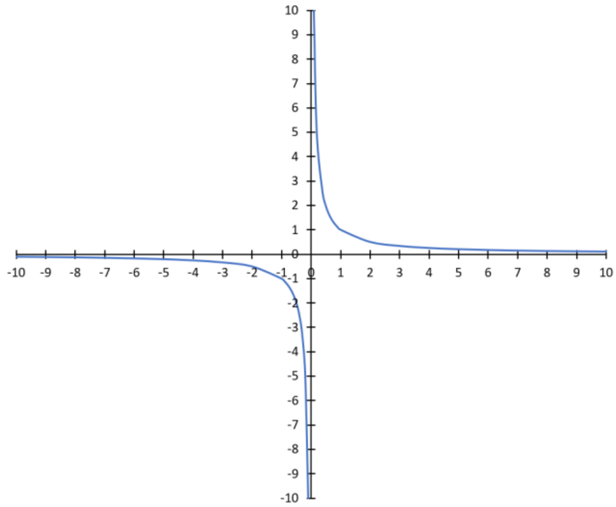
3.2 Lineární funkce

Pod lineární funkcí si lze představit kteroukoli funkci, jejíž předpis je $y = a \cdot x + b$, kde koeficienty a a b patří do množiny reálných čísel. Jejich grafickým vyjádřením je přímka. Koeficient a je zodpovědný za naklonění přímky vůči ose x a zároveň určuje monotónnost funkce. Pokud je hodnota koeficientu záporná, je daná funkce klesající a naopak, pokud by byla jeho hodnota kladná, daná funkce by byla rostoucí. Pokud by byl koeficient a nulový, nastal by speciální případ, kdy $y = b$. To znamená, že daná funkce bude konstantní. Koeficient b tedy značí posunu grafu funkce po ose y vůči počátku, pokud by byl koeficient nulový, graf funkce by procházel počátkem. Co se týče definičního oboru, pokud není určeno jinak, je vždy roven celé množině reálných čísel, stejně tomu je i u oboru hodnot. Pro každou lineární funkci, kromě funkce konstantní, platí, že jsou prosté a v celém svém definičním oboru spojité. Pokud nejsou nějak omezeny ve vlastním zadání, nemají ani maximum ani minimum. Lineární funkce mohou být liché pouze v případě, že přímka prochází počátkem, má tedy nulový koeficient b. V žádném jiné případě nemohou být liché a žádná z lineárních funkcí bez absolutní hodnoty nikdy nebude ani sudá. [8]



Obrázek 1: Graf lineární funkce s předpisem $y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$

Speciálním typem lineárních funkcí jsou funkce s předpisem $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde koeficienty a, b, c a $d \in \mathbb{R}$, ale koeficient c musí být různý od nuly a také musí platit, že $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$. Tento typ funkce nazýváme lineární lomené funkce, z jejichž definičního oboru jsou vyřazeny hodnoty, pro které je výraz ve jmenovateli roven nule, tedy $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Grafem funkce je vždy hyperbola, proto tyto funkce budou mít asymptoty se směrnicí i bez směrnice. Obor hodnot je zmenšen o funkční hodnoty $f(x)$, kterým odpovídají takové x, pro která není funkce definovaná. Hyperbola obecně je sice lichou funkcí, ale dojde-li k posunu na ose x nebo ose y, tato vlastnost přestává platit. [1], [8]



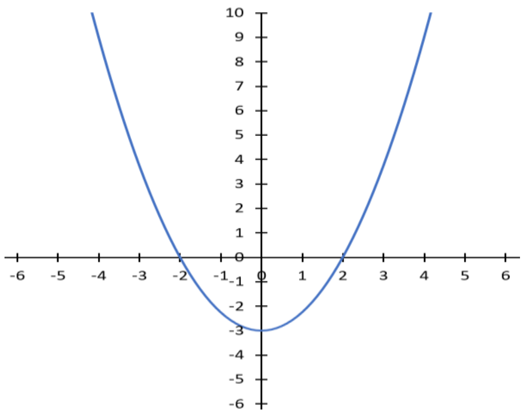
Obrázek 2: Graf lineární lomené funkce s předpisem $y = \frac{1}{x}$

3.3 Kvadratická funkce

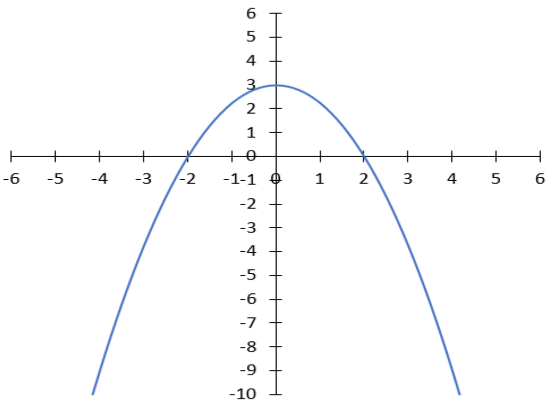
Kvadratické funkce jsou takové funkce, které mají přepis ve tvaru $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde koeficienty $b, c \in \mathbb{R}$ a koeficient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, protože jinak by daná funkce byla pouze lineární. Grafem tohoto typu funkce je parabola. Definiční obor funkce je vždy roven celé množině reálných čísel. Obor hodnot se liší příklad od příkladu, ale pokud není funkce omezená zadáním jinak, jeden z koncových bodů je vždy +∞ nebo -∞. To závisí na koeficientu a. Obdobně jako u lineárních funkcí, koeficient a určuje směr otočení paraboly, otevřenost či zavření paraboly. Pokud by koeficient b byl nulový, znamená to, že nedochází k posunu na ose x a daná funkce je sudá. Koeficient c poté ovlivňuje posun funkce na ose y. Tím, že se jedná o funkci sudou, nikdy nemůže dojít k tomu, aby daná funkce byla prostá. Ať sestrojíme jakoukoli přímku rovnoběžnou s osou x, vždy nám protne dva body paraboly. Parabola je křivka ve tvaru „U“, proto bude funkce v každém případě v jednom intervalu klesající a v druhém rostoucí, pořadí závisí na koeficientu a. Na jeho hodnotě také závisí, zda bude mít daná funkce minimum nebo maximum, tedy omezenost funkce. Kvadratické funkce lze také zapsat v alternativním tvaru $y = (x - p) \cdot (x - q)$. Tento tvar je užitečný pro snadnější určovaná nulových bodů. Jinak se k tomu používá kvadratická funkce, jež má tvar:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vrchol paraboly bývá často maximem nebo minimem funkce. Dá se tedy vypočítat pomocí první derivace, popřípadě jednoduššího způsobu, kdy jeho souřadnice jsou V $\left[-\frac{b}{2 \cdot a}; f(-\frac{b}{2 \cdot a})\right]$. Kvadratická funkce nemá asymptoty ani bez směrnice ani se směrnicí. [1], [9]



Obrázek 3: Grafy kvadratických funkcí s předpisem $y = \frac{3}{4} \cdot x^2 - 3$



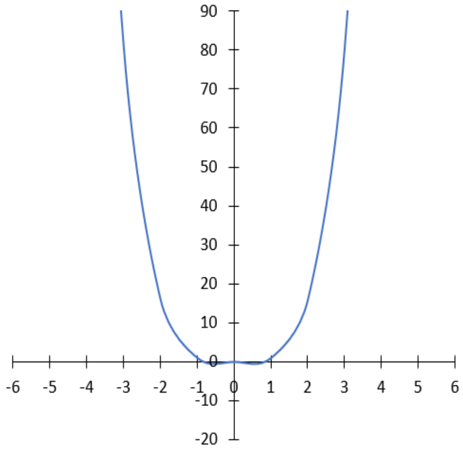
Obrázek 4: Grafy kvadratických funkcí s předpisem $y = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 3$

3.4 Mocninná funkce

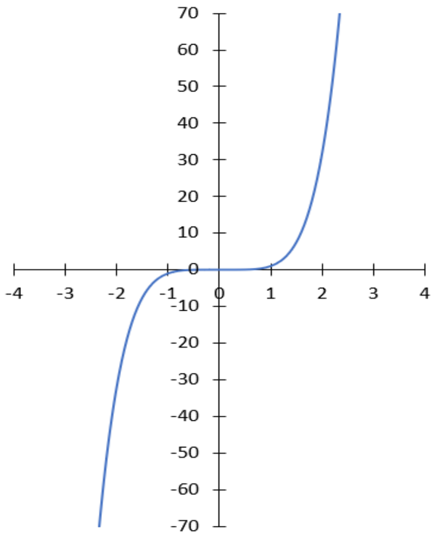
Mocninné funkce mají předpis ve tvaru $y = x^n$. Exponent n ovlivňuje vlastnosti funkcí. Rozlišujeme mocninné funkce s přirozeným exponentem a mocninné funkce se záporným celým exponentem. V obou případech se vlastnosti liší ještě podle toho, zda je n sudé nebo liché číslo. Speciálním případem těchto funkcí je kdy se $n = 1$ a $n = 2$. V případě, že by se $n = 1$, jednalo by se o lineární funkci $y = x$ a pokud by se $n = 2$, jednalo by se o základní kvadratickou funkci. [1], [5]

Vlastnosti mocninných funkcí, jež mají exponent kladný a lichý jsou takové, že definiční obor a obor hodnot je roven množině reálných čísel. Jedná se o liché funkce, které jsou souměrné podle počátku. Pokud není zadáním určeno jinak, nejsou nijak omezené, maximum a minimum u nich nenajdeme a jsou rostoucí v celém průběhu. Pokud by bylo n sudé a kladné, vlastnosti se trochu liší. Například v oboru hodnot, kdy zde nabývá pouze hodnot $\langle 0, +\infty)$. Rozsah definičního oboru zůstává stejný. Jak je možno posoudit z oboru hodnot, funkce je zdola omezená a její minimum lze nalézt v bodě [0;0]. Protože je v bodě [0;0] minimum funkce, vyplívá z toho, že v intervalu $(-\infty; 0\rangle$ je funkce klesající, zatímco v intervalu $\langle 0, +\infty)$ je funkce rostoucí. Tato tvrzení platí pro obecný předpis $y = x^n$, pokud by došlo k posunu, vlastnosti funkce by se lišili. [1], [5]

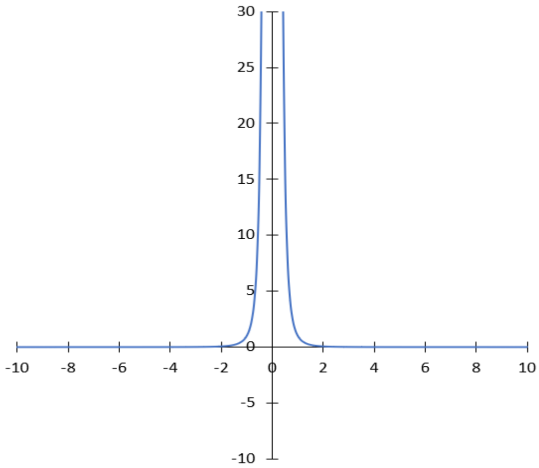
Pro mocninné funkce se záporným celým exponentem lze zavést tvar $y = x^t$, kde $t \in \mathbb{Z}$ a $t < 0$. Pokud t je liché celé číslo, jeho grafem je hyperbola souměrná podle počátku. Je tedy lichou funkcí, která je také v celém svém průběhu klesající. Není omezená ani shora ani zdola, ale v bodě $[0; 0]$ není funkce definována, tento bod je tedy vyřazen jak z definičního oboru, tak z oboru hodnot. V případě, že t je sudé číslo, jsou grafem dvě křivky nepřímé souměrnosti v I. a II. kvadrantu souměrné podle osy y, jedná se tedy o sudou funkci. Z definičního oboru byl opět vyřazen bod 0 a obor hodnot je roven intervalu $(0, +\infty)$. Funkce tedy shora omezená není, ze spodu ano, ale z důvodu nedefinované hodnoty v bodě $y = 0$ nemá funkce minimum. Protože funkce nemá průsečík ani s osou x ani osou y, ale limitně se k nim blíží, můžeme říci, že tyto osy jsou asymptotami dané funkce. [1], [5]



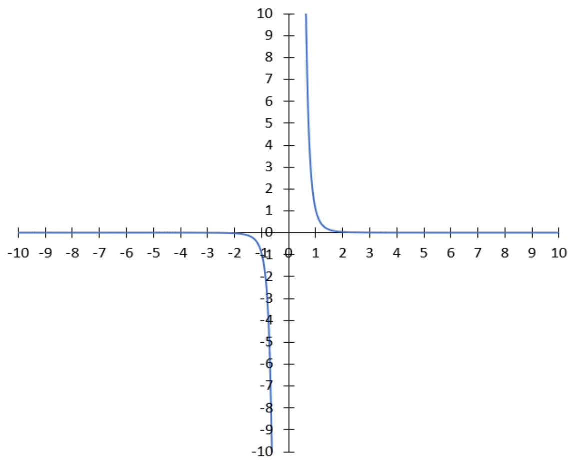
Obrázek 5: Graf funkce s předpisem $y = x^4$



Obrázek 6: Graf funkce s předpisem $y = x^5$



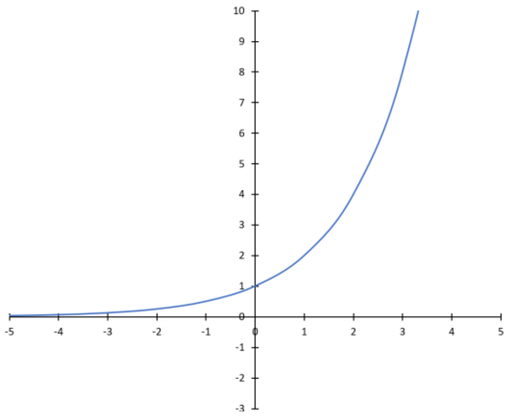
Obrázek 7: Graf funkce s předpisem $y = x^{-4}$



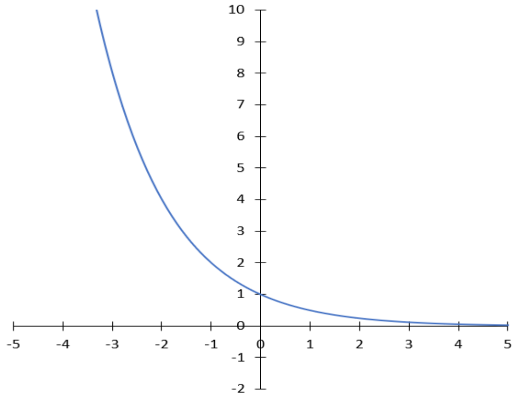
Obrázek 8: Graf funkce s předpisem $y = x^{-5}$

3.5 Exponenciální funkce

Exponenciální funkce má podobný předpis jako funkce mocninná. Její předpis ale není $y = x^a$, nýbrž $y = a^x$. Podle velikosti základu a rozlišujeme exponenciální funkce na dva typy. Pokud a leží v intervalu $0 < a < 1$, je daná funkce klesající a pokud je hodnota $a > 1$, je daná funkce rostoucí. Společné vlastnosti obou typů exponenciálních funkcí je jejich definiční obor, který je roven opět množině reálných čísel. Obor hodnot je také stejný a je roven kladným reálným číslům bez nuly. Křivky exponenciálních funkcí se potkávají v bodě $[0; 1]$. Jsou zdola omezené, ale podobně jako mocninné funkce nejsou definovány v bodě $x = 0$, nemají tedy žádné minimum a ani maximum. Nicméně se ale obě funkce limitně blíží k ose x, která je tedy asymptotou dané funkce. [1], [5]



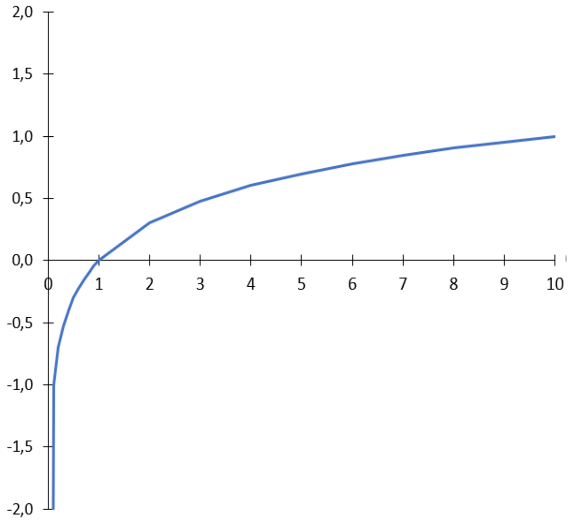
Obrázek 9: Graf funkce s předpisem $y = 2^x$



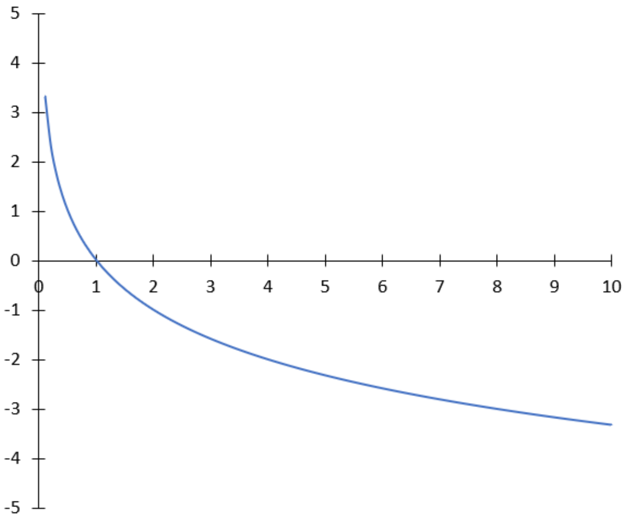
Obrázek 10: Graf funkce s předpisem $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.6 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce jsou inverzními funkcemi k funkcím exponenciálním. Převod mezi danými funkcemi je, že je-li exponenciální funkce je vyjádřena rovnicí $a^y = x$, pak její logaritmická verze a předpis logaritmických funkcí je $y = \log_a x$. Základ a opět musí být větší než nula a různý od jedničky a obdobně jako to bylo exponenciálních funkcí, tak se rozlišuje, zda je funkce klesající nebo rostoucí. Rostoucí je funkce, pokud je základ a větší než jedna a pokud je jeho hodnota v intervalu $(0; 1)$ je funkce klesající. Graf obou křivek prochází bodem $[1; 0]$ a graf se nazývá logaritmická křivka. Definičním oborem logaritmických funkcí je interval $(0, +\infty)$ a oborem hodnot může být kterákoliv hodnota z intervalu $(-\infty, +\infty)$. Logaritmické funkce nejsou ani liché a ani sudé, dokonce ani nejsou nijak omezené, tudíž nemají žádné minimum ani maximum. [1], [5], [10]



Obrázek 11: Graf funkce s předpisem $log_{10}\, x$



Obrázek 12: Graf funkce s předpisem $log_{0,5}\, x$

3.7 Goniometrické funkce

Goniometrické funkce jsou obecně známy jako periodické funkce a jako konkrétní funkce známe především funkce s předpisem y=sin x, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$. Funkce tangens a cotangens můžeme také definovat pomocí sinu a cosinu. Vyjádření funkce tangens je

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

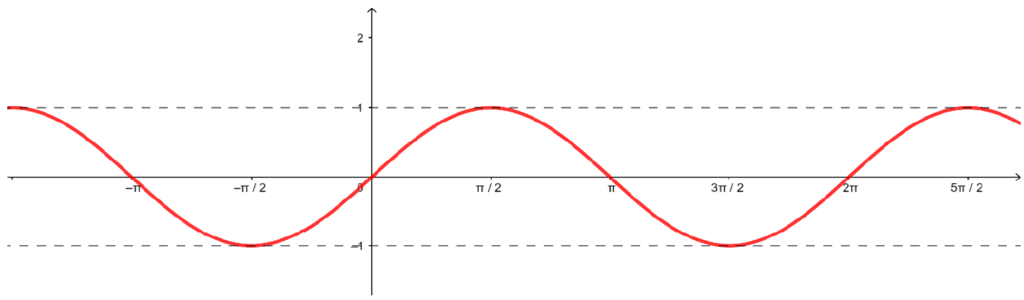
a funkce cotangens

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

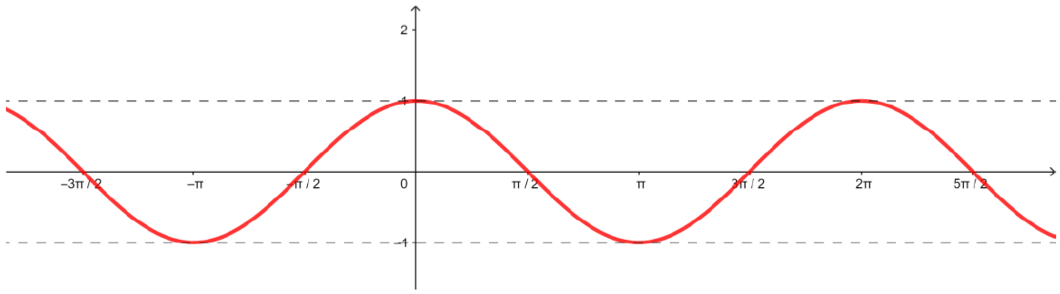
Z toho také vyplývá, že vztah mezi tangens a cotangens je, že jedna funkce je převrácenou hodnotou druhé funkce. To vyplívá i z trojúhelníkové teorie popisu funkcí pomocí přepony a odvěsen. Definičními obory funkcí sinu a cosinu jsou všechna reálná čísla a oborem hodnot je interval $\langle -1; 1 \rangle$, jsou tedy shora i zdola omezené a mají maximum i minimum. Funkce sinus začíná v počátku, přes který je souměrná, je to tedy lichá funkce. Naopak tomu funkce cosinus začíná v bodě, kde $y = 1$, je proto souměrná přes osu y, jedná se o sudou funkci. Perioda těchto funkcí je 2π. Jejich křivky vyjadřující průběh funkce nazýváme sinusoida a cosinusoida. S funkcemi tangens a cotangens to není tak jednoduché. Z definice funkce tangens vyplívá, že musí být z definičního oboru vyřazeny všechny hodnoty x, pro které je výraz $\cos x = 0$. Výrazy, kdy je ve jmenovateli nula, nejsou definovány. K tomu dochází v bodech $\frac{\pi}{2}$ a ve všech k-násobcích periody π. Definiční obor je tedy $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$,kde $k \in \mathbb{Z}$. Funkce není omezená ani zdola ani shora, obor hodnot je roven intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Pro funkci cotangens je to podobné, pouze musíme vyřadit hodnoty, pro které je nule roven výraz $y = \sin x$, což nastává pro všechny celé násobky periody π. Definiční obor funkce je tedy $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Obor hodnot je stejný jako u funkce tangens. Křivky vyjadřující průběh funkce jsou označovány jako tangentoida a cotangentoida.

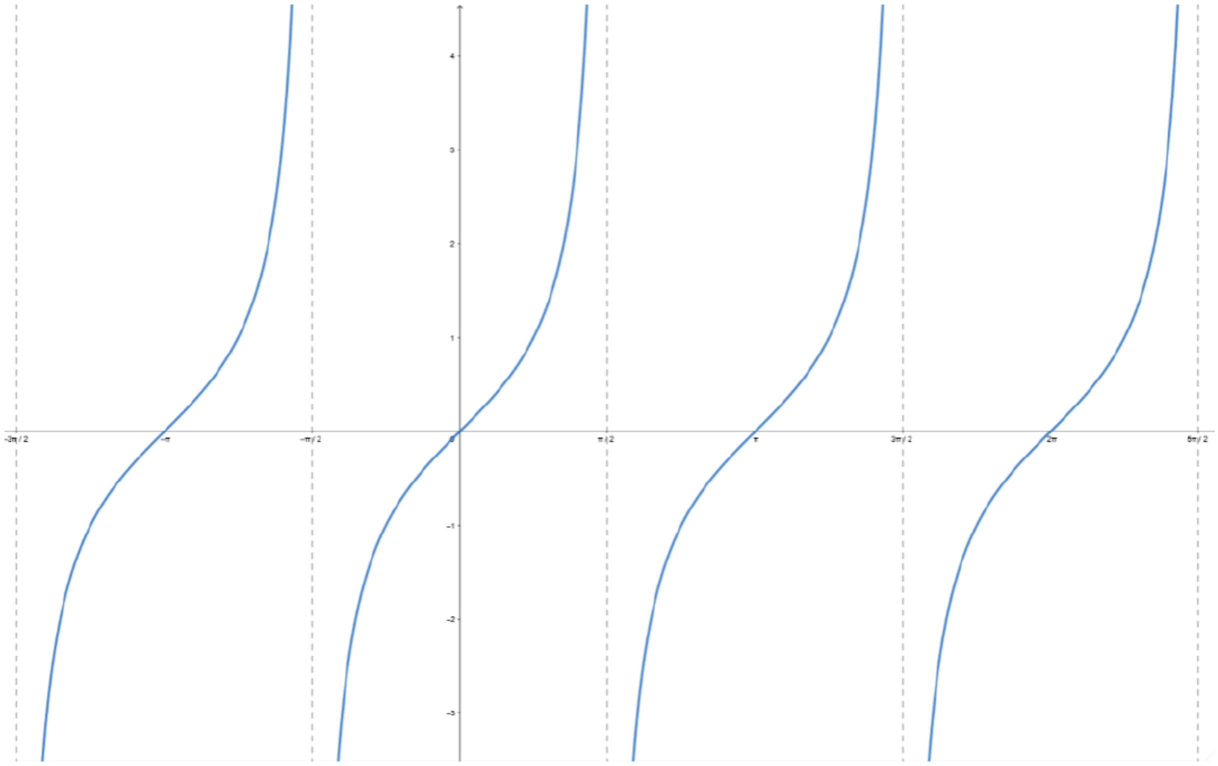
Funkce mají body nespojitosti a limitně se k těmto bodům přibližují, jsou v daném bodě asymptoty bez směrnice. [1], [5], [11], [12]



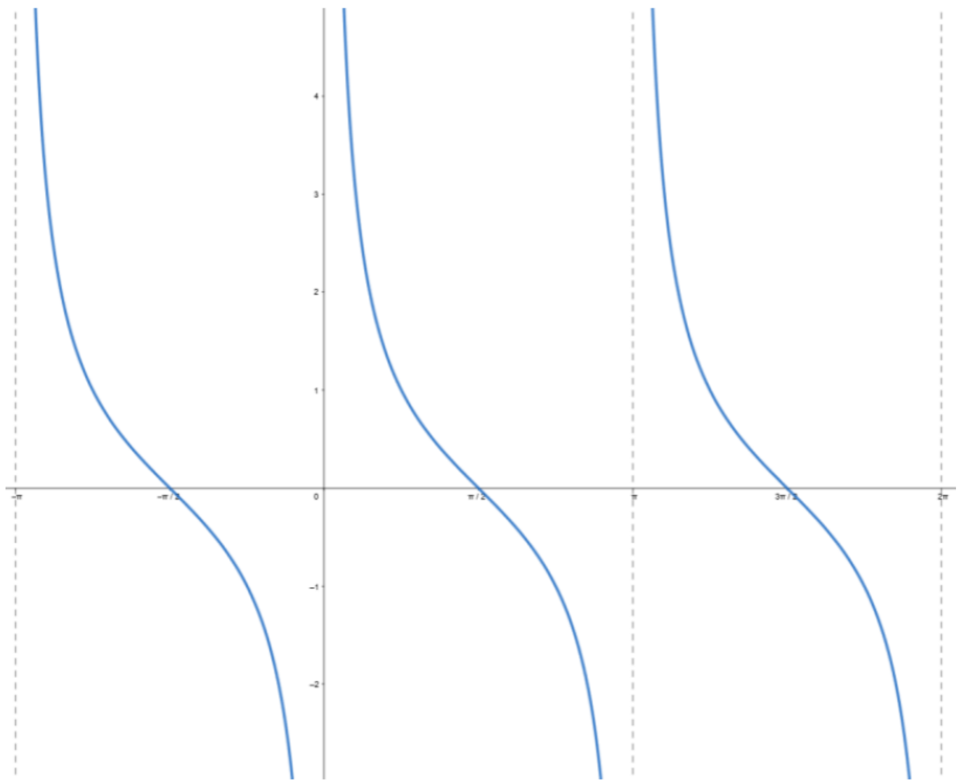
Obrázek 13: Graf funkce $y = \sin x$ (Lachmanová, 2019)



Obrázek 14: Graf funkce $y = \cos x$ (Lachmanová, 2019)



Obrázek 15: Graf funkce $y = tg\, x$ (Lachmanová, 2019)

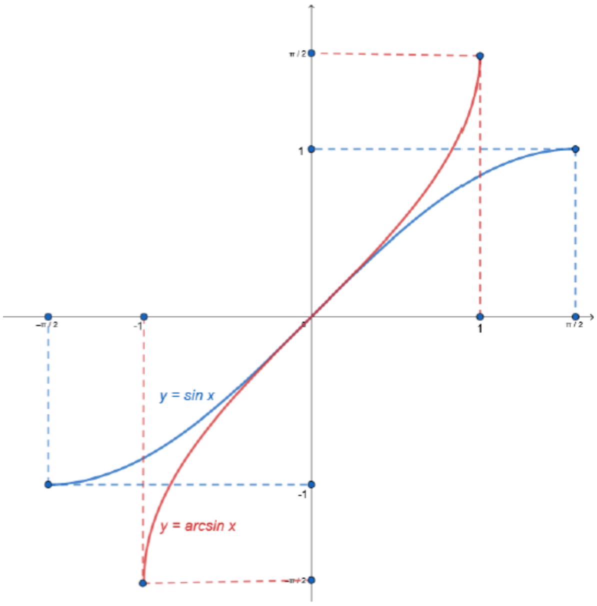


Obrázek 16: Graf funkce $y = cotg\ x$ (Lachmanová, 2019)

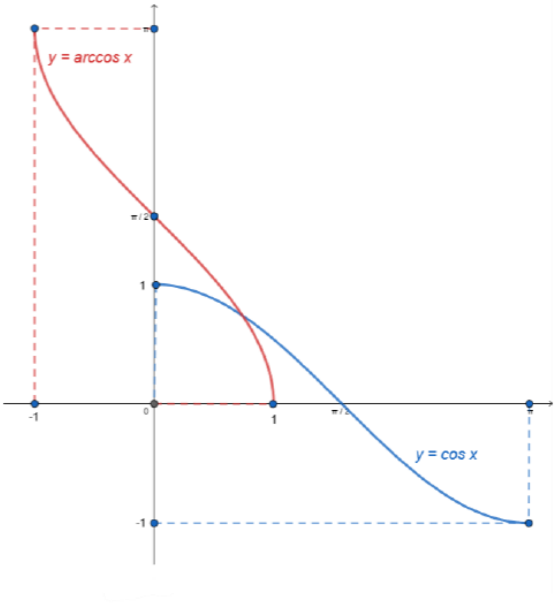
3.8 Cyklometrická funkce

Na základních ani středních školách se tento typ funkcí nevyučuje. Z tohoto důvodu v dané práci dojde pouze k jejich zmínění kvůli ucelení látky o funkcích, dále se již jimi ale zabývat nebudeme. Následující krátký úvod je zde pouze pro zajímavost a není pro tuto zásadní.

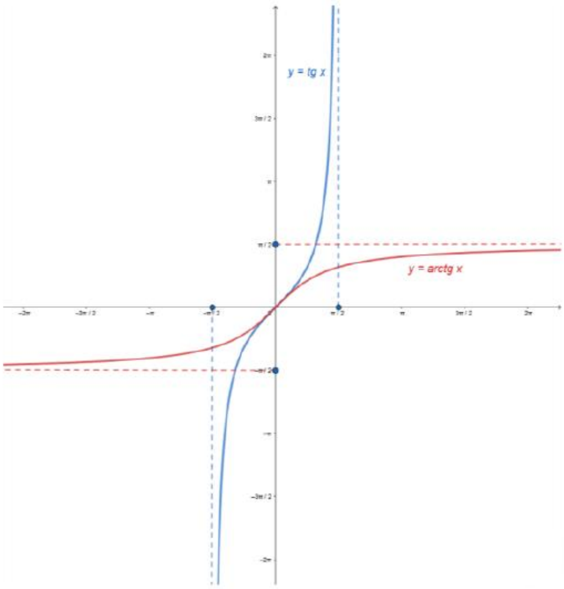
Cyklometrické funkce jsou inverzní funkce k funkcím goniometrickým, konkrétně jsou danými funkcemi arkus sinus, arkus cosinus, arkus tangens a arkus cotangens. Funkční předpisy, definiční obory a obory hodnot se liší podle typu cyklometrické funkce. Funkce inverzní k funkci $y = \sin x$ je $y = \arcsin x$. Definičním oborem dané funkce je interval $\langle -1; 1 \rangle$, oborem hodnot je pak interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Obdobně funkce $y = \arccos x$ je inverzní funkcí k funkci s předpisem $y = \cos x$ Její definiční obor je také interval $\langle -1; 1 \rangle$, oborem hodnot pak $\langle 0;\ \pi \rangle$. Funkce s předpisem $y = \operatorname{tg} x$ má inverzní funkci $y = \operatorname{arctg} x$ s definičním oborem celých přirozených čísel a oborem hodnot v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$. V bodech $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ jsou asymptoty, ke kterým se funkce limitně blíží. Funkce $y = \operatorname{arccotg} x$ je inverzní funkcí k funkci $y = \operatorname{cotg} x$. Její definiční obor je roven množině reálných čísel $\mathbb{R}$, oborem hodnot je pak interval $(0, \pi)$. V bodech 0 a π jsou asymptoty, ke které se limitně blíží. [11]



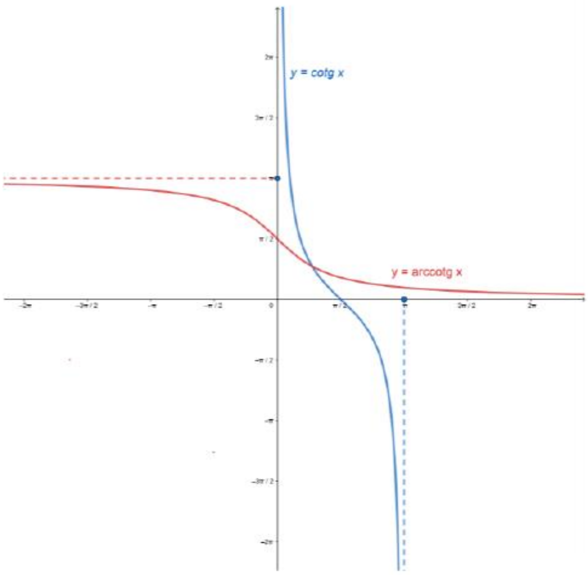
Obrázek 17: Graf funkce $y = arcsin\,x$ (Lachmanová, 2019)



Obrázek 18: Graf funkce $y = arccos\,x$ (Lachmanová, 2019)



Obrázek 19: Graf funkce $y = arctg\,x$ (Lachmanová, 2019)



Obrázek 20: Graf funkce $y = arccotg\,x$ (Lachmanová, 2019)

4 Vypracování ukázkových příkladů bez a následně s podporou aplikace Photomath

Cílem této části práce je předvést výpočetní schopnosti aplikace Photomath při vyšetřování průběhu funkcí. Tato aplikace může na základních a zejména středních školách sloužit jako učební nástroj nejen pro kontrolu výsledků. Nalezneme zde vzorové příklady na různé typy funkce, abychom získali představu o tom, co vše počítáme při vyšetřování funkce. Následně si pak ukážeme, jestli je aplikace Photomath schopna obdobného výpočtu, zkontrolujeme si přesnost našich výpočtů a následně přiložíme snímek obrazovky, na kterém bude graf funkce vykreslený aplikací Photomath. První příklad bude obsahovat více snímků a důkladnější popis aplikace a jejích jednotlivých kroků. V dalších příkladech poté budeme kroky, které jsme představili již dříve přeskakovat, přidáme případně jen nové poznatky, a nakonec opět přiložíme graf funkce, který vložíme do práce jako snímek obrazovky aplikace Photomath.

Ve všech příkladech je naším zadáním vyšetřit průběh funkce.

4.1 Lineární funkce

Příklad č.1

$$y = \frac{5x-2}{2-x} - 1$$

Máme zadanou lineárně lomenou funkci. [13] Lineárně lomené funkce poznáme tak, že obsahují neznámou ve jmenovateli. Naším prvním krokem bude určení definičního oboru. Zde uplatňujeme pouze podmínku, kdy nesmíme dělit nulou. Z tohoto důvodu je nutné vyřadit z definičního oboru takové x, kdy by se výraz ve jmenovateli $(2-x)$ rovnal nule. Tuto nerovnici zapíšeme a provedeme potřebný výpočet:

$$2 - x \neq 0$$

$$-x \neq -2$$

$$x \neq 2$$

Z výpočtu vyplívá, že definiční obor zadané funkce je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Druhá důležitá část postupu bude naleznout průsečík s osou x, který je často označován jako nulový bod funkce. Zjistíme ho tak, že v původní rovnici dosadíme za *y* nulu. Dostáváme tak rovnici ve tvaru:

$$\frac{5x-2}{2-x} - 1 = 0$$

Nyní si tuto rovnici upravíme. Začneme tím, že se zbavíme zlomku, čehož nejjednodušeji dosáhneme tím, že celou rovnici vynásobíme výrazem ve jmenovateli $(2-x)$. Upravíme znaménka, kde je to potřeba, čísla přehodíme na jednu stranu a neznámé na druhou a dokončíme vyjádření *x*.

$$5x-2-1\,(2-x)=0$$

$$5x-2-2+x=0$$

$$6x=4$$

$$x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Průsečík s osou x se tedy nachází v bodě $P_x[\frac{2}{3};0]$.

Obdobně se poté zjišťuje i průsečík s osou y, kdy se nula dosadí za neznámou *x* a zjišťujeme funkční hodnotu v tomto bodě ($y=f(0)$).

$$\frac{5\cdot 0-2}{2-0}-1=y$$

$$\frac{-2}{2}-1=y$$

$$-1-1=y$$

$$-2=y$$

Průsečík s osou y se nachází v bodě $P_y[0;-2]$. Dále podle teorie o vlastnostech funkcí budeme zjišťovat sudost, popřípadě lichost funkce. Abychom zjistili, zda je funkce lichá nebo sudá, musíme za *x* dosadit -*x*.

$$f(-x)=\frac{5(-x)-2}{2-(-x)}-1=\frac{-5x-2}{2+x}-1$$

Jak vidno, $f(-x)$ se nerovná ani $f(x)$ a ani $-\ f(x)$, tato funkce proto není ani sudá ani lichá.

Protože v bodě $x=2$ není funkce definovaná, podle teorie tudíž můžeme předpokládat, že má funkce v daném bodě asymptotu. Toto tvrzení ověříme výpočtem limity pro daný bod:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{5x-2}{2-x}-1\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{5x-2-2+x}{2-x}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{6x-4}{2-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}(6x-4)\cdot\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}\right)=8\cdot\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}\right)$$

Protože jsme nenašli limitu pro $x \to 2$. Z toho důvodu je nutné provést další limity, kdy se poprvé budeme k číslu dva blížit zprava (značíme $x \to 2^+$) a poté zleva (značíme $x \to 2^-$).

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2-x}\right) = 8\cdot(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{2-x}\right) = 8\cdot\infty = \infty$$

Z výpočtů můžeme vidět, že má funkce v bodě $x = 2$ asymptotu bez směrnice, kdy se k ní funkce zleva přibližuje v mínus nekonečnu a zprava v plus nekonečnu. Tímto získáváme představu o tom, jak bude naše funkce vypadat.

Nyní se pokusíme spočítat asymptotu se směrnicí, jejíž tvar je $y = kx + q$, a koeficienty k a q si teď vypočítáme:

k:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\frac{5x-2}{2-x}-1}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\frac{6x-4}{2-x}}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{6x-4}{2-x}\right) = \frac{1}{\infty}\cdot\left(\frac{6-\frac{4}{\infty}}{\frac{2}{\infty}-1}\right) =$$

$$= 0\cdot(-6) = 0$$

q:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x-2}{2-x}-1-k\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x-2}{2-x}-1\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x-2}{2-x}\right) + \lim_{x\to\pm\infty}(-1) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5-\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}-1}\right) - 1 = \left(\frac{5-\frac{2}{\infty}}{\frac{2}{\infty}-1}\right) - 1 = \frac{5-0}{0-1} - 1 = -6.$$

Při dělením nekonečnem nezáleží na znaménku, protože se v obou případech celý výraz rovná nule. Díky tomu si můžeme dovolit ve výpočtech dosazovat pouze ∞.

Z výpočtů plyne, že daná funkce má horizontální asymptotu s předpisem $y = -6$, což také znamená, že obor hodnot $H_f = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$.

Protože se jedná o funkci lineární lomenou, jejíž graf tvoří hyperbola, bude funkce prostá, pro jakékoli $x_1 < x_2$ platí totiž $f(x_1) < f(x_2)$. Toto tvrzení platí buď na intervalu $(-\infty, 2)$ nebo na intervalu $(2, \infty)$.

Zda je funkce klesající nebo rostoucí, je zjistitelné z první derivace:

$$f'(x) = \frac{(5x-2)'(2-x) - (5x-2)(2-x)'}{(2-x)^2} = \frac{5(2-x) - (5x-2)(-1)}{(2-x)^2}$$
$$= \frac{10 - 5x - (-5x+2)'}{(2-x)^2} = \frac{8}{(2-x)^2}$$

Stacionární body, body podezřelé z extrému, jsou nulovými body této první derivace. Aby byl zlomek roven nule, musel by být čitatel roven nule. Vzhledem k situaci, kdy je v čitateli číslo osm, se tento zlomek nule rovnat nebude. Daná funkce proto nemá žádné minimum ani maximum. K určení monotónnosti nám tedy poslouží bod vyřazený z definičního oboru, tedy číslo dva. Pomocí dvojky rozdělíme číselnou osu na dva intervaly, $(-\infty, 2)$ a $(2; \infty)$. Pro dvojku není funkce definovaná, proto není zahrnuta ani do jednoho z intervalů. Pokud dosadíme jakoukoli hodnotu z prvního intervalu do první derivace, vždycky nám vyjde kladný výsledek. Například:

$$\frac{8}{(2-x)^2} = \frac{8}{(2-0)^2} = \frac{8}{(2)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

Pokud vezmu jakoukoli hodnotu z druhého intervalu, také nám vždycky vyjde kladný výsledek. Například pokud bychom si zvolili číslo 4:

$$\frac{8}{(2-x)^2} = \frac{8}{(2-4)^2} = \frac{8}{(-2)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

Kladný výsledek nám o dané funkci říká, že v obou intervalech jde o funkci rostoucí. Pro zjištění, zda jde o funkci konkávní nebo konvexní, potřebujeme vypočítat druhou derivaci funkce:

$$f''(x) = \frac{(8)'(2-x)^2 - 8((2-x)^2)'}{((2-x)^2)^2} = \frac{0 - 8 * 2(2-x)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{16(2-x)}{(2-x)^4} = \frac{16}{(2-x)^3}$$

O inflexních bodech víme, že jsou místem přechodu mezi konkávní a konvexní funkcí. Zda má funkce inflexní body zjistíme podle toho, zda má druhá derivace nulové body. Podobně jako u první derivace, zde je v čitateli číslo 16, proto daná funkce nemá inflexní bod. Vyřazený bod dvě nám pomůže se rozhodnout, jaká funkce je. Stejně jako při zjišťování monotónnosti, pomocí dvojky rozdělíme číselnou osu na dva intervaly, $(-\infty, 2)$ a $(2; \infty)$. Pokud dosadím jakékoliv číslo z prvního intervalu, pokaždé mi vyjde kladné číslo. Pokud bychom si například dosadili $x = -1$:

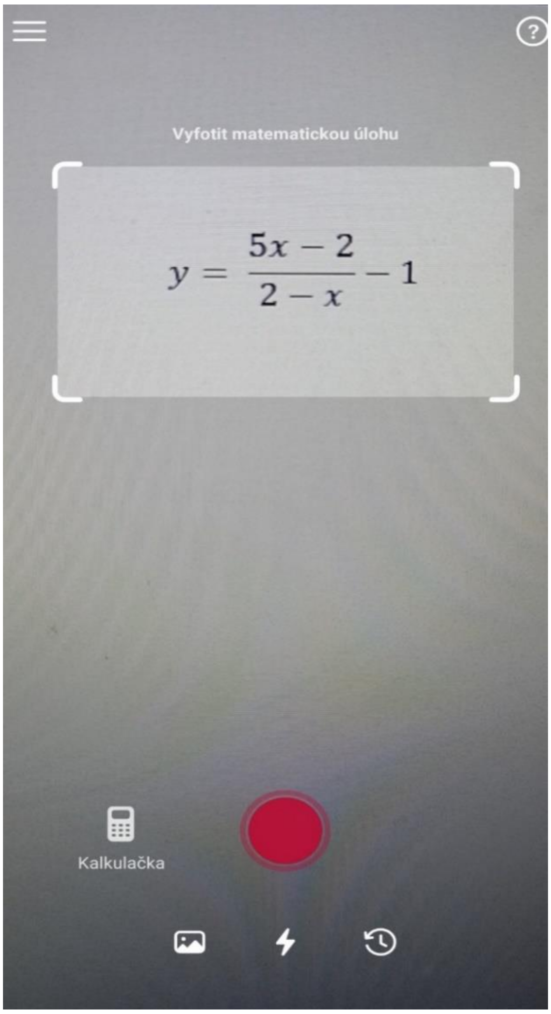
$$\frac{16}{(2-x)^3} = \frac{16}{(2-(-1))^3} = \frac{16}{3^3} = \frac{16}{27}$$

Naopak v případě čísla z druhého intervalu budou výsledky záporné. Pokud bychom dosadili $x = 3$:

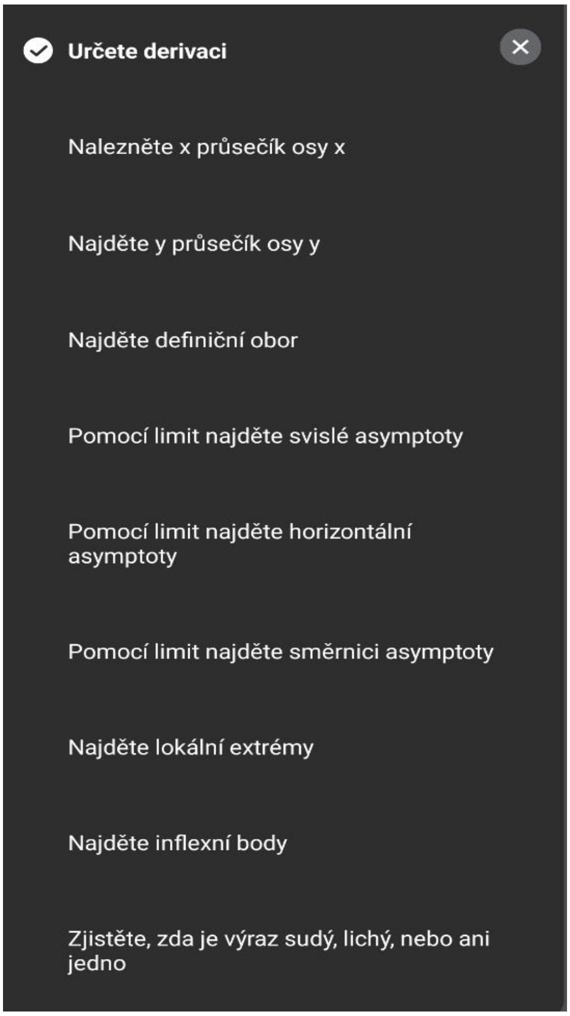
$$\frac{16}{(2-x)^3} = \frac{16}{(2-3)^3} = \frac{16}{(-1)^3} = -16$$

Kladný výsledek značí, že funkce je v intervalu $(-\infty, 2)$ konvexní a záporný výsledek, že je v intervalu $(2; \infty)$ konkávní.

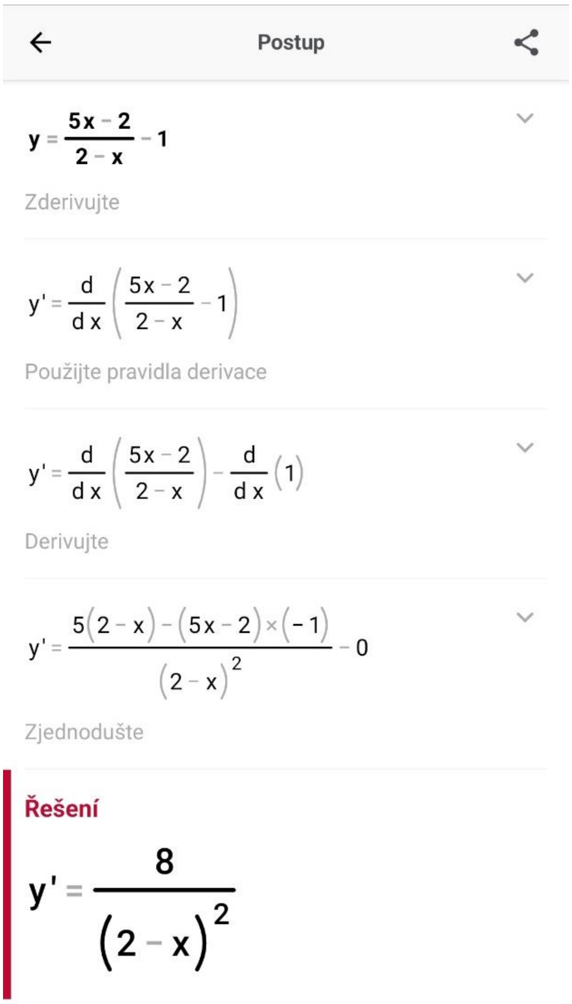
Tímto jsme spočítali celý průběh funkce a zjistili vše potřebné k jejímu náčrtu. Jak jsme ale mohli vidět, tak „ruční“ výpočet bez pomoci aplikace je velmi zdlouhavý proces. Proto si nyní demonstrujeme rychlost a přesnost aplikace Photomath, ve které si ukážeme práci s tou stejnou funkcí.



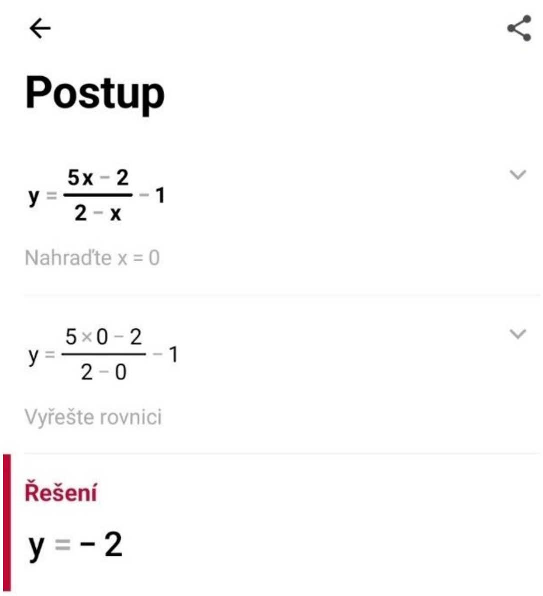
Obrázek 21: Skenování příkladů pomocí aplikace Photomath



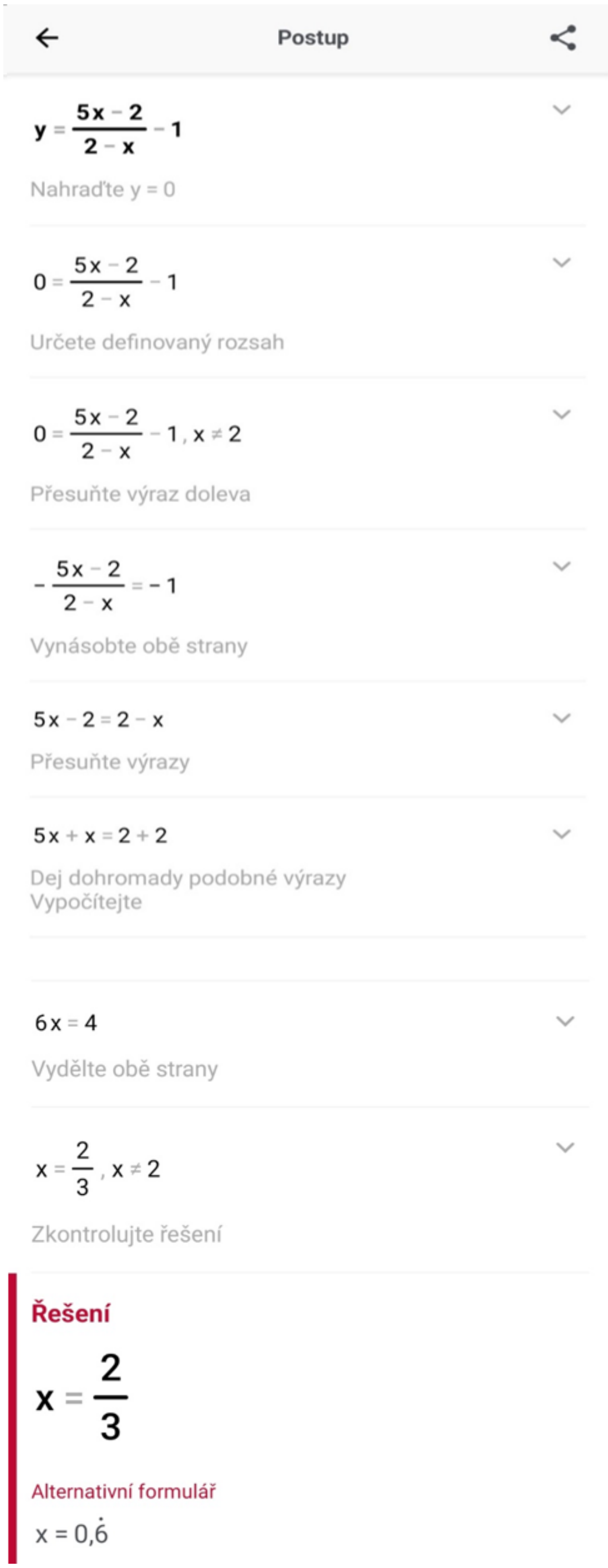
Obrázek 22: Postupu vyšetřování funkce v bodech



Obrázek 23: Určení první derivace

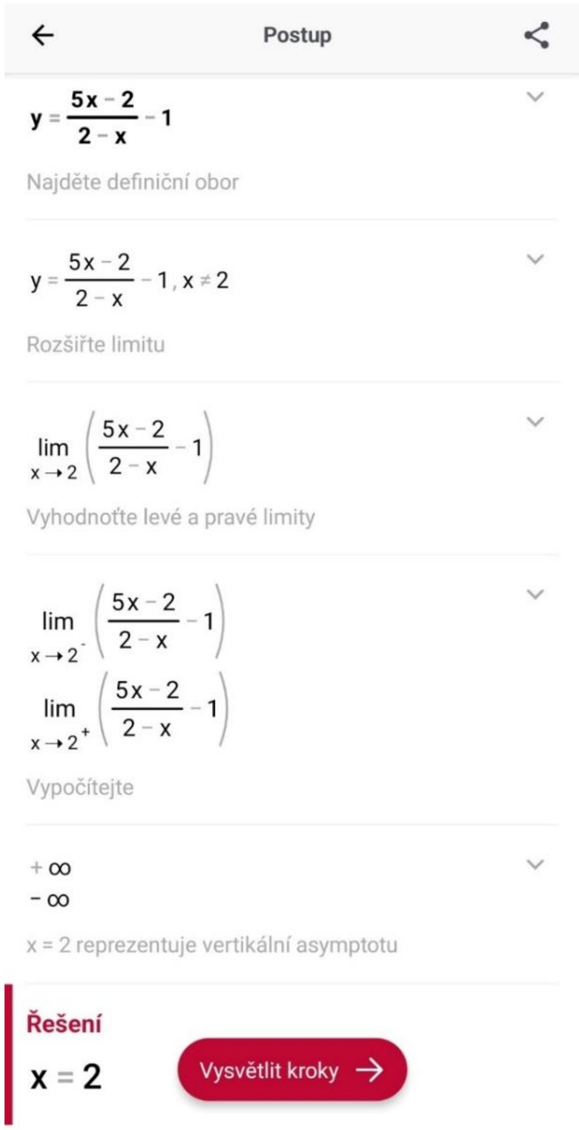


Obrázek 24: Hledání průsečíku s osou y

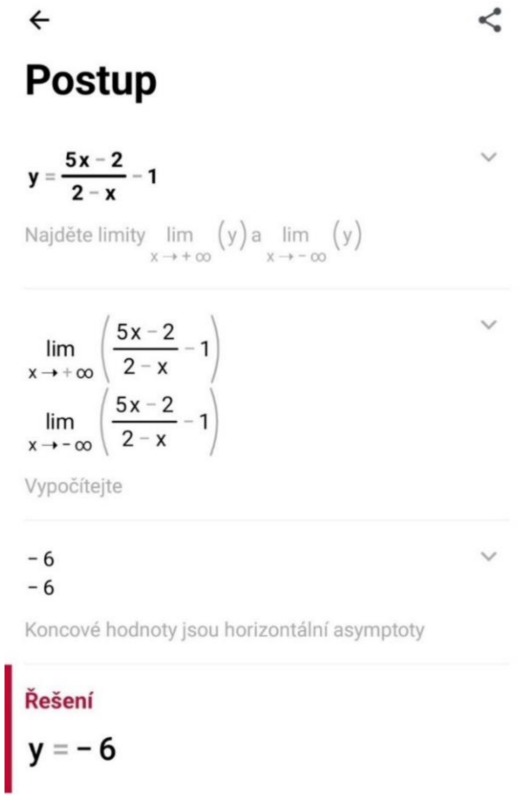


Obrázek 25: Hledání průsečíku s osou x

Obrázek 26: Určování definičního oboru funkce



Obrázek 27: Hledání svislých asymptot pomocí limit



Obrázek 28: Pomocí limit najděte horizontální asymptoty

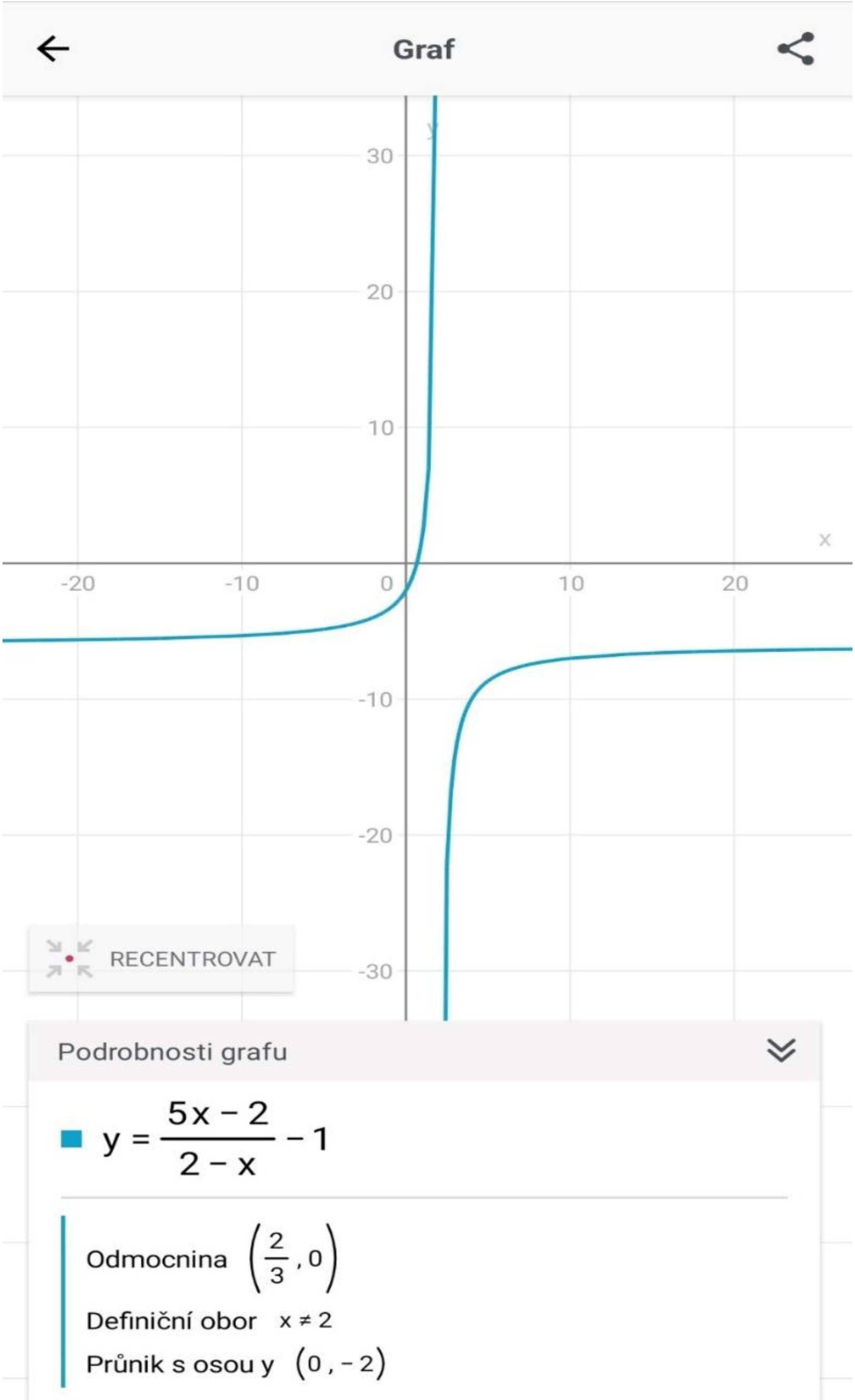
Obrázek 29: Pomocí limit najděte asymptoty se směrnicí

Obrázek 30: Zjišťování, zda je daný výraz sudý, lichý nebo ani jedno

Obrázek 31: Hledání lokálních extrémů

Obrázek 32: Hledání inflexních bodů

Jak můžeme vidět, aplikace došla ke stejným výsledkům, avšak výpočet jsme dostali okamžitě i s vykreslením grafu, na který se nyní můžeme podívat:



Obrázek 33: Graf funkce s předpisem $y = \frac{(5x-2)}{2-x} - 1$

Příklad č.2

Jako druhý příklad [14] máme zadanou lineární funkci ve tvaru:

$$y = |-x + 1|$$

Protože nemáme v zadání funkce žádné omezení na definičním oboru, na jehož základě bychom z něj museli vyřadit nějaká čísla, je definiční obor roven $D_f = \mathbb{R}$**.** Obdobně jako v prvním případě, i nyní si vypočteme průsečíky s osou x a osou y. Průsečík s osou x nastává, pokud se vnitřek absolutní hodnoty rovná nule. Výpočet x-souřadnice průsečíku poté vypadá:

$$-x + 1 = 0$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

Průsečík P_x má souřadnice $[1; 0]$. A průsečík s osou y opět získáme výpočtem funkční hodnoty v bodě $x = 0$ (tedy $y = f(0)$).

$$y = |-x + 1| = |0 + 1| = 1$$

Průsečík s osou y P_y tedy najdeme v bodě se souřadnicemi $[0; 1]$. Sudost nebo lichost určíme opět náhradou *x* za *-x*. Ale protože vidíme, že v absolutní hodnotě není *x* samostatné a dochází proto k posunu na ose x do polohy $[1; 0]$, nemůže být funkce ani lichá ani sudá. Nyní provedeme ověření výpočtem:

$$f(-x) = |-(-x) + 1| = |x + 1|$$

Jak lze vidět, $f(-x)$ se nerovná ani $f(x)$ a ani $-\ f(x)$, tato funkce skutečně není ani sudá ani lichá. Protože nemáme žádné body nespojitosti, nemůžeme mít žádné asymptoty. Graf funkce je navíc ve tvaru přímky, nemůžeme tedy najít přímku, ke které by se limitně mohla přibližovat. Z teorie o absolutní hodnotě víme, jak vypadá graf s absolutní hodnotou, proto lze říci, že není funkcí prostou. Ať povedeme jakoukoli přímku rovnoběžnou s osou x, vždy nám protne alespoň dva body grafu. Pro určení monotónnosti bude nejjednodušší si funkci rozdělit podle nulového bodu na dva intervaly, $(-\infty;\ 1\rangle$ a $(1;\ \infty)$. Protože je funkce definovaná i v bodě jedna, zahrneme ji do jednoho z intervalů. Nyní provedeme odstranění absolutní hodnoty. Pokud dosadíme z prvního intervalu jakékoli číslo do dané rovnice, vždy nám vyjde kladné číslo. Proto funkce, kterou budeme derivovat, vypadá takto:

$$f\ (x) = +(-x + 1) = -x + 1.$$

A tedy derivace poté je:

$$f'(x) = -1.$$

Protože je první derivace vždy záporná, můžeme o dané funkci říci, že je klesající na intervalu $(-\infty;\ 1\rangle$.

Obdobně uděláme i druhý interval $(1;\ \infty)$. Pokud bychom dosadili číslo z daného intervalu do původní rovnice, vnitřek absolutní hodnoty vždy vyjde záporný. Proto funkce bude vypadat takto:

$$f\ (x) =\ -(-x+1) = x - 1$$

První derivace funkce je poté:

$$f'(x) = 1$$

Protože je první derivace na intervalu $(1;\ \infty)$ vždy kladná, můžeme říci, že je funkce na daném intervalu rostoucí.

Přestože nemáme nulové body derivací, víme, že ke zlomu mezi jednotlivými intervaly dochází v bodě zlomu $x = 1$ a funkce je v bodě definovaná, nachází se zde minimum funkce. Výpočet y-souřadnice se poté udělá z rovnice:

$$y = |-\mathrm{x} + 1| = |-1 + 1| = 0$$

Minimum funkce se tedy nachází v bodě M [1;0]. Z toho vyplívá, že je funkce zdola omezená a obor hodnot je tedy omezen pouze na $\langle 0;\ +\infty)$.

Pokud bychom chtěli zjistit konkávnost či konvexnost funkce, potřebujeme druhou derivaci pro interval $(-\infty;\ 1\rangle$:

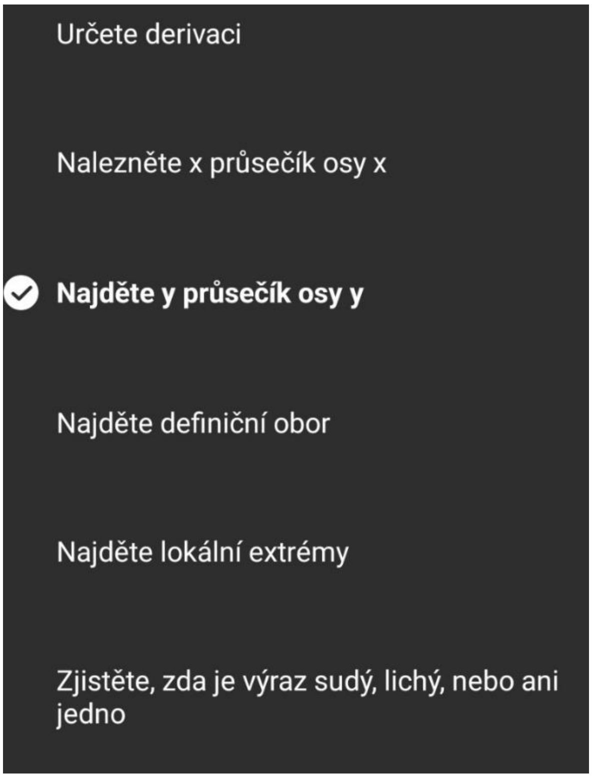
$$f''(x) = 0,$$

i interval $(1;\ \infty)$:

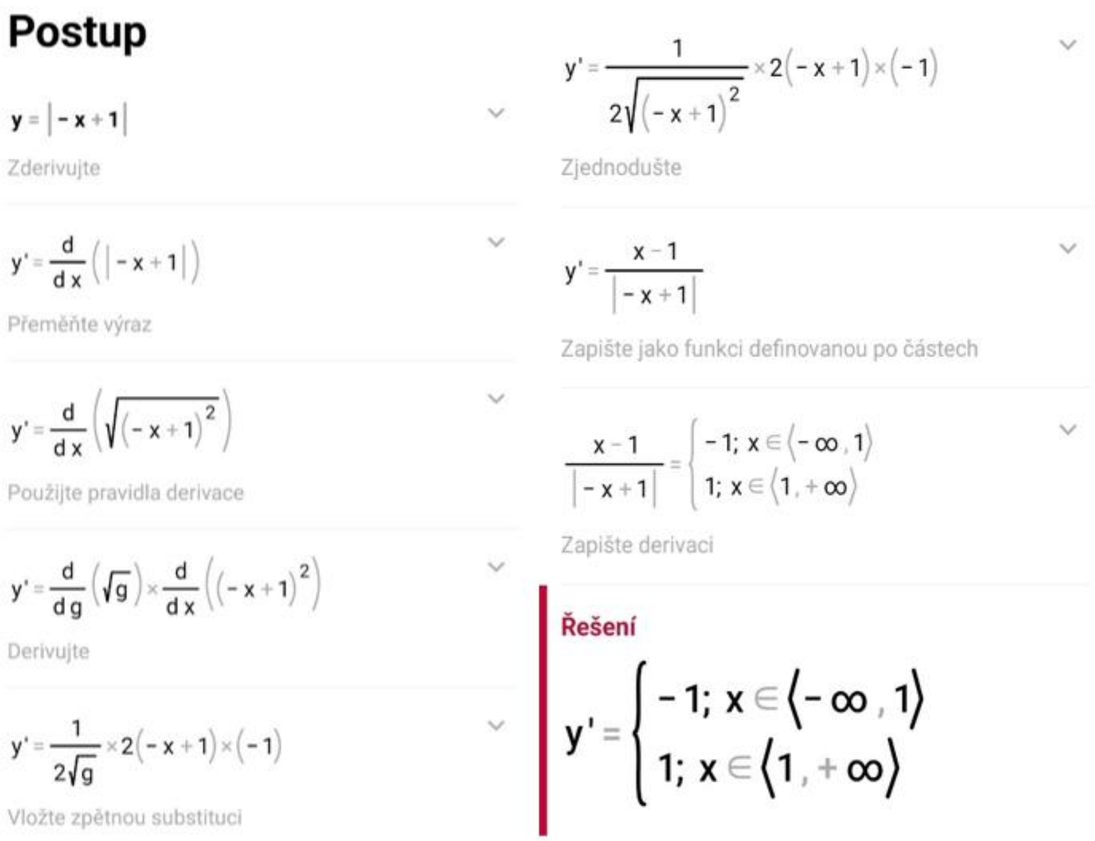
$$f''(x) = 0.$$

Druhá derivace je na obou intervalech rovna nule a také proto, že je v obou intervalech mají části funkce tvar přímky, není daná funkce ani konkávní ani konvexní.

Řešení pomocí aplikace Photomath:



Obrázek 34: Postup vyšetřování průběhu funkce v bodech



Obrázek 35: První derivace funkce

$y = |-x+1|$

Nalezněte x průsečík osy x

$x = 1$

Obrázek 36: Hledání průsečíku s osou x

$y = |-x+1|$

Najděte y průsečík osy y

$y = 1$

Obrázek 37: Hledání průsečíku s osou y

$y = |-x+1|$

Najděte definiční obor

$x \in \mathbb{R}$

Obrázek 38: Definiční obor funkce

$y = |-x+1|$

Zjistěte, zda je výraz sudý, lichý, nebo ani jedno

Ani sudá, ani lichá

Obrázek 39: Sudost a lichost funkce

Postup

$y = |-x+1|$

Použijte odpovídající zápis

$f(x) = |-x+1|$

Najděte definiční obor

$f(x) = |-x+1|, x \in \mathbb{R}$

Určete derivaci

$f'(x) = \frac{x-1}{|-x+1|}$

Najděte definiční obor

$f'(x) = \frac{x-1}{|-x+1|}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Nahraďte $f'(x) = 0$

$0 = \frac{x-1}{|-x+1|}$

Vyřešte rovnici

$\varnothing$

Najděte kritické body

$x = 1$

Určete intervaly

$\langle -\infty, 1\rangle, \langle 1, +\infty\rangle$

Vyberte body

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

Vypočítejte hodnoty derivací

$f'(0) = -1$

$f'(2) = 1$

Lokální maximum je v $x = 1$

$f(x) = |-x+1|, x = 1$

Vypočítejte hodnotu funkce

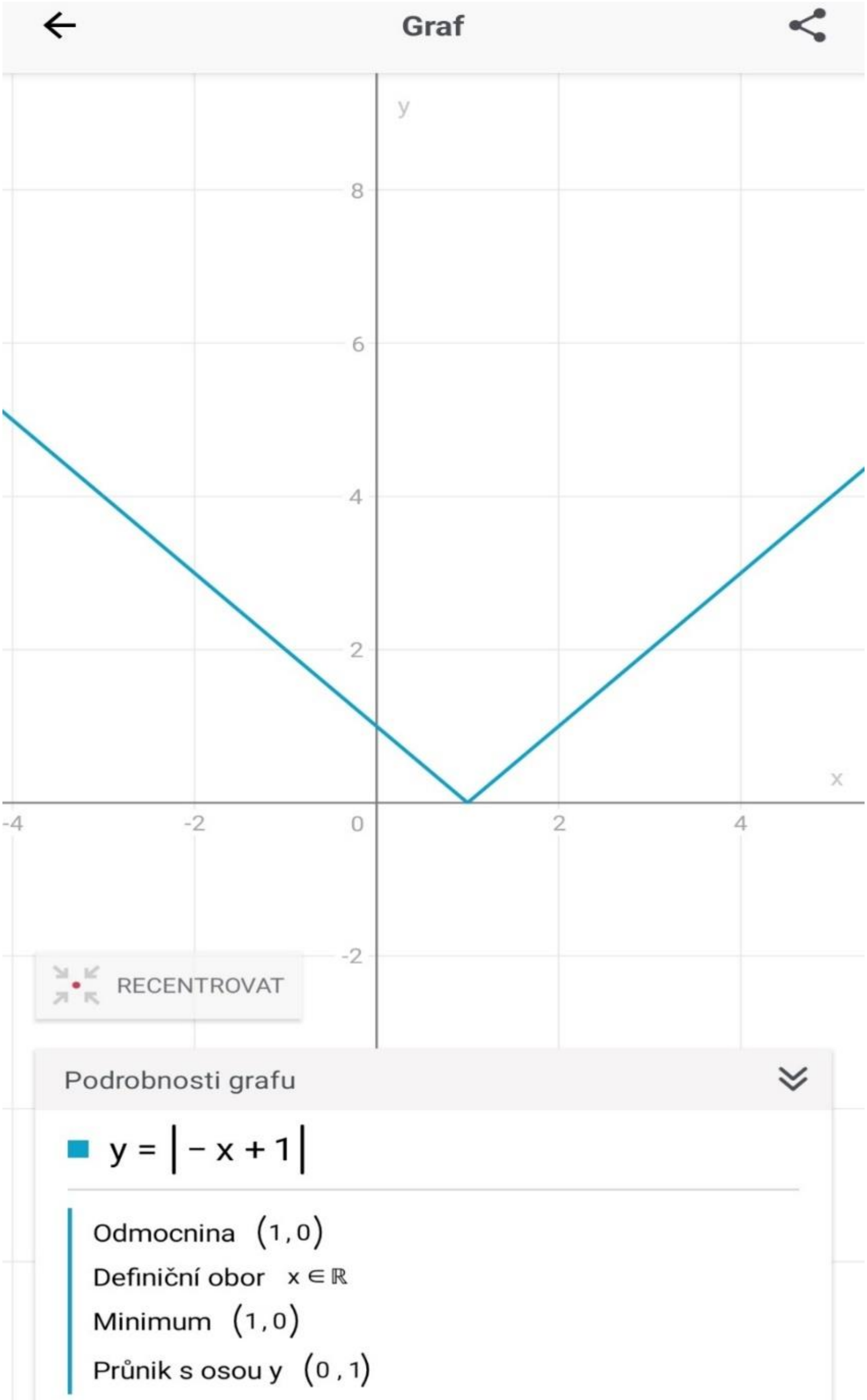
$f(1) = 0$

Lokální minimum funkce je 0 v $x = 1$

Řešení

Lokální minimum je 0 v $x = 1$

Obrázek 40: Hledání lokálních extrémů



Obrázek 41: Graf funkce $y = |-x + 1|$

4.2 Kvadratická funkce

Jako kvadratickou funkci [15] máme zadanou funkci s předpisem:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Nenachází se zde zlomek, ani odmocnina ani jiné omezující funkce. Proto ani tentokrát nic nezbraňuje tomu, aby by definiční obor roven $D_f = \mathbb{R}$. Nulový bod můžeme vypočítat mnoha způsoby, například kvadratickou rovnici nebo úpravou vytýkáním na tvar $(x - p) \cdot (x - q) = y$. Pro tento příklad byl zvolen postup kvadratickou rovnicí. Pokud $y = 0$, pak se hodnoty *x* vypočítají tak, že:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

Kořeny dané rovnice jsou poté:

$$x_1 = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

Průsečíky s osou x tedy najdeme ve dvou místech. Konkrétně v bodech se souřadnicemi $\mathrm{P}_{x_1}[3;\ 0]$ a $\mathrm{P}_{x_2}[-1; 0]$. Průsečík s osou x poté máme pouze jeden, s x – souřadnici rovno nule a y – souřadnici nyní vypočteme:

$$y = x^2 - 2x - 3 = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

Graf funkce tedy osu y protíná v bodě P_y [0; -3]. Co se týče lichosti či sudosti, podle průsečíků můžeme opět poznat, že nebude funkce ani sudá ani lichá. Nyní ale provedeme ověření výpočtem, respektive nahrazením neznámé *x* za neznámou -*x*:

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 3 = x^2 + 2x - 3$$

Výsledek vyšel podle předpokladu, daná funkce není ani lichá a ani sudá. Protože ani v tomto případě nemáme body nespojitosti, nemáme ani zde asymptoty. Protože má tato parabola tvar „U“ (koeficient *a* je kladný, směřuje proto nahoru), každá přímka rovnoběžná s osou x v oboru hodnot funkce protne dva body paraboly, funkce proto není prostá. Jak bylo řečeno, tato parabola má tvar „U“. z čehož lze usoudit, že funkce je nejdříve klesající a od určitého bodu je rostoucí. Ten bod nazýváme vrchol paraboly a je zároveň minimem funkce, která je tedy zdola omezená. Teď potřebujeme naše tvrzení potvrdit a také určit souřadnice daného bodu. K tomu potřebujeme první derivaci funkce:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 2x - 2$$

Pro určení minima funkce a monotónnosti potřebujeme stacionární body, tedy nulové body první derivace:

$$2x - 2 = 0$$

$$2x = 2$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

Nyní si tedy rozdělíme číselnou osu na dva intervaly $(-\infty; 1\rangle$ a $(1; +\infty)$. Když do první derivace dosadíme jakýkoliv bod z prvního intervalu, například číslo -2:

$$2x - 2 = 2 \cdot (-2) - 2 = -6,$$

vždycky nám vyjde záporný výsledek, což znamená, že daná funkce je na daném intervalu klesající. Při určování intervalu $(1; +\infty)$ jsme si vybrali číslo +2:

$$2x - 2 = 2 \cdot 2 - 2 = 2.$$

Výsledek je kladný, z toho vyplívá, že daná funkce je na daném intervalu rostoucí. Protože je funkce na prvním intervalu klesající a na druhém rostoucí a funkce je v bodě $x = 1$ definovaná, je v tomto bodě vrchol paraboly, tedy minimum funkce. Pro určení druhé souřadnice musím vypočítat funkční hodnotu v daném bodě $\big(y = f(1)\big)$:

$$y = x^2 - 2x - 3 = (1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 = -4$$

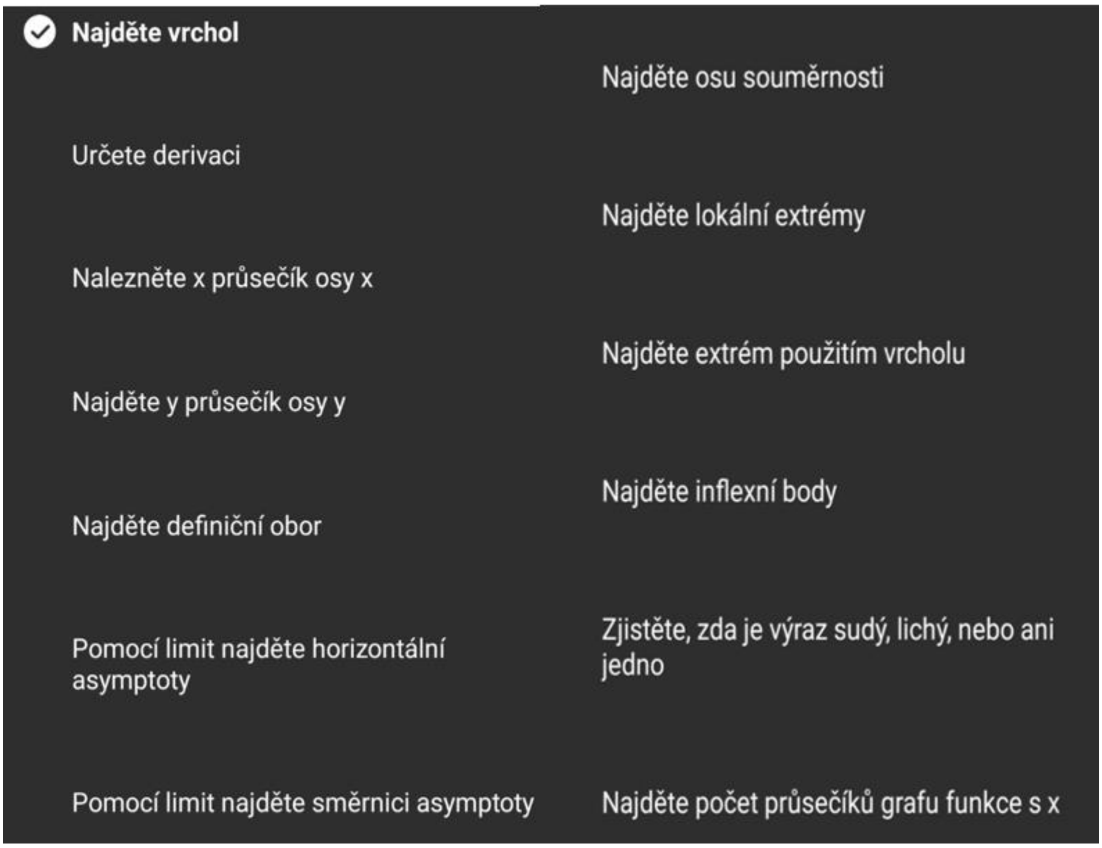
Minimum funkce je v bodě V $[1; -4]$ a funkce je tedy zdola omezená.

Jako poslední vlastnost musíme určit konkávnost či konvexnost funkce. Musíme proto vypočítat druhou derivaci:

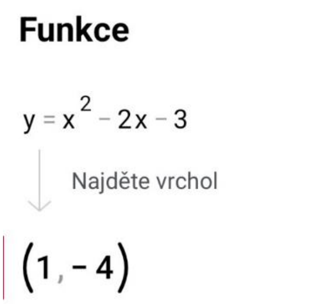
$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = (2 \cdot x - 2)' = 2$$

Protože je rovna druhá derivace rovna dvěma, bude vždycky kladná, proto je funkce na celém svém definičním oboru konvexní.

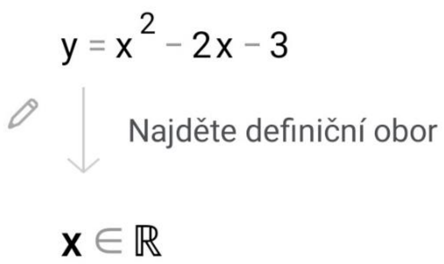
Nyní provedeme řešení funkce pomocí aplikace Photomath.



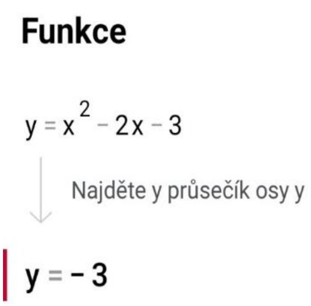
Obrázek 42: Body postupu vyšetřování funkce



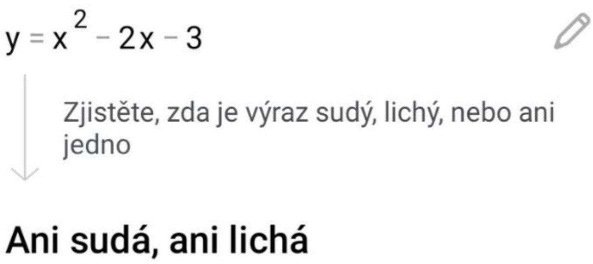
Obrázek 43: Určení vrcholu



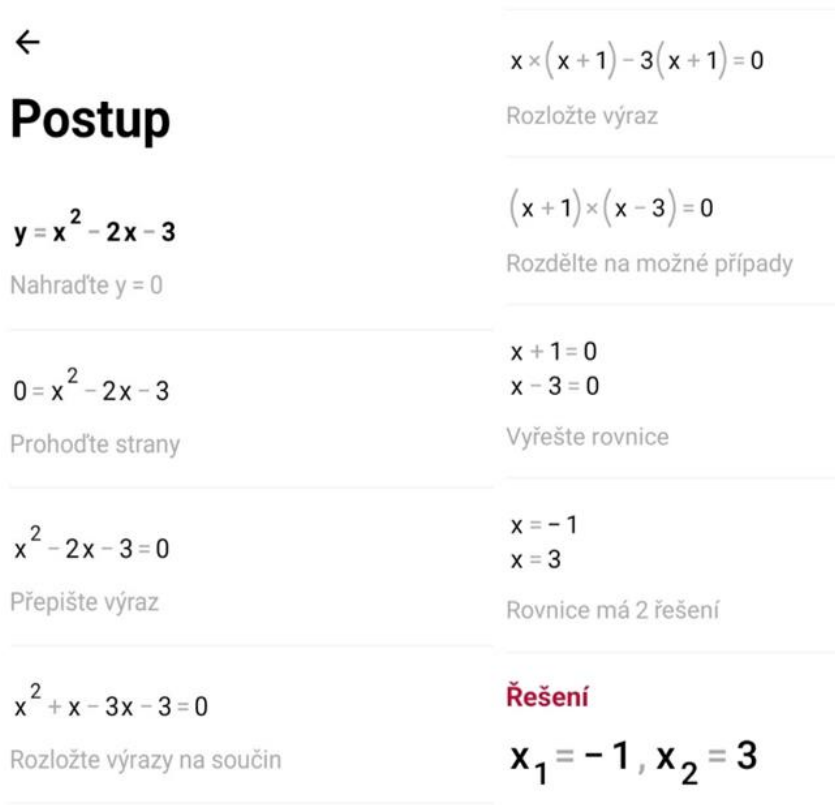
Obrázek 44: Definiční obor funkce



Obrázek 45: Průsečík s osou y



Obrázek 46: Sudost a lichost funkce



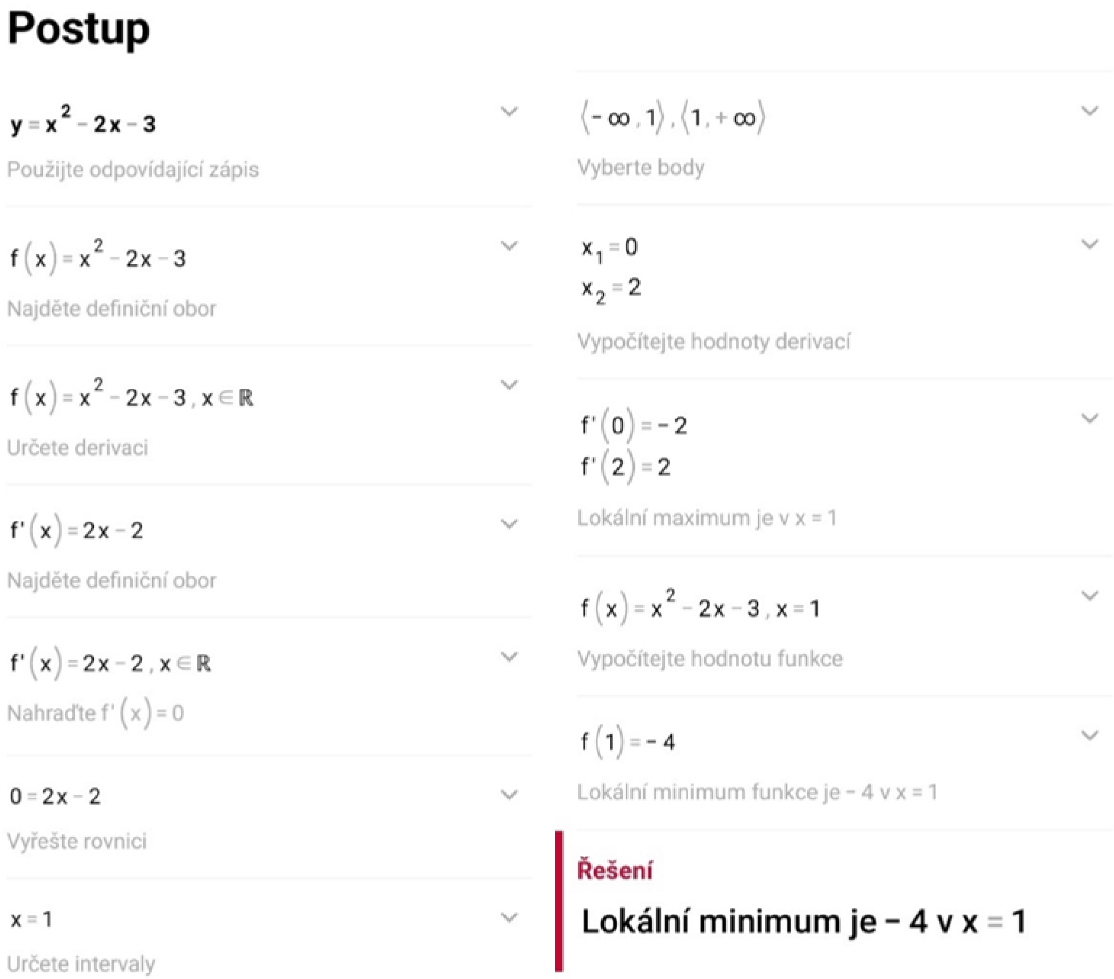
Obrázek 47: Průsečík s osou x

Obrázek 48: První derivace funkce

Obrázek 49: Vodorovné asymptoty funkce

Obrázek 50: Určení asymptot se směrnici pomocí limit

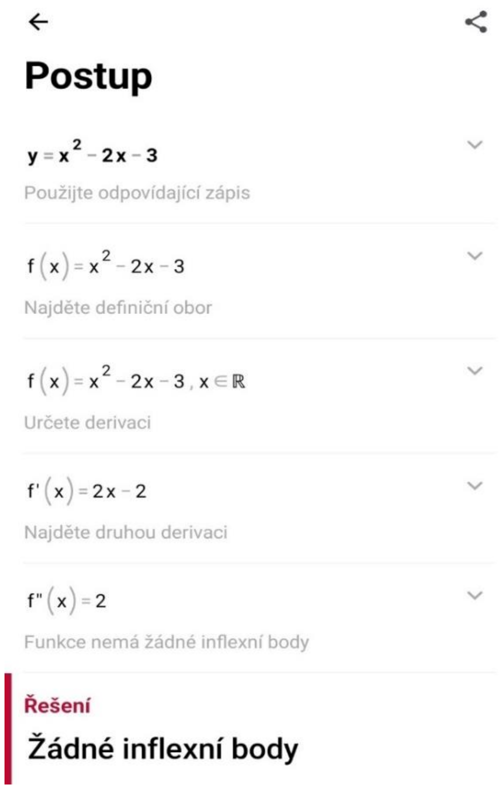
Obrázek 51: Osa souměrnosti funkce



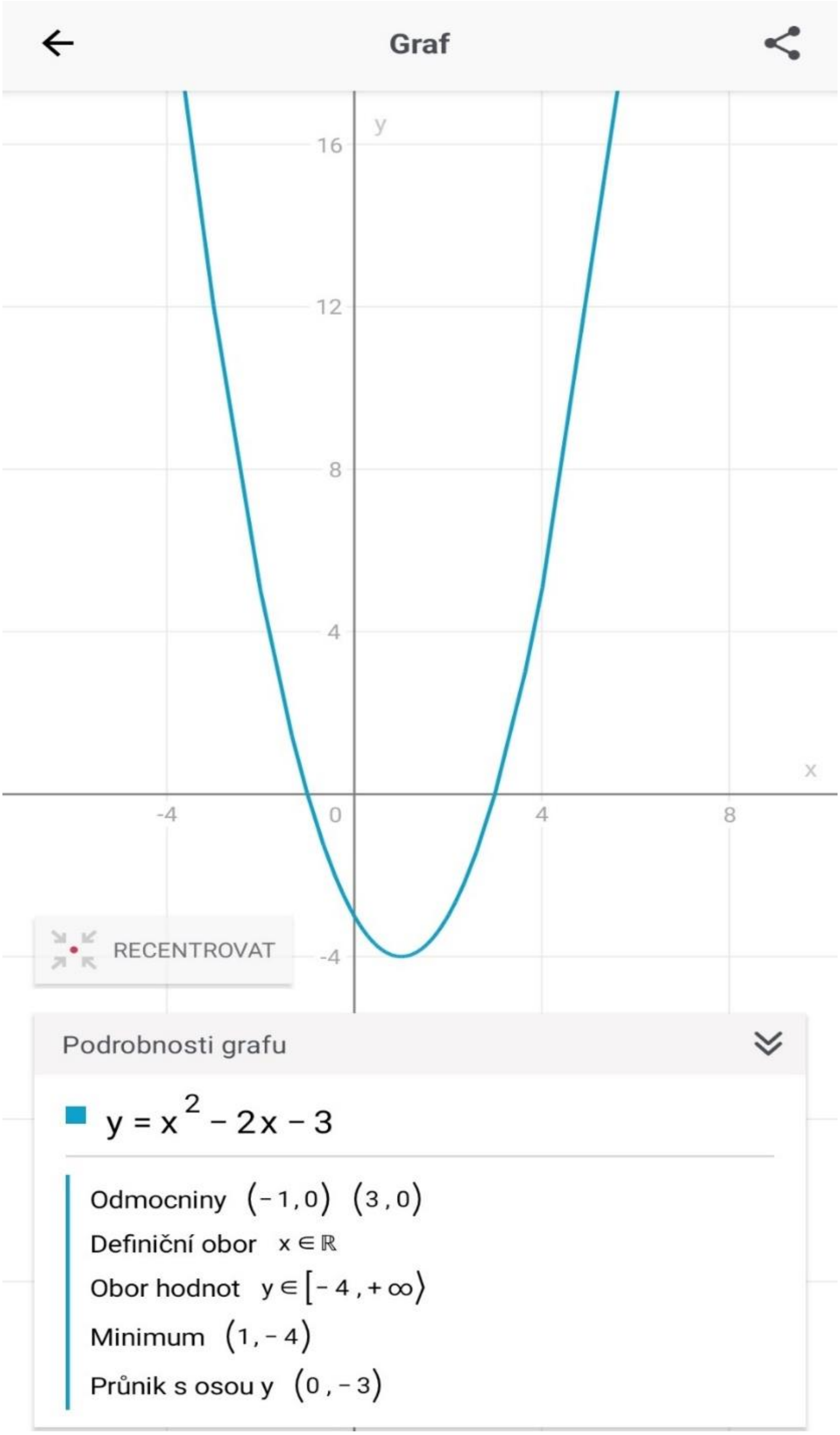
Obrázek 52: Lokální extrémy funkce

Obrázek 53: Určení extrému pomocí vrcholu

Obrázek 54: Počet průsečíků grafu funkce s osou x



Obrázek 55 Inflexní body



Obrázek 56: Graf funkce $y = x^2 - 2x - 3$

4.3 Mocninná funkce

Jako příklad mocninné funkce [16] máme:

$$y = x^3$$

Jako definiční obor máme $D_f = \mathbb{R}$, nemáme zde žádné zakázané hodnoty, které bychom museli vyloučit. Průsečík osou x a osou y v tomto příkladě nejsou nic složitého. Pokud y se má rovnat nule, může tomu nastat pouze v případě, kdy:

$$x^3 = 0$$

$$x = 0$$

A pokud se pro zjištění průsečíku s osou y má x rovnat nule, pak:

$$y = x^3 = 0^3 = 0.$$

Daná funkce tedy protíná funkci v počátku, kterým prochází. To znamená, že daná funkce by mohla býti sudá či lichá. Pro ověření potřebujeme x nahradit ve vzorci jeho zápornou hodnotou:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$$

Protože se $f(-x)$ rovná $-f(x)$, je daná funkce podle teorie lichá, což znamená, že je souměrná podle počátku. Ani v tomto případě nemáme body nespojitosti, ve kterých bychom mohli vést asymptotu a ke které by se funkce mohla limitně blížit.

Protože pro kterákoli x_1 a x_2, kdy $x_1 < x_2$, platí, že $f(x_1) < f(x_2)$, je daná funkce prostá. Následně musíme určit, zde je funkce rostoucí nebo klesající.

$$f'(x) = x^3 = 3 \cdot x^2$$

$$3 \cdot x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Uděláme si dva intervaly, $(-\infty;\ 0\rangle$ a $(0;\ \infty)$. Pokud z prvního intervalu dosadíme jakékoli číslo, například -5:

$$3 \cdot x^2 = 3 \cdot (-5)^2 = 75,$$

výsledek nám pokaždé vyjde kladný a pokud bychom dosadili jakékoli číslo z druhého intervalu, ku příkladu číslo 10:

$$3 \cdot x^2 = 3 \cdot 10^2 = 300,$$

také nám vyjde kladné číslo. Znamená to, že daná funkce je rostoucí v celém svém průběhu, v bodě $[0; 0]$ tedy není extrém a funkce není nijak omezená. Obor hodnot je tedy poté roven $H_f = \mathbb{R}$.

Pokud uděláme druhou derivaci funkce, vyjde nám:

$$f''(x) = (3 \cdot x^2)' = 6x$$

Inflexní bod funkce je tedy v bodě, jehož x-souřadnice má hodnotu:

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

Na základě zjištěného inflexního bodu došlo k rozdělení osy x na dva intervaly, jeden kdy $x \in (-\infty; 0\rangle$ a druhý kdy $x \in (0; \infty)$. Z těchto intervalů vybereme jednu hodnotu. Z prvního intervalu to bude číslo -8, které dosadíme do druhé derivace:

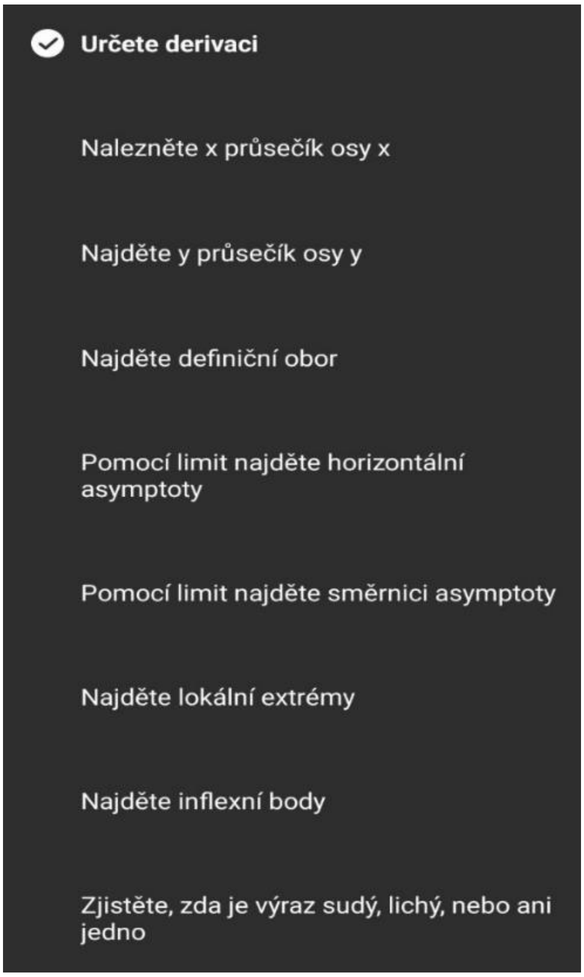
$$6x = 6 \cdot (-8) = -48.$$

A z druhého intervalu číslo 85:

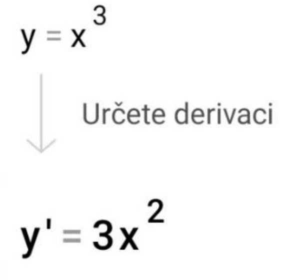
$$6x = 6 \cdot 85 = 510.$$

Funkce je tedy v intervalu $(-\infty; 0\rangle$ vždy záporná, je tedy konkávní, zatímco v intervalu $(0; \infty)$ bude vždycky kladná, proto má zde funkce konvexní tvar.

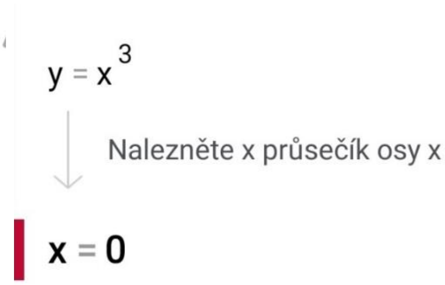
Aplikace Photomath pro danou funkci uvedla tyto body:



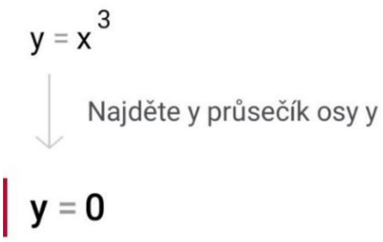
Obrázek 57: Body postupu vyšetření průběhu funkce



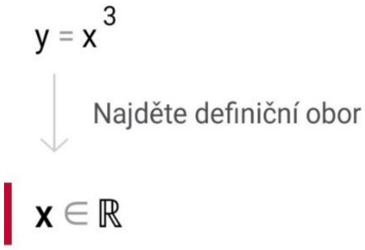
Obrázek 58: První derivace



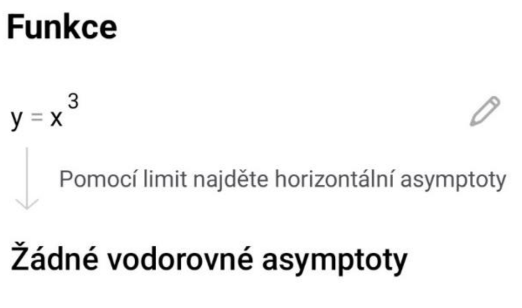
Obrázek 59: Průsečík s osou x



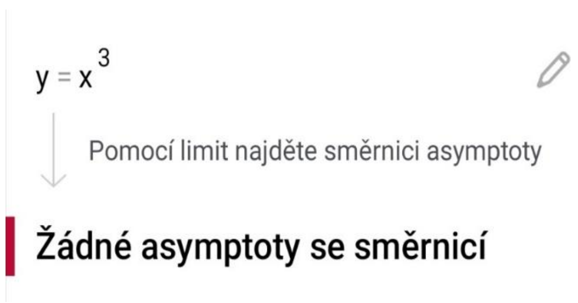
Obrázek 60: Průsečík s osou y



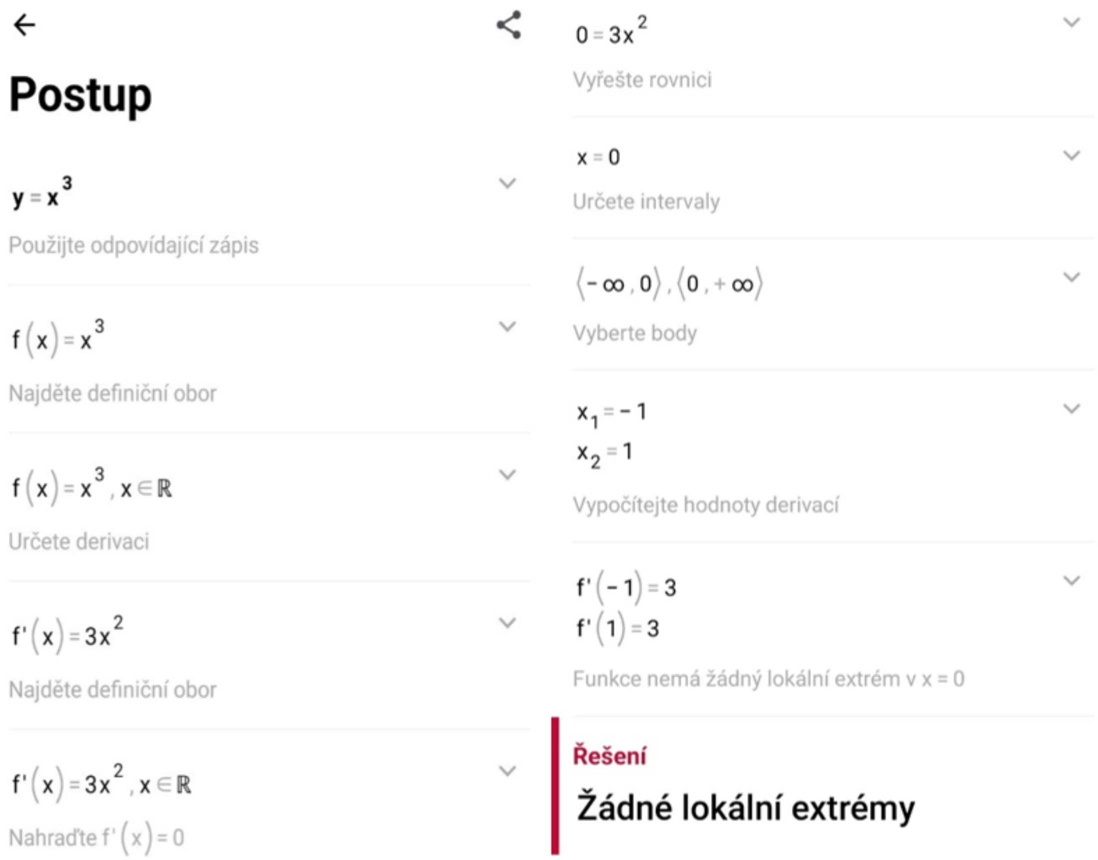
Obrázek 61: Definiční obor funkce



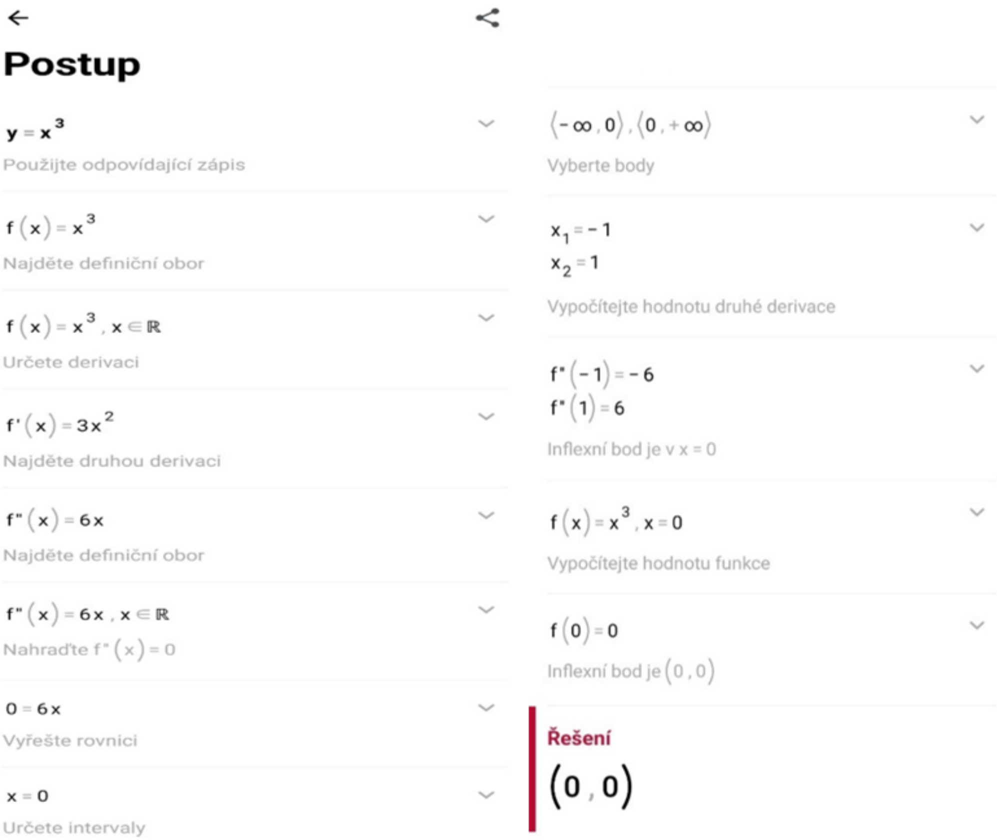
Obrázek 62: Vodorovné asymptoty



Obrázek 63: Asymptoty se směrnicí



Obrázek 64: Lokální extrémy funkce



Obrázek 65: Inflexní body

Obrázek 66: Sudost a lichost funkce

Obrázek 67: Graf funkce $y = x^3$

4.4 Exponenciální funkce

Následně vyšetříme průběh exponenciální funkce [5] s předpisem:

$$y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Definičním oborem pro tuto funkci je $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou x nelze nalézt, protože nemůžeme nalézt takové *x*, pro které by byl daný výraz roven 0. Pro exponenciální funkce platí, že protínají osu y v bodě jedna. My ale máme součet dvou funkcí, proto průsečík s osou y bude s x – souřadnicí:

$$y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2$$

Průsečík s osou x má tedy souřadnice $P_x[0;\ 2]$, protože musíme sečíst funkční hodnoty obou původních funkcích pro vytvoření grafu naší funkce. Pokud zaměníme *x* za *-x*, náš předpis funkce to ovlivní následovně:

$$f(-x) = 2^{-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \frac{1^x}{2} + 2^x$$

Sice máme obracené pořadí členů, ale protože pro sčítání platí komutativní zákon, pak $f\ (-x)$ je rovno $f(x)$ a daná funkce je sudá a je souměrná podle osy y. Protože je funkce sudá, tím pádem není funkcí prostou, protože pro jedno *y* mohu najít dvě hodnoty *x*.

První derivace funkce je:

$$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - \ln 2 \cdot 2^{-x} = \ln 2 \cdot 2^x - \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Pro určení monotónnosti potřebujeme její nulový bod:

$$\ln 2 \cdot 2^x - \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

Pro výpočet nulového bodu je nejjednodušší druhý výraz přesunout na druhou stranu a obě strany rovnice vydělit hodnotou ln 2, která je pro obě strany stejná:

$$2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Tento vyraz se bude rovnat jedině v případě, kdy $x = 0$. Pokud bychom vzali číslo z intervalu od $(-\infty;\ 0\rangle$, pak bychom získali pokaždé záporný výsledek, protože člen, který odečítáme je menší než ten první. Ukážeme si to na příkladu, kdy za *x* dosadíme třeba -3:

$$\ln 2 \cdot 2^{-3} - \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \ln 2 \cdot \frac{1}{8} - \ln 2 \cdot 8 = \ln 2 \cdot \left(-\frac{63}{7}\right).$$

Vyplívá z toho, že v tomto intervalu je funkce klesající. Pokud bychom z druhého intervalu vzali 3, výsledek bude kladný, protože první člen bude vyšší než ten druhý.

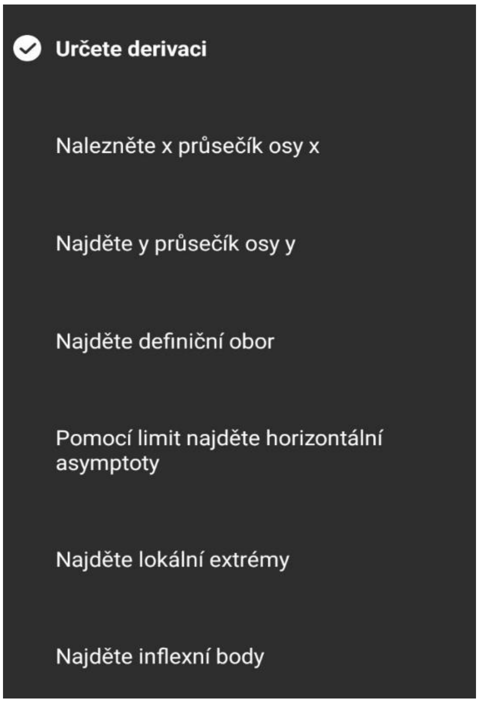
$$\ln 2 \cdot 2^{3} - \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \ln 2 \cdot 8 - \ln 2 \cdot \frac{1}{8} = \ln 2 \cdot \frac{63}{7}$$

Kladný výsledek značí růst funkce v daném intervalu. Protože je funkce klesající a následně rostoucí a funkce je v bodě $x = 0$ definované, je v tomto bodě minimum. v bodě $x = 0$ je i zároveň průsečík s osou y, proto má minimum souřadnice [0; 2]. Druhá derivace má potom tvar:

$$f''(x) = \ln 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{x} + \ln 2 \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

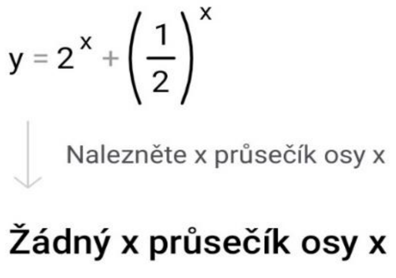
Tato druhá derivace nulový bod nemá, ale víme, že funkce souměrná podle osy y a všechny hodnoty jsou kladné. Daná funkce je tedy v celém svém průběhu konvexní.

Pomocí aplikace Photomath jsme vyšetřili průběh funkce následovně:

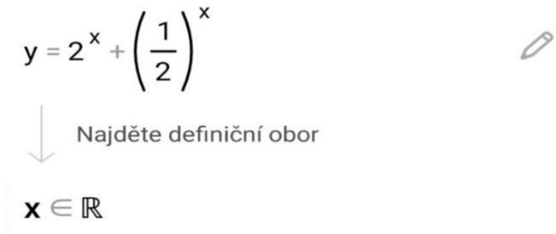


Obrázek 68: Vyšetření průběhu funkce v bodech

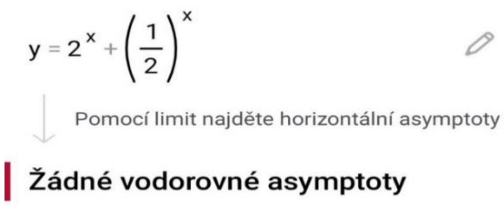
Obrázek 69: Znění první derivace funkce



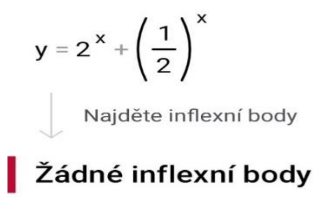
Obrázek 70: Průsečík s osou x



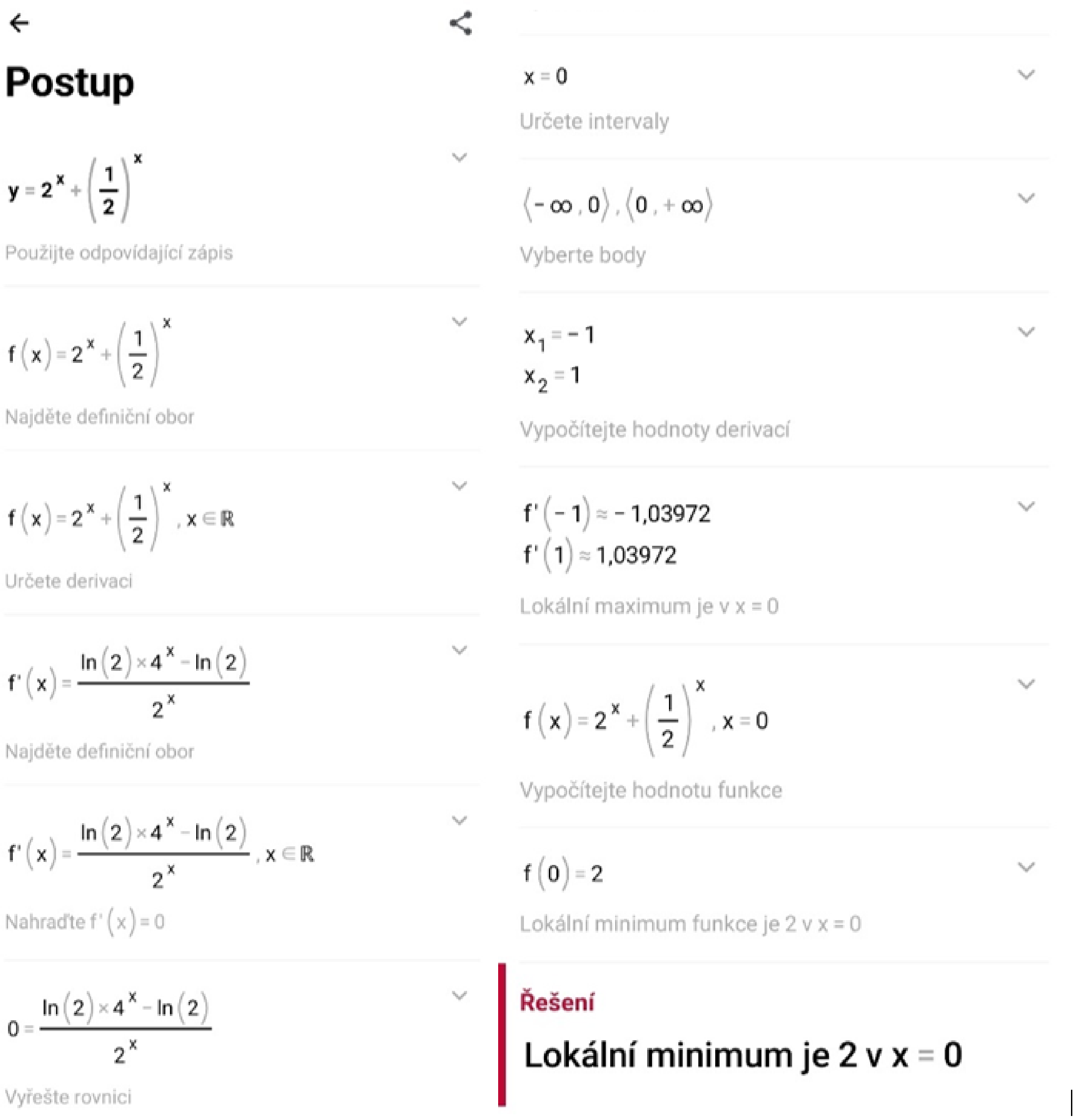
Obrázek 71: Definiční obor funkce



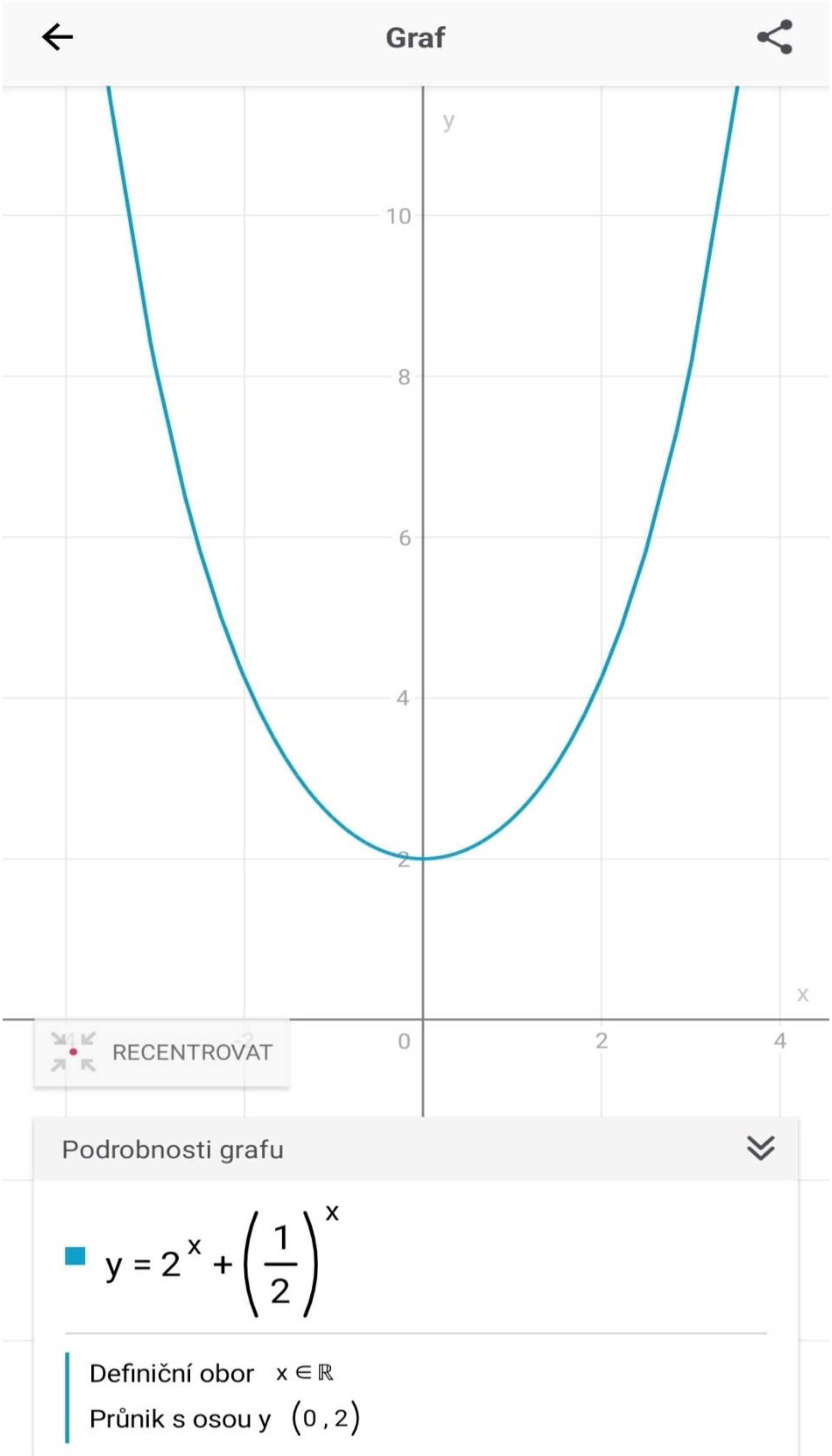
Obrázek 72: Horizontální asymptoty funkce



Obrázek 73: Hledání inflexních bodů



Obrázek 74: Lokální extrémy funkce



Obrázek 75: Graf funkce $y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4.5 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce[17], jejíž průběh máme vyšetřit, má předpis:

$$y = \sqrt{\log(x-1)}$$

Zde bude určování definičního oboru malinko náročnější oproti předchozím příkladům. Argument logaritmu, tedy výraz $(x-1)$ musí být vyšší než 0, proto

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

Protože je zde i odmocnina, musí celkový výsledek logaritmu vyšší nebo roven nule.

$$\log(x-1) \geq 0$$

Logaritmus je roven nule právě tehdy, je-li argument logaritmu roven 1 podle vztahu mezi logaritmem a exponenciálním vyjádřením $\log_a x = y$ a $x = a^y$

$$x - 1 \geq 1$$

$$x \geq 2$$

Po sjednocení těchto dvou podmínek nám vychází, že definiční obor je roven intervalu $D_f = \langle 2;\ \infty)$. Průsečík s osou y na základě této skutečnosti můžeme vyloučit, protože tato funkce není definovaná v bodě, jehož x-souřadnice by byla rovna nule. Průsečík s osou x nastane tehdy, bude-li logaritmus roven 0.

$$\log(x-1) = 0$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

Protože je funkce definovaná pouze na intervalu $D_f = \langle 2;\ \infty)$, funkce nemůže být ani sudá ani lichá, protože nemůže být souměrná ani přes počátek, ani přes osu y. Ale výpočtem bychom to dokázali následovně:

$$f(-x) = \sqrt{\log(-x-1)} \neq f(x) \neq -f(x)$$

Asymptoty bývají u logaritmů běžné, ale protože je funkce definovaná ve všech bodech svého definičního oboru a nemá tedy nespojitosti, nenajdeme žádnou asymptotu, ke které by se naše funkce mohla limitně blížit. Ověření:

$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{\log(x-1)}\right)=\sqrt{\log(2-1)}=0$$

Aby mohla mít funkce v bodě dvě asymptotu, musela by limita vyjít ±∞, k čemuž nedošlo. Protože funkce nemá stejné funkční hodnoty pro dvě různé hodnoty x, je funkce prostá. Abychom opět mohli určit monotónnost, nejdříve určíme první derivaci:

$$f'(x)=\sqrt{\log(x-1)}=(\log(x-1))^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\log(x-1)}}\frac{1}{(x-1)\cdot\ln 10}$$

Protože daná rovnice nemá neznámou v čitateli, nemůže se nikdy rovnat nule. Pokud bychom ale dosadili jakýkoli bod z intervalu, vyjde nám kladný výsledek v podobně jako v následujícím příkladě:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\log(11-1)}}\frac{1}{(11-1)\cdot\ln 10}=\frac{1}{20\cdot\ln 10}$$

Znamená to, že v celém svém definičním oboru je funkce rostoucí. V průběhu funkce nenajdeme ani minimum, ani maximum. I když by se mohlo zdát, že v bodě dva by mohlo býti minimum, pokud bychom dvojku dosadili do první derivace, pod odmocninou by vyšla nula. To sice je pořád řešitelné, ale odmocnina se nachází ve jmenovateli a dělit nulou nelze. Druhá derivace má poněkud složitější odvození i tvar:

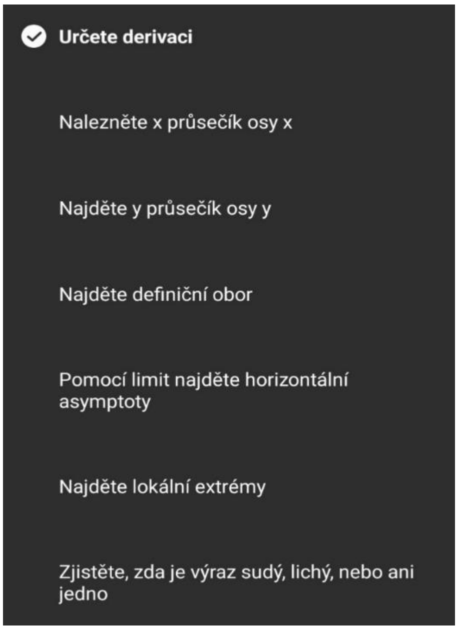
$$(f')'=\frac{1}{2}\cdot\log(x-1)^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot(x-1)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(\log(x-1))^3}}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\log(x-1))^3}}$$

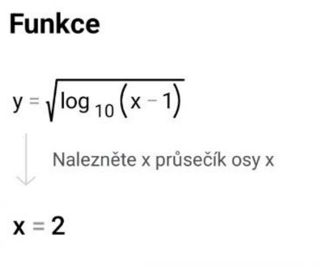
Funkce nemá inflexní bod ani bod nespojitosti, proto daná funkce nemůže býti ani konvexní, ani konkávní.

Vyšetření funkce pomocí aplikace Photomath:

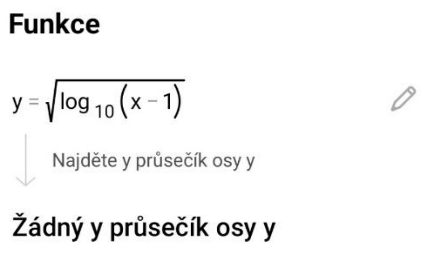


Obrázek 76: Vyšetření průběhu funkce v aplikaci Photomath

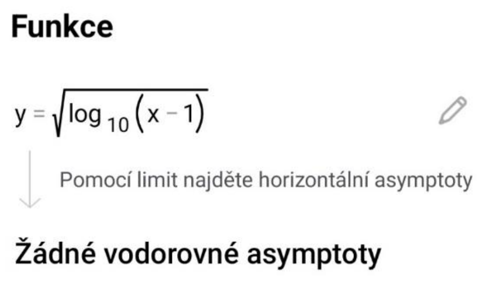
Obrázek 77: První derivace



Obrázek 78: Průsečík osy x

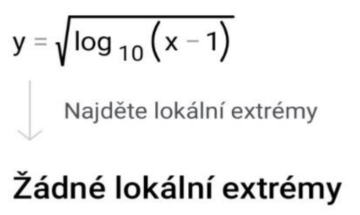


Obrázek 79: Průsečík osy y

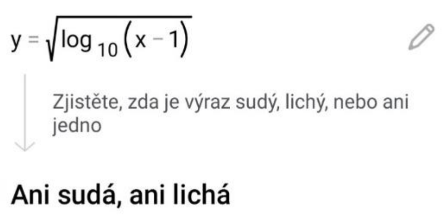


Obrázek 80: Horizontální asymptoty

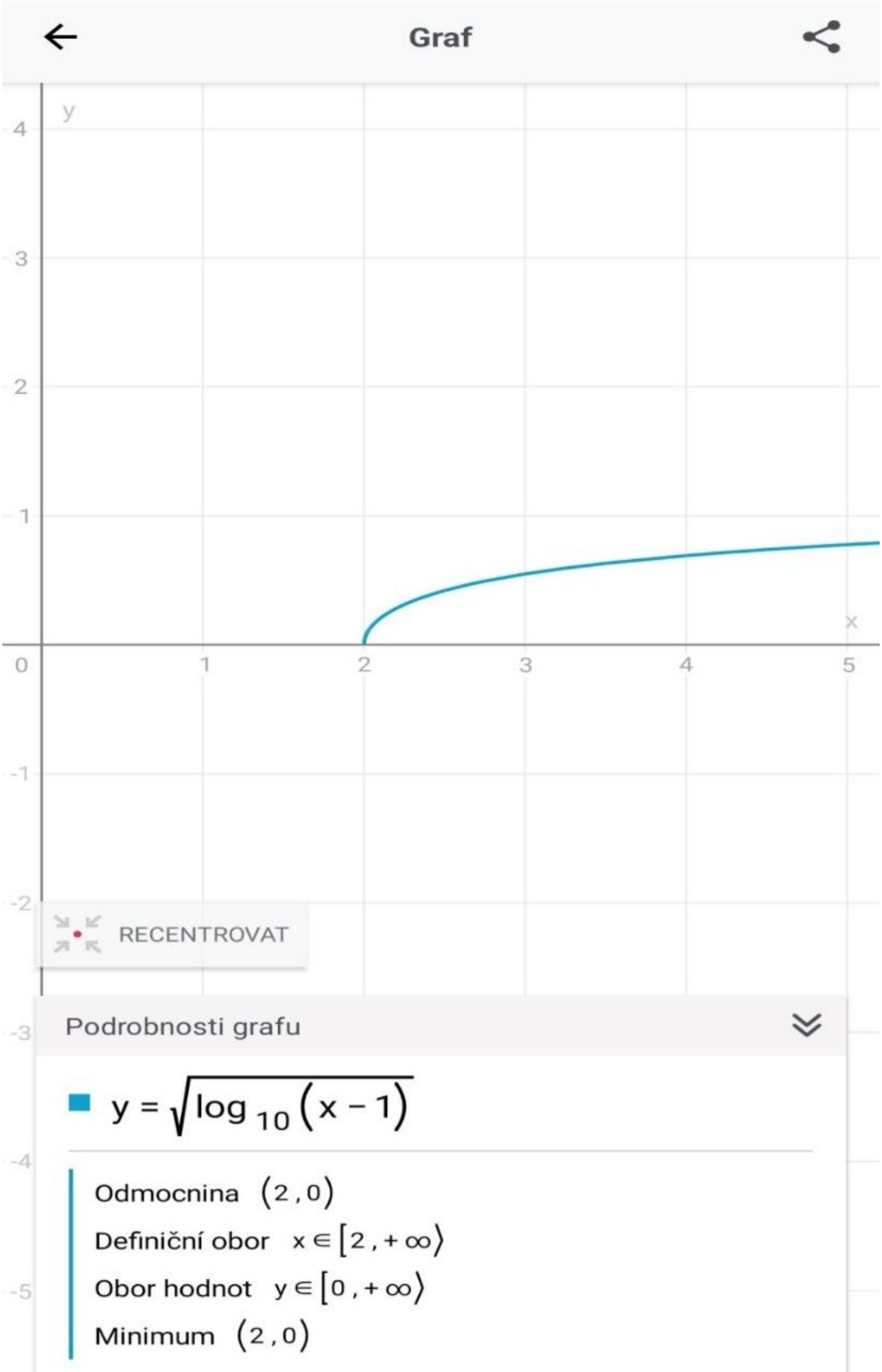
Obrázek 81: určování definičního oboru



Obrázek 82: Lokální extrémy funkce



Obrázek 83: Učení, zda je výraz sudý, lichý nebo ani jedno



Obrázek 84: Graf funkce $y = \sqrt{log(x-1)}$

4.6 Goniometrické funkce

Máme zadanou funkci

s předpisem:

$$y = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$$

Protože toto zadání není příliš ideální pro další počítání, pokusíme se nejdříve daný výraz upravit. Pro dané funkce platí vzorce $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ a $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$. Tyto výrazy v dané funkci nahradíme a upravíme znaménka:

$$y = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} = \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}.$$

Vztah mezi výrazy $\cos^2 x$ a $\sin^2 x$ je takový, že jejich součet je roven jedné. V rámci pravidel vyjadřování neznámé, pokud od jedničky odečtu hodnotu $\sin^2 x$, dostanu hodnotu $\cos^2 x$ a obráceně.

$$y = \frac{2 \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

Nyní stačí ve vzorci vytknout a vznikne nám stejná závorka v čitateli i jmenovateli.

$$y = \frac{2 \sin x \, (\sin x + \cos y)}{2 \cos x \ \ (\cos x \ + \sin x)} = \frac{2 \sin x}{2 \cos x} = \tan x$$

Definiční obor funkce tangens jsou všechna reálná čísla, kromě bodů $\left\{\frac{\pi}{2} + \ k \ \cdot \ \pi\right\}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech je totiž goniometrická funkce $\cos x$ rovna nule, což by způsobilo dělení nulou, které není možné. Takže definiční obor je tedy $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \ \mathrm{k} \ \cdot \ \pi\right\}$, kde k $\in \mathbb{Z}$. Průsečík s osou x nastává tehdy pokud je $\tan x = 0$, což podle definice funkce nastává tehdy, kdy je nule rovna funkce: $\sin x$. To nastává v okamžiku, kdy $x = 0 + k\pi$, kde k ϵ Z. Z toho nám také rovnou vyplívá, že průsečík s osou y, kdy za x máme dosazovat nulovou hodnotu je také nula. Daná funkce tedy prochází počátkem. Pro danou funkci platí:

$$f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x),$$

daná funkce je tedy lichá.

Protože funkce není v některých bodech definovaná, je velmi pravděpodobné, že má v daném bodě asymptoty. Domněnku se nyní pokusíme potvrdit výpočtem.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan x) = \begin{cases} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{2-x}\right) = -\infty \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{2-x}\right) = \infty \end{cases}$$

Ano, funkce má skutečně v tomto nevlastním bodě limitu. A asymptota se nachází v bodě $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. Tím, že je funkce periodická, nemůže být funkce prostá. Ale může být pořád rostoucí či klesající a na to potřebujeme první derivaci:

$$f'(x) = \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Funkce sice nemá stacionární body, ale pořád máme vyřazený body z definičního oboru, proti kterému to můžeme srovnat. Pokud dosadíme hodnotu z prvního intervalu do druhé derivace, pak

$$\frac{1}{\cos^2(0)} = 1$$

a z druhého intervalu

$$\frac{1}{\cos^2(\pi)} = 1.$$

Každá hodnota vyjde kladná, proto je funkce tangens v jedné periodě rostoucí. Z toho vyplívá, že funkce není omezená. Pro konkávnost o konvexnost funkce potřebujeme druhou derivaci, jejíž tvar je:

$$f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = 0$$

Funkce je nulová pro hodnoty:

$$x = 0 + \mathrm{k} \cdot \pi$$

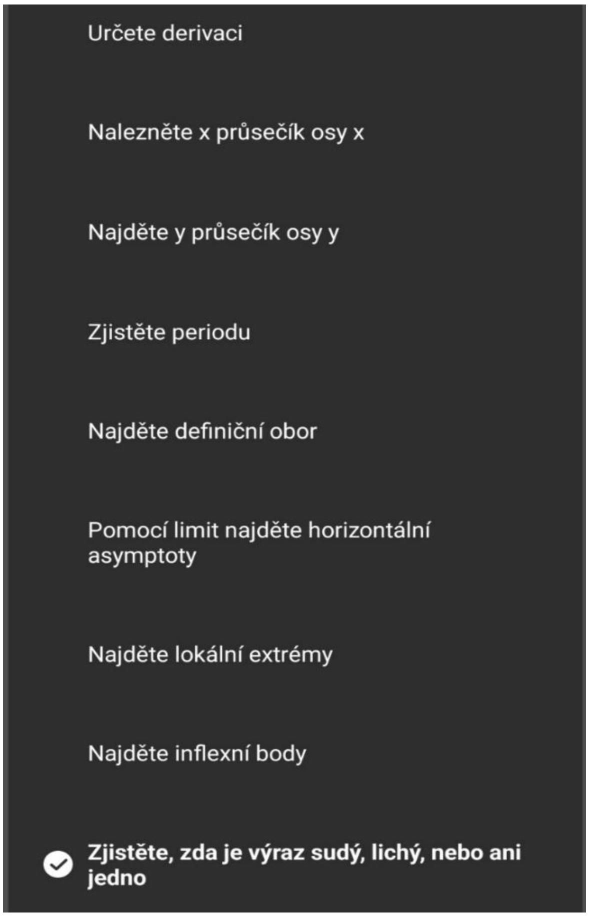
Po dosazení hodnot z prvního intervalu jsou hodnoty záporné, což odpovídá konkávní funkci a z druhého intervalu jsou hodnoty kladné, daná funkce je tedy v daném intervalu konvexní. Pro ověření periodičnosti potřebujeme dva body z definičního oboru, kdy jeden je vyšší o k-násobek periody π.

$$\tan \pi = 0$$

$$\tan 2\pi = 0$$

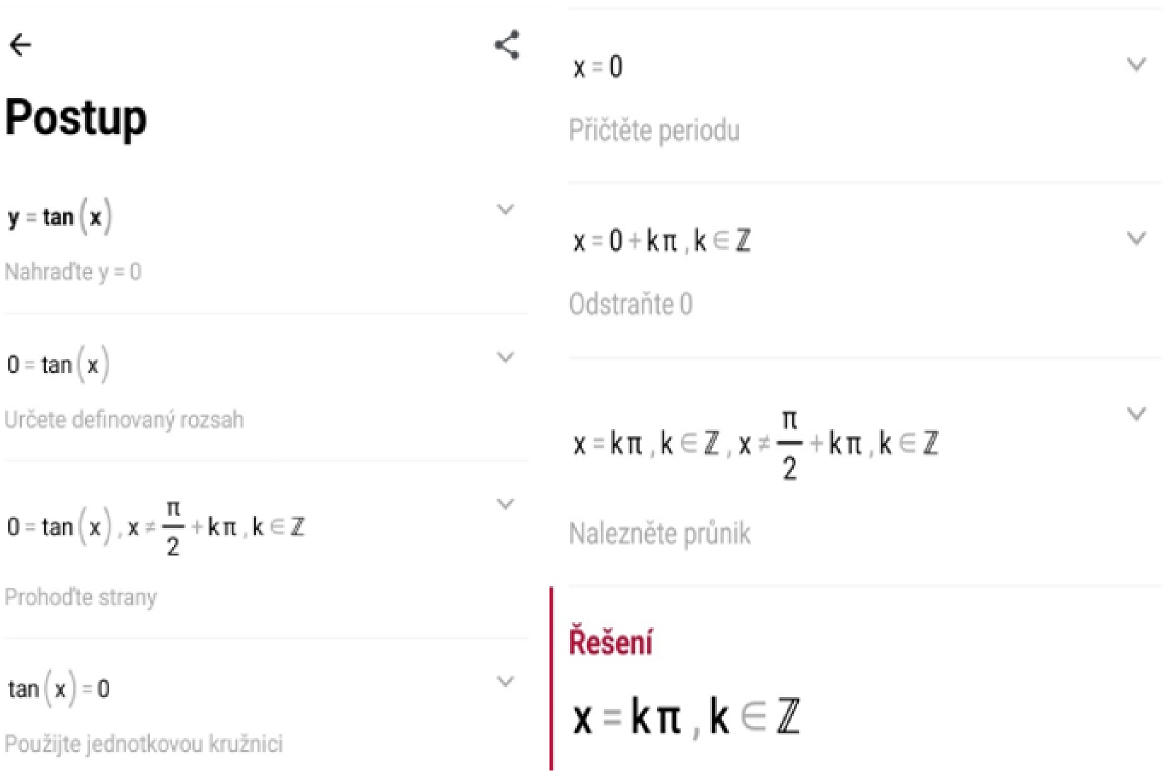
Daná funkce je periodická.

Photomath průběh funkce v původním zadaní vyhodnotil v menším rozsahu. Ale protože ji dokázal upravit na tvar $y = \operatorname{tg} x$, byla zadána do aplikace v tomto zadání a vyšetřil následující body:

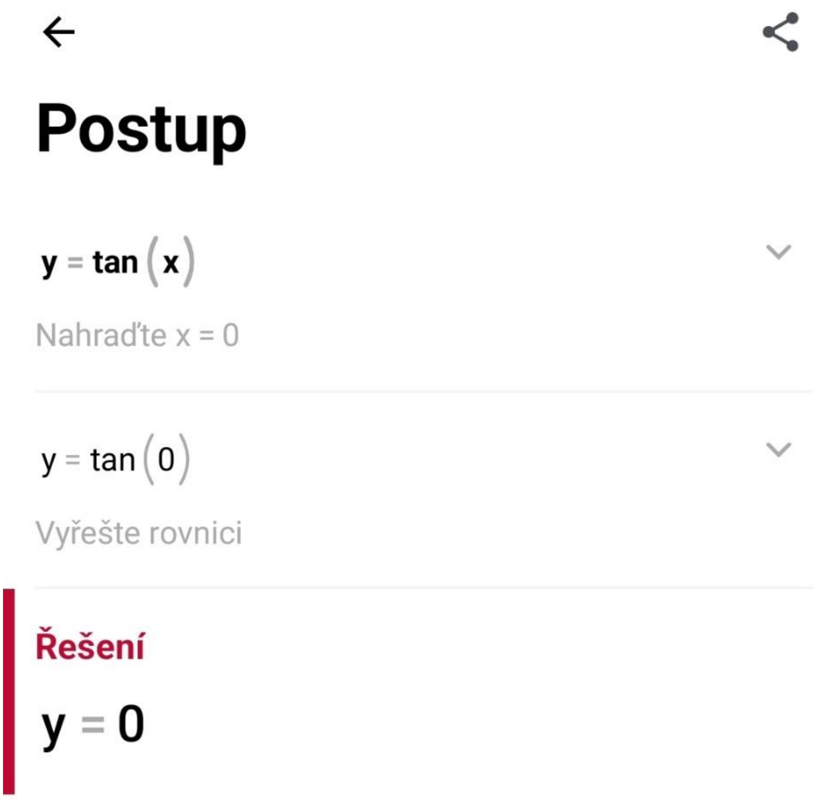


Obrázek 85: Postup vyšetření průběhu funkce v bodech

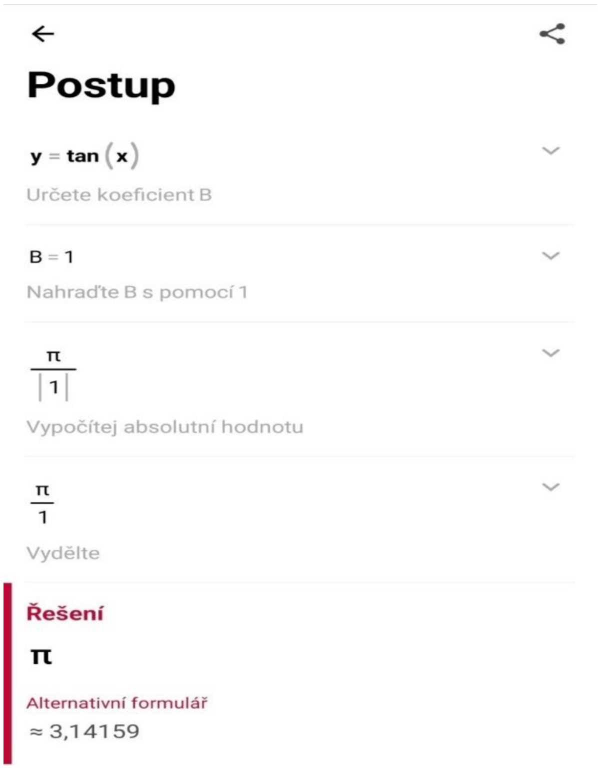
Obrázek 86: První derivace funkce



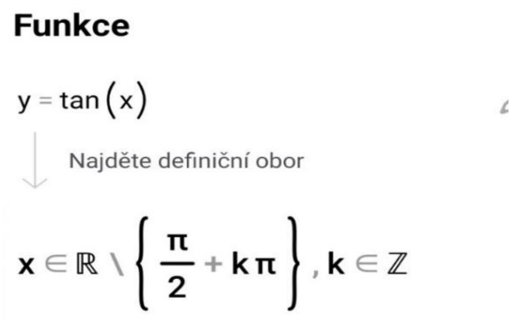
Obrázek 87: Průsečíky s osou x



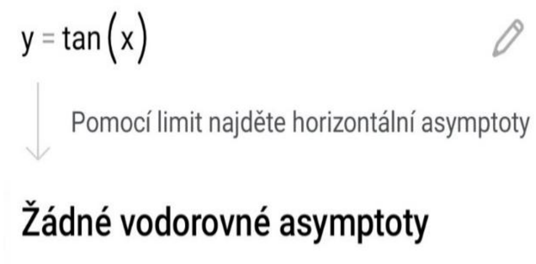
Obrázek 88: Průsečík s osou y



Obrázek 89: Zjišťování periody funkce

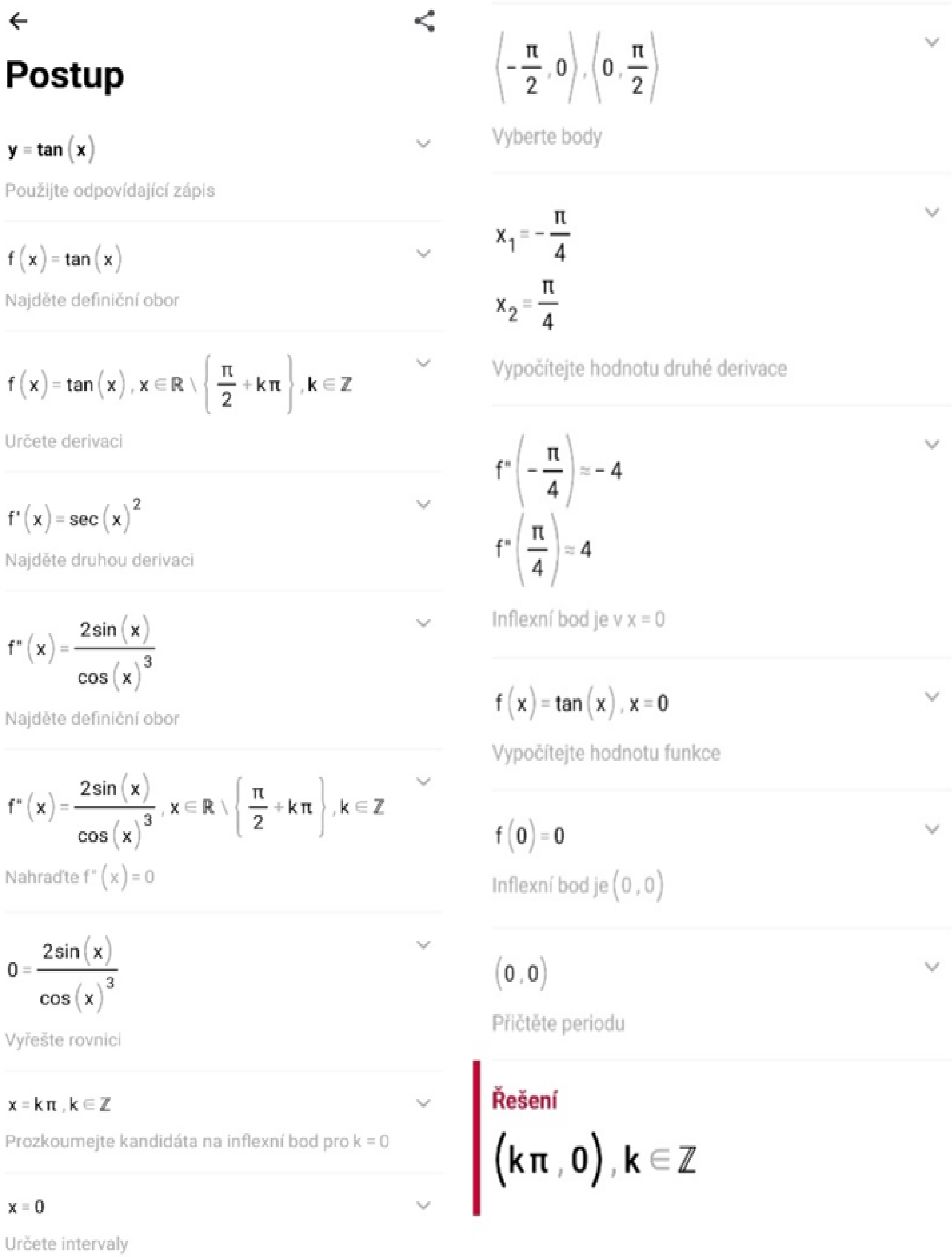


Obrázek 90: Definiční obor funkce



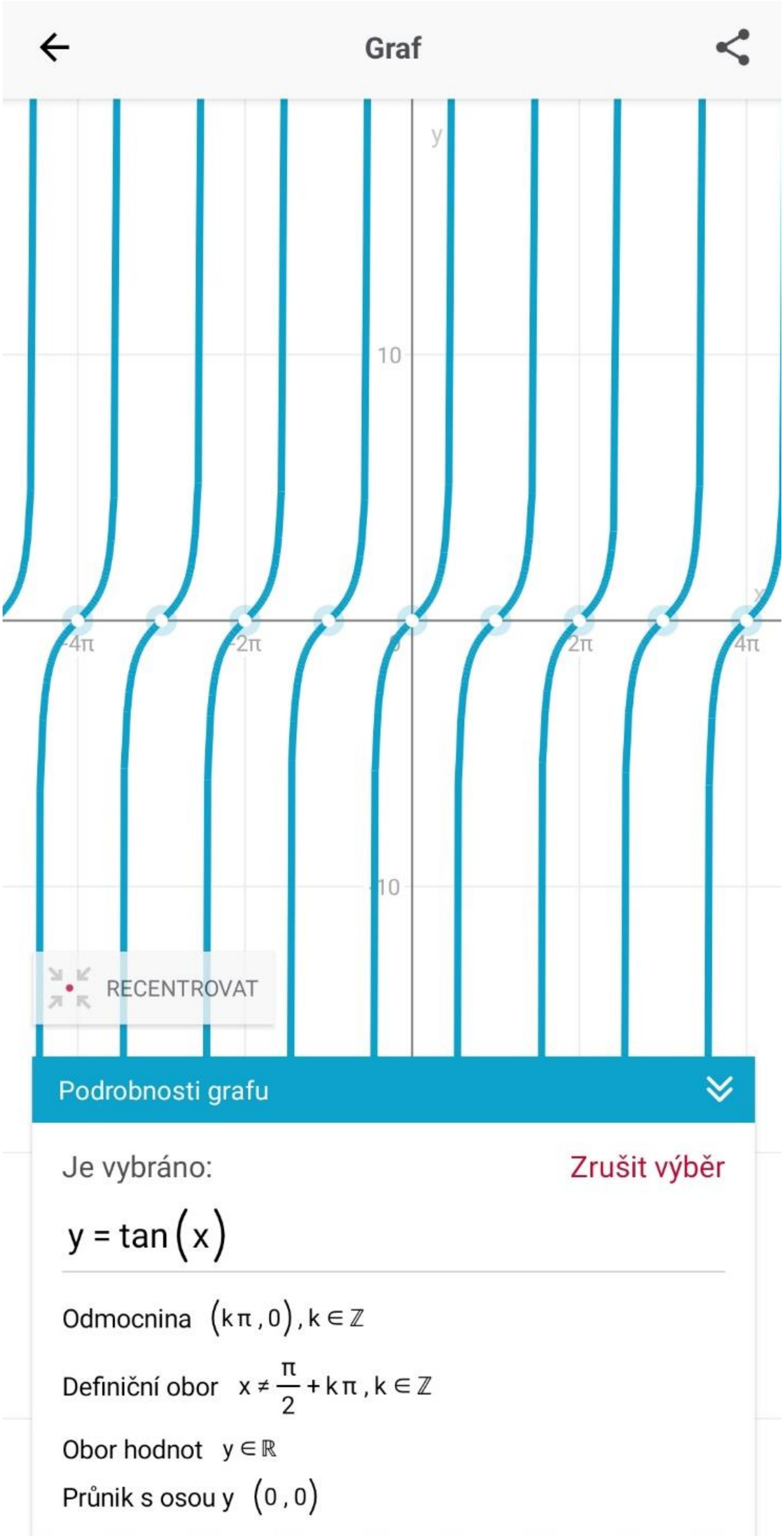
Obrázek 91: Hledání horizontálních asymptot pomocí limit

Obrázek 92: Lokální extrémy funkce



Obrázek 93: Inflexní body

Obrázek 94: Sudost a lichost funkce



Obrázek 95: Graf funkce $y = tg\,x$

5 Závěr

Na začátku práce jsme se podívali na aplikace podobné aplikaci Photomath. Díky této části práce jsme mohli zhodnotit, zdali je aplikace Photomath dobrým kandidátem pro tuto práci. Po zhodnocení všech proměnných nám aplikace Photomath vyšla jako dobrý kandidát pro výukové účely základních a středních škol. Aplikace Wolframcloud sice umí složitější výpočty, nicméně uživatelský jazyk, společně se složitějším zadáváním příkladů do aplikace, zařadil aplikaci mezi nevhodné pro účely základnách a středních škol. Jazyková bariéra a zadávání příkladů vedli k obdobnému problému i u aplikace Maple Calculator: Math Solver. Na druhou stranu jsme byli překvapeni aplikací Microsoft Math Solver. Tato aplikace byla srovnatelná s aplikací Photomath, a dokonce nabízela i možnost ručního psaní do aplikace pomocí prsty či stylusu, což může zejména na základní škole mít velký vliv na to, jak žáci takovou aplikaci přijmou.

Jako dílčí cíle práce jsme si dali shrnutí tématu funkce, vyjmenování a popis jejich vlastností, vytvoření krátkého přehledu jednotlivých typů funkce. Tato problematika je řešena v kapitole číslo tři. Popsali jsme krátce a přehledně vlastnosti funkcí a následně i jednotlivé typy funkcí v rámci výuky na základních a středních školách. Pro lepší představu jsme přidali vizualizaci jednotlivých funkcí na konec každého typu funkce.

Následně jsme v kapitole číslo čtyři využili tyto znalosti k tomu, abychom si vypočítali ukázkový příklad ke každému druhu funkcí, který jsme v této práci řešili. Výpočty jsme komentovali a prováděli krok po kroku pro lepší názornost. Následně jsme za každý příklad vložili snímky obrazovky aplikace Photomath, a na úplném konci příkladu můžeme vidět i graf dané funkce. Vložení snímků obrazovky bylo zvoleno z důvodu větší názornosti, protože čtenář může vidět přesně to, co by viděl při používání aplikace. Tímto jsme splnili náš další dílčí cíl, a to využití zpracovaných poznatků při praktickém výpočtu funkcí.

Hlavním cílem této práce bylo ukázat novou alternativní cestu pro výpočet matematických problémů na úrovni základní a střední školy. Na základě vyšetřování průběhů funkce nejprve bez, a poté s podporou aplikace tvrdíme, že jsme dokázali efektivitu aplikace Photomath oproti klasickému ručnímu počítání. Ruční počítání zabralo několik minut a spoustu počítání, zatímco aplikace Photomath měla příklad i se všemi body výpočtu vždy vyřešený během několika sekund i včetně vykreslení grafu.

Během zpracovávání této práce jsme nenarazili na žádnou komplikaci. Zjistili jsme ale, že existuje velice podobná aplikace, která má podobný cíl a tím pádem jsou oba tito konkurenti motivování k vylepšování aplikací, což je výhoda pro běžné uživatele. Aplikace se ukázala jako velice užitečný nástroj k procvičování matematiky, zejména díky odstupňovanému vysvětlení jednotlivých kroků. V případě samostudia je velice vhodným nástrojem, stejně pak i v dobách online výuky mohla být tato aplikace velkou výhodou. Při porovnání výpočtu bez a pomocí aplikace se však objevuje otázka, kterou bychom mohli slyšet z úst mnoha žáků: „Proč bychom se to měli učit, když za nás vše spočítá příklady aplikace?“. Tuto otázku v této práci necháváme otevřenou a je na zamyšlení čtenáře. Za nás v této práci už snad jen přidáme poznámku, že i když umíme ručně násobit velká čísla, nebo jsme dříve uměli vyčíslovat logaritmy pomocí tabulek, dnes na takovéto výpočty stačí kalkulačka. Proto si zde odvážíme tvrdit, že posunu kupředu v matematice, například pomocí mobilních aplikací, bychom se rozhodně neměli bát. Místo toho, abychom studenty odrazovali od používání moderních technologií, bychom jim měli nabídnout možnost tyto technologie lépe pochopit a naučit je s nimi pracovat, aby mohli tento potenciál využít na maximum. Toto odvážné tvrzení se určitě nevztahuje pouze na problematiku funkcí nebo matematiky ale dříve nebo později se tyto technologie budou stávat více a více součástí výuky jak na základních, tak i středních školách, protože nám mohou nabídnout úplně nové možnosti.

6 Použitá literatura

[1] ODVÁRKO, Oldřich. Matematika pro gymnázia: Funkce. 3. upravené vydání. Čestmírova 10,140 00 Praha 4: Prometheus, spol., 2003. ISBN 80-7196-164-7.

[2] Definiční obor. Matematika polopatě [online]. c2006—2022 [cit. 2022-04-19]. Dostupné z: https://www.matweb.cz/definicni-obor/

[3] Vlastnosti funkce. Matematika polopatě [online]. c2006—2022 [cit. 2022-04-19]. Dostupné z: https://www.matweb.cz/funkce/

[4] Asymptota funkce. Matematika pro každého [online]. Vojáček, c2008-2022 [cit. 2022-04-19]. Dostupné z: https://maths.cz/clanky/213-asymptota-funkce

[5] ČERMÁK, Pavel a Petra ČERVINKOVÁ. Odmaturuj! z matematiky 1. Vyd. 4. Brno: Didaktis, c2007. Odmaturuj!. ISBN 978-80-7358-102-2.

[6] Funkce: Funkce periodická. Portál středoškolské matematiky [online]. c2011 [cit. 2022-04-18]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/funkce/?page=perioda

[7] Absolutní hodnota. Matematika polopatě [online]. c2006—2022 [cit. 2022-04-19]. Dostupné z: https://www.matweb.cz/absolutni-hodnota/

[8] Lineární funkce. Matematika polopatě [online]. c2006—2022 [cit. 2022-04-19]. Dostupné z: https://www.matweb.cz/linearni-funkce/

[9] Kvadratická funkce. Matematika polopatě [online]. c2006—2022 [cit. 2022-04-19]. Dostupné z: https://www.matweb.cz/kvadraticka-funkce/

[10] Logaritmické funkce. Matematika polopatě [online]. c2006—2022 [cit. 2022-04-19]. Dostupné z: https://www.matweb.cz/logaritmy/

[11] LACHMANOVÁ, Andrea. Goniometrické funkce v učivu matematiky na základní a střední škole. Brno, 2019. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky. Vedoucí práce Karel Lepka

[12] Goniometrické funkce. Matematika polopatě [online]. c2006—2022 [cit. 2022-04-19]. Dostupné z: https://www.matweb.cz/goniometrie/

[13] Priklady.com - Sbírka úloh: Lineární lomená funkce. Priklady.com [online]. c2012-2021 [cit. 2022-04-18]. Dostupné z: https://www.priklady.com/cs/index.php/funkce/linearni-lomena-funkce

[14] Priklady.com - Sbírka úloh: Lineární funkce. Priklady.com [online]. c2012-2021 [cit. 2022-04-18]. Dostupné z: https://www.priklady.com/cs/index.php/funkce/linearni-funkce

[15] Priklady.com - Sbírka úloh: Kvadratická funkce. Priklady.com [online]. c2012-2021 [cit. 2022-04-18]. Dostupné z: https://www.priklady.com/cs/index.php/funkce/kvadraticka-funkce

[16] Priklady.com - Sbírka úloh: Mocninná a Odmocninná funkce. Priklady.com [online]. c2012-2021 [cit. 2022-04-18]. Dostupné z: https://www.priklady.com/cs/index.php/funkce/mocninna-funkce

[17] FUNKCE. LOGARITMICKÁ FUNKCE. MGR. TOMÁŠ PAVLICA, PH.D. DIGITÁLNÍ UČEBNÍ MATERIÁLY, GYMNÁZIUM UHERSKÉ HRADIŠTĚ. ANZDOC: DOCUMENTS PROFESSIONAL PLATFORM - PDF DOWNLOAD FREE [online]. c2022 [cit. 2022-04-19]. Dostupné z: https://adoc.pub/funkce-logaritmicka-funkce-mgr-toma-pavlica-phd-digitalni-ue.html

[18] Photomath. Photomath [online]. 20 E 3rd Ave., San Mateo, CA 94401, USA [cit. 2021-01-27]. Dostupné z: https://photomath.app/en/

[19] CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice. Dotisk 4. vydání. Čestmírova 10,140 00 Praha 4: Prometheus, spol., 2009. ISBN 987-80-7196-362-2.

[20] HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Matematika pro gymnázia: Diferenciální a integrální počet. Dotisk 3. vydání. Čestmírova 10,140 00 Praha 4: Prometheus, spol., 2012. ISBN 978-80-7196-363-9.

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Jakub Dus
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2022

Název práce:	Výuka matematického tématu funkce na základních a středních školách s podporou aplikace Photomath
Název v angličtině:	Education of math topic function on primary and secondary schools with an assistance of application Photomath
Anotace práce:	V bakalářské práci se budeme zabývat používáním mobilních aplikacích, které pomáhají řešit matematické problémy. Konkrétně se budeme zaměřovat na řešení průběhu funkce, a to zejména pomocí mobilní aplikace Photomath. V teoretické části si představíme různé mobilní aplikace a jejich využití, a následně si přestavíme různé vlastnosti a druhy funkcí na úrovni středních škol. V praktické části se pak zaměříme na výpočet příkladů na různé typy funkcí nejprve bez, a poté s aplikací Photomath.
Klíčová slova:	mobilní aplikace, Photomath, funkce, definiční obor, monotónnost, asymptoty, omezenost, sudost, lichost, konkávnost, konvexnost, periodičnost, absolutní hodnota, lineární funkce, kvadratická funkce, exponenciální funkce, logaritmická funkce, goniometrická funkce, cyklometrická funkce, výpočet průběh funkce

Anotace v angličtině:	The bachelor's thesis will cover working in mobile apps that help solve mathematical problems. Specifically, we will focus on solving the progression of a function, especially using the mobile application Photomath. In the theoretical part, we will introduce different mobile apps and their uses, and then we will rebuild different properties and types of functions at the high school level. In the practical part, we will then focus on computing examples for different types of functions first without and then with the Photomath app.
Klíčová slova v angličtině:	mobile app, Photomath, functions, definitional domain, monotonicity, asymptotes, boundedness, evenness, oddness, concavity, convexity, periodicity, absolute value, linear function, quadratic function, exponential function, logarithmic function, goniometric function, cyclometric function, computing the progression of a function
Přílohy vázané v práci:	žádné
Rozsah práce:	78 stran
Jazyk práce:	Český jazyk