Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

DIPLOMOVÁ PRÁCE

České Budějovice, duben 2011

Diplomant: Jan Ptáčník

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem zadanou diplomovou práci zpracoval sám s přispěním vedoucí práce a používal jsem pouze literaturu v práci uvedenou. Dále prohlašuji, že nemám námitek proti půjčování nebo zveřejňování mé diplomové práce nebo jejích částí se souhlasem katedry.

V Českých Budějovicích .... 2011 vlastnoruční podpis

Poděkování

Chtěl bych poděkovat RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D., vedoucí mé diplomové práce, za vedení, zájem, připomínky a čas, který mi věnovala, a Mgr. Radku Vejmelkovi za recenzi a věcné postřehy k této práci. Mé poděkování patří též mé rodině a blízkým přátelům za pomoc a podporu během studia.

Anotace

Diplomová práce se zabývá zavedením funkce dvou proměnných a diferenciálním počtem této funkce. Práce má sloužit jako učební text pro studenty učitelství pro druhý stupeň základní školy. Každá kapitola obsahuje shrnutí základních pojmů a vysvětlení vztahů, dále pak řešené modelové úlohy daného tématu a konečně úlohy, které by měl řešit student sám. Diplomová práce má studentům předat základní poznatky o diferenciálním počtu funkce dvou proměnných, včetně praktických znalostí.

Annotation

This thesis deals with the introduction of function of two variables and differential calculus of this function. This work should serve as a textbook for students of elementary school's teacher. Each chapter contains a summary of basic concepts and explanations of relationships, then solved model exercises of the topic and finally the exercises, which should solve the student himself. Thesis have transmit to students basic knowledges of differential calculus of functions of two variables, including practical knowledges.

Obsah

Úvod

Hlavním úkolem této práce je přinést ucelený pohled na problematiku funkcí dvou proměnných, v objemu teorie takovém, jaký by si měli osvojit studenti především pedagogických fakult. Následující text navazuje na znalosti, které by si měli studenti odnést z předcházejících kurzů matematické analýzy, především jde o poznatky o vlastnostech funkcí jedné proměnné, dále pak o diferenciálním počtu těchto funkcí. K potřebným znalostem také patří základní orientace v problematice analytické geometrie, a to zejména v rovině.

Při výběru tématu diplomové práce jsem vycházel z mého osobního zájmu o matematickou analýzu jako jednu z disciplín matematiky, ale také z nedostatku vhodné literatury pro studenty učitelství se zaměřením na matematiku, která by byla pro tyto obory optimální. Nejčastějšími zdroji mi tak byly knihy primárně určené buď pro studenty matematiky vědecké, nebo matematiky aplikované v technice. Ve své práci se však snažím problematiku funkcí dvou proměnných podávat hlavně ve formě vhodné pro studium učitelství - s přihlédnutím na didaktickou stránku, s celou řadou řešených i neřešených příkladů. Tato práce se nesnaží zahltit čtenáře definicemi, větami a jejich důkazy, jde hlavně o pochopení problematiky a její aplikaci v příkladech. Rozsahem by tato práce měla odpovídat jednosemestrální, maximálně dvousemestrální výuce matematické analýzy zaměřené na téma diferenciální počet funkcí dvou proměnných.

V první kapitole se čtenář seznámí s pojmem metrický prostor a s vlastnostmi těchto metrických prostorů. Tato kapitola je nutná k přechodu k pojmům obsaženým v následujících kapitolách. Druhá kapitola zavádí funkci dvou proměnných, přehled základních funkcí dvou proměnných a vlastnosti těchto funkcí. Jde o to, aby si student osvojil znalosti nejfrekventovanějších funkci dvou proměnných. Úkolem třetí kapitoly je seznámit čtenáře s pojmy jako parciální derivace, diferencovatelnost, derivace vyšších řádů. V poslední, čtvrté kapitole se pak budeme věnovat hledání extrémů funkcí dvou proměnných, lokálních extrémů, globálních extrémů a extrémů vázaných.

Každá kapitola je dále vnitřně dělená na části. V první části se čtenář dozví potřebou teorii, úměrnou svou náročností právě pro studenty pedagogických fakult. Druhá část obsahuje řešené modelové příklady. Tyto příklady by měly sloužit jako teoretický základ pro řešení úloh samostatných. Třetí část kapitoly potom tvoří příklady neřešené, které jsou určeny k samostudiu, případně jako příklady pro řešení ve cvičení z matematické analýzy. U většiny příkladů je možné nalézt výsledek řešení, u některých příkladů je dokonce namísto výsledku řešení naznačen i postup řešení.

Snahou bylo podat studentům problematiku funkcí dvou proměnných srozumitelným a nenáročným způsobem s důrazem na praktickou stránku a řešení úloh. Dalším cílem je snaha o vzbuzení zájmu o tuto problematiku ve studentech samotných. V použité literatuře mohou najít práce, které dále rozvádějí teorii funkcí dvou proměnných.

Při psaní této diplomové práce jsem využíval program pro sazbu textu LaTeX. Ke tvorbě dvourozměrných grafů byl použit program Maple 14, pro vytváření trojrozměrných grafů včetně řezů funkcí pak program Matlab. Některé nákresy byly také vytvořeny programem dynamické geometrie GeoGebra.

Kapitola 1

Metrické prostory

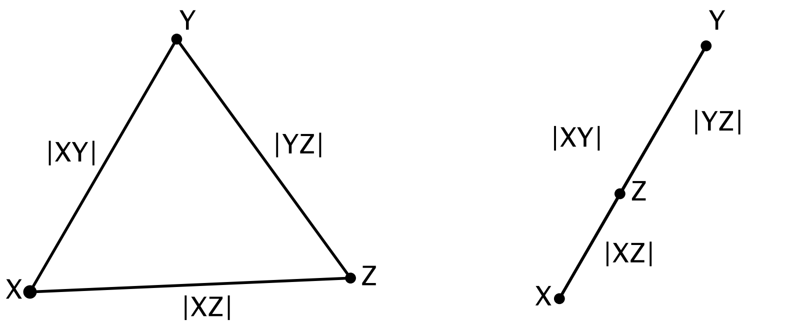
Metrickým prostorem rozumějme matematickou strukturu, pomocí které lze formálním způsobem definovat pojem vzdálenosti. Na metrických prostorech pak můžeme definovat další topologické vlastnosti jako např. otevřenost a uzavřenost množin. Srozumitelnějším jazykem, pomocí metrických prostorů můžeme zavést pojem vzdálenosti.

1.1 Metrické prostory

Definice 1.1.1 (Metrický prostor) *Uspořádanou dvojicí $\langle M; \rho \rangle$ nazveme metrickým prostorem s metrikou ρ, platí-li:*

1. *M je libovolná množina; $M \neq \emptyset$*
2. *ρ je funkce; $\rho \subseteq (M \times M) \times \mathbb{R}_0^+$, která má tyto vlastnosti:*
   - *(a) $\rho([x; y]) \geq 0$ (axiom nezápornosti),*
   - *(b) $\rho([x; y]) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiom totožnosti),*
   - *(c) $\rho([x; y]) = \rho([y; x])$ (axiom symetrie),*
   - *(d) $\rho([x; y]) + \rho([y; z]) \geq \rho([x; z])$ (trojúhelníková nerovnost).*

Metriku $\rho([x; y]) \geq 0$ chápejme jako vzdálenost bodů x a y. Axiom (a) nám potom říká, že vzdálenost dvou bodů je vždy nezáporná, axiom (b) říká, že vzdálenost dvou bodů je rovna nule právě tehdy, jsou-li dva body totožné, axiom (c) říká, že vzdálenost bodu x od bodu y je stejná jako vzdálenost bodu y od bodu x a konečně axiom (d) říká, že součet vzdáleností bodů x, y a bodů y a z je větší nebo rovna vzdálenosti bodů x a z. Pro bližší představu si vybavme trojúhelníkovou nerovnost.



(a) $|XY| + |YZ| > |XZ|$ (b) $|XY| + |YZ| = |XZ|$

Obrázek 1.1: Grafické znázornění trojúhelníkové nerovnosti pro případ trojúhlelníku a pro extrémní případ, kdy body jsou kolineární.

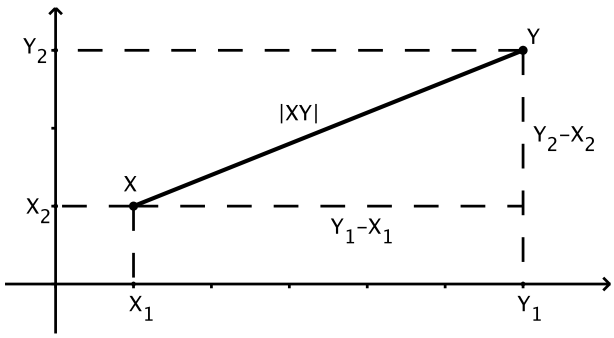
Příklady metrických prostorů:

Uvedeme si tři příklady jednotlivých metrik. Rozebereme jejich základní význam a vlastnosti nejprve v rovině a poté v prostoru. Pro obecný n-rozměrný prostor by pak tyto vlastnosti byly analogické, to ale necháme již na čtenáři. My se budeme zabývat následujícími třemi metrikami: Eukleidovskou (nebo Euklidovskou), maximovou a sumovou neboli Manhattanskou metrikou.

Uvažujme 2-rozměrný prostor, kde $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^2$, proto tedy proměnné x, y chápeme jako: $x = [x_1; x_2]$, $y = [y_1; y_2]$.

1. Eukleidovská metrika: $\langle \mathbb{R}^2; \rho \rangle$; $\rho([x; y]) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$.

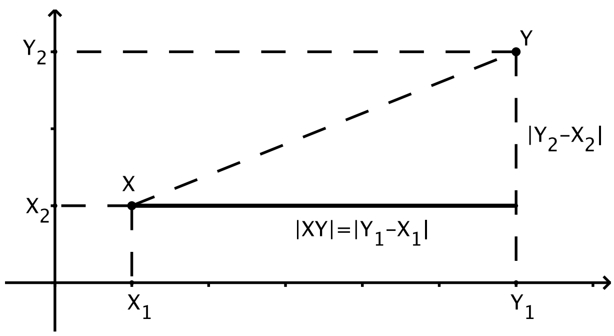
   Tuto metriku budeme používat nejčastěji. V literatuře se pro metrický prostor Eukleidovské metriky zavedlo značení $\mathbb{E}_2$. Toto značení budeme používat v dalších částech práce. Tento uvedený vztah pro vzdálenost dvou bodů by nám měl být povědomý z analytické geometrie, kde se pomocí něj počítá nejkratší vzdálenost dvou bodů v rovině. Z následujícího obrázku můžeme vidět, jak tento vztah vznikl. Pokud body x a y umístíme do kartézské soustavy souřadnic, nejkratší vzdálenost těchto bodů dostaneme pomocí Pythagorovy věty:



Obrázek 1.2: Grafické zobrazení Eukleidovské metriky jako nejkratší vzdálenosti dvou bodů v rovině.

2. Maximová metrika: $\langle \mathbb{R}^2; \rho \rangle$; $\rho([x; y]) = \max(|y_1 - x_1|; |y_2 - x_2|)$.

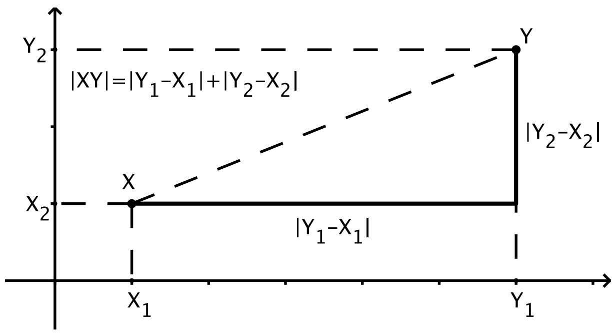
   Tato metrika nechápe vzdálenost mezi body x a y jako nejmenší vzdálenost. Na obrázku 1.3 vidíme, že vzdálenost bodů je ve smyslu maximové metriky rovna největšímu rozdílu $|y_i - x_i|$, v naše případě je to očividně $|y_1 - x_1|$.



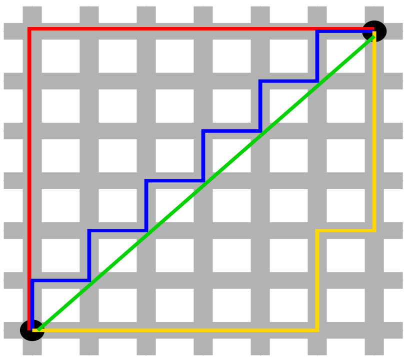
Obrázek 1.3: Grafické zobrazení maximové metriky jako vzdálenosti dvou bodů v rovině.

3. Sumová metrika: $\langle \mathbb{R}^2; \rho \rangle$; $\rho([x; y]) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$.

   Tato metrika, jak její matematické vyjádření napovídá, také nechápe vzdálenost dvou bodů jako tu nejkratší vzdálenost. Pokud chceme určit vzdálenost bodů x a y ve smyslu této metriky, musíme sečíst všechny rozdíly $|y_i - x_i|$, kde $i = 1; 2$. Výslednou vzdálenost mezi dvěma body pak vidíme na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: Grafické zobrazení sumové metriky jako vzdálenosti dvou bodů v rovině.



Obrázek 1.5: Manhattanské ulice.

Tato metrika je též nazývána Manhattanská metrika. Název vychází z praktické úlohy - jakou vzdálenost je třeba ujít mezi dvěma křižovatkami na Manhattanu, pokud se lze pohybovat jen po na sebe kolmých ulicích[1]. Jak můžeme vidět na obrázku 1.5, z levého dolního rohu do pravého horního rohu se můžeme dostat cestami červenou, modrou i žlutou a vždy při tom ujdeme stejnou vzdálenost. Všechny tyto lomené čáry nám znázorňují vzdálenost dvou bodů ve smyslu sumové metriky. Zelená úsečka nám znázorňuje vzdálenost dvou bodů v pojetí metriky Eukleidovské.

Z definic těchto tří metrik je tedy zřejmé, že měření vzdálenosti nemusí vždy znamenat měření té nejmenší vzdálenosti. My ale nadále budeme používat zejména metriku Eukleidovskou. Pokud tomu bude jinak, bude na tuto skutečnost předem upozorněno. Ukažme si nyní ještě naše tři metriky v prostoru, tj. v $\mathbb{R}^3$.

[1]Ulice na Manhattanu byly vybudovány tak, že jsou na sebe kolmé. Tvoří tak pravoúhlou síť. Ulice směřující z východu na západ jsou označovány streets, ulice ze severu na jih pak avenues. Tato metrika se objevuje v popularizované verzi problému, jakou nejmenší vzdálenost musí urazit taxík (zvaný Yellow cab), aby se dostal z jedné křižovatky na druhou.

Uvažujme 3-rozměrný prostor, kde $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \mathbb{R}^3$, proto tedy proměnné x, y chápeme jako: $x = [x_1; x_2; x_3]$, $y = [y_1; y_2; y_3]$.

1. Eukleidovská metrika: $\langle \mathbb{R}^3; \rho \rangle$;
   $\rho([x; y]) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$.

   I zde, stejně jako u Eukleidovské metriky v rovině, si všimněme analogie se vzorcem pro nejkratší vzdálenost dvou bodů, tentokrát v prostoru.
2. Maximová metrika: $\langle \mathbb{R}^3; \rho \rangle$; $\rho([x; y]) = \max(|y_1 - x_1|; |y_2 - x_2|; |y_3 - x_3|)$.
3. Sumová metrika: $\langle \mathbb{R}^3; \rho \rangle$; $\rho([x; y]) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + |y_3 - x_3|$.

U všech tří metrik jsou vlastnosti v prostoru zcela analogické vlastnostem v rovině. Se zapojením geometrické představivosti by si čtenář měl být schopný vybavit, jak by dané situace vypadaly. Čtenáři by teď již také mělo být jasné, jak by vypadaly tyto tři metriky pro obecný n-rozměrný prostor. My se jimi ale zabývat nebudeme.

1.2 Vlastnosti bodů a množin v metrickém prostoru

Definice 1.2.1 (Sférické okolí bodu a prstencové okolí bodu) *Mějme metrický prostor $\langle M; \rho \rangle$. Nechť $c \in M$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$. Potom sférickým ε-okolím bodu c nazveme množinu:*

$$U_\varepsilon(c) = \{x \in M; \rho(\langle x; c \rangle) < \varepsilon\}.$$

Prstencovým ε-okolím bodu c pak nazveme množinu $P_\varepsilon(c)$:

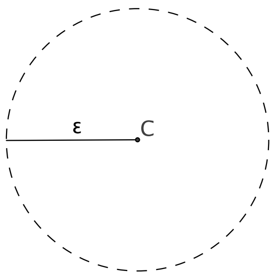
$$P_\varepsilon(c) = U_\varepsilon(c) - \{c\}.$$

Ukažme si, jak podoba sférického, respektive prstencového okolí, závisí na zvolené metrice. Jelikož jsme v definici vzali $M \subseteq \mathbb{R}^2$, znázorněme jednotlivá okolí právě v rovině. Pro jednoduchost položme $c = [0; 0]$. Řešme tedy nerovnost $\rho([x; 0]) < \varepsilon\}$.

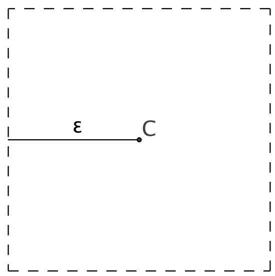
1. Eukleidovská metrika: $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \varepsilon$. Z toho plyne nerovnost $x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon^2$, což je rovnice kruhu o poloměru ε. Sférickým okolím bodu při užití Eukleidovské metriky je tedy kruh.

2. Maximová metrika: $\max(|x_1|; |x_2|) < \varepsilon$. Bez újmy na obecnosti řekněme, že $|x_1| > |x_2|$. Potom nám nerovnost přechází na tvar $|x_1| < \varepsilon$. Zároveň musí platit, že $|x_2| < \varepsilon$. Z těchto nerovností nám plyne, že sférickým okolím bodu při užití maximové metriky je čtverec se stranami rovnoběžnými s osami x a y a o délce strany 2ε.

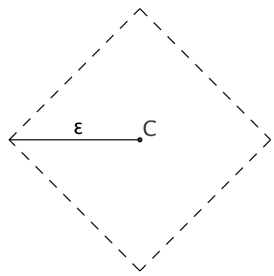
3. Sumová metrika: $|x_1| + |x_2| < \varepsilon$. Po rozepsání této nerovnosti při odstranění jednotlivých absolutních hodnot, dostáváme podobu sférického okolí při použití sumové metriky. Je jím čtverec s úhlopříčkami rovnoběžnými s osami x a y a o délce úhlopříčky 2ε.



(a) Eukleidovská metrika.



(b) Maximová metrika.



(c) Sumová metrika.

Obrázek 1.6: Jednotlivá okolí při různých metrikách v rovině.

Nyní si uveďme některé vlastnosti bodů a množin v metrickém prostoru.

Definice 1.2.2 *Mějme metrický prostor $\langle M; \rho\rangle$. Nechť body a, b, c náleží množině M, množina $A \subseteq M$.*

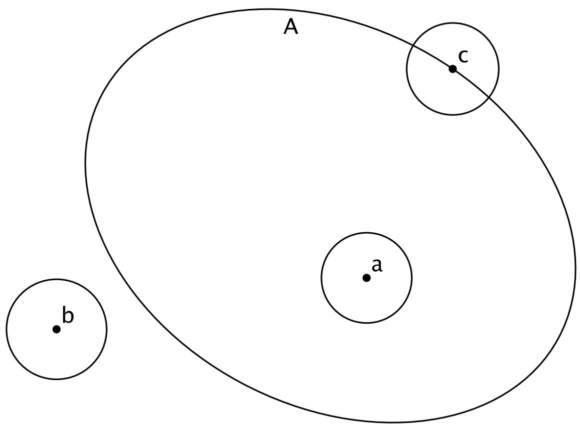
Bod a je vnitřním bodem množiny A (vzhledem k metrickému prostoru $\langle M; \rho\rangle$), jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(a) \subseteq A$ (patří-li bod a do množiny A s celým svým okolím).

Bod b je vnějším bodem množiny A (vzhledem k metrickému prostoru $\langle M; \rho\rangle$), jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(b) \cap A = \emptyset$ (jestliže bod b je vnitřní bod množiny $M - A$.)

Bod c je hraničním bodem množiny A (vzhledem k metrickému prostoru $\langle M; \rho\rangle$), jestliže $(\forall\varepsilon > 0)(U_\varepsilon(c) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(c) \cap (M - A) \neq \emptyset)$(v každém okolí bodu c jsou body z množiny A i z množiny $M - A$).

Definice 1.2.3 *Mějme metrický prostor $\langle M; \rho\rangle$. Nechť množina $A \subseteq M$.*

Množina A je otevřená v metrickém prostoru $\langle M; \rho\rangle$, je-li každý bod $a \in A$ vnitřním bodem.



Obrázek 1.7: Zobrazení vnitřního (a), vnějšího (b) a hraničního bodu (c) množiny A (kružnice představují okolí bodu v pojetí Eukleidovské metriky).

Množina A je uzavřená v metrickém prostoru $\langle M; \rho \rangle$, je-li každý hraniční bod množiny A bodem této množiny.

Množinu všech hraničních bodů množiny A vzhledem k metrickému prostoru $\langle M; \rho \rangle$ nazveme hranicí množiny A a značíme ji ϑA.

Věta 1.2.1 *Množina A je uzavřená, jestliže platí: $\vartheta A \subseteq A$.*

Definice 1.2.4 *Množinu $\bar{A}$ nazveme uzávěrem množiny A, platí-li:*
$\bar{A} = A \cup \vartheta A$.

Definice 1.2.5 *Mějme metrický prostor $\langle M; \rho \rangle$. Nechť množina $A \subseteq M$. Množina A je omezená v metrickém prostoru $\langle M; \rho \rangle$, jestliže existuje prvek $x \in M$ a reálné číslo $r \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $y \in A$ je $\rho([x; y]) < r$, nebo $A = \emptyset$.*

Jinými slovy: množina A je omezená, jestliže lze sestrojit kružnici o poloměru r a se středem v bodě x tak, že celá množina A leží uvnitř této kružnice.

1.3 Řešené příklady

Řešený příklad 1.1 *U Eukleidovské metriky ukažme, že se podle definice opravdu jedná o metriku splňující příslušné axiomy. Budeme postupovat tak, že nejprve ukážeme platnost axiomů pro množinu $\mathbb{R}$, poté pro množinu $\mathbb{R}^2$ a konečně pro množinu $\mathbb{R}^3$.*

1. $\langle \mathbb{R}; \rho^{(1)} \rangle$; $\rho^{(1)}([x; y]) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$.

   - *axiom nezápornosti:* $|x-y| \geq 0$ *- absolutní hodnota z čísla je definována jako nezáporné číslo, tudíž axiom jedna je splněn.*
   - *axiom totožnosti:* $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ *- jelikož se jedná o ekvivalenci, musíme dokázat implikaci oboustranně. Člen* $|x-y|$ *je roven nule právě tehdy, když se oba členy rovnají. Naopak, pokud* $x = y$, *pak samozřejmě* $|x-y| = 0$. *Axiom druhý tedy platí.*
   - *axiom symetrie:* $|x-y| = |y-x|$ *- tuto vlastnost dokážeme následující úpravou výrazu:* $|x-y| = |-1(y-x)| = |-1||y-x| = |y-x|$. *Axiom číslo tři platí.*
   - *trojúhelníková nerovnost:* $|x-y| + |y-z| \geq |x-z|$ *- i tento axiom dokážeme úpravou výrazu:* $|x-z| = |x-y+y-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z|$, *přičemž jsme využili vlastnost absolutní hodnoty, totiž* $|a| + |b| \geq |a+b|$. *I axiom čtvrtý je tedy dokázán.*

   Tím jsme tedy ukázali, že $\langle \mathbb{R}; \rho^{(1)} \rangle$ *je metrický prostor.*

2. $\langle \mathbb{R}^2; \rho^{(2)} \rangle$; $\rho^{(2)}([\bar{x}; \bar{y}]) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$.

   - *axiom nezápornosti:* $\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \geq 0$ *- druhá mocnina z jakéhokoli čísla je vždy číslo nezáporné, součet těchto dvou čísel je také nezáporné číslo a odmocnina z tohoto čísla je opět číslo nezáporné. Axiom jedna platí.*
   - *axiom totožnosti:* $\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}$ *- toto tvrzení dokažme následujícím upravením výrazu:* $\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} =$

     $= \sqrt{(-1(y_1-x_1))^2 + (-1(y_2-x_2))^2} = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}$. *Axiom dvě platí.*
   - *axiom symetrie:* $\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$ *- opět je třeba dokázat oboustrannou implikaci. Levý člen se rovná nule právě tehdy, pokud oba členy, tedy* $x_1 - y_1$ *a* $x_2 - y_2$ *jsou*

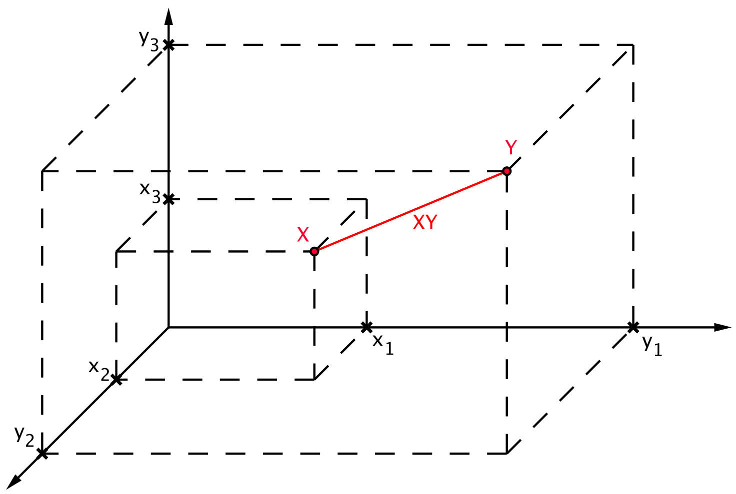
rovny nule a to nastane tehdy, pokud $x_1 = y_2$ *a zároveň* $x_2 = y_2$. *Naopak, pokud tato rovnost nastane, výraz nalevo je roven nule. Třetí axiom je splněn.*

- *trojúhelníková nerovnost:* $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+$ $+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2} \geq \sqrt{(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2}$ *- podle obrázku 2.1(a) vidíme, že musí nastat nerovnost* $|XY|+|YZ| \geq |XZ|$, *což je ale standardní trojúhelníková nerovnost, o které víme, že platí. Tudíž i axiom čtvrtý je dokázán.*

Ukázali jsme tedy, že $\langle \mathbb{R}^2; \rho^{(2)} \rangle$ *je metrický prostor.*

3. $\langle \mathbb{R}^3; \rho^{(3)} \rangle$; $\rho^{(3)}([\bar{x}; \bar{y}]) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$

   Tento metrický prostor necháme na ověření čtenáři. Postup je obdobný jako u bodů jedna a dvě. K pomoci vám může být obrázek 1.8.



Obrázek 1.8: Eukleidova metrika v $\mathbb{R}^3$.

Nyní jsme tedy ověřili Eukleidovský metrický prostor pro $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ *a* $\mathbb{R}^3$ *dle definice a ukázali jsme, že o metrický prostor opravdu jde*[2].

[2] Ověření maximové metriky a sumové metriky by se provádělo obdobnými úvahami.

Kapitola 2

Funkce dvou proměnných

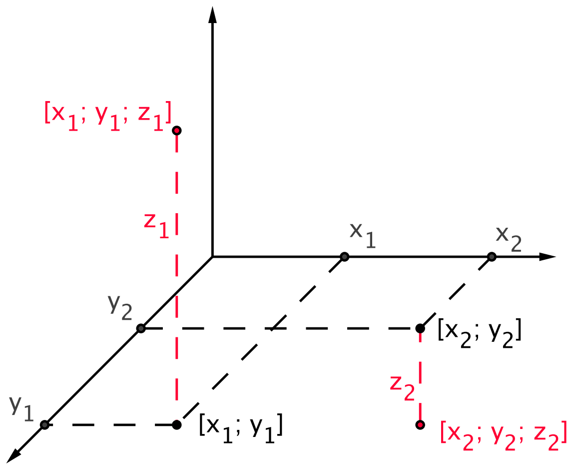
V této kapitole se budeme věnovat zavedení pojmu funkce dvou proměnných. Ukážeme zde některé důležité vlastnosti těchto funkcí. Poté se budeme podrobněji věnovat funkcím dvou proměnných, se kterými se budeme setkávat nejčastěji, a zaměříme se na jejich vlastnosti.

2.1 Základní pojmy, vlastnosti

Definice 2.1.1 (Reálná funkce dvou proměnných) *Reálná funkce dvou proměnných* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *je zobrazení, které každé uspořádané dvojici* $[x; y] \in \mathbb{R}^2$ *přiřadí nejvýše jedno* $z \in \mathbb{R}$; $z = f(x; y) \in \mathbb{R}$.

Prvky $[x; y] \in \mathbb{R}^2$ *se nazývají body dvourozměrného prostoru* $\mathbb{R}^2$.
Množina $D(f) = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; \exists z \in \mathbb{R} : f(x; y) = z\}$ *se nazývá definiční obor funkce* f.
Množina $H(f) = \{z \in \mathbb{R}; \exists [x; y] \in \mathbb{R}^2 : f(x; y) = z\}$ *se nazývá obor hodnot funkce* f.
Množina $G(f) = \{[x; y; z] \in \mathbb{R}^3; [x; y] \in \mathbb{R}^2\}$ *se nazývá graf funkce* f.

Představme si Kartézskou soustavu souřadnic zavedenou v prostoru. Definičním oborem rozumějme množinu všech uspořádaných dvojic $[x; y]$. Definiční obor je podmnožinou roviny xy. Funkční hodnotou $z = f(x; y)$ potom rozumějme bod v prostoru, který se nachází na kolmici vedené k rovině xy bodem $[x; y]$, a to ve vzdálenosti z od této uspořádané dvojice.



Obrázek 2.1: Jednotlivé body grafu funkce f. Vidíme, že souřadnice z_1 je kladná (bod je nad rovinou xy), kdežto souřadnice z_2 je záporná (bod je pod rovinou xy).

Věta 2.1.1 (Prostá funkce) *Funkce f je prostá (injektivní) právě tehdy, jestliže platí: $[x_1; y_1] \neq [x_2; y_2] \Rightarrow f(x_1; y_1) \neq f(x_2; y_2)$.*

Věta 2.1.2 (Funkce vzniklé na základě aritmetických operací) *Nechť f je funkce taková, že $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a g je funkce taková, že $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Potom pro funkci h platí:*

- *Pokud $h = f+g$, potom $h(x; y) = f(x; y)+g(x; y)$; $D(h) = D(f)\cap D(g)$. Funkci h nazveme součtem funkcí f a g.*
- *Pokud $h = f \cdot g$, potom $h(x; y) = f(x; y) \cdot g(x; y)$; $D(h) = D(f) \cap D(g)$. Funkci h nazveme součinem funkcí f a g.*
- *Pokud $h = \frac{1}{f}$, potom $h(x; y) = \frac{1}{f(x; y)}$; $D(h) = D(f) - \{[x; y]; f(x; y) = 0\}$. Funkci h nazveme převrácenou hodnotou funkce f.*

Věta 2.1.3 (Skládání funkcí) *Nechť g je funkce taková, že $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a f je funkce taková, že $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Potom pro funkci $h = f \circ g$ platí: $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kde $h(x; y) = f(g(x; y))$, a $D(h) = \{[x; y] \in D(g); g(x; y) \in D(f)\}$.*

Zápisem $h = f \circ g$ rozumějme, že funkce h vznikla složením funkcí f a g, kde funkce g je funkce vnitřní a funkce f je funkce vnější. Je zde patrná analogie se skládáním funkcí jedné proměnné. Na závěr poznamenejme, že obor hodnot vnitřní funkce musí být podmnožinou definičního oboru funkce vnější. Z toho zároveň vyplývá, že tyto dvě množiny musí být stejné dimenze - v našem případě je dimenze rovna 1.

2.2 Přehled důležitých funkcí

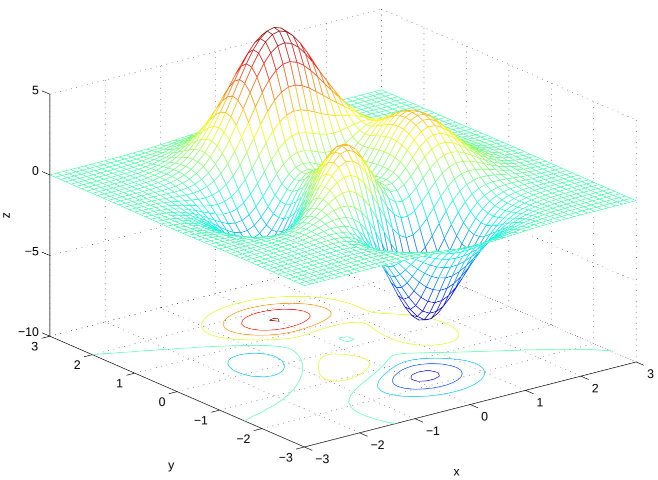
V této části kapitoly si ukážeme nejdůležitější reálné funkce dvou proměnných, se kterými se také budeme nejčastěji setkávat. U každé z těchto funkcí si podrobněji rozebereme její vlastnosti a odvodíme si, jak vypadá její graf. Ve všech případech si nejprve uvedeme obecný tvar funkčního předpisu dané funkce a posléze si na konkrétním příkladě ukážeme, jak graf dané funkce sestrojit.

K odvození většiny grafů budeme používat následující metodu. Předpokladem použití této metody je znalost analytické geometrie, zejména pak analytické geometrie kuželoseček. Pokud si čtenář není jistý svými znalostmi v této oblasti, doporučuji nejprve projít si v literatuře oblast analytické geometrie a doplnit si alespoň základní znalosti v této oblasti. Doporučit lze například knihu od Milana Kočandrle [4], kde naleznete nejzákladnější poznatky z analytické geometrie, nebo publikaci od Pavla Pecha [8], která se podrobně věnuje teorii kuželoseček.

Metoda řezů

Grafem reálné funkce dvou proměnných je podmnožina prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud budeme chtít získat představu, jak graf reálné funkce dvou proměnných vypadá v Kartézské soustavě souřadnic (označme $(xyz0)$), provedeme na grafu funkce f řezy rovinami, které jsou rovnoběžné s rovinou xy (respektive xz nebo yz). Pokud tedy volíme rovinu σ rovnoběžnou s rovinou xy, je rovnice roviny $\sigma : z = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Průnikem roviny σ a grafu funkce f potom rozumíme řez na grafu funkce f. Podobně lze použít řezy rovinami rovnoběžnými s rovinami xz $(y = c)$ nebo yz $(x = c)$. Jednotlivé řezy nám pak dodají přesnější informace o tom, jak má graf funkce f vypadat.

Zmiňme se podrobněji o řezu pomocí roviny $\sigma : z = c$. Křivky v prostoru vzniklé řezem grafu funkce rovinou σ nazýváme též hladiny. Ve dvourozměrném prostoru potom tyto křivky nazýváme vrstevnicemi.



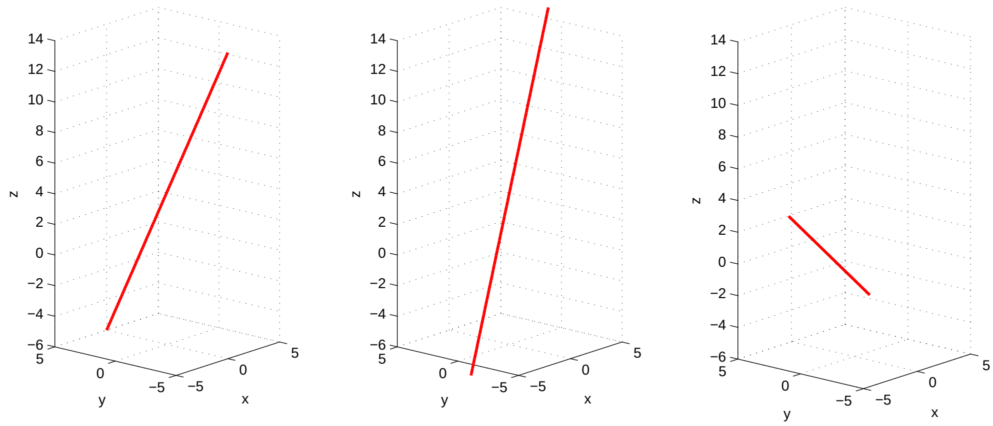
Obrázek 2.2: Graf funkce dvou proměnných a vrstevnice tohoto grafu.

2.2.1 Obecná rovina

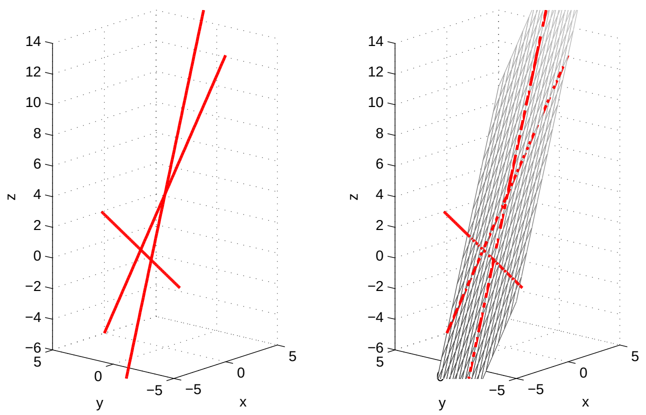
Obecnou rovinu jako reálnou funkci dvou proměnných dostaneme následujícím funkčním předpisem: $f : f(x;y) = ax + by + c$, kde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Když se nad tímto předpisem zamyslíme, zjistíme, že je analogický vzorci pro obecnou rovnici roviny z analytické geometrie, a to $\alpha : ax + by + cz + d = 0$. Po vyjádření z dostáváme náš funkční předpis pro funkci f. Také vidíme, že za proměnné x a y lze dosadit libovolné reálné číslo, proto $D(f) = \mathbb{R}^2$.

Pro ilustraci si ukažme konstrukci grafu této funkce pomocí metody řezů. Najděme graf funkce $f : f(x;y) = 3x - 2y + 4$. Pro jednoduchost proveďme nejprve řez rovinou yz, tj. $x = 0$. Nyní určeme rovnici průsečnice. Ta nám vyjde jako řešení soustavy rovnic, a to předpisu funkce f a rovnice roviny xy. Snadno spočítáme, že rovnice průsečnice a tedy našeho 1. řezu má tvar $r_1 : z = -2y+4$, což je rovnice přímky. Tato přímka je znázorněna na obrázku 2.3 (a).

Analogicky teď použijme nejprve rovinu xz, tj. rovinu o rovnici $y = 0$. Opět musíme vyřešit příslušnou soustavu rovnic, jejímž výsledkem je řez $r_2 : z = 3x+4$. Tento řez je znázorněn na obrázku 2.3 (b). Konečně použijme i 3. rovinu, a to rovinu xy o rovnici $z = 0$. Po vyřešení příslušné soustavy nám vyjde rovnice třetího řezu $r_3 : y = \frac{3}{2}x + 2$. I tento řez můžeme vidět na obrázku 2.3 (c). Nyní si můžeme zobrazit všechny tři řezy do jedné soustavy na obrázku 2.3 (d).



(a) Řez v rovině yz. (b) Řez v rovině xz. (c) Řez v rovině xy.



(d) Celkový řez. (e) Graf funkce f.

Obrázek 2.3: Jednotlivé řezy.

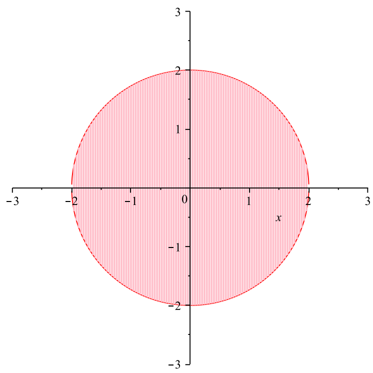
Nyní asi již vidíme, jak bude vypadat výsledná rovina jakožto graf funkce f. Tento grafu musí procházet všemi řezy. Pokud by nám nestačily tyto tři řezy rovinami xy, xz a yz, můžeme samozřejmě udělat i další. V tomto případě to ale očividně není nutné. Graf funkce f je zobrazen na obrázku 2.3 (e).

2.2.2 Kulová plocha

Kulovou plochu (jednodušeji povrch koule) vyjadřuje rovnice $x^2+y^2+z^2 = r^2$, kde $r \in \mathbb{R}_0^+$ je libovolné nezáporné číslo značící poloměr koule. Jak vidíme, jde o implicitní vyjádření. Pokud bychom chtěli určit explicitní vyjádření ($z = f(x;y)$), dostali bychom nejprve $|z| = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Odvoďme tedy explicitní vyjádření pro povrch "horní" polokoule, tedy pro $z \geq 0$. Dostáváme funkční předpis $z = f(x;y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

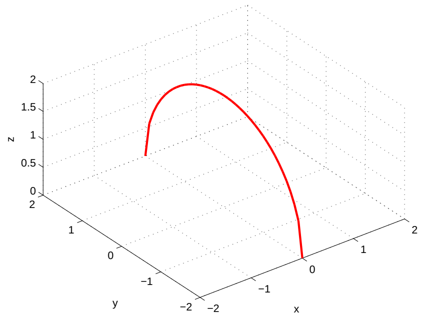
Ukažme si nyní na konkrétním příkladu, jak bude vypadat graf funkce $f : f(x;y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Jedná se o kulovou plochu s poloměrem $r = 2$. Vidíme, že se nám ve výrazu vyskytuje odmocnina a její argument musí být vždy nezáporný. Položme proto $4 - x^2 - y^2 \geq 0$. Tato nerovnice nám udává, kdy má funkce f smysl a tudíž nám ukazuje definiční obor. Nerovnice znázorňuje kruh o poloměru $r = 2$, definičním oborem je množina: $D(f) = \{[x;y]; 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$. Tento definiční obor je znázorněn na obrázku 2.4.

Nyní opět použijme metodu řezů. Proveďme nejprve řez rovinou yz, tj. rovinou o rovnici $x = 0$. Dostáváme řez o funkčním předpisu $r_1 : z = \sqrt{4 - y^2}$. Tento předpis charakterizuje půlkružnici o poloměru $r = 2$. Jelikož ze zadání vidíme, že $z \geq 0$, je tato půlkružnice "horní" půlkružnicí kružnice o rovnici $y^2 + z^2 = 4$. Tento řez můžeme vidět na obrázku 2.5 (a). Stejným postupem můžeme vyšetřit řez rovinou xz, tedy rovinou o rovnici $y = 0$. Dostáváme řez daný předpisem $r_2 : z = \sqrt{4 - x^2}$. Nyní jde opět o půlkružnici a jelikož má být $z \geq 0$, jde opět o horní polovinu kružnice $x^2 + z^2 = 4$. Tento řez vidíme na obrázku 2.5 (b). Nakonec udělejme řez rovinou xy (její rovnice je $z = 0$). Dostáváme rovnici řezu $r_3 : x^2 + y^2 = 4$, což je rovnice celé kružnice ležící v rovině xy, mající střed v počátku soustavy souřadné a mající poloměr $r = 2$. Vidíme ji na obrázku 2.5 (c). Všechny řezy v jedné soustavě pak můžeme vidět na obrázku 2.5 (d).

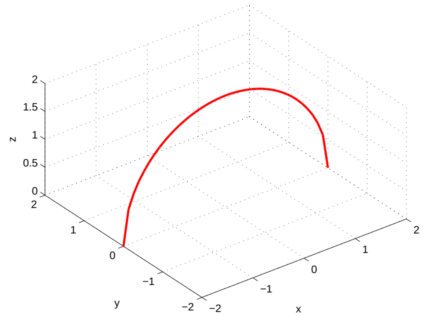


Obrázek 2.4: Definiční obor funkce $f : f(x;y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

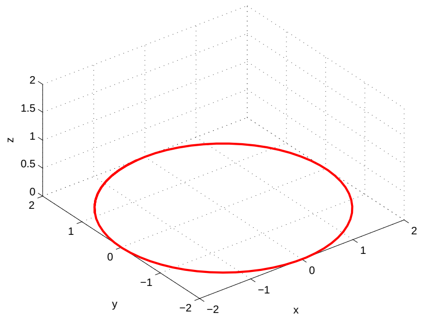
Nyní si již dovedeme představit, jak bude graf funkce f vypadat. Podle očekávání se jedná o Horní polovinu kulové plochy s poloměrem $r = 2$ a se středem v počátku soustavy souřadnic. Tento graf můžeme vidět na obrázku 2.6 vlevo. Na obrázku vpravo je potom zobrazena celá kulová plocha o stejném středu a poloměru, která by byla vyjádřena rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.



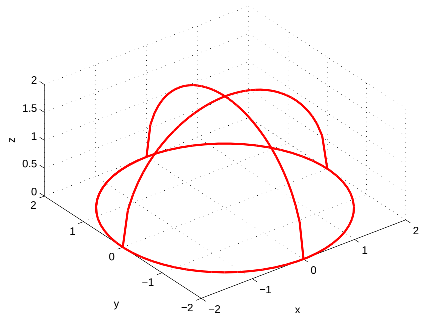
(a) Řez v rovině yz.



(b) Řez v rovině xz.

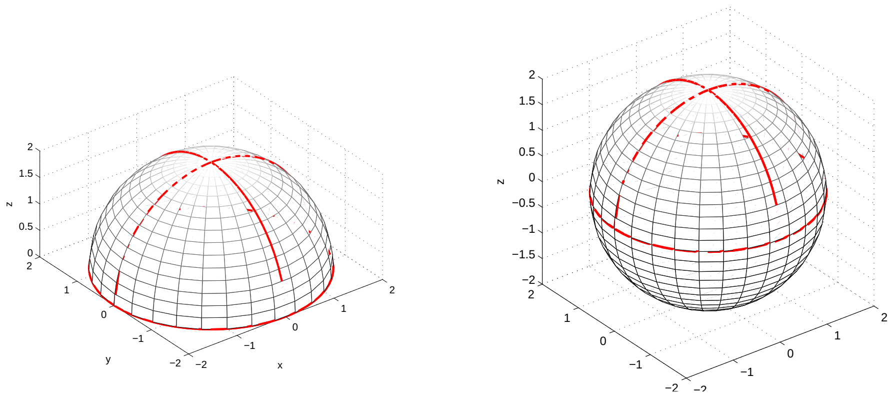


(c) Řez v rovině xy.



(d) Celkový řez.

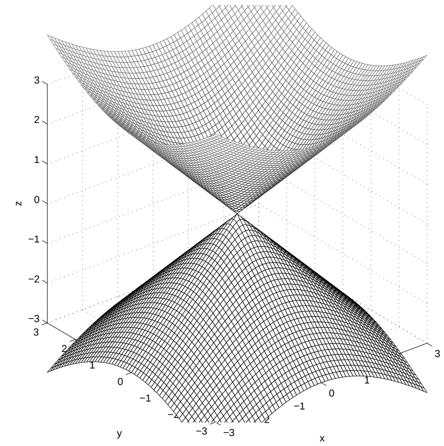
Obrázek 2.5: Jednotlivé řezy.



Obrázek 2.6: Graf funkce $f : f(x; y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

2.2.3 Kuželová plocha

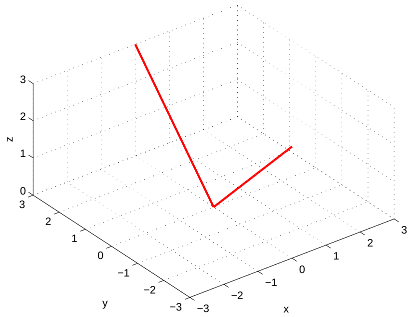
Kuželovou plochu (jednodušeji povrch kužele) s vrcholem v počátku soustavy souřadnic vyjadřuje rovnice $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Jak vidíme, jde o implicitní vyjádření. Pokud bychom chtěli určit explicitní vyjádření ($z = f(x; y)$), dostali bychom nejprve $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Odvoďme tedy explicitní vyjádření pro "horní část" kuželové plochy (s vrcholem v počátku soustavy souřadnic a rozevírajícím se směrem vzhůru), tedy pro $z \geq 0$. Dostáváme funkční předpis $z = f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.



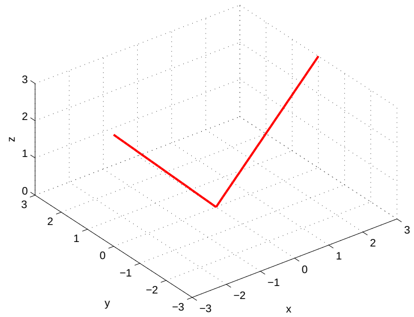
Obrázek 2.7: Kuželová plocha.

V předpisu funkce se nám vyskytuje druhá odmocnina. Argument této odmocniny nesmí být záporný, tedy $x^2 + y^2 \geq 0$. Tato nerovnost ale platí pro všechna x a pro všechna y, z čehož vyplývá, že definičním oborem jsou všechny uspořádané dvojice $[x; y]$, neboli $D(f) = \mathbb{R}^2$.

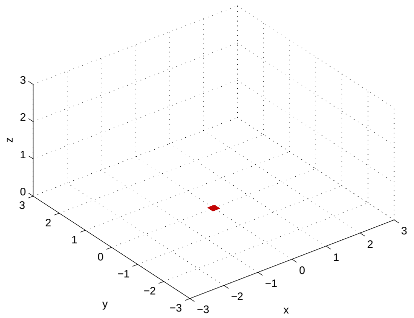
Použijme nyní metodu řezů a ukažme si, jak graf funkce $f : f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ vypadá a hlavně, jak tento graf budeme konstruovat. Budeme postupovat stejně jako u předchozích dvou příkladů, užijeme tedy tři základní roviny. Jak ale uvidíme, pro upřesnění představy o grafu funkce f použijeme ještě další roviny, aby nám vzniklo více řezů. Nejprve tedy proveďme řez rovinou $x = 0$. Řez bude potom vyjádřen rovností $z = \sqrt{y^2}$, tedy $r_1 : z = |y|$. Předpisem r_1 není vyjádřeno nic jiného než graf funkce absolutní hodnota, jejímž grafem je přímka lomená v počátku soustavy souřadnic. Vidět ji můžeme na obrázku 2.8 (a). Zcela obdobné vyjádření dostaneme po řezu rovinou $y = 0$. Druhý řez bude mít tedy předpis $r_2 : z = |x|$. Tento řez je znázorněn na obrázku 2.8 (b). Konečně, pokud použijeme řez rovinou $z = 0$, dostáváme rovnici $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, která má ale smysl právě tehdy, je-li $x = 0$ a zároveň $y = 0$. Třetím řezem je tedy bod o souřadnicích $[0; 0]$. Tato situace je naznačena na obrázku 2.8 (c). Pokud všechny tři řezy zakreslíme do jedné soustavy souřadnic, dostáváme situaci zobrazenou na obrázku 2.8 (d).



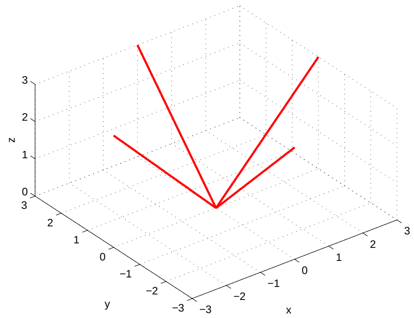
(a) Řez v rovině yz.



(b) Řez v rovině xz.



(c) Řez v rovině xy.

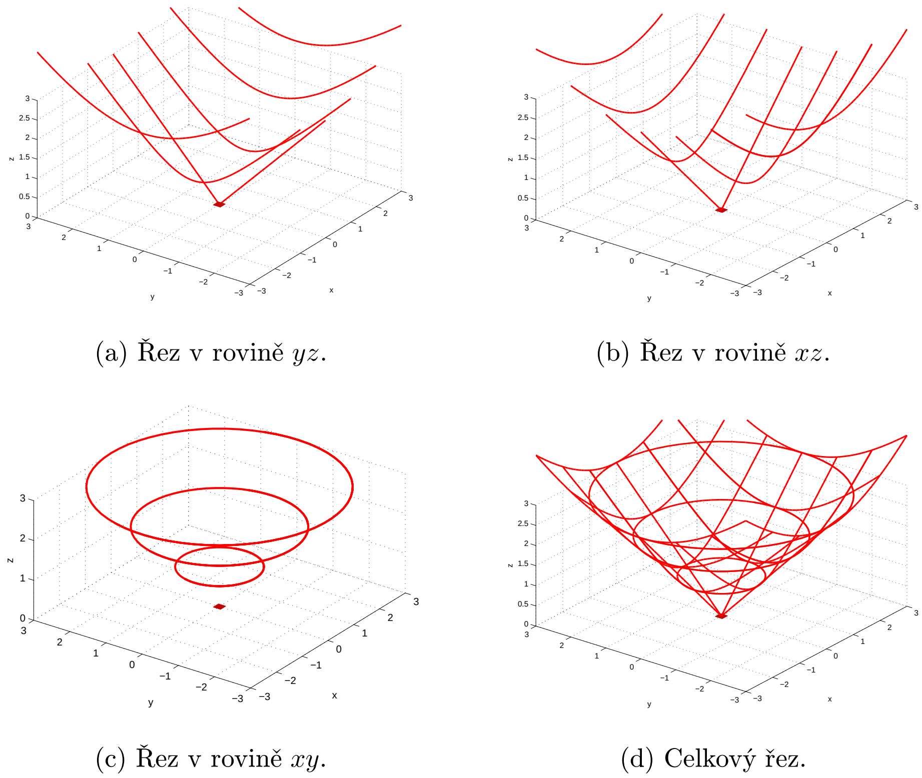


(d) Celkový řez.

Obrázek 2.8: Jednotlivé řezy.

Když se podíváme na obrázek 2.8 (d), je nám jasné, že je velmi obtížné představit si, co je grafem funkce f, jelikož v tomto případě nejsou řezy příliš názorné. Pokud tato situace nastane, můžeme použít i další řezy, které si nyní vytvoříme. Stejně jako jsme prováděli řez rovinou $x = 0$, provedeme teď řez rovinou $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo. Je jasné, že rovina $x = c$ je rovnoběžná s rovinou $x = 0$, tedy s rovinou yz. Řez potom dostáváme předpisem $r_{1c} : z^2 - y^2 = c^2$ což je rovnice hyperboly. Jelikož je $z \geq 0$, grafickou podobou je jen jedna část paraboly, konkrétně ta horní. Můžeme to vidět na obrázku 2.9 (a) níže. Za libovolné c je vzato $c \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Zcela stejném myšlenkovým pokusem provedeme řez rovinou $y = c$. Za stejných podmínek jako u předchozí roviny dostáváme řezy r_{2c}znázorněné na obrázku 2.9 (b) níže. Pokud provedeme řezy rovinou $z = c$, dostáváme vyjádření řezů $r_{3c} : x^2 + y^2 = c^2$. Z rovnice vidíme, že jde o rovnici kružnice. V tomto třetím případě dosazujeme za $c \in \{0; 1; 2\}$, jelikož nesmíme zapomínat, že $z \geq 0$. Tato situace je naznačena na obrázku 2.9 (c). Konečně obrázek vystihující všechny zkonstruované řezy je označen písmenem 2.9 (d).

Z obrázku 2.9 (d) již lze velice dobře odhadnout konečnou podobu grafu



(a) Řez v rovině yz.

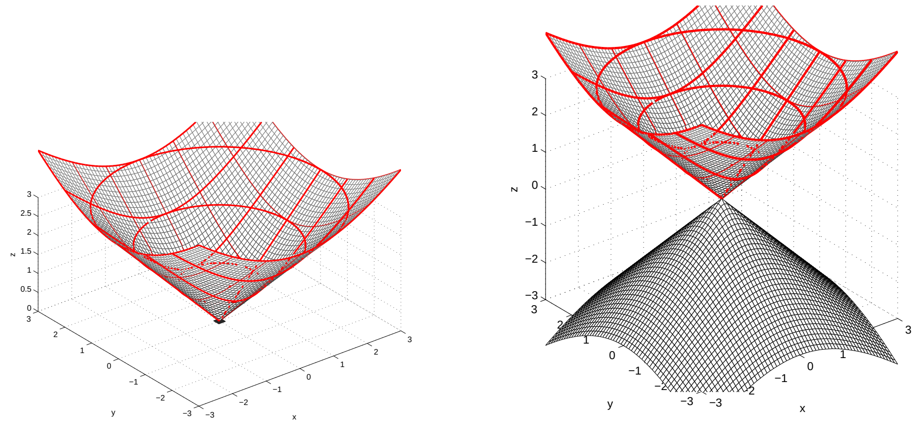
(b) Řez v rovině xz.

(c) Řez v rovině xy.

(d) Celkový řez.

Obrázek 2.9: Jednotlivé řezy.

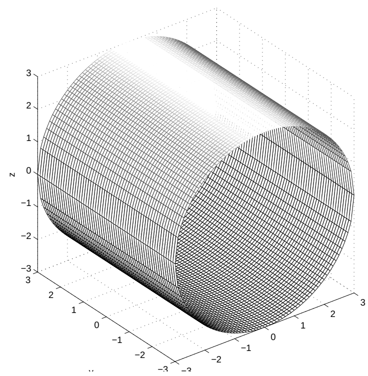
funkce f. Tento graf je zobrazen níže. Nalevo je horní část kuželové plochy dána explicitním funkčním předpisem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, napravo je pak ukázána celá kuželová plocha daná implicitním funkčním předpisem
$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$



Obrázek 2.10: Graf funkce $f : f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.2.4 Válcová plocha

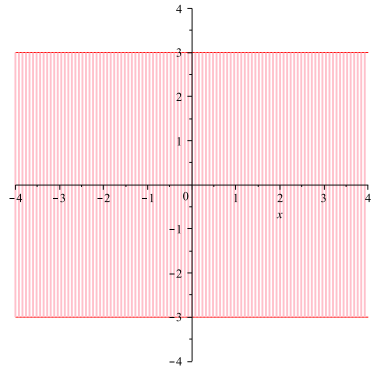
Válcovou plochu (jednodušeji povrch válce) s osou totožnou s osou y vyjadřuje rovnice $x^2 + z^2 = r^2$, kde $r \in \mathbb{R}_0^+$ je libovolné nezáporné číslo značící poloměr válce. Jak vidíme, jde, stejně jako v předchozích dvou případech, o implicitní vyjádření. Pokud bychom chtěli určit explicitní vyjádření ($z = f(x; y)$), dostali bychom nejprve $|z| = \sqrt{r^2 - x^2}$. Odvoďme tedy explicitní vyjádření pro povrch "horní poloviny" válce (jde tedy o část válce ležícího nad rovinou xy), tedy pro $z \geq 0$. Dostáváme funkční předpis $f(x; y) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Pokud bychom chtěli získat implicitní (respektive explicitní) funkční vyjádření válcové plochy, jejíž osa by byla totožná s osou x, případně s osou z, provedli bychom akorát příslušnou záměnu proměnných. Pojďme si nyní opět ukázat konkrétní příklad funkce.



Obrázek 2.11: Válcová plocha.

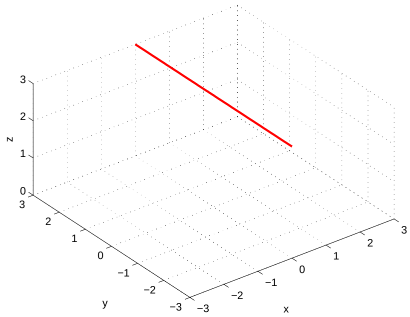
Mějme funkci $f : f(x; y) = \sqrt{9 - x^2}$. Nejprve určeme definiční obor $D(f)$ této funkce. Vidíme, že ve funkčním předpisu se vyskytuje druhá odmocnina a víme, že argument této odmocniny nesmí být záporný. Proto musí platit, že $9 - x^2 \geq 0$. Tuto nerovnost můžeme upravit na nerovnost $|x| \leq 3$. Tato nerovnice nám v grafické podobě představuje pás, který je rovnoběžný s osou x, souměrný podle této osy a jehož šířka je 6. Tato situace je vystižena na obrázku 2.12. Definiční obor je tedy dán množinou $D(f) = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 3\}$.

Pojďme nyní, opět pomocí metody řezů, odvodit graf funkce $f(x; y) = \sqrt{9 - x^2}$. Nejprve vytvořme řez rovinou $x = 0$. Dostáváme funkční předpis prvního řezu $z = \sqrt{9}$, po zjednodušení $z = 3$. Z tohoto vyjádření dostáváme řez $r_1 : z = 3$. Jde o přímku rovnoběžnou s osou y. Tento řez je zobrazen na obrázku 2.13 (a). Nyní proveďme řez rovinou $y = 0$. Dostáváme funkční předpis $z = \sqrt{9 - x^2}$, po úpravě $r_2 : x^2 + z^2 = 9$. Jak vidíme, jde o funkční předpis kružnice s poloměrem 3 a středem v počátku soustavy souřadnic. Je ale třeba připomenout, že $z \geq 0$, proto ve skutečnosti jde o horní polokružnici. Všimněme si, že kdybychom provedli na f řez rovinou $y = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo, dostali bychom stejnou rovnici řezu, tedy opět $r_2 : x^2 + z^2 = 9$. Znovu by šlo o polokružnici s poloměrem $r = 3$ a se středem na ose y, konkrétně v bodě o souřadnicích $[0; c; 0]$. Tato situace včetně řezů rovinou $y = c$, kde jsme za c brali $c \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, je naznačena na obrázku 2.13 (b). Konečně proveďme řez rovinou $z = 0$. Dostáváme rovnici řezu ve tvaru $x^2 = 9$, z čehož nám vycházejí dva řezy, a to $r_{3a} : x = 3$ a $r_{3b} : x = -3$. Jak vidíme, jde o rovnoběžné přímky, které jsou zároveň rovnoběžné s osou y. Tyto přímky jsou zároveň hraničními přímkami definičního oboru $D(f)$ funkce f (viz. obrázek 3.12). Tyto řezy jsou vyobrazeny na obrázku 2.13 (c). Na závěr uveďme, že na obrázku 2.13 (d) jsou pak zobrazeny všechny řezy, které jsme zmínili výše.

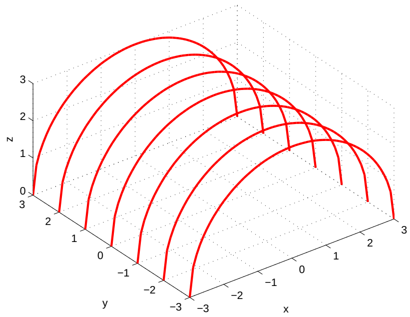


Obrázek 2.12: Definiční obor funkce $f : f(x; y) = \sqrt{9 - x^2}$.

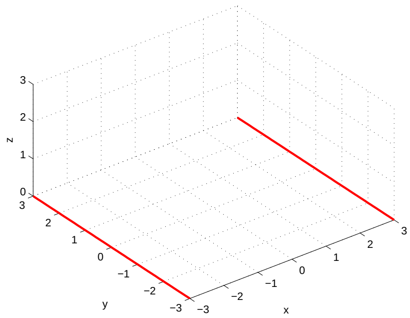
Na obrázku 2.13 (d) je patrné, že grafem funkce $f : f(x; y) = \sqrt{9 - x^2}$ je opravdu horní polovina válcové plochy s poloměrem $r = 3$ a s osou válce totožnou s osou y. Graf funkce f je znázorněn na obrázku 2.14 vlevo, zobrazení celé válcové plochy potom na tomtéž obrázku vpravo.



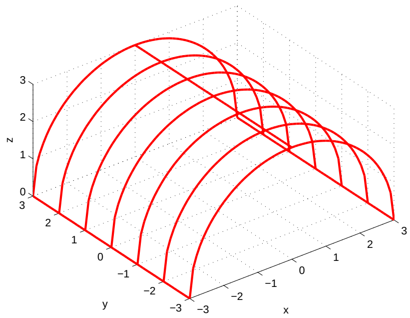
(a) Řez v rovině yz.



(b) Řez v rovině xz.

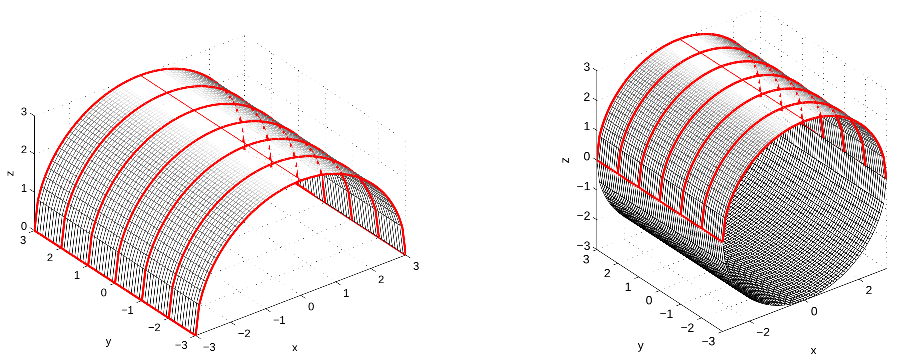


(c) Řez v rovině xy.



(d) Celkový řez.

Obrázek 2.13: Jednotlivé řezy.

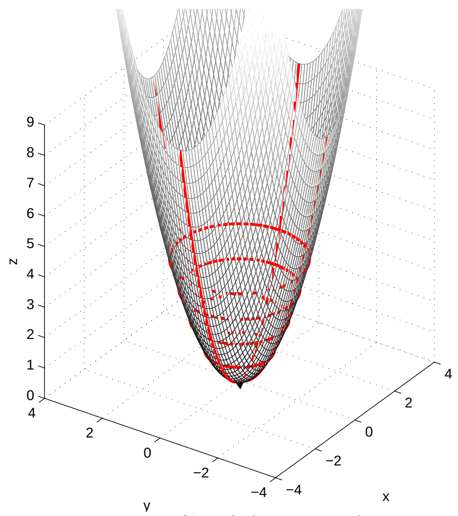


Obrázek 2.14: Graf funkce f a válcové plochy.

2.2.5 Parabolická kuželová plocha

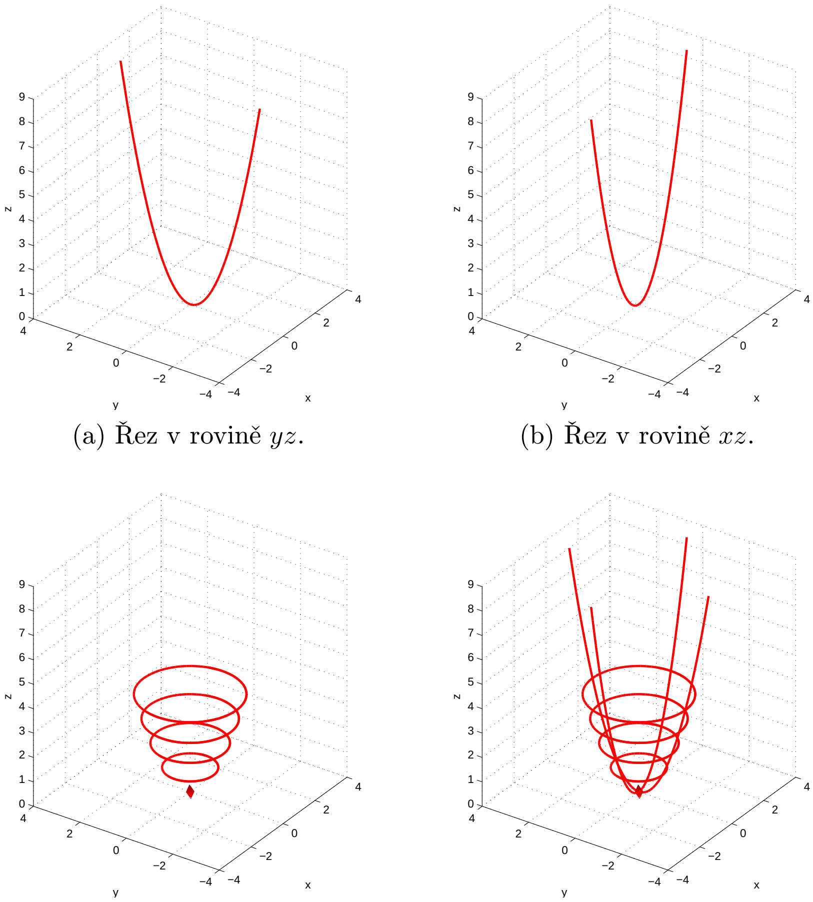
Parabolickou kuželovou plochu s vrcholem v počátku soustavy souřadnic vyjadřuje rovnice $x^2+y^2-z=0$. Tato plocha vznikne rotací paraboly o rovnici $z=x^2$ kolem osy z. Jak vidíme, jde o implicitní vyjádření. Pokud bychom chtěli určit explicitní vyjádření ($z=f(x;y)$), dostali bychom jednoduše funkční předpis $z=f(x;y)=x^2+y^2$. Pro určení definičního oboru této funkce proveďme jednoduchou úvahu. Jelikož se nám ve funkčním předpisu nevyskytuje žádný výraz podmiňující možnost volby nezávisle proměnných, jsou definičním oborem všechny uspořádané dvojice $[x;y]$, tedy $D(f)=\mathbb{R}^2$.

I v případě vyšetřování grafu této funkce budeme postupovat jako u předchozích příkladů, tedy metodou řezů. Nejprve proveďme řez rovinou $x=0$. Dostáváme tedy rovnici řezu ve tvaru $r_1 : z = y^2$. Tato rovnice vyjadřuje parabolu, řez je graficky zpodobněn na obrázku 2.16 (a). Stejným způsobem proveďme řez rovinou $y=0$. Dostáváme opět parabolu, tentokrát o rivnici $r_2 : z = x^2$. Tato parabola je zobrazena na obrázku 2.16 (b). Konečně, pokud provedeme řez rovinou $z=0$, dostáváme rovnici $x^2+y^2=0$. Součet druhých mocnin je ale nulový pouze tehdy, jsou-li oba členy nulové, tedy $x=0$ a zároveň $y=0$. Proto platí, že třetím řezem r_3 je uspořádaná dvojice $[x;y]=[0;0]$ v rovině $z=0$. Pokud bychom provedli řez rovinou rovnoběžnou s rovinou $z=0$, tedy rovinou o rovnici $z=c^2$, kde $c\in\mathbb{R}_0^+$ je libovolné nezáporné číslo, dostaneme pro řez funkční předpis $r_3 : x^2+y^2=c^2$, což je rovnice kružnice se středem na ose z a s poloměrem c. Tato situace pro $c\{0;1;2\}$ je vyobrazena na obrázku 2.16 (c). Obrázek 2.16 (d) potom zobrazuje všechny provedené řezy.



Obrázek 2.15: Graf funkce f - parabolická kuželová plocha.

Z obrázku 2.16 (d) je již jasně vidět, jak vypadá graf funkce $f(x;y)=x^2+y^2$. Tento graf je zobrazen na obrázku 2.15.



(a) Řez v rovině yz.

(b) Řez v rovině xz.

(c) Řez v rovině xy.

(d) Celkový řez.

Obrázek 2.16: Jednotlivé řezy.

2.3 Transformace grafu funkce

Všechny následující funkce budeme vyšetřovat v jejich základních polohách. Tyto funkce však samozřejmě lze dále transformovat - můžeme provádět například posunutí (translaci) nebo otočení (rotaci). Můžeme provádět i složitější transformace, těmi se ale spíše zabývá geometrie nežli matematická analýza. Zmiňme zde snad jen posunutí o daný vektor $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$. Pokud tedy dostaneme funkci například danou předpisem $f(x; y) : z-3 = (x-1)^2 + (y+1)^2$, nejprve určíme vektor posunutí, v našem případě $\mathbf{v} = (1; -1; 3)$. Poté vyšetříme průběh funkce posunuté do počátku soustavy souřadnic, vyšetříme tedy graf funkce s předpisem $z = x^2 + y^2$ (jen jsme vynechali vektor posunutí).

Poté, co zjistíme podobu grafu v počátku soustavy souřadnic, posuneme tento graf o náš vektor **v** a dostaneme graf funkce $f(x;y)$.

Kromě funkce obecná rovina jsme se v předchozí části práce věnovali především funkcím, které se v geometrii nazývají kvadratické plochy. Problematikou kvadratických ploch, zejména z pohledu geometrie, se zabývá například kniha Pavla Pecha a Romana Haška [2]. V této publikaci naleznete podrobně zpracovanou teorii kvadratických ploch včetně transformací těchto grafů, které jsme jen naznačili v předchozím odstavci.

2.4 Řešené příklady

Řešený příklad 2.1 *Určete funkční hodnoty funkce f v zadaných bodech. Určete definiční obor funkce f.*

(a) $f_1 : f_1(x;y) = x^2 - y + 3$; $A = [-3,1]$,

(b) $f_2 : f_2(x;y) = \dfrac{x-4}{y^3-4}$; $B = [7;2]$,

(c) $f_3 : f_3(x;y) = (1-x)^{(y+2)}$; $C = [-8; \frac{1}{2}]$,

(d) $f_4 : f_4(x;y) = \log(x+2y+6)$; $D = [6;-1]$.

Řešení:

(a) $f_1 : f_1(x;y) = x^2 - y + 3$; $A = [-3,1]$

$f_1(A) = f_1(-3;1) = (-3)^2 - 1 + 3 = 11$

$D(f_1) = \mathbb{R}^2$

(b) $f_2 : f_2(x;y) = \dfrac{x-4}{y^3-4}$; $B = [7;2]$

$$f_2(B) = f_2(7;2) = \frac{7-4}{2^3-4} = \frac{3}{4}$$

$D(f_2) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \neq \sqrt[3]{4}\}$

(c) $f_3 : f_3(x;y) = (1-x)^{(y+2)}$; $C = [-8;0,5]$

$f_3(C) = f_3(-8;0,5) = (1-(-8))^{(0,5+2)} = 9^{\frac{5}{2}} = 243$

$D(f_3) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x < 1\}$ *(Jedná se o polorovinu. Podmínka pro tuto funkci vychází z faktu, že předpis funkce f_3 lze upravit do podoby $f_3(x;y) = \mathrm{e}^{(y+2)\ln(1-x)}$.)*

(d) $f_4 : f_4(x; y) = \log(x + 2y + 6)$*;* $D = [6; -1]$

$f_4(D) = f_4(6; -1) = \log(6 + 2(-1) + 6) = \log 10 = 1$

$D(f_4) = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; x + 2y + 6 > 0\}$. *(Opět se jedná o rovnici poloroviny.)*

Řešený příklad 2.2 *U následujících funkcí určete předpisem definiční obor funkce f, graficky jej znázorněte a dále určete, zda je definiční obor množina otevřená nebo uzavřená a zda je tato množina omezená.*

(a) $f_1 : f_1(x; y) = \sqrt{2 - x} + \sqrt{y - 1}$, **(b)** $f_2 : f_2(x; y) = \ln(x - 3y + 7)$,

(c) $f_3 : f_3(x; y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$, **(d)** $f_4 : f_4(x; y) = \sqrt{2 - 2y^2 - x}$,

(e) $f_5 : f_5(x; y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}{\log(9 - x^2 - y^2)}$, **(f)** $f_6 : f_6(x; y) = \sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}}$.

Řešení:

(a) $f_1 : f_1(x; y) = \sqrt{2 - x} + \sqrt{y - 1}$

V daném předpisu funkce f_1 se nám vyskytují dvě druhé odmocniny. Víme, že argument každé druhé odmocniny musí být nezáporný. Budeme tedy řešit dvě nerovnice, $2 - x \geq 0$ a $y - 1 \geq 0$. Z první nerovnice dostáváme podmínku $x \leq 2$ a z druhé $y \geq 1$. Obě dvě nerovnice interpretují poloroviny, průnikem těchto polorovin je definiční obor funkce f_1 zobrazený na obrázku 2.17 (a). Předpisem bychom potom definiční obor této funkce zapsali takto:

$$D(f_1) = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; x \leq 2 \wedge y \geq 1\}.$$

Jak je patrné z obrázku 2.17 (a) a z definic omezené a uzavřené množiny, množina $D(f_1)$ je uzavřená a není omezená.

(b) $f_2 : f_2(x; y) = \ln(x - 3y + 7)$

V daném předpisu funkce f_2 se nachází funkce přirozený logaritmus. Argument logaritmu musí být kladný, proto platí, že $x - 3y + 7 > 0$. Tato nerovnice nám opět interpretuje polorovinu, která je zobrazena na obrázku 2.17 (b). Předpisem bychom potom definiční obor této funkce zapsali takto:

$$D(f_2) = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; x - 3y + 7 > 0\}.$$

Jak vidíme na obrázku 2.17 (b), podle definic omezené a uzavřené množiny není množina $D(f_2)$ uzavřená a není ani omezená.

(c) $f_3 : f_3(x;y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$

V daném předpisu funkce f_3 *se nachází funkce druhá odmocnina. Jako v příkladu (a), argument druhé odmocniny musí být nezáporný, tedy* $36-4x^2-9y^2 \geq 0$*. Po vydělení* 36 *a po malé úpravě dostáváme nerovnici* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$*. Tato nerovnice nám interpretuje vnitřní oblast elipsy o délce hlavní poloosy* $a = 3$ *a vedlejší poloosy* $b = 2$ *a se středem v počátku soustavy souřadnic. Tato množina je zobrazena na obrázku 2.17 (c). Předpisem bychom potom definiční obor této funkce zapsali takto:*

$$D(f_3) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}.$$

Jak ukazuje obrázek 2.17 (c), při použití definic omezené a uzavřené množiny je množina $D(f_3)$ *uzavřená (hraniční body* $D(f_4)$ *patří do této množiny) a je zároveň omezená.*

(d) $f_4 : f_4(x;y) = \sqrt{2 - 2y^2 - x}$

V daném předpisu funkce f_4 *se nachází opět funkce druhá odmocnina. Argument druhé odmocniny musí být nezáporný, tedy* $2 - 2y^2 - x \geq 0$*. Po nepatrné úpravě dostáváme nerovnici* $x \leq -2y^2 + 2$*. Tato nerovnice interpretuje vnitřní část paraboly o parametru* $p = 1$ *a s vrcholem* $V = [2;0]$*. Tato množina je zobrazena na obrázku 2.17 (d). Předpisem bychom potom definiční obor této funkce zapsali takto:*

$$D(f_4) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x \leq -2y^2 + 2\}.$$

Tento definiční obor, zobrazený na obrázku 2.17 (d), je podle definic omezené a uzavřené množiny uzavřená, ale není omezená množina.

(e) $f_5 : f_5(x;y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}{\log(9 - x^2 - y^2)}$

V daném předpisu funkce f_5 *se nachází funkce druhá odmocnina a funkce dekadický logaritmus. Argument druhé odmocniny musí být nezáporný, tedy* $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$*, a argument logaritmu musí být kladný, tedy* $9-x^2-y^2 > 0$*. Po odlogaritmování dostáváme nerovnice* $x^2+y^2 \geq 4$ *a* $x^2+y^2 < 9$*. První nerovnice interpretuje vnější část kružnice o poloměru* $r = 2$ *a se středem v počátku soustavy souřadnic, druhá nerovnice pak vnitřní část kružnice o poloměru* $r = 3$ *a se stejným středem. Nesmíme však zapomenout, že výraz ve jmenovateli nesmí být nulový, tedy* $\log(9 - x^2 - y^2) \neq 0$*. Po úpravě dostáváme* $9 - x^2 - y^2 \neq 1$*, tedy* $x^2+y^2 \neq 8$*. Tuto nerovnici interpretujeme graficky jako celou rovinu, ze* *které je vyjmuta kružnice o poloměru* $r = 2\sqrt{2}$ *a se středem v počátku soustavy souřadnic. Celá množina je potom zobrazena na obrázku 2.17 (e). Předpisem bychom potom definiční obor této funkce zapsali takto:*

$$D(f_5) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2 + y^2 < 9 \wedge x^2 + y^2 \neq 8\}.$$

Jak vidíme na obrázku 2.17 (e) a jak víme z definic omezené a uzavřené množiny, množina $D(f_5)$ *není uzavřená, ale je omezená.*

(f) $f_6 : f_6(x;y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$ *V předpisu této funkce se vyskytuje druhá odmocnina, jejíž argument musí být nezáporný, tedy* $\dfrac{x+y}{x-y} \geq 0$*. Musí tedy platit, že* $(x + y \geq 0 \wedge x - y > 0) \vee (x + y \leq 0 \wedge x - y < 0)$*. Tyto nerovnice můžeme přepsat do tvaru* $x \geq -y \wedge x > y \vee x \leq -y \wedge x < y$*. Definiční obor nám tedy vznikne sjednocením množiny určené nerovnicemi* $x \geq -y$ *a* $x > y$ *s množinou určenou nerovnicemi* $x \leq -y$ *a* $x < y$*. Výsledná množina je pak zobrazena na obrázku 2.17 (f). Předpisem bychom potom definiční obor této funkce zapsali takto:*

$$D(f_6) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x \geq -y \wedge x > y \vee x \leq -y \wedge x < y\}.$$

Obrázek 2.17 (f) ukazuje, že použitím definic omezené a uzavřené množiny není množina $D(f_6)$ *ani uzavřená ani omezená.*

2.5 Příklady k procvičení

Příklad 2.1 *Pomocí metody řezů určete graf následujících funkcí. Určete definiční obory.*

(a) *válcová parabolická plocha o předpisu* $f : f(x;y) = 4 - x^2$*,*

(b) *jednodílný hyperboloid o předpisu* $f : f(x;y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1$*.*

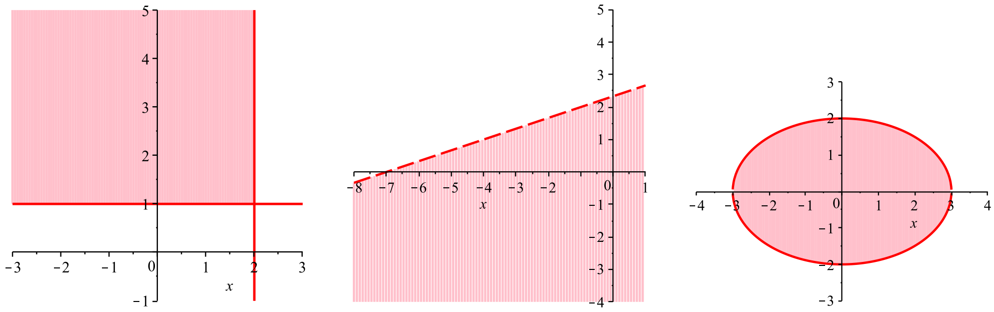
Příklad 2.2 *Určete funkční hodnoty v jednotlivých bodech definičního oboru.*

(a) $f_1 : f_1(x;y) = \ln(x-3y+xy)$*, pro* $A = [1;-3]$*,* $B = [7;0]$*,* $C = [-1;-1]$*,*

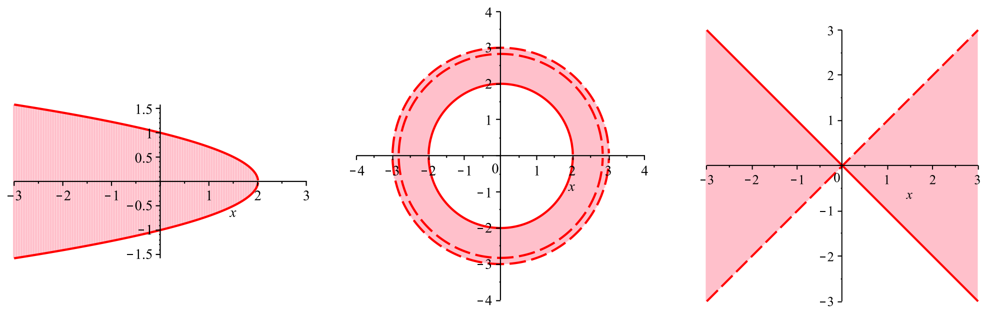
(b) $f_2 : f_2(x;y) = \dfrac{x_1}{x_2^2} - 4$*, pro* $A = [0;-2]$*,* $B = [4;-2]$*,* $C = [-5;7]$*,*

(c) $f_3 : f_3(x;y) = \operatorname{sign}(u) - \operatorname{sign}(v)$*, pro* $A = [1;-3]$*,* $B = [2;0]$*,* $C = [1;-1]$*,*

(d) $f_4 : f_4(x;y) = \sqrt{8 - x - y^2}$*, pro* $A = [3;-1]$*,* $B = [-1;-3]$*,* $C = [5,2]$*.*



(a) Definiční obor funkce f_1. (b) Definiční obor funkce f_2. (c) Definiční obor funkce f_3.



(d) Definiční obor funkce f_4. (e) Definiční obor funkce f_5. (f) Definiční obor funkce f_6.

Obrázek 2.17: Definiční obory funkcí f_1 až f_6.

Příklad 2.3 *Zjistěte, zda dané body patří do definičního oboru funkce.*

(a) $f_1 : f_1(x;y) = \sqrt{\dfrac{1-y}{1-x}}$, *pro* $A = [-1;-3]$, $B = [7;0]$, $C = [3;-1]$,

(b) $f_2 : f_2(x;y) = \log(x^2-9) + \mathrm{e}^{(y-1)}$, *pro* $A = [-3;-2]$, $B = [-2;5]$, $C = [-4;1]$,

(c) $f_3 : f_3(x;y) = \sqrt[4]{16-x^2-y}$, *pro* $A = [-4;0]$, $B = [3;7]$, $C = [0;0]$,

(d) $f_4 : f_4(x;y) = \ln \dfrac{x-1}{x+y-1}$, *pro* $A = [0;2]$, $B = [-4;4]$, $C = [3;-3]$.

Příklad 2.4 *Určete graficky i předpisem definiční obor funkce a určete, zda jde o množinu otevřenou, uzavřenou, omezenou.*

(a) $f_1 : f_1(x;y) = \sqrt{\operatorname{sign}(\frac{y}{x-1})}$, **(b)** $f_2 : f_2(x;y) = \sqrt{y - \sqrt{x+1}}$,

(c) $f_3 : f_3(x;y) = \frac{\sqrt{-x}}{x^2+y^2-2}$, **(d)** $f_4 : f_4(x;y) = \sqrt{2-2y^2-x}$,

(e) $f_5 : f_5(x;y) = \ln(4-4x^2+y^2)$, **(f)** $f_6 : f_6(x;y) = \frac{\log(9-x^2-y^2)}{\sqrt{4x^2+5y^2-20}}$,

(g) $f_7 : f_7(x;y) = \arcsin(\frac{x+1}{y-1})$, **(h)** $f_8 : f_8(x;y) = \ln(9-x^2)\cdot\sqrt{32-2y^2}$.

Příklad 2.5 *Podle DuBoisova vzorce pro výpočet povrchu lidského těla uvedeného níže, kde S je tato plocha v cm^2, v je výška v centimetrech a h je hmotnost v kilogramech, lze určit plochu povrchu těla průměrného těla Čecha, jehož hmotnost je $74,8kg$ a výška $172,4cm$. Určete tuto plochu. Určete velikost povrchu vašeho těla.*

$$S = 71,84 \cdot h^{0,425} \cdot v^{0,725}.$$

Příklad 2.6 *Malá hodinářská firma vyrábí jeden druh dámských a jeden druh pánských hodinek. Proměnnou d označme roční produkci dámských hodinek v kusech, proměnnou p pak roční produkci pánských hodinek v kusech. Bylo zjištěno, že roční příjmy z prodeje těchto hodinek popisuje funkce $R(d;p) = 1200d + 1500p$. Roční nálady na výrobu potom popisuje funkce $C(d;p) = d^2 - 3dp + 2p^2 + 800d + 1000p + 174000$. Určete funkci $P(d;p)$ popisující zisk firmy v závislosti na proměnných d a p. Určete roční zisk firmy, jestliže prodala průměrně 120 ks dámských hodinek a 145 ks pánských hodinek měsíčně.*

Kapitola 3

Diferenciální počet funkce dvou proměnných

Tato kapitola se bude zabývat zavedením základních vlastností funkcí vedoucích k přiblížení pojmu parciální derivace funkce dvou proměnných. Bude zde vysvětlena teorie parciálních derivací vyšších řádů a smíšených derivací, dále pak pojmy jako směrová derivace a diferenciál. Ukážeme si využití diferenciálního počtu v praxi, zejména na konstrukci tečné roviny ke grafu funkce dvou proměnných, použití totálního diferenciálu pro odhad funkce a v neposlední řadě osvětlíme pojem gradient.

3.1 Limita a spojitost funkce

Než zadefinujeme limitu a posléze spojitost reálné funkce dvou proměnných, je třeba uvést si pojmy, se kterými budeme v této kapitole pracovat.

Definice 3.1.1 (Hromadný bod) *Nechť pro definiční obor funkce f platí $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Bod $[x_0; y_0] \in \mathbb{R}^2$ nazveme hromadným bodem definičního oboru funkce f, jestliže každé prstencové okolí $P_\delta[x_0; y_0]$ má s definičním oborem funkce f neprázdný průnik, tedy:*

$$P_\delta[x_0; y_0] \cap D(f) \neq \emptyset.$$

Jak vidíme z definice, jde tedy o body, které jsme si již v předchozích kapitolách označili jako body vnitřní a body hraniční. Oba tyto body dávají při průniku jejich prstencového okolí s definičním oborem funkce f (nebo obecně s danou množinou) neprázdný průnik.

Definice 3.1.2 (Izolovaný bod) *Nechť pro definiční obor funkce f platí $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Bod $[x_0; y_0] \in \mathbb{R}^2$ nazveme izolovaným bodem definičního oboru* *funkce f, jestliže existuje prstencové okolí $P_\delta[x_0; y_0]$, které má s definičním oborem funkce f prázdný průnik.*

Stejně jako pro reálnou funkci jedné reálné proměnné, i zde musíme zadefinovat limitu funkce. A stejně jako u funkce jedné proměnné, i u funkce dvou proměnných nám tato limita poskytuje informaci o chování dané funkce v okolí nějakého bodu. Přitom se nejčastěji zaměřujeme na problematické body, jako body nespojitosti apod. Definice limity funkce dvou proměnných je analogická s definicí pro funkci jedné proměnné.

Definice 3.1.3 (Limita funkce) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných, tedy $z = f(x; y)$. Nechť bod $[x_0; y_0] \in \mathbb{R}^2$ je hromadným bodem $D(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0; y_0]$ limitu $A \in \mathbb{R}$, platí-li:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall [x; y] \in P_\delta(x_0; y_0)); |f(x; y) - A| < \varepsilon.$$

Takto definovanou limitu funkce $f(x; y)$ můžeme také nazvat dvojnou limitou a zapisujeme ji následujícím způsobem: $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x; y) = A$.

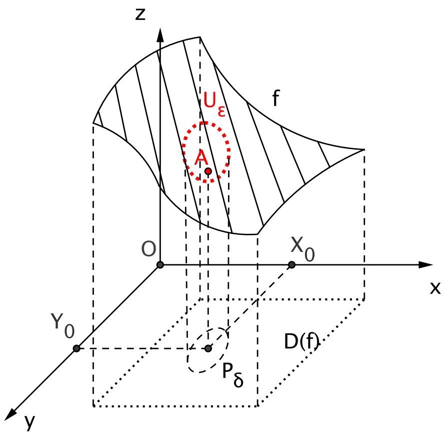
U funkce jedné proměnné si limitu pro $x \to x_0$ můžeme představit tak, že na x-ové ose se proměnná x blíží k x_0 buďto zleva nebo zprava. Když ale tuto analogii využijeme k přechodu k funkci dvou proměnných, zjistíme, že situace již tak snadná není. Jakým způsobem se bod $[x; y]$ blíží k bodu $[x_0; y_0]$? Může se k němu blížit po přímce rovnoběžné s jednotlivými osami. Stejně tak se ale k tomuto bodu může blížit například po spirále. Vidíme, že zde už je možností více, v podstatě jde o nekonečně mnoho možností, jak se bodem $[x; y]$ přiblížit k bodu $[x_0; y_0]$.

Je však jasné, že definice limity musí platit, ať už se bod $[x; y]$ blíží k bodu $[x_0; y_0]$ jakýmkoli způsobem. Podle práce Petra Volného [9] lze samotný výpočet dvojné limity provést třemi způsoby. Nejjednodušším z nich je prosté dosazení limitního bodu do předpisu funkce, čímž získáme v podstatě funkční hodnotu v limitním bodě. Druhou možností je postupné upravování funkčního předpisu a následné vypočtení limity. Další možností je potom dokazování, že dvojná limita neexistuje. To můžeme ukázat například nalezením dvou cest, přičemž pro obě bude výsledná hodnota limity rozdílná.

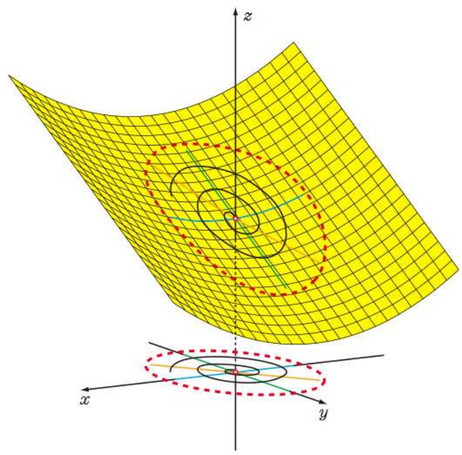
Jednou ze speciálních možností výběru cest je výběr, kdy se k bodu $[x_0; y_0]$ pohybujeme po přímkách rovnoběžných se souřadnicovými osami. Tento způsob můžeme také nazvat způsobem, při kterém se použijí dvojnásobné limity. Dvojnásobné limity vypadají následovně:

$$\lim_{x\to x_0}\big(\lim_{y\to y_0} f(x; y)\big) = A_1,$$

$$\lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to x_0} f(x; y)\big) = A_2.$$



(a) Grafické znázornění limity funkce.



(b) Přiblížení k bodu, převzato z [9], str. 250.

Obrázek 3.1: Limita funkce.

Věta 3.1.1 *Pokud existuje limita* $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x;y) = A$ *a zároveň existují dvojnásobné limity* A_1 *a* A_2*, potom platí, že* $A_1 = A_2 = A$*. Pokud* $A_1 \neq A_2$*, potom limita* A *neexistuje. Rovnost* $A_1 = A_2$ *je nutnou, nikoli však postačující podmínkou pro existenci limity* A*!*

Věta 3.1.2 (O jednoznačnosti limity) *Funkce* f *má v bodě* $[x_0; y_0]$ *nejvýše jednu limitu.*

Uvedli jsme si základní věty týkající se limit reálných funkcí dvou proměnných. Další věty o limitách tu nebudeme rozvádět do podrobností, protože jejich analogie s limitou funkce jedné proměnné je jednoznačná. Uvedeme tedy jen seznam důležitých vět týkajících se limity funkce dvou proměnných:

- věta o limitě součtu dvou funkcí,
- věta o limitě součinu dvou funkcí,
- věta o limitě složené funkce,
- věta o limitě sevřené funkce,
- věta o nerovnostech mezi limitami.

Je jen na individuální snaze studenta si tyto věty připomenout a aplikovat je na funkci dvou proměnných. Jak už bylo výše uvedeno, analogie těchto vět s větami o limitě funkce jedné proměnné je poměrně veliká.

Samotnými výpočty dvojných, popřípadě dvojnásobných limit, se v tomto textu zabírat nebudeme. V seznamu použité literatury lze najít sbírky příkladů, kde naleznete spoustu příkladů na výpočet dvojných a dvojnásobných limit. My si v části příkladů k procvičení uvedeme jen zcela základní typy.

Definice 3.1.4 (Spojitost funkce v bodě) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných, nechť bod $[x_0; y_0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $[x_0; y_0]$, jestliže platí:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall [x; y] \in P_\delta(x_0; y_0))|f(x; y) - f(x_0; y_0)| < \varepsilon.$$

Můžeme však uvést i analogickou definici spojitosti funkce f v bodě $[x_0; y_0]$:

Definice 3.1.5 (Spojitost funkce v bodě) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných, nechť bod $[x_0; y_0]$ je bodem definičního oboru funkce f. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $[x_0; y_0]$, jestliže je $[x_0; y_0]$ izolovaný bod definičního oboru funkce f nebo platí:*

$$\lim_{[x;y] \to [x_0;y_0]} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

Stejně jako limitu, i spojitost bychom mohli znázornit obrázkem 3.1. A podobně jako u limity funkce dvou proměnných, i u spojitosti platí velká analogie s funkcí více proměnných. I proto můžeme vyslovit následující tvrzení. Jejich podrobnější výklad, vysvětlení a případný důkaz necháváme na čtenářově znalostech z oblasti spojitosti funkce jedné proměnné a na individuální snaze.

Věta 3.1.3 *Nechť $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je v bodě $[x_0; y_0]$ spojitá a nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je v bodě $g(x_0; y_0)$ spojitá. Nechť funkce h je definována složením funkcí f a g, tedy $h(x; y) = f(g(x; y))$. Potom funkce h je v bodě $[x_0; y_0]$ spojitá.*

Věta 3.1.4 *Uvažujme funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojité v bodě $[x_0; y_0]$. V tomto bodě jsou potom spojité i funkce vzniklé na základě aritmetických operací, tedy funkce $f + g$ a $f \cdot g$. Pokud navíc platí, že $g(x; y) \neq 0$, je spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.*

Až doposud jsme definovali spojitost pouze v jednotlivých bodech. Naším zájmem ale je definovat spojitost funkce dvou proměnných na určité množině, ideálně pak na celém definičním oboru této funkce. Pojďme tedy tuto spojitost zadefinovat.

Definice 3.1.6 *Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $\mathcal{M} \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, je-li spojitá v každém bodě této množiny vzhledem k množině $\mathcal{M}$, tj. platí-li:*

$$\lim_{\substack{[x;y]\to[x_0;y_0]\\ [x;y]\in\mathcal{M}}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

Je-li navíc $\mathcal{M} = D(f)$, říkáme, že funkce f je spojitá.

Uveďme si ještě jednu důležitou větu, která souvisí se spojitostí funkce na množině a kterou budeme využívat ke hledání extrémů. I alternativu této věty pro funkci jedné proměnné bychom už měli znát, nicméně uvedeme si ji zde i pro reálnou funkci dvou proměnných.

Věta 3.1.5 (Weierstrassova věta) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných, nechť $\mathcal{M}$ je omezená a uzavřená množina, pro kterou platí $\mathcal{M} \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Je-li funkce f spojitá na množině $\mathcal{M}$, potom na této množině nabývá funkce f svého maxima a svého minima.*

Připomeňme si, co chápeme pod pojmem omezená a uzavřená množina. Omezené množině musí být možné opsat kružnici tak, aby celá tato množina ležela uvnitř této kružnice. Uzavřeností množiny rozumíme takovou vlastnost, že množina obsahuje všechny své hraniční body. Ukažme si analogii s funkcí jedné proměnné. U takové funkce jsme rozlišovali intervaly, a to uzavřený, otevřený a polouzavřený. V analogii s funkcí dvou proměnných nám otevřený interval odpovídá otevřené množině, uzavřený interval pak uzavřené a omezené množině. Ale jak je to s polouzavřenými intervaly? Funkce dvou proměnných, respektive její $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ nemá analogii k polouzavřeným intervalům. Podle definice uzavřenosti platí, že pokud všechny hraniční body množiny $D(f)$ patří do $D(f)$, pak je množina uzavřená. V opačném případě je $D(f)$ množina otevřená.

3.2 Derivace a diferenciál funkce

3.2.1 Parciální derivace funkce dvou proměnných

I při objasňování diferenciálního počtu budeme vycházet z analogie s funkcí jedné proměnné. Připomeňme si, jak se určovala hodnota derivace u funkce jedné proměnné. U funkce jedné proměnné jsme vždy derivovali právě podle této proměnné. Nejčastěji se jednalo o proměnnou x. Nyní ovšem stojíme před problémem, jelikož funkce, kterými se v této práci zabýváme, mají proměnné dvě. Jak se tedy provádí derivace funkce dvou proměnných?

Definice 3.2.1 (Parciální derivace podle proměnné x) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a nechť bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Parciální derivací prvního řádu v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné x nazýváme (pokud existuje) limitu:*

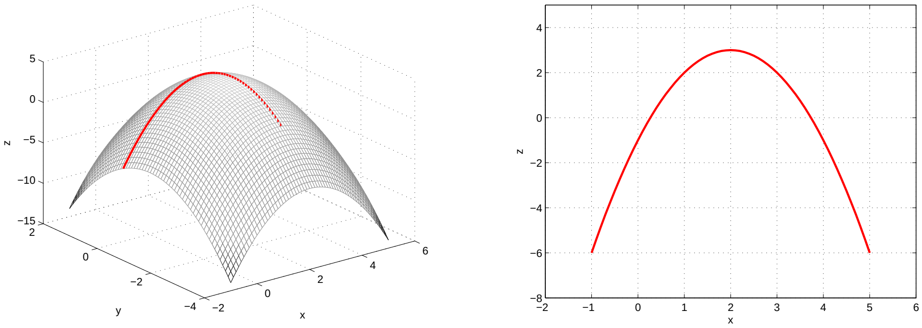
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x; y_0) - f(x_0; y_0)}{x - x_0}.$$

Definice 3.2.2 (Parciální derivace podle proměnné y) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a nechť bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Parciální derivací prvního řádu v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné y nazýváme (pokud existuje) limitu:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0; y) - f(x_0; y_0)}{y - y_0}.$$

Jak tedy můžeme vidět na předchozích dvou definicích, derivaci provádíme jen podle jedné vybrané proměnné. Pojďme si tyto definice podrobněji rozebrat. Zaměřme se na definici 3.2.1. Následující definice je zcela analogická.

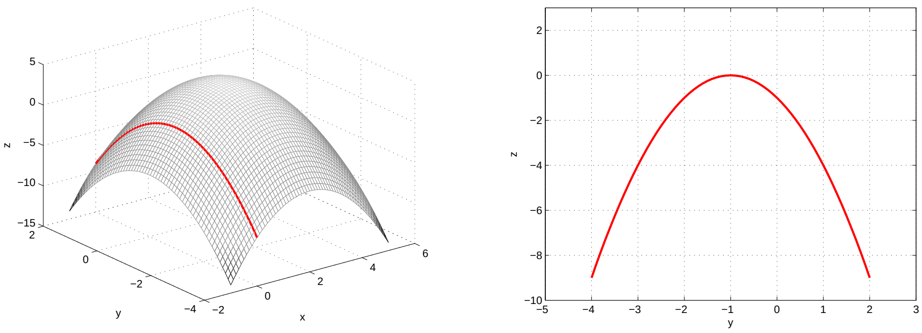
Když si připomeneme definici derivace funkce jedné proměnné a zároveň se podíváme na definici parciální derivace podle proměnné x, uvidíme zde analogii. Všimněme si jedné důležité věci. U parciální derivace podle proměnné x můžeme vidět, že se nám zde nevyskytuje proměnná y. Naopak, tato proměnná je zafixovaná na hodnotě y_0. Co to tedy znamená pro náš výpočet? Proměnná y je tedy "zmrazena" na hodnotě y_0, což má následující geometrický význam. Vzniká nám parciální funkce s předpisem $f_x : f_x(x; y_0)$, což je ve skutečnosti už jen funkce jedné proměnné, jejíž derivaci hledat umíme. V grafické podobě provedeme na grafu funkce f řez rovinou rovnoběžnou s rovinou xz. Rovnice průniku této roviny s grafem funkce f má pak právě funkční předpis funkce f_x. Grafickou podobu této myšlenky můžete vidět na následujícím obrázku:



(a) Graf funkce f s řezem rovinou $y = y_0$. (b) Řez na funkci f daný předpisem f_x.

Obrázek 3.2: Grafická podoba parciální derivace funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné x.

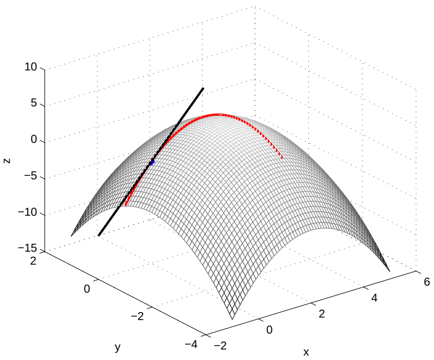
Zcela analogicky bude vypadat situace pro parciální derivaci funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné y. Funkčním předpisem řezu bude funkce jedné proměnné $f_y : f_y(x_0; y)$.



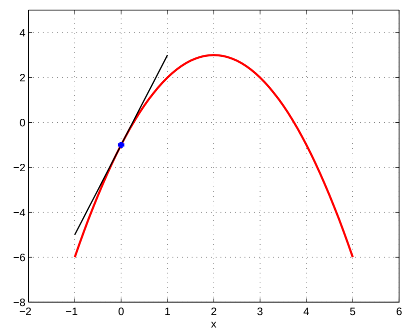
(a) Graf funkce f s řezem rovinou $x = x_0$. (b) Řez na funkci f daný předpisem f_y.

Obrázek 3.3: Grafická podoba parciální derivace funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné y.

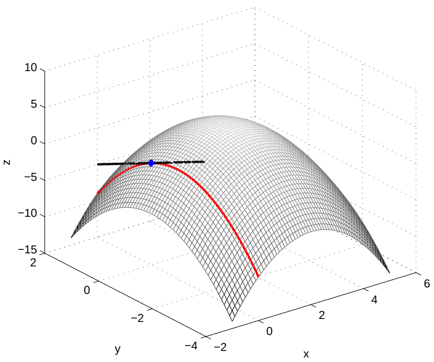
Pojďme ještě objasnit geometrický význam parciálních derivací. Připomeňme nejprve geometrický význam derivace funkce jedné proměnné. Hodnota této derivace v určitém bodě x_0 měla význam směrnice tečny v bodě x_0 ke grafu této funkce jedné proměnné. Nejiný význam má i parciální derivace. Už jsme se seznámili s významem parciální derivace a s postupným převedením na funkci jedné proměnné. A u té víme, že derivace má význam směrnice tečny. Hodnota parciální derivace funkce dvou proměnných v bodě $[x_0; y_0]$ nám tedy udává směrnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0; y_0]$, přičemž tato tečna leží v rovině $y = y_0$. Samozřejmě, platí to až na obměnu proměnných i pro parciální derivaci funkce dvou proměnných v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné y. Na následujících obrázcích můžete vidět grafické znázornění těchto tečen:



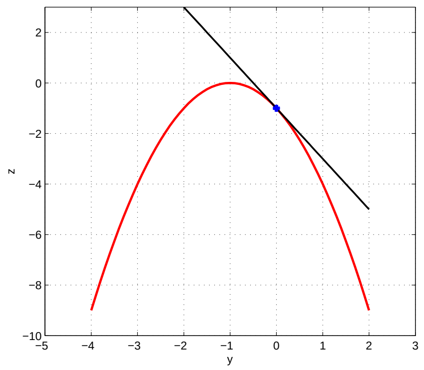
(a) Řez rovinou $y = y_0$ s tečnou.



(b) Znázornění tečny ve 2D pohledu.



(c) Řez rovinou $x = x_0$ s tečnou.

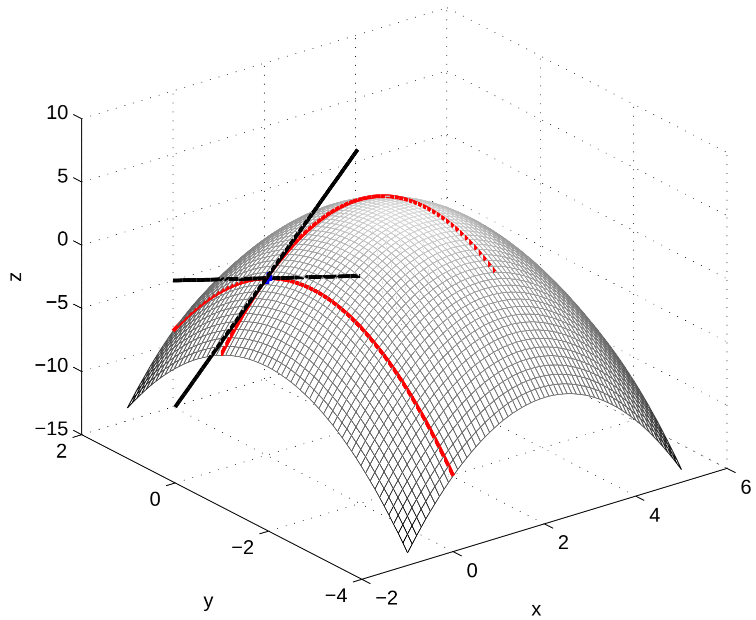


(d) Znázornění tečny ve 2D pohledu.

Obrázek 3.4: Geometrický význam parciální derivace funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné x(obr. (a) a (b)) a podle proměnné y (obr. (c) a (d)).

Na závěr této části o geometrickém významu parciálních derivací si ještě uveďme obrázek 3.5. Na něm vidíme původní funkci f, řezy provedené rovinami $x = x_0$ a $y = y_0$ (červené křivky) a také tečny ke grafu funkce f vytvořené v bodě $[x_0; y_0]$. Uvědomme si, že tyto dvě tečny procházejí stejným bodem, proto nejsou mimoběžné. Lze jimi tedy proložit rovinu a tato rovina bude tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě $[x_0; y_0]$. Více o problematice tečných rovin si řekneme v další části tohoto textu.

Nyní je třeba osvětlit si, jak budeme parciální derivace počítat. V předchozích odstavcích jsme si podrobně vysvětlili, jak funguje parciální derivace. Na-



Obrázek 3.5: Graf funkce f s tečnami v bodě $[x_0; y_0]$.

příklad v definici parciální derivace funkce dvou proměnných v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné x jsme řekli, že proměnná y zůstává zafixována na hodnotě $y = y_0$. Proměnnou y tedy při výpočtu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x; y)$ bereme jako konstantu a tak s ní při derivování také zacházíme. Derivujeme pak standardně pouze podle proměnné x. A naopak, pokud provádíme parciální derivaci podle proměnné y, při výpočtu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x; y)$ chápeme proměnnou x jako konstantu. Dokážeme tedy převést výpočet parciální derivace podle proměnné x (nebo y) na výpočet derivace funkce jedné proměnné. Nemusíme tedy přidávat žádná další pravidla, protože derivovat funkci jedné proměnné bychom měli umět již z předchozích kurzů matematické analýzy. Připomeňme si tedy kromě základních pravidel pro derivování i hlavní věty, které při derivování používáme.

Věta 3.2.1 *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce dvou proměnných, které mají parciální derivaci podle proměnné x v bodě $[x_0; y_0] \in D(f) \cap D(g)$. Pak mají v tomto bodě derivaci také funkce $f + g$, $f \cdot g$ a pokud navíc $g(x; y) \neq 0$, potom i funkce $\dfrac{f}{g}$ a platí:*

- $\dfrac{\partial (f+g)}{\partial x}(x; y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x; y) + \dfrac{\partial g}{\partial x}(x; y),$

- $\dfrac{\partial(f \cdot g)}{\partial x}(x;y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y) \cdot g(x;y) + f(x;y) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x}(x;y)$,
- $\dfrac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x}(x;y) = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) \cdot g(x;y) - f(x;y) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x;y)}{g^2(x;y)}$.

Věta 3.2.2 (Derivace složené funkce) *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je reálné funkce dvou proměnných, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reálná funkce jedné proměnné, přičemž existuje parciální derivace funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ a existuje derivace funkce g v bodě $f(x_0; y_0)$. Potom existuje parciální derivace funkce $g(f(x;y))$ v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné x a pro její výpočet platí vztah*

$$\frac{\partial g(f(x_0;y_0))}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}(f(x_0;y_0)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0).$$

Jinými slovy, hodnota parciální derivace složené funkce podle proměnné x je rovna součinu parciální derivace vnitřní funkce a derivace vnější funkce podle proměnné x. Pokud navíc označíme $z = f(x;y)$ a tedy $z_0 = f(x_0;y_0)$, můžeme výpočet přepsat do podoby $\dfrac{\partial g(f(x_0;y_0))}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial z}(z_0) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)$.

Definice 3.2.3 (Hladká funkce) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Řekneme, že funkce f je hladká v bodě $[x_0; y_0]$, jestliže v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu a všechny tyto derivace jsou v bodě $[x_0; y_0]$ spojité.*

Věta 3.2.3 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Je-li funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ hladká, pak je v něm i spojitá.*

3.2.2 Diferencovatelnost

Definice 3.2.4 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru funkce f. Řekneme, že funkce f je diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$, existují-li konstanty $A \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{R}$ a funkce $\omega : \omega(x;y)$ spojitá v bodě $[x_0; y_0]$ a $\omega(x_0; y_0) = 0$ tak, že platí:*

$$f(x;y) - f(x_0;y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \omega(x;y)\rho([x;y];[x_0;y_0]).$$

Můžeme použít také ekvivalentní vyjádření:

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \frac{f(x;y) - f(x_0;y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{\rho([x;y];[x_0;y_0])} = 0.$$

Pojďme nyní vysvětlit, co pojem diferencovatelnosti znamená. Mějme bod $[x_0; y_0]$, který je pevně zvoleným vnitřním bodem definičního oboru funkce f. Zajímáme se o rozdíl $f(x; y) - f(x_0; y_0)$, tedy o rozdíl funkčních hodnot v námi zvoleném bodě a v pevně zvoleném bodě $[x_0; y_0]$. Jelikož funkce f může mít různý předpis, snažíme se tento rozdíl nahradit rozdílem dvou lineárních funkcí, tedy rozdílem $Ax + By + C - (Ax_0 + By_0 + C)$. Po úpravě dostáváme výraz $A(x - x_0) + B(y - y_0)$, kterým chceme nahradit původní rozdíl $f(x; y) - f(x_0; y_0)$. Jelikož ale toto nahrazení není zcela přesné a může vzniknout diference mezi původním rozdílem a rozdílem při použití lineárních funkcí, je třeba vyvážit tuto rovnost ještě dalším členem, v tomto případě členem $\omega(x; y)\rho([x; y]; [x_0; y_0])$. Zde ω je funkce dvou proměnných, která je spojitá v bodě $[x_0; y_0]$ a platí pro ni $\omega(x_0; y_0) = 0$ a $\rho([x; y]; [x_0; y_0])$ značí vzdálenost bodu $[x_0; y_0]$ od bodu $[x; y]$ (viz. jednotlivé metriky). Dostáváme se tedy k následující rovnosti:

$$f(x; y) - f(x_0; y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \omega(x; y)\rho([x; y]; [x_0; y_0]).$$

Pokud takovýto rozdíl lineárních funkcí a funkci ω spojitou a splňující vlastnost $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \omega(x; y) = 0$ dokážu najít, pak f v bodě $[x_0; y_0]$ diferencovatelná.

Zabývejme se teď otázkou, jakým způsobem objasnit hodnoty konstant A a B. Na základě definice diferencovatelnosti funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ se hodnoty těchto konstant dají nalézt. Výpočet však není jednoduchý, proto tu uvedeme pouze výsledek. Lze odvodit, že konstanta A je rovna hodnotě parciální derivace funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné x, obdobně se ukáže, že hodnota konstanty B je rovna hodnotě parciální derivace funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ podle proměnné y. Definice diferencovatelnosti nám tedy přechází do podoby:

$$f(x; y) - f(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) + \omega(x; y)\rho([x; y]; [x_0; y_0]),$$

kde $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \omega(x; y) = 0$ a $\rho([x; y]; [x_0; y_0]) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ je Eukleidovská metrika.

Definice 3.2.5 (Totální diferenciál) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$. Pak výraz*

$$\mathrm{d}f(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

nazveme totálním diferenciálem funkce f v bodě $[x_0; y_0]$. Rozdíly $h_1 = x - x_0$ a $h_2 = y - y_0$ nazveme přírůstky proměnné x, respektive y, funkce f v bodě

$[x_0; y_0]$. *Diferenciál potom dostaneme ve tvaru:*

$$\mathrm{d}f(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)h_2.$$

Praktické využití totálního diferenciálu si ukážeme v následujících kapitolách. Bude se týkat zejména odhadu funkčních hodnot funkce. Pojďme si nyní uvést některé základní věty, které se ještě týkají obecně diferencovatelnosti.

Věta 3.2.4 (Diferencovatelnost složené funkce) *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je reálná funkce dvou proměnných diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je reálná funkce jedné proměnné diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$. Potom pro funkci $h(x; y) = g(f(x; y))$ platí, že je diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$.*

Věta 3.2.5 *Nechť funkce f a g jsou reálné funkce dvou proměnných diferencovatelné v bodě $[x_0; y_0]$. Potom funkce $f + g$, $f \cdot g$ a pokud platí, že $g(x_0; y_0) \neq 0$, potom i funkce $\dfrac{f}{g}$ jsou diferencovatelné funkce v bodě $[x_0; y_0]$.*

Věta 3.2.6 (Postačující podmínka diferencovatelnosti funkce) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných. Nechť funkce f má v některém okolí bodu $[x_0; y_0]$ všechny parciální derivace, které jsou spojité v bodě $[x_0; y_0]$. Potom je funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$.*

Věta 3.2.7 (Důsledky diferencovatelnosti) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$. Potom:*

1. *funkce f je spojitá v bodě $[x_0; y_0]$,*
2. *existují všechny parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0; y_0]$.*

Oba tyto důsledky platí i tehdy, pokud má funkce spojité parciální derivace.

3.2.3 Směrové derivace a gradient

Pokud chceme ukázat, že funkce f je v bodě $[x_0; y_0]$ diferencovatelná, musí mít v tomto bodě podle postačující podmínky spojité parciální derivace. Nelze ale říci, že pokud funkce nemá spojité parciální derivace, tak diferencovatelná není. V tomto případě se postupuje tak, že použijeme směrové derivace.

Definice 3.2.6 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a nechť $\vec{s}$ je jednotkový vektor o souřadnicích $\vec{s} = (s_x; s_y)$. Nechť bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru funkce f. Potom číslo*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot s_x; y + h \cdot s_y) - f(x; y)}{h}$$

nazýváme derivací funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ ve směru $\vec{s}$.

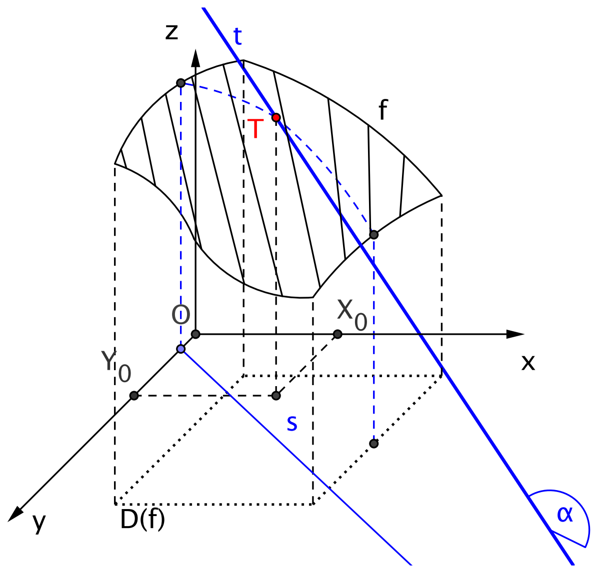
Vysvětleme si nyní význam směrové derivace. Víme, že když jsme definovali parciální derivaci, její geometrický význam spočíval v hodnotě směrnice tečny ke grafu funkce v daném bodě. Nejinak tomu je teď, nicméně v tomto případě není tečna rovnoběžná s osou x ani s osou y, jak tomu bylo u parciálních derivací. Nyní má tato tečna obecný směrový vektor $\vec{s}$. Z toho ale vyplývá, že parciální derivace jsou jen speciálními případy směrové derivace. Ukažme si to. Zvolme za směrový vektor $\vec{s} = (1; 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot 1; y + h \cdot 0) - f(x; y)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h; y) - f(x; y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Vidíme, že proměnná y je zafixována, jde tedy o definici parciální derivace funkce f podle proměnné x. Tato definice je ekvivalentní s definicí zavedenou pod číslem 3.2.1.

I směrová derivace samotná má svůj geometrický význam. A stejně jako u parciálních derivací, i zde je její hodnota rovna směrnici tečny ke grafu funkce f v daném bodě. Je nám asi jasné, že hodnota této směrnice nás informuje i o tom, do jaké míry graf funkce f v daném bodě roste nebo klesá. Pro kvantifikaci míry tohoto klesání, respektive růstu, se zavádí pojem gradient funkce.



Obrázek 3.6: Grafické znázornění směrové derivace ve směru $\vec{s}$.

Definice 3.2.7 (Gradient funkce) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a nechť v bodě $[x_0; y_0]$ existují všechny její parciální derivace. Potom gradientem funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ rozumíme výraz*

$$\mathrm{grad} f(x_0; y_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)).$$

Gradient také často označujeme znakem nabla, tedy $\nabla f = (\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y})f$.

Hodnota gradientu nám udává směr největší změny funkce f, tedy jakým směrem dochází k největšímu růstu, respektive poklesu, funkce f.

Věta 3.2.8 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných. Má-li funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ spojité všechny parciální derivace a má v tomto bodě směrovou derivaci každého jednotkového vektoru $\vec{s}$, potom platí:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0; y_0) = \mathrm{grad} f(x_0; y_0) \cdot \vec{s}.$$

Uveďme zde ještě vztah, jaký má směrová derivace k diferenciaci funkce.

Věta 3.2.9 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$ a $\vec{s} = (s_x; s_y)$. Potom*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot s_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot s_y$$

pro všechny směry $\vec{s}$. Pokud v některém směru $\vec{s}$ směrová derivace funkce f neexistuje, funkce f není diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$.

3.2.4 Parciální derivace vyšších řádů

U funkce jedné proměnné jsme zaváděli pojem druhá derivace, případně třetí derivace atd. Také u reálné funkce dvou proměnných si nyní zadefinujeme vyšší řády derivací. Obecně nám po výpočtu parciální derivace funkce f v bodě $[x; y]$ vznikne opět funkce dvou proměnných. Opětovným derivováním této funkce postupně dostáváme vyšší řády parciálních derivací.

Definice 3.2.8 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Parciální derivací druhého řádu podle proměnné x nazveme výraz*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0; y_0) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0; y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x; y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)}{x - x_0}$$

vzniklý dvojnásobnou derivací funkce f podle proměnné x. Dvojnásobnou derivací funkce f podle proměnné y poté obdržíme parciální derivaci druhého řádu podle proměnné y, která je dána výrazem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0; y_0) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0; y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)}{y - y_0}.$$

Parciální derivace druhého řádu podle proměnné x tedy vznikne tak, že vezmeme funkci f, nejprve ji zderivujeme podle proměnné x a poté ještě jednou tuto derivaci zderivujeme podle x. Nejinak tomu je u parciální derivace druhého řádu podle proměnné y. Funkci f zderivujeme podle y a pak výsledek znovu zderivujeme podle y. Nabízí se nám však i možnost funkci f nejprve zderivovat podle x a poté podle y nebo naopak. Pojďme se tedy chvilku pozastavit nad tímto způsobem.

Definice 3.2.9 (Smíšená derivace) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Smíšenou parciální derivací druhého řádu nazveme výraz*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0; y_0) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0; y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)}{y - y_0},$$

respektive

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0; y_0) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0; y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x; y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)}{x - x_0}.$$

Vyvstává nám zde ale otázka, zda jsou tyto výrazy stejné nebo nikoli. Jinými slovy, jsou tyto smíšené derivace druhého řádu stejné? Pokud zderivujeme funkci f nejprve podle proměnné x a až posléze podle proměnné y, dostaneme stejný výsledek jako v případě, kdy funkci f zderivujeme nejprve podle y a až pak podle x?

Definice 3.2.10 (Záměnnost parciálních derivací) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Říkáme, že funkce f má v bodě $[x_0; y_0]$ záměnné parciální derivace druhého řádu, jestliže platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0; y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0; y_0).$$

Věta 3.2.10 (Postačující podmínka záměnnosti) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Jestliže má funkce f v okolí bodu $[x_0; y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu, potom má záměnné derivace druhého řádu.*

Máme tedy definovány parciální derivace prvního a druhého řádu. Pokud bychom chtěli definovat také derivace vyšších řádů, postupovali bychom zcela stejným postupem. Parciální derivací k-tého řádu bychom nazvali derivaci $(k-1)$-krát zderivované funkce f.

Definice 3.2.11 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Nechť f má v okolí bodu $[x_0; y_0]$ všechny parciální derivace n-tého řádu. Potom parciální derivace $(n+1)$. řádu podle proměnné x (respektive y) je první parciální derivace podle proměnné x (respektive y) v bodě $[x_0; y_0]$ z funkce $\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}$, kde $i \in \{0; 1; \ldots; n\}$.*

Na závěr tohoto tématu pojďme ještě uvést, jak by vypadala k-násobná diferencovatelnost a totální diferenciál k-tého řádu funkce f.

Definice 3.2.12 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Řekneme, že funkce f je v bodě $[x_0; y_0]$ k-krát diferencovatelná, jestliže všechny parciální derivace $(k-1)$. řádu jsou jako funkce diferencovatelné v okolí bodu $[x_0; y_0]$.*

Funkce f je k-krát diferencovatelná v okolí bodu $[x_0; y_0]$, má-li v tomto okolí spojité parciální derivace k-tého řádu.

Definice 3.2.13 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Je-li funkce f k-krát diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$, totálním diferenciálem k-tého řádu v bodě $[x_0; y_0]$ nazveme výraz:*

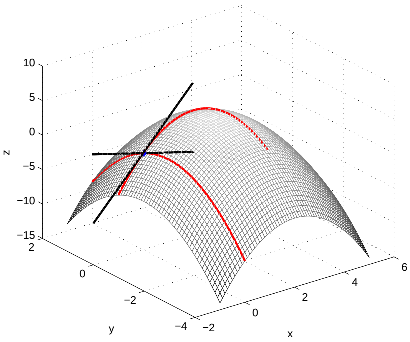
$$\mathrm{d}^k f(x_0; y_0) = (\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2)^k \cdot f(x_0; y_0).$$

Speciálně pro totální diferenciál druhého řádu platí:

$$\mathrm{d}^2 f(x_0; y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} h_2^2.$$

3.3 Užití parciálních derivací a diferenciálu

3.3.1 Tečná rovina grafu funkce



Obrázek 3.7: Graf funkce f s tečnami v bodě $[x_0; y_0]$.

Ukažme si nyní, jak zjistit rovnici tečné roviny ke grafu funkce za použití diferenciálního počtu funkce dvou proměnných. Jakýsi náznak této problematiky se nám již objevil na straně 45 u zavedení pojmu parciální derivace. Připomeňme si to obrázkem. Při definici parciálních derivací jsme použili k vytvoření řezu roviny s rovnicemi $x = x_0$ a $y = y_0$. V těchto rovinách potom ležely tečny ke grafu funkce f. Vysvětlili jsme si, že tyto tečny nejsou mimoběžkami, nejsou ani totožné, tudíž nimi lze jednoznačně proložit rovinu. A tuto rovinu my nazveme tečnou rovinou ke grafu funkce.

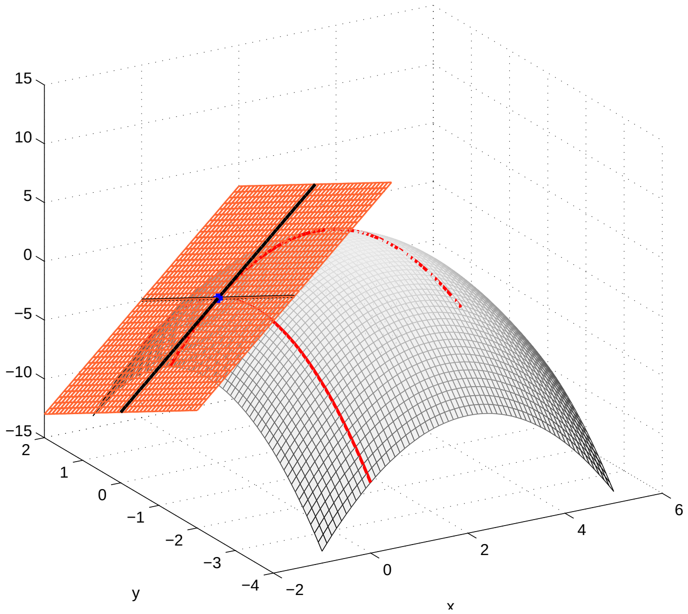
Definice 3.3.1 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Jestliže je funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0; y_0]$, pak rovnice tečny ke grafu funkce f má tvar:*

$$z = f(x_0; y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot (y - y_0).$$

Tečným bodem je tedy bod o souřadnicích $T = [x_0; y_0, f(x_0; y_0)]$.

Vidíme, že pro výpočet rovnice tečné roviny v určitém bodu funkce potřebujeme spočítat pouze obě parciální derivace druhého řádu. Tím dostáváme obecnou rovnici tečné roviny. Tuto rovnici samozřejmě můžeme dostat i za pomoci výše zmíněných dvou tečen[1]. Na následujícím obrázku už můžeme vidět tečnou rovinu ke grafu funkce f i s již dříve zkonstruovanými tečnami.

[1] I v tomto případě je potřeba spočítat obě parciální derivace prvního řádu, ale ještě k tomu použít aparát analytické geometrie.



Obrázek 3.8: Tečná rovina je grafu funkce f v bodě $[x_0; y_0; f(x_0; y_0)]$.

3.3.2 Odhad funkční hodnoty

Definicí 3.2.5 jsme zavedli totální diferenciál. Tento totální diferenciál nám slouží k odhadu diference $f(x; y) - f(x_0; y_0)$. Naši snahou tedy je aproximovat hodnoty $f(x; y)$ v okolí bodu $[x_0; y_0]$ s dostatečnou přesností. Uveďme si zde nyní tvar diferenciálu, který použijeme:

$$\mathrm{d}f(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot h_2.$$

Členy h_1 a h_2 nám zde značí přírůstky funkce pro proměnnou x, respektive y. Pokud člen $\mathrm{d}f(x_0; y_0)$ nahradíme rozdílem $f(x; y) - f(x_0; y_0)$, dostáváme po úpravě výraz:

$$f(x; y) = f(x_0; y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot h_2.$$

Abychom vztah, který budeme používat pro odhad hodnoty funkce v nějakém bodě, nahraďme ještě proměnnou x výrazem $x_0 + h_1$ a analogicky y výrazem $y_0 + h_2$. Dostáváme tedy vztah, který budeme používat:

$$f(x_0 + h_1; y_0 + h_2) = f(x_0; y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot h_2.$$

Pamatujme na to, že tato rovnost je jen přibližná, jen s určitou přesností. Nezapomeňme také na to, že přírůstky h_1 a h_2 by měly být dostatečně malé, rozumějme tím okolo nuly.

Tuto přesnost můžeme určitým způsobem ještě zvýšit. Pojďme nejprve trochu upravit výraz, který je uveden o pár řádek výše. Všimněme si, že poslední dva sčítance jsou vlastně diferenciálem funkce f, tedy:

$$f(x_0 + h_1; y_0 + h_2) = f(x_0; y_0) + \mathrm{d}f.$$

Pokud bychom ale chtěli zpřesnit naši aproximaci, je třeba na pravou stranu výrazu přidat další sčítance. Po přidání dostáváme polynom, který se nazývá Taylorův.

Definice 3.3.2 (Taylorův polynom) *Nechť reálná funkce dvou proměnných f má v okolí bodu $[x_0; y_0]$ spojité parciální derivace až do $(k+1)$. řádu. Odhad funkční hodnoty funkce f provedeme Taylorovým polynomem o předpisu:*

$$T_k^f(x_0; y_0) = f(x_0; y_0) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x_0; y_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0; y_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathrm{d}^k f(x_0; y_0).$$

Můžeme tedy vidět, že naše používání totálního diferenciálu je tedy speciálním případem Taylorova polynomu. My přesto budeme pro výpočty používat pouze totální diferenciál.

3.4 Řešené příklady

Řešený příklad 3.1 *Vypočítejte dvojné limity následujících funkcí:*

(a) $\displaystyle\lim_{[x;y]\to[-1;1]} \frac{3x - 7y^3}{x^2 + 2y^2}$, **(b)** $\displaystyle\lim_{[x;y]\to[-3;2]} \frac{xy + 5}{xy - 5} - 4$,

(c) $\displaystyle\lim_{[x;y]\to[2;2]} \frac{xy^3 - x^4}{x - y}$, **(d)** $\displaystyle\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{\sin(xy)}{x}$.

Řešení:

(a) *Definičním oborem této funkce je množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel vyjma dvojice $[0; 0]$. Vlastní bod limity je tedy vnitřním bodem definičního oboru. Po prostém dosazení dostáváme:*

$$\lim_{[x;y]\to[-1;1]} \frac{3x - 7y^3}{x^2 + 2y^2} = \frac{3 \cdot (-1) - 7 \cdot 1^3}{(-1)^2 + 2 \cdot 1^2} = -\frac{10}{3}.$$

(b) *Pokud chceme zjistit definiční obor této funkce, jmenovatel zlomku nesmí být nula. Definičním oborem je tedy celá množina* $\mathbb{R}^2$ *kromě křivky o rovnici* $y = \frac{5}{x}$, *což je hyperbola ležící v prvním a třetím kvadrantu kartézské soustavy souřadnic* Oxy. *Vlastní bod limity je vnitřním bodem definičního oboru:*

$$\lim_{[x;y]\to[-3;2]} \frac{xy+5}{xy-5} - 4 = \frac{-3\cdot 2+5}{-3\cdot 2-5} - 4 = \frac{1}{11} - 4 = -\frac{43}{11}.$$

(c) *Definičním oborem této funkce je množina všech uspořádaných dvojic v* $\mathbb{R}^2$, *ovšem bez přímky o rovnici* $y = x$ *(funkce identita). Vidíme, že tentokrát vlastní bod limity nepatří do definičního boru funkce, jedná se o hraniční bod. Při prostém dosazení dostáváme neurčitý výraz* $\frac{0}{0}$. *Musíme proto funkci upravit:*

$$\lim_{[x;y]\to[2;2]} \frac{xy^3 - x^4}{x-y} = \lim_{[x;y]\to[2;2]} \frac{x(y^3 - x^3)}{x-y} =$$

$$= \lim_{[x;y]\to[2;2]} \frac{-x(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)} = \lim_{[x;y]\to[2;2]} -x(x^2+xy+y^2) = -24.$$

(d) *Definičním oborem jsou všechny uspořádané dvojice z* $\mathbb{R}^2$, *kde* $x \neq 0$. *Vlastní bod limity tedy není vnitřním bodem definičního oboru funkce, je opět hraničním bodem. Prosté dosazení vede na neurčitý výraz* $\frac{0}{0}$, *je proto třeba úprava funkce:*

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{\sin(xy)}{x}\cdot\frac{y}{y} = \lim_{[x;y]\to[0;0]} y\cdot\frac{\sin(xy)}{xy} =$$

$$= \lim_{[x;y]\to[0;0]} y\cdot 1 = 0.$$

Pro výpočet limity $\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{\sin(xy)}{xy}$ *jsme použili poznatek z výpočtu limity funkce jedné proměnné, kde platí* $\lim_{a\to 0} \frac{\sin(a)}{a} = 0$.

Řešený příklad 3.2 *Vypočítejte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu funkce* f *v libovolném bodě, kde existují:*

(a) $f : f(x;y) = x^3 + 3x^2y - 5xy^4 - 12y^5 + \frac{y}{x} - 3,$

(b) $f : f(x;y) = \ln(x^2+y^2),$

(c) $f : f(x;y) = \mathrm{e}^{\sin(x)+y^2}.$

Řešení

(a) *Definičním oborem této funkce je celá množina* $\mathbb{R}^2$ *kromě přímky* $x = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 3x^2 + 6xy - 5y^4 - \frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 3x^2 - 20xy^3 - 60y^4 + \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = 6x + 6y + \frac{2y}{x^3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = -60xy^2 - 240y^3;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = 6x - 20y^3 - \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = 6x - 20y^3 - \frac{1}{x^2}.$$

(b) *Definičním oborem této funkce je množina všech uspořádaných dvojic v* $\mathbb{R}^2$ *vyjma bodu o souřadnicích* $[0;0]$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2x \cdot \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 2y \cdot \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = 2x \cdot 2y \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = 2y \cdot 2x \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

(c) *Definiční obor funkce* f *je množina* $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \cos(x) \cdot \mathrm{e}^{sin(x)+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 2y \cdot \mathrm{e}^{sin(x)+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = -\sin(x) \cdot \mathrm{e}^{sin(x)+y^2} + \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot \mathrm{e}^{sin(x)+y^2} =$$

$$= \mathrm{e}^{sin(x)+y^2} \cdot (\cos^2(x) - \sin(x)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = 2 \cdot \mathrm{e}^{sin(x)+y^2} + 2y \cdot 2y \cdot \mathrm{e}^{sin(x)+y^2} = \mathrm{e}^{sin(x)+y^2} \cdot (2 + 4y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \cos(x) \cdot 2y \cdot \mathrm{e}^{sin(x)+y^2} = 2y\cos(x) \cdot \mathrm{e}^{sin(x)+y^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = 2y \cdot \cos(x) \cdot \mathrm{e}^{sin(x)+y^2} = 2y\cos(x) \cdot \mathrm{e}^{sin(x)+y^2}.$$

Řešený příklad 3.3 *V daném bodě sestrojte diferenciál prvního řádu k funkci* $f : f(x;y) = \dfrac{\ln(x^3)}{\sin(y^2)}, A = [2;-2]$.
Řešení:
Definičním oborem této funkce je následující množina:

$$D(f) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x > 0 \wedge y^2 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Vidíme, že bod A je vnitřní bodem definičního oboru.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \dfrac{1}{\sin(y^2)} \cdot 3x^2 \cdot \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{3}{x \cdot \sin(y^2)},$
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(2;-2) = \dfrac{3}{2 \cdot \sin 4} \doteq -1,98,$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \ln(x^3) \cdot 2y \cdot \cos(y^2) \cdot \dfrac{-1}{sin^2(y^2)} = \dfrac{-2y \cdot \ln(x^3) \cdot \cos(y^2)}{sin^2(y^2)},$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(2;-2) = \dfrac{4 \cdot \ln 8 \cdot \cos 4}{sin^2 4} \doteq -9,49.$
Diferenciál má tedy tvar: $\mathrm{d}f = -1,98h_1 - 9,49h_2$.

Řešený příklad 3.4 *Určete hodnotu směrové derivace funkce* $f : f(x;y) = x^2 - 2y^2$ *v bodě* $M = [1;2]$ *ve směru vektoru* $\vec{u} = (1;1)$.
Řešení:

Definičním oborem funkce f *jsou všechna čísla z množiny* $\mathbb{R}^2$. *Pro výpočet nejprve musíme získat vektor* $\vec{s}$ *znormováním vektoru* $\vec{u}$.

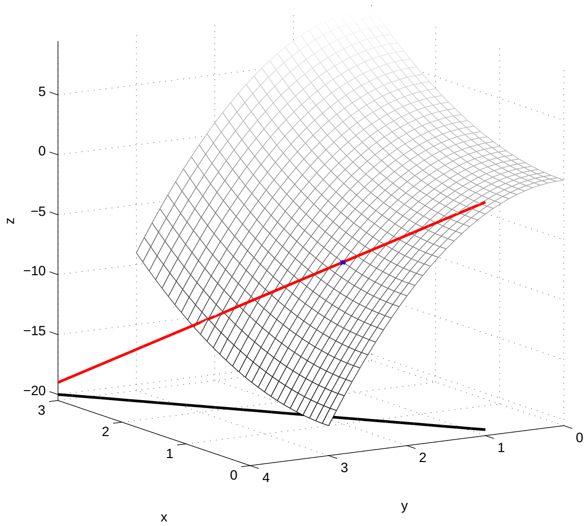
$$\vec{s} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = \frac{(1;1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Nyní vypočítáme gradient funkce f:

$$\mathrm{grad} f(x;y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x;y); \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)) = (2x;-4y); \mathrm{grad} f(A) = (2;-8).$$

Nyní použijeme vztah na výpočet směrové derivace funkce f *v bodě* A:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \mathrm{grad} f(A) \cdot \vec{s} = (2;-8) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 8\frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}.$$



Obrázek 3.9: Tečna vedená bodem M ve směru vektoru $\vec{s}$.

Řešený příklad 3.5 *Určete rovnici tečné roviny τ funkce $f : f(x;y) = x^2 + y^2$ v bodě $A = [1;2]$.*
Řešení:

Definičním oborem funkce je množina $\mathbb{R}^2$.
$f(1;2) = 1^2 + 2^2 = 5,$
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2x,$ *tedy* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1;2) = 2,$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 2y,$ *tedy* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1;2) = 4.$
Rovnice tečny ke grafu funkce f je: $z = 2(x-1)+4(y-2)+5$, po úpravě:

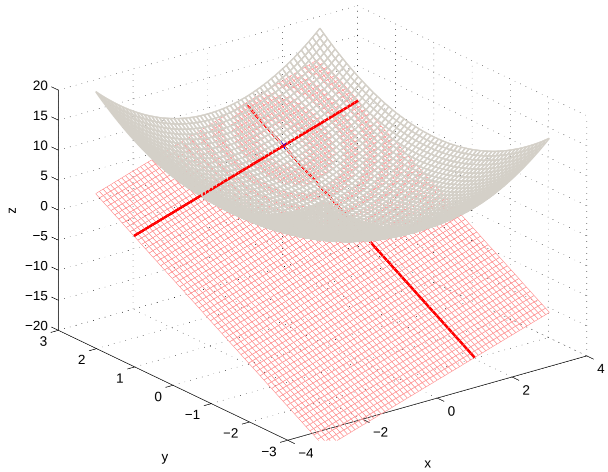
$$\tau : z = 2x + 4y - 5.$$

Řešený příklad 3.6 *Pomocí totálního diferenciálu funkce $f : f(x;y) = x^2 - 2xy + 2^2$ v bodě $A = [2;3]$ odhadněte funkční hodnotu funkce f v bodě $X = [2,1;2,8]$.*
Řešení:

Definičním oborem této funkce je množina všech uspořádaných dvojic z $\mathbb{R}^2$. Pojďme si nejdříve určit přírůstky funkce f:

$$h_1 = x - x_0 = 2,1 - 2 = 0,1; h_2 = y - y_0 = 2,8 - 3 = -0,2.$$

Všimněme si, že přírůstek ve směru osy y je záporný.



Obrázek 3.10: Tečna vedená bodem T ke grafu funkce f z příkladu 4.5.

$$f(2;3) = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = 10,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2x - 2y, tedy \frac{\partial f}{\partial x}(2;3) = -2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 4y - 2x, tedy \frac{\partial f}{\partial x}(2;3) = 8.$$

Nyní již můžeme sestavit odhad funkční hodnoty $f(2,1;2,8)$:

$$f(2,1;2,8) = 10 - 2 \cdot 0,1 + 8 \cdot (-0,2) = 8,2.$$

3.5 Příklady k procvičení

Příklad 3.1 *Vypočítejte limitu funkce. Určete definiční obor funkce. (Zdroj: Nagy [5].)*

(a) $\lim\limits_{[x;y]\to[1;1]} \dfrac{3x^3+4y^4}{x^2+y^2}$,

(b) $\lim\limits_{[x;y]\to[1;1]} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$,

(c) $\lim\limits_{[x;y]\to[2;2]} \dfrac{xy-2}{xy+2}$,

(d) $\lim\limits_{[x;y]\to[0;1]} \dfrac{\ln(2x+4\mathrm{e}^{xy})}{\sqrt{x^2+(2y)^2}}$,

(e) $\lim\limits_{[x;y]\to[0;0]} \dfrac{\sin(3xy)}{2x}$,

(f) $\lim\limits_{[x;y]\to[2;2]} \dfrac{x^3-y^3}{y^4-x^4}$.

Příklad 3.2 *Vypočítejte parciální derivace prvního a druhého řádu dané funkce v libovolném bodě, kde tyto derivace existují. Určete definiční obor funkce. (Zdroj: Nagy [5], Nýdl, Klufová [6], upraveno.)*

(a) $f: f(x;y)=\sqrt{xy}$,

(b) $f: f(x;y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$,

(c) $f: f(x;y)=x^2\cdot\ln(y)$,

(d) $f: f(x;y)=xy\mathrm{e}^{xy}$,

(e) $f: f(x;y)=\dfrac{\cos^2 y}{x}$,

(f) $f: f(x;y)=x\cdot\cos(y)+y\cdot\cos(x)$,

(g) $f: f(x;y)=x^y$,

(h) $f: f(x;y)=\mathrm{arctg}(\dfrac{y}{x})$,

(i) $f: f(x;y)=\arcsin(xy)$,

(j) $f: f(x;y)=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Příklad 3.3 *Určete totální diferenciály požadovaného řádu v daném bodě u následujících funkcí. (Zdroj: Nýdl, Klufová [6], upraveno.)*

(a) $\mathrm{d}f(A)$, *pokud* $f: f(x;y)=\sin(x^2+y^2)$ *a* $A=[1;1]$,

(b) $\mathrm{d}f(B)$, *pokud* $f: f(x;y)=(xy^2+x)^4$ *a* $B=[2;1]$,

(c) $\mathrm{d}f(C)$, *pokud* $f: f(x;y)=x^y-2$ *a* $C=[1;3]$,

(d) $\mathrm{d}f(D)$, *pokud* $f: f(x;y)=x\cdot\mathrm{arctg}(2y)$ *a* $D=[-1;\frac{1}{2}]$,

(e) $\mathrm{d}f(E)$, *pokud* $f : f(x;y) = \ln(y-x)$ *a* $E = [4;5]$,

(f) $\mathrm{d}^3 f(F)$, *pokud* $f : f(x;y) = x^4 + y^3$ *a* $F = [1;-1]$,

(g) $\mathrm{d}^2 f(G)$, *pokud* $f : f(x;y) = \mathrm{e}^{-xy}$ *a* $G = [-1;1]$.

Příklad 3.4 *Vypočítejte derivaci dané funkce* f *v bodě* A *a v daném směru* $\vec{s}$. *(Zdroj: Nagy [5].)*

(a) $f : f(x;y) = x^2 - y^2$ $\quad A = [1;1] \quad \vec{s} = (\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$,

(b) $f : f(x;y) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$ $\quad A = [0;0] \quad \vec{s} = (\sin\alpha; \cos\alpha)$,

(c) $f : f(x;y) = \mathrm{arctg}(xy)$ $\quad A = [1;1] \quad \vec{s} = (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$,

(d) $f : f(x;y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $\quad A = [1;1] \quad \vec{s} = (2;1)$.

Příklad 3.5 *Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce* f *v bodě* A. *Ve stejném bodě určete rovnici normály*[2]. *(Zdroj: Nagy [5], Nýdla, Klufová [6], upraveno.)*

(a) $f : f(x;y) = x^2 - y^2 + 5$ $\quad A = [2;3]$,

(b) $f : f(x;y) = \dfrac{xy}{x-y}$ $\quad A = [5;-1]$,

(c) $f : f(x;y) = x \cdot \arcsin(\sqrt{y})$ $\quad A = [-1; \frac{1}{2}]$,

(d) $f : f(x;y) = x^y$ $\quad A = [2;0]$,

(e) $f : f(x;y) = (x-y) \cdot \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ $\quad A = [1;0]$,

(f) $f : f(x;y) = \mathrm{e}^x \cdot \cos(y) - 10$ $\quad A = [0;\pi]$.

[2]Normála je přímka kolmá na tečnou rovinu a procházejícím tečným bodem. Při určování normály vycházejte ze znalosti analytické geometrie, viz. Kočandrle [4].

Příklad 3.6 *Pomocí totálního diferenciálu prvního řádu sestrojeného v bodě A odhadněte funkční hodnotu funkce f v bodě X. (Zdroj: Nýdl, Klufová [6], upraveno.)*

(a) $f : f(x;y) = \dfrac{x+3y}{x-3y} + 1$ $\quad A = [2;4]$ $\quad X = [2,6;3,3]$,

(b) $f : f(x;y) = \mathrm{e}^x \sin(y) - \mathrm{e}^y \sin(x)$ $\quad A = [0;0]$ $\quad X = [0,1;-0,2]$,

(c) $f : f(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad A = [4;3]$ $\quad X = [4,03;2,97]$,

(d) $f : f(x;y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y})$ $\quad A = [1;1]$ $\quad X = [1,03;0,98]$,

(e) $f : f(x;y) = \dfrac{x}{y} \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ $\quad A = [2;1]$ $\quad X = [2,1;1,2]$,

(f) $f : f(x;y) = \dfrac{x}{y} \cdot \ln(\dfrac{y}{x})$ $\quad A = [1;1]$ $\quad X = [1,1;1,2]$.

Příklad 3.7 *Evropský výrobce analyzoval vliv reklamy na roční prodej jednoho ze svých výrobků. Funkce*

$$f : f(x;y) = 50000x + 40000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy,$$

kde $z = f(x;y)$ je počet kusů prodaných za rok, x jsou roční náklady na reklamu v televizi (v tis. dolarů), y jsou roční náklady na reklamu v rozhlase (v tis. dolarů), modeluje tento vztah. Určete počet prodaných kusů při nákladu 40000 dolarů na reklamu v televizi a 20000 dolarů na reklamu v rozhlase. Sestavte parciální derivace pro tyto hodnoty nákladů a interpretujte je. Je lepší zvýšit náklady na reklamu v televizi nebo v rozhlase? (Převzato od Nýdla a Klufové [6], str. 98, upraveno)

Příklad 3.8 *O kolik se změní obsah obdélníka o stranách $x = 6$ m a $y = 8$ m, jestliže se strana x zvětší o 2 mm a strana y se zmenší o 5 mm? (Návod: Pro výpočet nového obsahu použijte odhad pomocí totálního diferenciálu.)*

Kapitola 4

Extrémy funkcí dvou proměnných

Poslední kapitola se bude věnovat určování extrémů reálné funkce dvou proměnných. Zadefinujeme zde základní pojmy, jako například stacionární a sedlový bod, lokální a globální extrémy. Nakonec se seznámíme s pojmem vázaný extrém a uvedeme si základní metody vyšetřování těchto extrémů.

4.1 Lokální extrémy

Definice 4.1.1 *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je reálná funkce dvou proměnných a nechť bod $[x_0; y_0]$ je vnitřním bodem definičního boru této funkce $D(f)$.*

Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $[x_0; y_0]$ lokálního maxima, jestliže existuje okolí $U([x_0; y_0]) \subseteq D(f)$ bodu $[x_0; y_0]$ takové, že

$$\forall [x; y] \in U([x_0; y_0]); f(x; y) \leq f([x_0; y_0]).$$

Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $[x_0; y_0]$ lokálního minima, jestliže existuje okolí $U([x_0; y_0]) \subseteq D(f)$ bodu $[x_0; y_0]$ takové, že

$$\forall [x; y] \in U([x_0; y_0]); f(x; y) \geq f([x_0; y_0]).$$

Funkce tedy nabývá svého lokálního extrému v takovém bodě A, v jehož okolí platí, že všechny funkční hodnoty jsou menší nebo rovny (respektive větší nebo rovny) funkční hodnotě právě v bodě A. Pokud jsou navíc tyto nerovnosti ostré, hovoříme o tzv. ostrém lokálním maximu (respektive minimu). Nyní je třeba si říci, jak takové body lze nalézt.

Definice 4.1.2 *Nechť reálná funkce dvou proměnných f má parciální derivace prvního řádu podle obou proměnných v bodě $[x_0; y_0]$. Říkáme, že bod $[x_0; y_0]$ je stacionárním bodem funkce f, právě když platí:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = 0.$$

Věta 4.1.1 (Fermatova věta) *Nechť reálná funkce dvou proměnných f má v bodě $[x_0; y_0]$ lokální extrém. Nechť v tomto bodě existují obě parciální derivace funkce f. Pak bod $[x_0; y_0]$ je stacionárním bodem funkce f.*

Z této věty ale vyplývá, že existence stacionárního bodu A je nutnou, nikoli však postačující podmínkou existence lokálního extrému funkce f v bodě A. Proto tedy funkce s nulovými parciálními derivacemi prvního řádu nemusí mít v bodě A lokální extrém. Fermatova[1] věta nevylučuje možnost, že lokální extrém může existovat také v bodě, který není stacionárním bodem funkce f. Jde o bod, kde některá parciální derivace prvního řádu nexistuje. Můžeme tedy říci, že funkce f nabývá v některém bodě svého definičního oboru lokálního extrému, pokud jsou v tomto bodě parciální derivace prvního řádu nulové nebo pokud některá z těchto derivací neexistuje. Ukažme si nyní grafickou podobu extrémů takových funkcí. Pro ukázku uvažujme různé případy lokálního maxima, pro lokální minimum by byla situace zcela analogická. Geometrickou interpretaci těchto extrémů můžeme vidět na obrázku 4.1.

(a) Ostré lokální maximum, $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$, tečná rovina lze sestrojit.

(b) Ostré lokální maximum, $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$ neexistují, tečná rovina nelze sestrojit.

(c) Neostré lokální maximum, přímka rovnoběžná s rovinou xy, $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$, tečná rovina lze sestrojit.

(d) Neostré lokální maximum, přímka rovnoběžná s rovinou xy a osou y, $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ neexistuje, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$, tečná rovina nelze sestrojit.

[1] Pierre de Fermat, francouzský matematik (1601-1665)

(e) Neostré lokální maximum, přímka rovnoběžná s rovinou xy, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$ neexistují, tečná rovina nelze sestrojit.

(f) Sedlový bod, nejde o lokální extrém, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$, tečná rovina nelze sestrojit.

Než si ukážeme, jak určit typ extrému, tedy zda jde o lokální maximum nebo minimum, vzpomeňme si na tuto problematiku v rámci funkce jedné proměnné. Zde jsme testovali stacionární body pomocí druhé derivace. U reálné funkce dvou proměnných budeme postupovat obdobně.

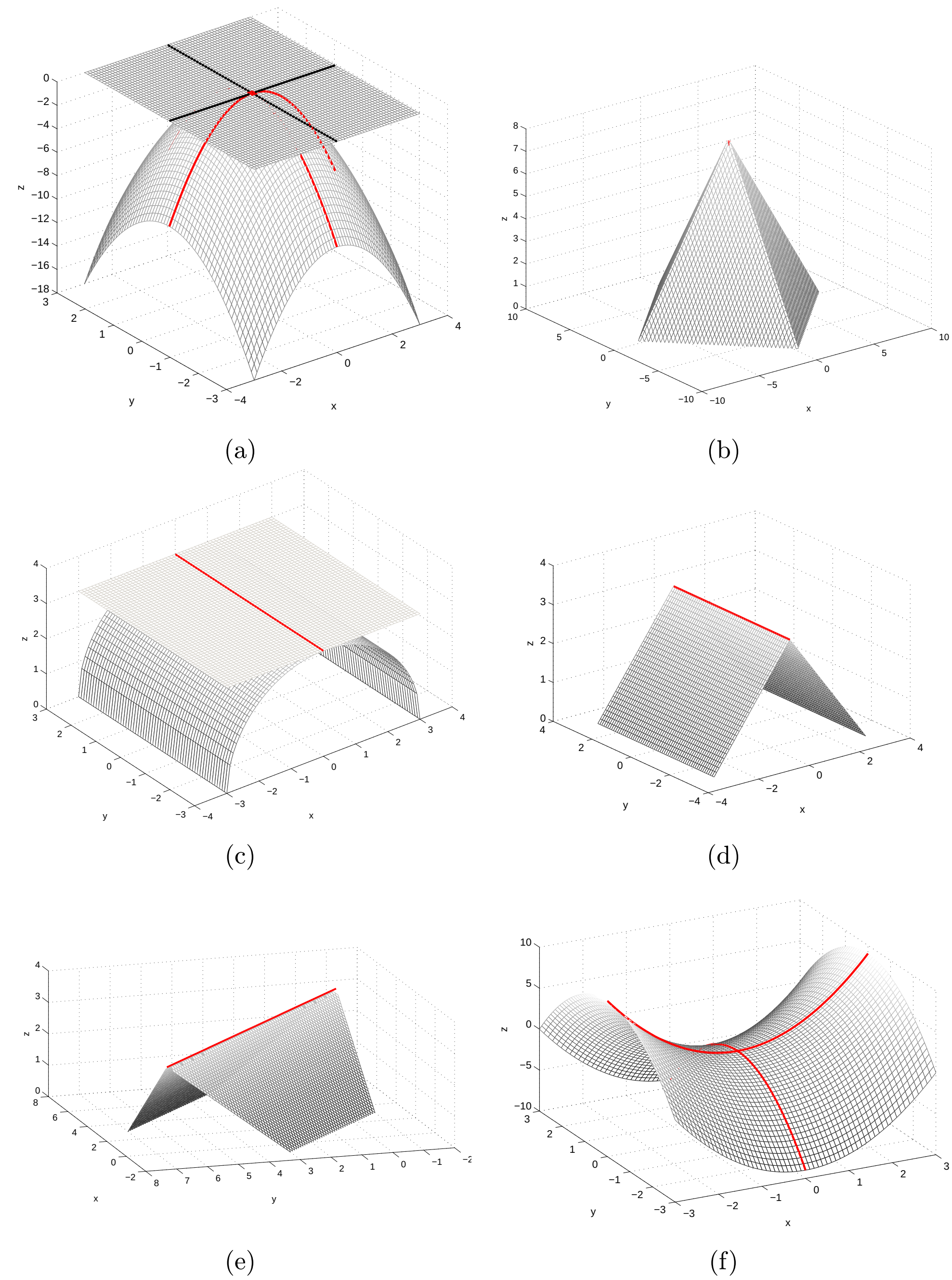
Definice 4.1.3 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných. Nechť v libovolném bodě $D(f)$ existují všechny parciální derivace druhého řádu. Hessovou*[2] *maticí funkce f chápeme matici druhého řádu*

$$H(x;y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) \end{pmatrix}.$$

Věta 4.1.2 (Schwarzova věta) *Má-li funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu, pak je v tomto bodě Hessova matice symetrická.*

Schwarzova[3] věta nám tedy jinými slovy říká: Pokud je funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ hladká druhého řádu, jsou všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě $[x_0; y_0]$ spojité. Podle věty o záměnnosti parciálních derivací pak je jasné, že matice je symetrická.

[2] Otto Hesse, německý matematik (1811-1874)
[3] Hermann Schwarz, německý matematik (1843-1921)



(a) (b)

(c) (d)

(e) (f)

Obrázek 4.1: Geometrická interpretace lokálního maxima.

Definice 4.1.4 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných. Nechť* $H_1(x;y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)\right)$ *je submatice prvního řádu Hessovy matice. Pak determinant*

$$\Delta_1(x;y) = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)\right)$$

nazveme hlavním minorem prvního řádu Hessovy matice.

Definice 4.1.5 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných. Determinant Hessovy matice*

$$\Delta_2(x;y) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) \end{pmatrix}$$

nazveme hlavním minorem druhého řádu Hessovy matice nebo také Hessiánem.

Věta 4.1.3 (Věta o lokálních extrémech) *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných, nechť bod $[x_0;y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru funkce f, který je zároveň stacionárním bodem funkce f. Nechť f má v bodě $[x_0;y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu.*

(i) Je-li $\Delta_2(x_0;y_0) > 0$, pak má funkce f v bodě $[x_0;y_0]$ ostrý lokální extrém, a to:

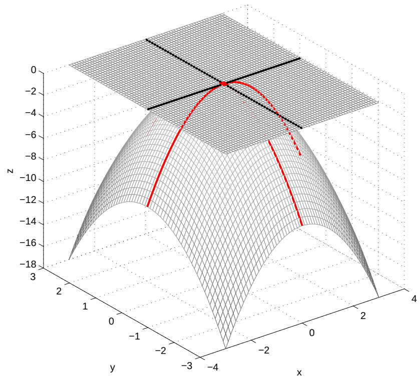
   (a) je-li $\Delta_1(x_0;y_0) < 0$, má funkce f v bodě $[x_0;y_0]$ ostré lokální maximum,

   (b) je-li $\Delta_1(x_0;y_0) > 0$, má funkce f v bodě $[x_0;y_0]$ ostré lokální minimum,

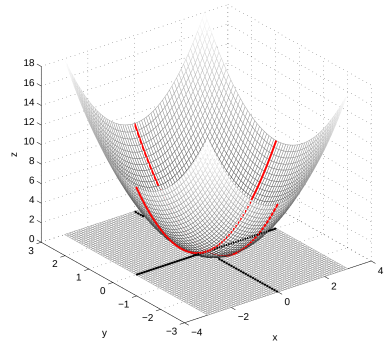
(ii) Je-li $\Delta_2(x_0;y_0) < 0$, pak má funkce f v bodě $[x_0;y_0]$ sedlový bod,

(iii) Je-li $\Delta_2(x_0;y_0) = 0$, pak nelze rozhodnout, zda má funkce f v bodě $[x_0;y_0]$ sedlový bod, lokální extrém či ani jedno.

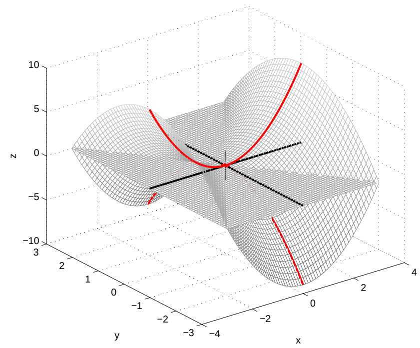
Tuto větu si můžeme vysvětlit velice jednoduše. Použijme odůvodnění podle Nýdla [6]. Pokud je $\Delta_2(x_0;y_0) > 0$, nemůže pak být $\Delta_1(x_0;y_0)$ nulový. Tudíž musí v bodě $[x_0;y_0]$ nastat extrém. Pokud budou výrazy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0;y_0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0;y_0)$ oba záporné, znamená to, že pokud si představíme funkce jedné proměnné vzniklé řezem rovinou $x = 0$ respektive $y = 0$, budou tyto funkce konkávní, tudíž v bodě $[x_0; y_0]$ nastane lokální maximum funkce f. Situaci můžeme vidět na obrázku 4.2 (a). Naopak, pokud budou výrazy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0; y_0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0; y_0)$ kladné, řezové funkce budou konvexní a v bodě $[x_0; y_0]$ nalezneme lokální minimum funkce f (viz. obrázek 4.2 (b)).



(a) Lokální maximum funkce f.



(b) Lokální minimum funkce f.



(c) Sedlový bod funkce f.

Obrázek 4.2: Grafické znázornění lokálních extrémů a sedlového bodu funkce f.

Situace $\Delta_2(x_0; y_0) < 0$ nastane tehdy, pokud hodnoty výrazů $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0; y_0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0; y_0)$ budou mít opačná znaménka. To ovšem znamená, že jedna řezová funkce by v bodě $[x_0; y_0]$ byla konvexní, kdežto druhá řezová funkce by v tomto bodě byla konkávní. Pro jednu funkci by zde tedy nastalo minimum, pro druhou maximum. Funkce f zde proto nemá lokální extrém, ale sedlový bod. Tuto situaci můžeme vidět na obrázku 4.2 (c). V praxi se s hledáním sedlových bodů můžeme vedle hledání extrémů také setkat, například v tzv. rozhodovacích modelech.

V případech, kdy nelze rozhodnout o tom, zda se v bodě $[x_0; y_0]$ nalézá lokální extrém či sedlový bod, může pomoci vyšetření lokálního chování funkce f v okolí bodu $[x_0; y_0]$. Tato situace se však může dosti komplikovat. My se s funkcemi vedoucími k tomuto výsledku zabývat do hloubky nebudeme.

Postup při zjišťování existence lokálních extrémů je tedy následující. Podle věty o lokálních extrémech může lokální extrém nastat pouze ve stacionárních bodech, jde o nutnou podmínku existence lokálního extrému. Pro ověření, zda opravdu jde o extrém, musíme ještě použít podmínku postačující, což je v podstatě testování pomocí hlavních minorů. Výsledky potom interpretujeme podle věty o lokálních extrémech.

Řešený příklad 4.1 *Určete lokální extrémy funkce* $f: f(x; y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Řešení:

Určeme nejprve definiční obor funkce f. Tím je celá množina $\mathbb{R}^2$. Nyní určeme hodnotu parciálních derivací funkce f prvního řádu.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) = 6x^2 + y^2 + 10x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = 2xy + 2y = 2y(x + 1).$$

Vidíme, že parciální derivace jsou obě definovány na celé množině $\mathbb{R}^2$, případné lokální extrémy tedy budou jen ve stacionárních bodech. Ty zjistíme položením parciálních derivací rovných nule. Řešíme tedy soustavu rovnic:

$$6x^2 + y^2 + 10x = 0,$$

$$2y(x + 1) = 0.$$

Druhá rovnice je rovna nule právě tehdy pokud je $y = 0$ nebo $x = -1$. Po dosazení těchto hodnot do první rovnice dostáváme následující stacionární body:

$$A_1 = [0; 0]; A_2 = [-\frac{5}{3}; 0]; A_3 = [-1; -2]; A_4 = [-1; 2].$$

Pro určení, zda se jedná o lokální extrémy, potřebujeme stanovit hlavní minory, nejprve ale parciální derivace funkce f druhého řádu.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = 12x + 10, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = 2x + 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = 2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = 2y.$$

Hlavní minory mají tedy hodnotu:

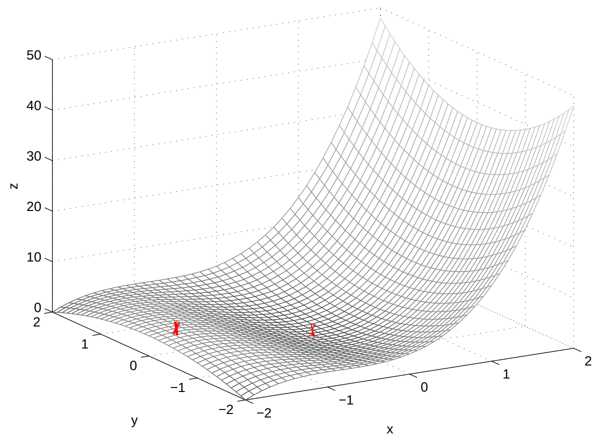
$$\Delta_1(x;y) = \det(12x + 10) = 12x + 10,$$

$$\Delta_2(x;y) = \det\begin{pmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix} = 4(6x^2 + 11x + 5 - y^2).$$

Nyní již stačí určit hodnoty těchto minorů ve stacionárních bodech a podle věty o lokálních extrémech určit, zda jde či nejde o lokální extrém a případně o jaký.

Tabulka 4.1: Přehled lokálních extrémů a stacionárních bodů funkce f.

Stac. bod A_i	$\Delta_2(A_i)$	$\Delta_1(A_i)$	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0;0]$	$20 > 0$	$10 > 0$	lokální minimum $z = 0$
$A_2 = [-\frac{5}{3};0]$	$\frac{40}{3} > 0$	$-20 < 0$	lokální maximum $z = \frac{125}{27}$
$A_3 = [-1;-2]$	$-16 < 0$	-	sedlový bod
$A_4 = [-1;2]$	$-16 < 0$	-	sedlový bod



Obrázek 4.3: Funkce f.

Dva ze stacionárních bodů tedy byly body sedlovými. Body A_1 a A_2 jsou pak lokálními extrémy, konkrétně bod A_1 lokálním minimem a bod A_2 lokálním maximem. Lokální extrémy jsme tedy nalezli. Funkce f je znázorněna na obrázku 4.3.

4.2 Vázané extrémy

V této podkapitole se budeme zabývat tzv. vázanými extrémy. V předchozí části jsme se zabývali lokálními extrémy, které jsme hledali na celém definičním oboru funkce. Nyní ovšem budeme hledat pouze takové lokální extrémy, které se také nacházejí na definičním oboru funkce, ale zároveň se musí nalézat i v předem dané množině. Tato množina bude nejčastěji dána různými podmínkami. Budeme tedy hledat pouze ty lokální extrémy funkce, které vyhovují těmto podmínkám daným množinou.

Definice 4.2.1 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a nechť $\mathcal{M} \subseteq D(f)$.*

Říkáme, že funkce f má v bodě $[x_0; y_0]$ lokální maximum vzhledem k množině $\mathcal{M}$, jestliže platí:

$$(\exists \delta > 0)(\forall [x; y] \in U_\delta(x_0; y_0) \cap \mathcal{M}) f(x; y) \leq f(x_0; y_0).$$

Říkáme, že funkce f má v bodě $[x_0; y_0]$ lokální minimum vzhledem k množině $\mathcal{M}$, jestliže platí:

$$(\exists \delta > 0)(\forall [x; y] \in U_\delta(x_0; y_0) \cap \mathcal{M}) f(x; y) \geq f(x_0; y_0).$$

Nejčastěji se nám množina $\mathcal{M}$ bude vyskytovat v podobě podmínky $g(x; y) = 0$, Tuto podmínku budeme nazývat vazba. Ukážeme si tři základní metody, pomocí kterých lze vyšetřit lokální extrémy funkce f vzhledem k množině $\mathcal{M}$.

4.2.1 Dosazovací metoda

Tato metoda je v podstatě nejjednodušší metodou hledání vázaných extrémů. Její nevýhoda však spočívá v tom, že ji můžeme použít pouze u speciálních typů vazebních podmínek. Mějme tedy za úkol vyšetřit lokální extrémy funkce $f : z = f(x; y)$ vzhledem k množině $\mathcal{M}$. Tato vazba je dána rovnicí $g(x; y) = 0$. Dosazovací metodu mohu použít pouze v případě, že z této vazby mohu ekvivalentními úpravami dostat výraz $y = \varphi(x)$, tedy jednoduše řečeno mohu z rovnice $g(x; y) = 0$ jednoznačně vyjádřit proměnnou y. Následně, jak název této metody napovídá, dosadíme funkci $\varphi(x)$ do funkce f a získáme pro ni předpis $f : z = f(x; \varphi(x))$, což ale znamená, že funkce f je již funkcí pouze jedné proměnné, a to proměnné x, tedy $f : z = f(x)$. Vyšetřit lokální extrémy funkce jedné proměnné umíme zvládnout. Lokální extrémy funkce jedné proměnné $f : z = f(x; \varphi(x))$ jsou potom zároveň lokálními extrémy funkce $f : z = f(x; y)$ vzhledem k množině $\mathcal{M}$.

Analogicky však můžeme z vazební podmínky $g(x;y) = 0$ vyjádřit proměnnou x (dostanu pro ni předpis $x = \chi(y)$) a funkce f nám pak přejde do tvaru $f : z = f(\chi(y);y)$. Opět se jedná o funkci jedné proměnné, jejíž extrém umíme nalézt. Tento extrém je pak vázaným extrémem funkce $f : z = f(x;y)$. Zda zvolíme vyjádření proměnné x nebo y záleží většinou jen na daném příkladu, aby se daná proměnná dala vyjádřit co nejsnadněji.

Řešený příklad 4.2 *Určete vázané lokální extrémy rotačního paraboloidu s předpisem $f : f(x;y) = -x^2 - y^2$ vzhledem k množině dané funkcí $x = -1$.*

Řešení:

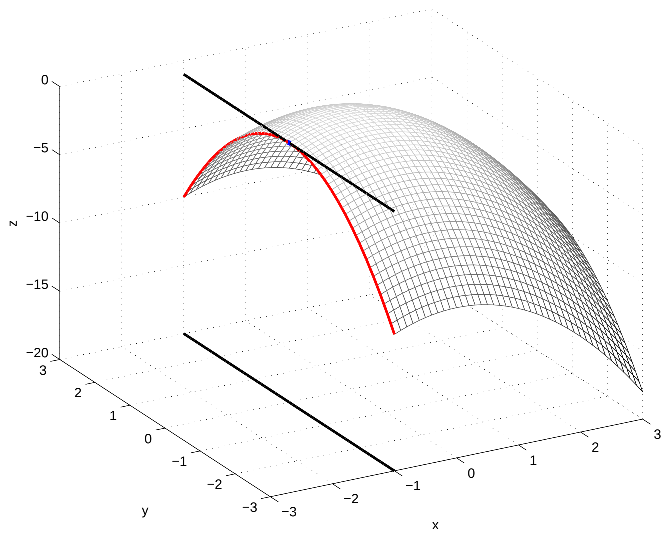
Definičním oborem funkce f je celá množina $\mathbb{R}^2$. Vazbu si můžeme pro přesnost upravit do tvaru $g(x;y) = 0$, tedy v našem příkladu $x + 1 = 0$. Z tohoto předpisu si jednoduše můžeme vyjádřit proměnnou x, tedy $x = -1$, a dosadit do funkčního předpisu funkce f. Pro tuto funkci tedy dostaneme $f : z = f(-1;y)$. Funkce f se tedy stává funkcí jedné proměnné mající předpis:

$$f_y : f_y(y) = -1 - y^2.$$

Určit extrémy této funkce už není problém. Nejprve tedy určeme hodnotu první derivace a položme ji rovnu nule, čímž získáme stacionární body. Hodnota první derivace je $f'_y(y) = -2y$, řešme tedy rovnici $-2y = 0$. Z řešení nám vychází jediný stacionární bod, a to $y = 0$. Pomocí hodnoty druhé derivace funkce f_y určíme, zda opravdu jde o extrém a případně o jaký. Hodnota druhé derivace pro $y = 0$ je $f''_y(0) = -2$, což značí, že pro $y = 0$ má funkce f_y lokální maximum. To ale znamená, že funkce f má v bodě $[-1;0]$ lokální maximum vzhledem k vazbě $x = -1$. Toto maximum nabývá hodnoty $z = -1$.

Všimněme si, že funkční hodnota funkce f v bodě $[-1;0]$ je stejná jako funkční hodnota funkce f_y v bodě $y = 0$. Z toho tedy vyplývá, že pokud má funkce jedné proměnné f_y v některém bodě lokální extrém, funkce f má v témže bodě lokální extrém vzhledem k množině, který je stejného druhu a dokonce nabývá stejné funkční hodnoty jako u funkce f_y.

Grafickou podobu použití dosazovací metody můžeme vidět na obrázku 4.4. V bodě o souřadnicích $[-1;0;-1]$ je sestrojena tečna, jejíž projekcí do roviny $z = 0$ je právě vazební podmínka $x = -1$.



Obrázek 4.4: Dosazovací metoda: lokální maximum funkce f vzhledem k množině dané vazbou $x = -1$.

4.2.2 Metoda jakobiánu

Také tato metoda není na výpočet vázaných extrémů příliš náročná. Stejně jako předchozí metoda má i tato svá omezení. Můžeme ji použít pouze v případě, že že máme jen jednu vazební rovnici $g(x; y) = 0$. Nyní však nepožadujeme, aby z této vazební podmínky šla vyjádřit některá z proměnných, takže jde o silnější nástroj ke hledání vázaných extrémů. Tento způsob výpočtu využívá determinant Jacobiho[4] matice neboli jakobiánu.

Věta 4.2.1 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných, která má v bodě $[x_0; y_0]$ vázaný extrém k vazbě dané rovnicí $g(x; y) = 0$. Nechť funkce f a g mají v okolí bodu $[x_0; y_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu. Potom platí, že determinant*

$$J_{f;g}(x_0; y_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0; y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0; y_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Při vyšetřování lokálních extrémů touto metodou tedy nejprve zjistíme body, ve kterých by se takový extrém mohl vyskytovat. To mohou být buď

[4]Carl Gustav Jacob Jacobi, pruský matematik (1804-1851).

body funkce f a g, ve kterých některá parciální derivace neexistuje, nebo body vyhovující následující nutné podmínce vázaného extrému:

$$J_{f;g}(x_0; y_0) = 0,$$

$$g(x; y) = 0.$$

Tím získáme body, které jsou "podezřelé" z lokálního extrému. Pokud je vazební množina omezená a uzavřená a funkce f je na ní spojitá, můžeme použít Weierstrassovu větu. Ta nám říká, že za těchto podmínek funkce nabývá na množině maxima a minima. Stačí tedy určit funkční hodnoty ve všech stacionárních bodech. Největší z těchto hodnot pak nazveme lokálním maximem funkce f vzhledem k množině, nejmenší pak lokálním minimem funkce f vzhledem k množině.

Řešený příklad 4.3 *Určete lokální extrémy funkce $f : f(x; y) = -x^2 - y^2$ vzhledem k vazební podmínce $(x-1)^2 + y^2 = 9$.*

Řešení:

Definičním oborem funkce f je množina $\mathbb{R}^2$. Hledáme vázaný extrém, kde vazbou je kružnice o rovnici $(x-1)^2 + y^2 = 9$. Předpis vazby v podobě $g(x; y) = 0$ dostaneme pouze malou úpravou, tedy $(x-1)^2 + y^2 - 9 = 0$. Určeme tedy nejprve parciální derivace prvního řádu funkcí f a g, ze kterých pak dokážeme sestrojit jakobián.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) = -2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = -2y,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x; y) = 2x - 2, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x; y) = 2y.$$

$$J_{f;g}(x; y) = \det \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 2x-2 & 2y \end{pmatrix} = -4y.$$

Pro nalezení stacionárních bodů je tedy třeba řešit následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$-4y = 0,$$

$$(x-1)^2 + y^2 - 9 = 0.$$

Z první rovnice dostáváme, že $y = 0$. Dosazením do druhé rovnice pak obdržíme také výsledky pro proměnnou x, a to $x = -2$ a $x = 4$. Máme tedy dva stacionární body:

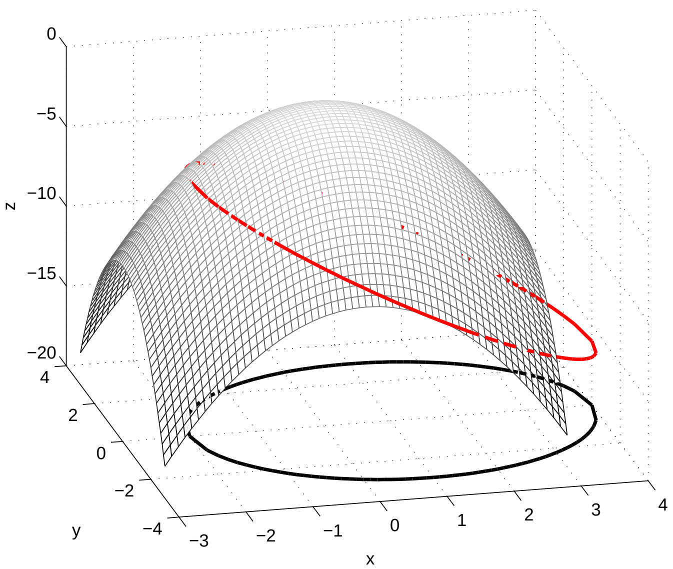
$$A_1 = [-2; 0]; A_2 = [4; 0].$$

Nyní použijeme Weierstrassovu větu. Podle této věty funkce spojitá na omezené a uzavřené množině nabývá svého maxima a minima. Množina reprezentovaná kružnicí $(x-1)^2 + y^2 = 9$ je uzavřenou a omezenou množinou a funkce f je na této množině spojitá. Proto stačí určit funkční hodnoty ve stacionárních bodech. Větší z těchto hodnot pak nazveme lokálním maximem funkce f vzhledem k množině, menší pak lokálním minimem funkce f vzhledem k množině.

$$f(-2;0) = -4 \quad \textit{lokální maximum vzhledem k množině: } z = -4,$$

$$f(4;0) = -16 \quad \textit{lokální minimum vzhledem k množině: } z = -16.$$

Nalezli jsme tedy jedno lokální maximum a jedno lokální minimum vzhledem k vazbě $(x-1)^2 + y^2 = 9$. Na obrázku 4.5 můžeme vidět graficky znázorněnou vazbu (černá kružnice) a pak část funkce f, jejíž vázaný extrém hledáme (červená křivka).



Obrázek 4.5: Jacobiho metoda: lokální maximum funkce f vzhledem k množině dané vazbou $(x-1)^2 + y^2 = 9$.

4.2.3 Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Poslední metodou vyšetřování lokálních extrémů vzhledem k množině, se kterou se seznámíme, bude metoda využívající Lagrangeovu[5] funkci. Na rozdíl od předchozích dvou metod, zde můžeme mít i více vazeb, obecně libovolný konečný počet. Pro jednoduchost si však ukážeme tuto metodu jen na příkladech s jednou vazbou.

Věta 4.2.2 (Nutná podmínka) *Nechť funkce f a g jsou reálné funkce dvou proměnných, kde $g(x;y) = 0$ je vazba. Nechť tyto funkce mají v bodě $[x;y] \in \mathcal{M} \subseteq D(f)$ spojité parciální derivace prvního řádu.*
Nechť $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0;y_0) \neq 0$. Jestliže funkce f má v bodě $[x_0;y_0]$ lokální extrém vzhledem k množině $\mathcal{M}$, platí, že existuje reálné číslo λ takové, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0;y_0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0;y_0) = 0,$$
$$g(x_0;y_0) = 0,$$

kde množina $\mathcal{M}$ je popsána rovnicí $g(x;y) = 0$. Číslo λ pak nazveme Lagrangeovým multiplikátorem.

Definice 4.2.2 *Nechť f a g jsou reálné funkce dvou proměnných, kde rovnice $g(x;y) = 0$ vyjadřuje vazbu. Lagrangevou funkcí $L_\lambda(x;y)$ nazveme funkci danou předpisem*

$$L_\lambda(x;y) = f(x;y) + \lambda \cdot g(x;y).$$

Nutná podmínka existence vázaného lokálního extrému vzhledem k množině nám tedy pomocí Lagrangeovy funkce přechází do následujícího tvaru:

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x_0;y_0) = 0,$$
$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial y}(x_0;y_0) = 0,$$
$$g(x_0;y_0) = 0.$$

Při zjišťování bodů "podezřelých" z extrému tedy řešíme tuto soustavu rovnic. Vidíme, že kromě proměnných x a y zde máme ještě třetí neznámou, a to koeficient λ. Obvykle se tato soustava řeší tak, že z prvních dvou rovnic se vyjádří právě neznámá λ a tyto dvě vyjádření se porovnají - tím dostaneme vztah jen mezi proměnnými x a y.

[5]Joseph Louis Lagrange, italsko-francouzský matematik (1736-1813).

Věta 4.2.3 (Postačující podmínka) *Nechť jsou splněny předpoklady nutné podmínky pro existenci lokálního extrému funkce f vzhledem k množině $\mathcal{M}$. Jestliže má Lagrangeova funkce $L_\lambda(x;y)$ v bodě $[x_0;y_0]$ lokální extrém, má funkce f v bodě $[x_0;y_0]$ lokální extrém vzhledem k množině $\mathcal{M}$, a to stejného typu.*

Nesmíme ovšem zapomenout na fakt, že u některých příkladů sice u Lagrangeovy funkce v bodě $[x_0;y_0]$ nebude lokální extrém nebo nebudeme moci rozhodnout o existenci extrému, přesto však v tomto bodě může být lokální extrém funkce f vzhledem k dané množině.

Při aplikaci této metody na konkrétní příklad tedy nejprve sestavíme Lagrangeovu funkci. Poté parciální derivace prvního řádu položíme rovny nule. Vyřešíme soustavu tří rovnic, kde první dvě rovnice tvoří právě zmíněné parciální derivace a třetí rovnici tvoří vazba $g(x;y) = 0$. Vyřešením této soustavy přijdeme na body, ve kterých by mohl být lokální extrém. Poté vyšetříme Langrangeovu funkci pro zjištění existence lokálních extrémů. K tomu můžeme opět využít Hessovu matici.

K vyhledání stacionárních bodů můžeme ale použít také metodu jakobiánu. Za pomoci Jacobiho matice, se kterou jsme se seznámili v předchozí části, získáme body "podezřelé" z extrému a nemusíme tak řešit soustavu tří rovnic zmíněnou v předchozím odstavci. Záleží na konkrétním případě, jakou metodou budeme stacionární body hledat.

Řešený příklad 4.4 *Nalezněte lokální extrémy funkce $f : f(x;y) = x^2 + y^2$ vzhledem k množině dané vazbou $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.*

Řešení:

Definičním oborem funkce f je množina všech uspořádaných dvojic v $\mathbb{R}^2$. Vazbou je elipsa o předpisu $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Pokud bychom tuto vazbu chtěli upravit do tvaru $g(x;y) = 0$, dostaneme předpis $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$. Sestavme nyní Lagrangeovu funkci:

$$L_\lambda(x;y) = x^2 + y^2 - \lambda \cdot (9x^2 + 4y^2 - 36).$$

Nyní určeme parciální derivace prvního řádu Lagrangeovy funkce $L_\lambda(x;y)$:

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x;y) = 2x - 18\lambda x = 2x(1 - 9\lambda),$$

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial y}(x;y) = 2y - 8\lambda y = 2y(1 - 4\lambda).$$

Abychom našli stacionární body, musíme tyto parciální derivace prvního řádu položit rovny nule. K řešení ještě musíme přidat vazební podmínku. Dostáváme tedy následující soustavu, jejíž řešení nám určí stacionární body.

$$2x(1 - 9\lambda) = 0,$$

$$2y(1 - 4\lambda) = 0,$$

$$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0.$$

Z první rovnice dostáváme $x = 0$*. Po dosazení do třetí rovnice nám vyjde* $y = \pm 3$*. Nakonec po dosazení do druhé rovnice dostáváme pro body* $[0; -3]$ *a* $[0; 3]$ *hodnotu* $\lambda = \frac{1}{4}$*. Ze druhé rovnice pak dostáváme* $y = 0$*. Po dosazení do třetí rovnice vychází* $x = \pm 2$ *a po dosazení do druhé rovnice je pro body* $[-2; 0]$ *i* $[2; 0]$ *hodnotu* $\lambda = \frac{1}{9}$*. Máme tedy následující čtyři stacionární body:*

$$A_1 = [0; -3]; \lambda = \tfrac{1}{4}, \quad A_2 = [0; 3]; \lambda = \tfrac{1}{4},$$

$$A_3 = [-2; 0]; \lambda = \tfrac{1}{9}, \quad A_4 = [2; 0]; \lambda = \tfrac{1}{9}.$$

Pomocí Hessovy matice můžeme ověřit, zda se opravdu jedná o lokální extrémy a případně o jaké. Hlavní minory Hessovy matice mají podobu:

$$\Delta_1(x; y) = \det(2 - 18\lambda) = 2 - 18\lambda,$$

$$\Delta_2(x; y) = \det \begin{pmatrix} 2 - 18\lambda & 0 \\ 0 & 2 - 8\lambda \end{pmatrix} = 4(36\lambda^2 - 12\lambda + 1).$$

Teď již můžeme použít větu o lokálních extrémech, abychom ověřili, zda stacionární body jsou či nejsou lokálními extrémy.

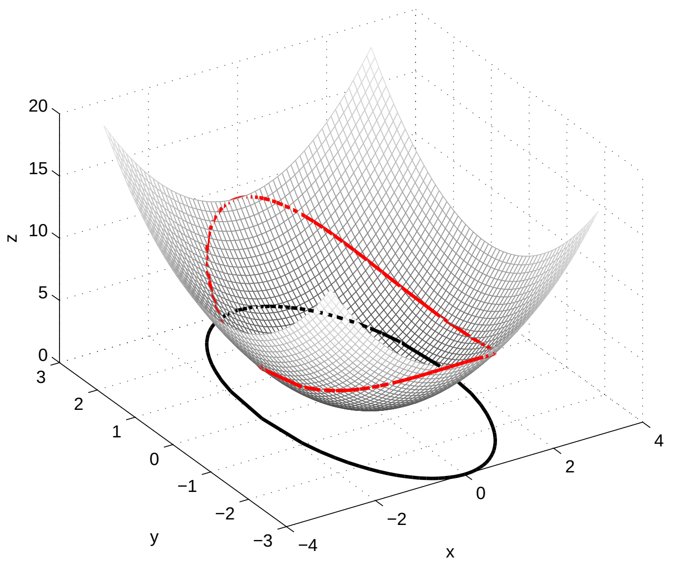
Tabulka 4.2: Přehled lokálních extrémů funkce L_λ.

Stac. bod A_i	$\Delta_2(A_i)$	$\Delta_1(A_i)$	extrém $z = L_\lambda(A_i)$
$A_1 = [0; -3]; \lambda = \frac{1}{4}$	$1 > 0$	$-\frac{5}{2} < 0$	lokální maximum $z = 9$
$A_2 = [0; 3]; \lambda = \frac{1}{4}$	$1 > 0$	$-\frac{5}{2} < 0$	lokální maximum $z = 9$
$A_3 = [-2; 0]; \lambda = \frac{1}{9}$	0	$-$	nelze rozhodnout
$A_4 = [2; 0]; \lambda = \frac{1}{9}$	0	$-$	nelze rozhodnout

Máme tedy ověřeno, že v bodech A_1 *a* A_2 *se nalézá lokální maximum Lagrangeovy funkce, nachází se zde tedy lokální maximum funkce* f *vzhledem* *k vazbě* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. *Ještě ale musíme rozhodnout o bodech* A_3 *a* A_4. *K tomu opět využijeme Weierstrassovu větu. Jelikož je množina daná vazbou* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ *množina uzavřená a omezená a funkce* f *je na ní spojitá. Z toho ale vyplývá, že funkce* f *zde nabývá maxima a minima. Určeme tedy funkční hodnoty ve stacionárních bodech. Tyto hodnoty v bodech* A_1 *a* A_2 *již známe, zajímá nás tedy funkční hodnota v bodech* A_3 *a* A_4. *Po dosazení dostaneme* $f(-2; 0) = f(2; 0) = 4$. *Tato hodnota tedy podle Weierstrassovy věty musí být lokálním minimem funkce* f *vzhledem k množině* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. *Lokální extrémy jsme tedy nalezli. Graf funkce* f *spolu s množinou je na obrázku 4.6.*

Tabulka 4.3: Přehled vázaných extrémů funkce f.

Stac. bod A_i	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0; -3]$	lokální maximum $z = 9$
$A_2 = [0; 3]$	lokální maximum $z = 9$
$A_3 = [-2; 0]$	lokální minimum $z = 4$
$A_4 = [2; 0]$	lokální minimum $z = 4$



Obrázek 4.6: Lagrangeova metoda: lokální maximum funkce f vzhledem k množině dané vazbou $9x^2 + 4y^2 = 36$.

4.3 Absolutní extrémy

V poslední části se budeme věnovat hledání absolutních extrémů. Mějme omezenou a uzavřenou množinu a na ní definovanou spojitou funkci f. Absolutním maximem pak nazveme největší z lokálních extrémů, ať už uvnitř množiny nebo vzhledem k této množině. Zcela obdobně pak budeme hledat absolutní minimum. Absolutní extrémy rovněž nazýváme globální extrémy.

Definice 4.3.1 *Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a jejím definičním oborem $D(f)$ je omezená a uzavřená množina.*

Řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0; y_0] \in D(f)$ absolutní maximum, jestliže platí:

$$(\forall [x; y] \in D(f)) f(x; y) \leq f(x_0; y_0).$$

Řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0; y_0] \in D(f)$ absolutní minimum, jestliže platí:

$$(\forall [x; y] \in D(f)) f(x; y) \geq f(x_0; y_0).$$

Platí-li $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ (respektive $f(x; y) > f(x_0; y_0)$) pro $[x; y] \neq [x_0; y_0]$, řekneme, že funkce má ostré absolutní maximum (resp. minimum).

Na rozdíl od lokálních extrémů, kde jsme hledali na okolí bodů, u absolutních extrémů hledáme na celém definičním oboru (případně na podmnožině, která je omezená a uzavřená). Pro hledání těchto absolutních extrémů budeme potřebovat Weierstrassovu větu. Uvedli jsme si ji již ve čtvrté kapitole, nicméně kvůli její důležitosti pro určování absolutních extrémů ji uveďme ještě zde.

Věta 4.3.1 (Weierstrassova věta) *Nechť f je funkce, nechť $\mathcal{M}$ je omezená a uzavřená množina, pro kterou platí $\mathcal{M} \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Je-li funkce f spojitá na množině $\mathcal{M}$, potom na této množině nabývá funkce f svého maxima a svého minima.*

Uvědomme si, že tato věta nám sice zaručuje existenci absolutních extrémů funkce f spojité na omezené a uzavřené množině f, ale už nic neříká o tom, jak tyto extrémy najít. Ukažme si tedy obecný postup k nalezení globálních extrémů.

Mějme funkci f, která je spojitá na uzavřené a omezené množině $\mathcal{M}$. Hranice této množiny ϑ_A je tvořena konečným počtem křivek reprezentovaných vazebními rovnicemi $g_1(x; y) = 0$, $g_2(x; y) = 0$, …, $g_k(x; y) = 0$. Tyto křivky na sebe navazují v bodech G_1, G_2, …, G_k. Potom absolutní extrém funkce f musí ležet v některém v následujících bodů množiny $\mathcal{M}$:

1. Bod $A \in \mathcal{M}$, ve kterém má funkce f lokální extrém. Tento lokální extrém vyšetřujeme standardně například pomocí Hessovy matice.

2. Bod $B \in \vartheta_A$, ve kterém nastal lokální extrém funkce f vzhledem k některé vazbě $g_i(x; y) = 0$, kde $i = 1; 2; \ldots; k$. Tento vázaný lokální extrém určujeme metodou dosazovací, Jacobiho nebo Lagrangeovou.

3. Libovolný bod z bodů G_1, G_2, ..., G_k. V těchto bodech je třeba určit jejich funkční hodnoty $f(G_i)$, kde $i = 1; 2; \ldots; k$.

Pokud dostaneme více bodů, které by mohly být absolutními extrémy, určíme funkční hodnoty ve všech těchto bodech. Bod s největší funkční hodnotou představuje absolutní maximum, bod s nejmenší funkční hodnotou pak absolutní minimum.

4.4 Řešené příklady

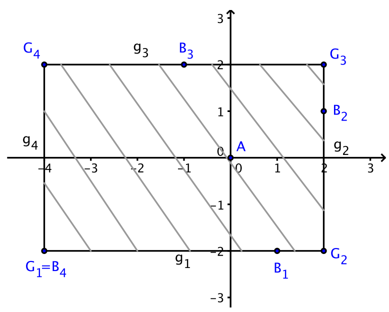
Řešený příklad 4.5 *Určete lokální a absolutní extrémy funkce $f : f(x; y) = x^2 + xy - y^2$ vzhledem k množině $\mathcal{M} = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; -4 \le x \le 2; -2 \le y \le 2\}$. (Nýdl [6])*

Řešení:

Definičním oborem funkce f je celá množina $\mathbb{R}^2$. Množina $\mathcal{M}$ tvoří obdélník s vrcholy v bodech $G_1 = [-4; -2]$, $G_2 = [2; -2]$, $G_3 = [2; 2]$ a $G_4 = [-4; 2]$. Hranici této množiny pak tvoří následující čtyři úsečky:

$$g_1 : g_1(x; y) = y + 2 = 0, \qquad g_2 : g_2(x; y) = x - 2 = 0,$$

$$g_3 : g_3(x; y) = y - 2 = 0, \qquad g_4 : g_4(x; y) = x + 4 = 0.$$



Obrázek 4.7: Množina $\mathcal{M}$ s hranicemi a významnými body.

(a) Lokální extrémy funkce f. *Pro určení lokálních extrémů funkce f budeme nejprve potřebovat parciální derivace prvního řádu této funkce. Ty jsou:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2x + y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = x - 2y.$$

Vidíme, že tyto parciální derivace jsou spojité na celém definičním oboru, lokální extrémy funkce f tedy nastanou jen ve stacionárních bodech. Ty dostaneme položením prvních derivací rovných nule. Stacionární body jsou tedy řešením soustavy rovnic:

$$2x + y = 0,$$

$$x - 2y = 0.$$

Z této soustavy dostáváme jedno řešení, a to stacionární bod $A = [0;0]$. Jelikož ale hledáme extrémy vzhledem k množině $\mathcal{M}$, musí tento bod v této množině ležet. To je v našem případě splněno. Pojďme tedy určit, zda v případě bodu A opravdu jde o lokální extrém. Použijme Hessovu matici a její hlavní minory.

$$\Delta_1(x;y) = \det(2) = 2,$$

$$\Delta_2(x;y) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -5.$$

Nyní určíme hodnotu těchto hlavních minorů v bodě A. Jelikož platí $\Delta_2(A) = -5 < 0$, v bodě $A = [0;0]$ se nachází sedlový bod, nejde tedy o lokální extrém.

(b) Vázané lokální extrémy *Jelikož máme čtyři vazby, budeme muset postupně spočítat vázaný extrém pro každou tuto vazbu zvlášť.*

- *Vázaný extrém funkce f vzhledem k vazbě $g_1 : g_1(x;y) = y+2 = 0$. Funkce f nám tedy přechází do podoby funkce jedné proměnné $f : f(x;-2) = x^2 - 2x - 4$. Extrém této funkce nalezneme pomocí první a ověříme pomocí druhé derivace.*

$f'(x;-2) = 2x - 2,$	$2x - 2 = 0,$	*stacionární bod $x = 1$,*
$f''(x;-2) = 2,$	$f''(1;-2) = 2,$	*bod $B_1 = [1;-2]$ je lokální minimum vzhledem ke g_1.*

- *Vázaný extrém funkce f vzhledem k vazbě $g_2 : g_2(x; y) = x-2 = 0$. Funkce f nám tedy přechází do podoby funkce jedné proměnné $f : f(2; y) = 4 + 2y - y^2$. Extrém této funkce nalezneme pomocí první a ověříme pomocí druhé derivace.*

  $f'(2; y) = 2 - 2y$, $\quad 2 - 2y = 0$, $\quad$ *stacionární bod $y = 1$,*

  $f''(2; y) = -2$, $\quad f''(2; 1) = -2$, $\quad$ *bod $B_2 = [2; 1]$ je lokální maximum vzhledem ke g_2.*

- *Vázaný extrém funkce f vzhledem k vazbě $g_3 : g_3(x; y) = y-2 = 0$. Funkce f nám tedy přechází do podoby funkce jedné proměnné $f : f(x; -2) = x^2 + 2x - 4$. Extrém této funkce nalezneme pomocí první a ověříme pomocí druhé derivace.*

  $f'(x; 2) = 2x + 2$, $\quad 2x + 2 = 0$, $\quad$ *stacionární bod $x = -1$,*

  $f''(x; 2) = 2$, $\quad f''(-1; 2) = 2$, $\quad$ *bod $B_3 = [-1; 2]$ je lokální minimum vzhledem ke g_3.*

- *Vázaný extrém funkce f vzhledem k vazbě $g_4 : g_4(x; y) = x+4 = 0$. Funkce f nám tedy přechází do podoby funkce jedné proměnné $f : f(-4; y) = 14-4y-y^2$. Extrém této funkce nalezneme pomocí první a ověříme pomocí druhé derivace.*

  $f'(-4; y) = -4 - 2y$, $\quad -4 - 2y = 0$, $\quad$ *stacionární bod $y = -2$,*

  $f''(-4; y) = -2$, $\quad f''(-4; -2) = -2$, $\quad$ *bod $B_4 = [-4; -2]$ je lokální maximum vzhledem ke g_4.*

(c) Vyhodnocení *Uveďme si tedy přehled všech lokálních extrémů:*

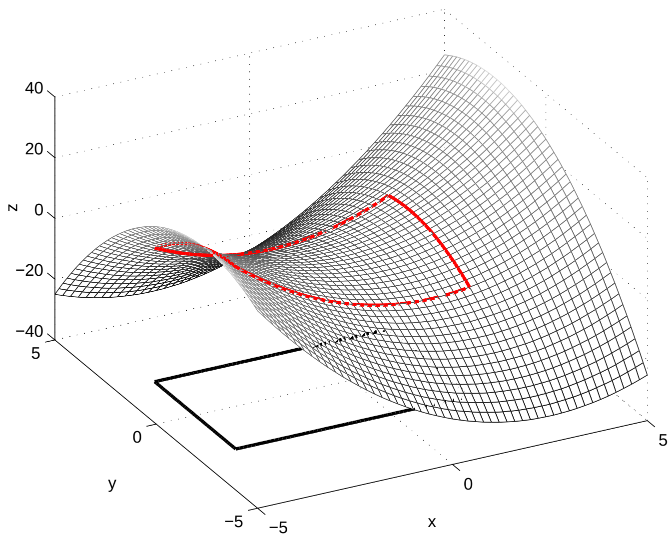
Tabulka 4.4: Přehled lokálních extrémů a funkčních hodnot funkce f.

Lokální maxima	Lokální minima	Body G_i
$B_2 = [2; 1]$, $z = 5$	$B_1 = [1; -2]$, $z = -5$	$G_1 = [-4; -2] = B_4$
$B_4 = [-4; -2]$, $z = 20$	$B_3 = [-1; 2]$, $z = -5$	$G_2 = [2; -2]$, $z = -4$
		$G_3 = [2; 2]$, $z = 4$
		$G_4 = [-4; 2]$, $z = 4$

Z porovnání funkčních hodnot v jednotlivých bodech je nám již patrné, jaké body jsou absolutními extrémy.

Absolutní maximum: $B_4 = G_1 = [-4; -2]$, $f(B_4) = 20$.

Absolutní minimum: $B_1 = [1; -2]$ *a* $B_3 = [-1; 2]$, $f(B_1) = f(B_3) = -5$.



Obrázek 4.8: Graf funkce f a množina $\mathcal{M}$.

Řešený příklad 4.6 *Určete lokální extrémy funkce* $f : f(x; y) = x^2 + 2y^2$ *vzhledem k množině* $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{2(y+1)^2}{3} = 1$.

Řešení:

Definičním oborem funkce f *jsou všechny uspořádané dvojice z* $\mathbb{R}^2$. *Vazební podmínku tvoří elipsa. Jde o omezenou a uzavřenou množinu. Jelikož vidíme, že z vazební podmínky lze těžko jednoznačně vyjádřit jednu z proměnných a dosadit ji do funkčního předpisu funkce* f, *dosazovací metodu nelze použít. Použijme tedy například metodu Lagrangeových multiplikátorů. Sestrojme tedy Lagrangeovu funkci.*

$$L_\lambda(x; y) = x^2 + 2y^2 + \lambda \cdot \left((x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 3\right),$$

kde výraz $g(x; y) = (x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 3 = 0$ *značí vazební podmínku.*

Pro určení lokálních extrémů Lagrangeovy funkce a tedy extrémů funkce f *vzhledem k vazbě musíme nejprve najít stacionární body. Pro ty potřebujeme* *nejprve zjistit hodnoty parciálních derivací.*

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x;y) = 2x + 2\lambda x - 2\lambda = 2x + 2\lambda(x-1),$$
$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial y}(x;y) = 4y + 4\lambda y + 4\lambda = 4y + 4\lambda(y+1).$$

Pro nalezení stacionárních bodů Lagrangeovy funkce nyní musíme vyřešit následující soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$2x + 2\lambda(x-1) = 0,$$
$$4y + 4\lambda(y+1) = 0,$$
$$(x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 3 = 0.$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme λ a porovnáme tyto rovnice. Dostaneme vztah mezi proměnnými x a y, který je $x = -y$. Dosadíme do poslední rovnice a dostaneme následující stacionární body i s vypočtenými hodnotami λ:

$$A_1 = [0;0], \lambda = 0 \qquad A_2 = [2;-2], \lambda = -2$$

Poznámka

Ke stacionárním bodům jsme také mohli dospět pomocí jacobiánu. Ten by měl v našem případě podobu:

$$J_{f;g} = \det \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ 2x-2 & 4y+4 \end{pmatrix} = 8(x+y).$$

Řešili bychom tak následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$8(x+y) = 0$$

$$(x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 3 = 0.$$

Z první rovnice bychom dostali vztah $x = -y$ a dosadili do druhé. Vyšly by nám tak stejné stacionární body. Hodnoty λ bychom dopočítali pomocí parciální derivace prvního řádu Lagrangeovy funkce, kde tato derivace musí být ve stacionárních bodech nulová. Je na každém zvolit si metodu.

Nyní je třeba určit, jestli stacionární body opravdu jsou lokálními extrémy Lagrangeovy funkce. To ověříme za pomoci Hessovy matice a jejích hlavních minorů. Pomocí parciálních derivací druhého řádů Lagrangeovy funkce přijdeme na to, že hlavní minory jsou následující:

$$\Delta_1(x;y) = \det(2+2\lambda) = 2 + 2\lambda,$$

$$\Delta_2(x;y) = \det\begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 4+4\lambda \end{pmatrix} = (2+2\lambda)(4+4\lambda) = 8(\lambda+1)^2.$$

V následující tabulce pak shrňme naše výsledky.

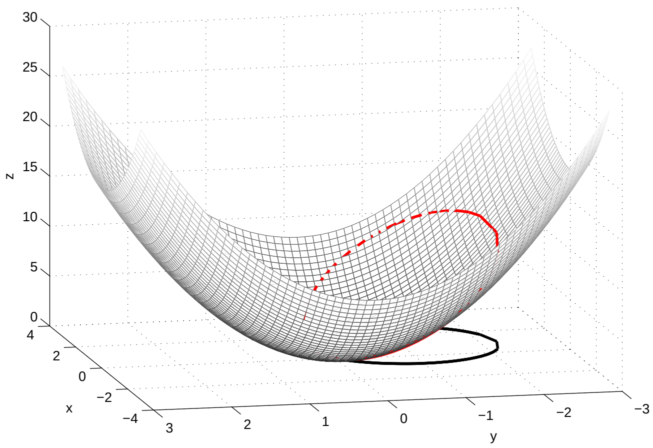
Tabulka 4.5: Přehled lokálních extrémů funkce L_λ.

Stac. bod A_i	$\Delta_2(A_i)$	$\Delta_1(A_i)$	Lokální extrém $z = L_\lambda(A_i)$
$B_1 = [0;0]$, $\lambda = 0$	$8 > 0$	$2 > 0$	lokální minimum $z = 0$
$B_2 = [2;-2]$, $\lambda = -2$	$8 > 0$	$-2 < 0$	lokální maximum $z = 12$

Lokální extrémy Lagrangeovy funkce jsou vázanými extrémy funkce f vzhledem k množině $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{2(y+1)^2}{3} = 1$. Přehled vázaných extrémů je tedy:

Tabulka 4.6: Přehled vázaných extrémů funkce f.

Stac. bod A_i	Vázaný lokální extrém $z = f(A_i)$
$B_1 = [0;0]$	vázané lokální minimum $z = 0$
$B_2 = [2;-2]$	vázané lokální maximum $z = 12$



Obrázek 4.9: Graf funkce f a množina $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{2(y+1)^2}{3} = 1$.

4.5 Příklady k procvičení

Příklad 4.1 *Určete lokální extrémy a sedlové body následujících funkcí. (Zdroj: [6], [1])*

(a) $f: f(x;y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7,$

(b) $f: f(x;y) = x^2 - 3xy + y^2 + 2y - 6x,$

(c) $f: f(x;y) = (x - y + 1)^2,$

(d) $f: f(x;y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$

(e) $f: f(x;y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln(x) - 10\ln(y),$

(f) $f: f(x;y) = \sin(x) + \cos(y) + \cos(x - y), (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}),$

(g) $f: f(x;y) = xy + \ln(y) + 2y^2 - 10,$

(h) $f: f(x;y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}.$

Příklad 4.2 *Pomocí dosazovací metody určete lokální extrémy funkce f vzhledem k množině $\mathcal{M}$. (Zdroj: [6], [9])*

(a) $f: f(x;y) = xy + 2,$ $\mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; 2 - x - y = 0\},$

(b) $f: f(x;y) = x + 3y - 2,$ $\mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y - x^2 = 0\},$

(c) $f: f(x;y) = x^2 - y^2,$ $\mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x - 2y + 1 = 0\},$

(d) $f: f(x;y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2,$ $\mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y = x^2\},$

(e) $f: f(x;y) = x^2 + y^2,$ $\mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1\},$

(f) $f: f(x;y) = xy - x + y - 1,$ $\mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x + y = 1\},$

(g) $f: f(x;y) = 4x + 2y + 1,$ $\mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + x + \dfrac{1}{4} = y\}.$

Příklad 4.3 *Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů určete lokální extrémy funkce f vzhledem k množině $\mathcal{M}$. (Zdroj: [6], [9])*

(a) $f : f(x;y) = x - y,$ $\qquad \mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 2\},$

(b) $f : f(x;y) = x + y,$ $\qquad \mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1\},$

(c) $f : f(x;y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$ $\qquad \mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}\},$

(d) $f : f(x;y) = \mathrm{e}^{x^2+y},$ $\qquad \mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y = -x^3\},$

(e) $f : f(x;y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + x,$ $\qquad \mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; 2x^2 + y^2 = 2\},$

(f) $f : f(x;y) = \ln(xy),$ $\qquad \mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 2\},$

(g) $f : f(x;y) = -3x - 9,$ $\qquad \mathcal{M} = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; 3y - y^3 = x^2\}.$

Příklad 4.4 *Určete absolutní extrémy funkce f na množině $\mathcal{M}$. (Zdroj: [6])*

(a) $f : f(x;y) = x^2 - 4x + 2y^2,$ $\qquad \mathcal{M} : |x| \leq 4 \wedge |y| \leq 1$

(b) $f : f(x;y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$ $\qquad \mathcal{M} : y \geq x \wedge y \geq -x \wedge y \leq 2,$

(c) $f : f(x;y) = x^2 - xy + y^2,$ $\qquad \mathcal{M} : |x| + |y| \leq 1,$

(d) $f : f(x;y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y + 1,$ $\qquad \mathcal{M} : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 3x + 6y - 17 \leq 0,$

(e) $f : f(x;y) = x^2 - y^2,$ $\qquad \mathcal{M} : x - 2y = -1 \wedge \langle 3; 5 \rangle,$

(f) $f : f(x;y) = 3x - y,$ $\qquad \mathcal{M} : x^2 + y^2 \leq 4,$

(g) $f : f(x;y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y,$ $\qquad \mathcal{M} : x^2 + 4y^2 \leq 1,$

(h) $f : f(x;y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2,$ $\qquad \mathcal{M} : y \geq x^2 \wedge y \leq 9,$

(i) $f : f(x;y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y,$ $\qquad \mathcal{M}$*: trojúhelník s vrcholy* $[-1;-1]$, $[7;-1]$ *a* $[7;7]$.

Příklad 4.5 *Funkce* $f(x;y) = \dfrac{80x}{5+x} + \dfrac{40y}{10+y} - 2x - 2y$ *vyjadřuje měsíční zisk jedné firmy v závislosti na výdajích za reklamu v televizi* x *a v rozhlase* y *(obojí v tisících Kč). Jak nejvýhodněji byste rozdělili 25.000 Kč do reklamy měsíčně? (Nýdl, Klufová [6])*

Příklad 4.6 *Jaké rozměry bude mít otevřená válcová vana s půlkruhovým průřezem a daným povrchem* S*, která má maximální objem? (Nagy, [5])*

Příklad 4.7 *Najděte rozměry otevřené nádoby, která má tvar kvádru s daným objemem* V*, jejíž povrch je minimální. (Nagy, [5])*

Závěr

Cílem diplomové práce bylo zpracovat problematiku diferenciálního počtu reálné funkce dvou proměnných do výukového materiálu. Výstupem je učební text, který lze do budoucna využívat k výuce matematické analýzy nebo podobně zaměřených předmětů. Úroveň odbornosti této práce odpovídá zejména požadavkům bakalářských a magisterských studií učitelství matematiky pro základní školy na pedagogických fakultách. Text je však použitelný i na oborech, kde je matematika okrajovým předmětem nebo se neklade důraz na podrobnou znalost teorie diferenciálního počtu funkce dvou proměnných. Pro odborné obory (např. ekonomické obory nebo technické obory) by bylo vhodné materiál doplnit větším množstvím aplikačních příkladů z dané oblasti.

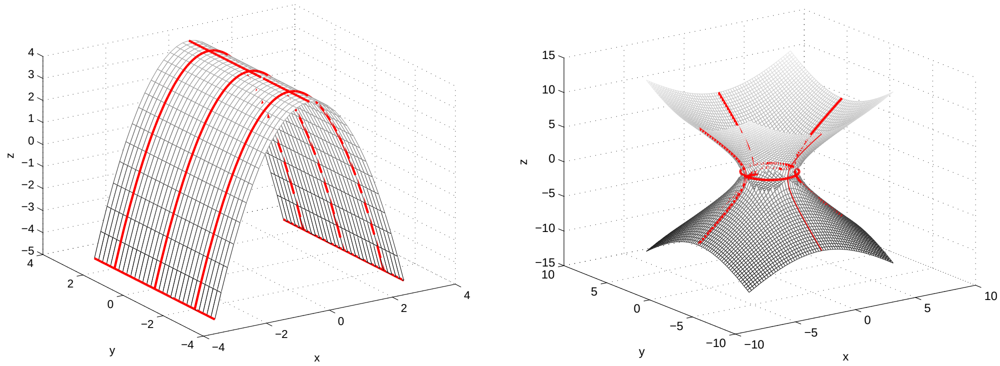
Při tvorbě diplomové práce jsem použil širší spektrum literatury, jen některé z těchto zdrojů jsem však použil. Při nahlédnutí do současné literatury, která se zabývá problematikou funkce dvou či více proměnných, jsem zjistil následující fakt. Tyto knihy jsou buď pro čtenáře příliš náročné, nebo se naopak tématu dotýkají jen okrajově. Ve své práci jsem zvolil střední cestu. Teorii jsem tedy podal axiomaticky za použití definic a vět, důležitá tvrzení jsou pak v práci ještě dovysvětlena a doplněna nákresem či grafem.

Na začátku diplomové práce se věnuji úvodu do problematiky funkcí dvou proměnných. Jedná se zejména o teorii metrických prostorů. Další kapitola je věnována základnímu přehledu funkcí dvou proměnných. Jsou zde nejen ukázky nejdůležitějších funkcí, ale zároveň je zde popsána metoda, která u většiny základních funkcí vede k odhalení podoby jejich grafu. Této části je věnován poměrně velký úsek práce zejména proto, že problém neznalosti grafů a rovnic např. parabolické válcové plochy nebo rotačního hyperboloidu je u studentů znám z praxe. Následující kapitola je věnována úvodu do diferenciálního počtu a vysvětlení matematického aparátu potřebného ke hledání extrémů, což je obsahem kapitoly poslední.

Pokud by tato práce byla vydána jako učební text, bylo by dobré přidat ještě další kapitoly věnující se funkcím dvou proměnných. Zejména jde o diferenciální počet implicitně zadaných funkcí, se kterými se v praxi často setkáváme, a konečně celá teorie dvojného a dvojnásobného integrálu funkce dvou proměnných. Za zvážení by také stálo rozvést celou teorii i na funkce tří, případně více proměnných. Jelikož je mezi funkcemi s více proměnnými v rámci infinitezimálního počtu analogie, toto rozšíření by nebylo náročné.

Výsledky

Kapitola 2



(a) Graf parabolické válcové plochy, $D(f) = \mathbb{R}^2$.

(b) Graf jednodílného rotačního paraboloidu, $D(f) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 4\}$.

Příklad 2.1.

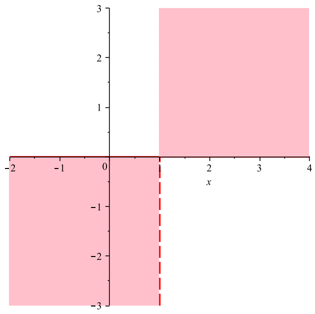
Příklad 2.2 (a) $f_1(A) = f_1(B) = \ln 7$, $f_1(C) = \ln 3$; (b) $f_2(A) = -4$, $f_2(B) = -3, f_2(C) = -\frac{201}{49}$; (c) $f_3(A) = f_3(C) = 2$, $f_3(B) = 1$; (d) $f_4(A) = 2$, $f_4(B) = 0$, bod C neleží v $D(f_4)$.

Příklad 2.3 (a) A ano, B a C ne; (b) B ano, A a C ne; (c) všechny ano; (d) B ano, A a C ne.

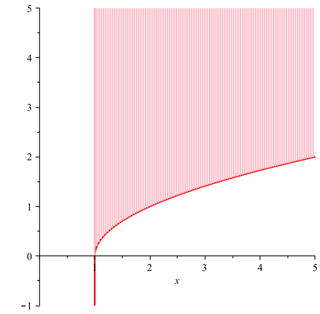
Příklad 2.4 viz. strana 94.

Příklad 2.5 $S = 1,88m^2$.

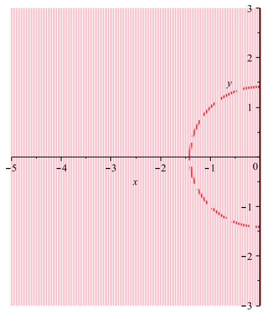
Příklad 2.6 $P(d; p) = -d^2 + 3dp - 2p^2 + 400d + 500p - 174000$; $P(1440; 1740) = 660000$.



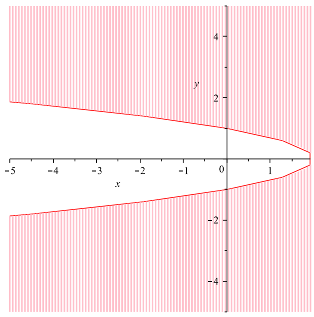
(a) $D(f) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; \frac{y}{x-1} \geq 0\}$. Není uzavřená ani omezená.



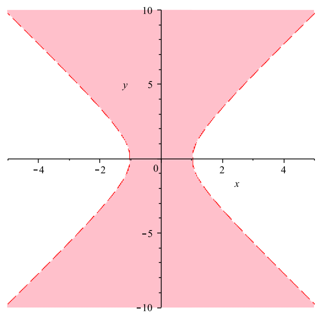
(b) $D(f) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \sqrt{x+1}\}$. Je uzavřená, není omezená.



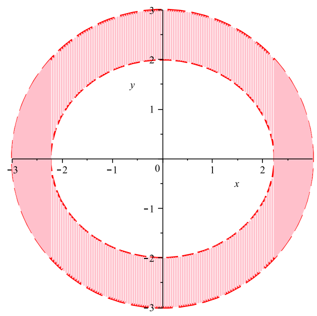
(c) $D(f) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0 \wedge x^2 + y^2 \neq 2\}$. Není uzavřená, není omezená.



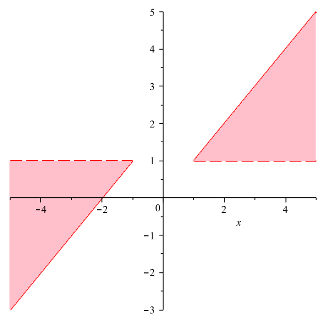
(d) $D(f) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 2 - 2y^2\}$. Je uzavřená a není omezená.



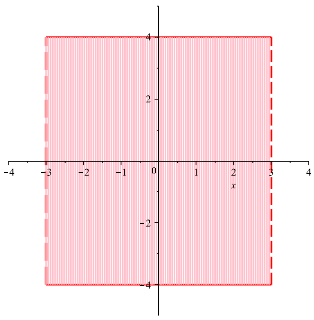
(e) $D(f) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - \frac{y^2}{4} < 1\}$. Není omezená, není uzavřená.



(f) $D(f) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 3 \wedge \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} > 1\}$. Není uzavřená, je omezená.



(g) $D(f) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; |\frac{x+1}{y-1}| \leq 1\}$. Není omezená, není uzavřená.



(h) $D(f) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; |x| < 3 \wedge |y| \leq 4\}$. Není uzavřená, je omezená.

Příklad 2.4.

Kapitola 3

Příklad 3.1 (a) $\frac{7}{2}$; (b) 2; (c) $\frac{1}{3}$; (d) $\frac{\ln 4}{2}$; (e) 0; (f) $-\frac{3}{64}$

Příklad 3.2 (a) $D(f) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; xy \geq 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = \frac{-1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = \frac{-1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{xy}}$; (b) $D(f) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = -\frac{x^2}{(1-x^2-y^2)^{(3/2)}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = -\frac{y^2}{(1-x^2-y^2)^{(3/2)}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = \frac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{(3/2)}}$; (c) $D(f) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2x \ln y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = 2 \ln y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = -\frac{x^2}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = \frac{2x}{y}$; (d) $D(f) = \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = y\mathrm{e}^{xy}(1 + xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = x\mathrm{e}^{xy}(1 + xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = y^2\mathrm{e}^{xy}(2 + xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = x^2\mathrm{e}^{xy}(2 + xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = \mathrm{e}^{xy}(1 + 3xy + x^2y^2)$; (e) $D(f) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = -\frac{\cos^2 y}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = -\frac{\sin 2y}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = \frac{2\cos^2 y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = -\frac{\cos 2y}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = \frac{\sin 2y}{x^2}$; (f) $D(f) = \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \cos y + y \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = -x \sin y + \cos x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = -y \cos x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = -x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = -\sin y - \sin x$; (g) $D(f) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \frac{yx^y}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = x^y \ln x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = \frac{yx^y(y-1)}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = x^y \ln^2 x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = \frac{x^y(y \ln x + 1)}{x}$; (h) $D(f) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = \frac{2y}{x^3(1+\frac{y^2}{x^2})} - \frac{2y^3}{x^5(1+\frac{y^2}{x^2})^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = -\frac{2y}{x^3(1+\frac{y^2}{x^2})^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = -\frac{1}{x^2(1+\frac{y^2}{x^2})} + \frac{2y^2}{x^4(1+\frac{y^2}{x^2})^2}$; (i) $D(f) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; |xy| \leq 1\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = \frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = \frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} + \frac{x^2y^2}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}$; (j) $D(f) = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x \neq y \neq 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = -\frac{3x+y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{3x^2(x+y)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = -\frac{x+3y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{3y^2(x+y)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = -\frac{x+y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{3xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$;

Příklad 3.3 (a) $\mathrm{d}f(A) = 2\cos(2)(h_1 + h_2)$; (b) $\mathrm{d}f(B) = 512h_1 + 1024h_2$; (c) $\mathrm{d}f(C) = 3h_1$; (d) $\mathrm{d}f(D) = \frac{\pi}{4}h_1 - h_2$; (e) $\mathrm{d}f(E) = -h_1 + h_2$; (f) $\mathrm{d}^3f(F) = h_1^3 + 6h_2^3$; (g) $\mathrm{d}^2f(G) = \mathrm{e}(h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2)$.

Příklad 3.4 (a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \sqrt{3}+1$; (b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$; (c) $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; (d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Příklad 3.5 (a) $\tau : 4x - 6y - z + 10 = 0$, $x = 2 + 4t$, $y = 3 - 6t$, $z = -t$; (b) $\tau : 25x - y - 36z - 156 = 0$, $x = 5 + 15t$, $y = -1 - t$, $z = -\frac{5}{6} - 36t$; (c) $\tau : \pi x - 4y - 4z + 2 = 0$, $x = -1 + \pi t$, $y = \frac{1}{2} - 4t$, $z = -\frac{\pi}{4} - 4t$; (d) $\tau : y\ln 2 - z + 1 = 0$, $x = 2$, $y = t\ln 2$, $z = 1 - t$; (e) $\tau : 3\mathrm{e}x - \mathrm{e}y - z - 2\mathrm{e} = 0$, $x = 1+3\mathrm{e}t$, $y = -\mathrm{e}t$, $z = \mathrm{e}-t$; (f) $\tau : x+z-11 = 0$, $x = t$, $y = \pi$, $z = -11+t$;

Příklad 3.6 (a) $0,628$; (b) $-0,3$; (c) $5,006$; (d) $\ln 2 + 0,0025$; (e) $1,1\mathrm{e}^2$; (f) $0,1$.

Příklad 3.7 $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 50000 - 20x - 10y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(40;20) = 49000$, tedy při stávajících investicích stoupne počet prodaných výrobků při zvýšení nákladů na reklamu v televizi o 1000 dolarů o 49000 kusů ročně. $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 40000 - 40y - 10x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(40;20) = 38800$, tedy při stávajících investicích stoupne počet prodaných výrobků při zvýšení nákladů na reklamu v rozhlase o 1000 dolarů o 38800 kusů ročně. Je tedy výhodnější investovat do reklamy v televizi.

Příklad 3.8 Zmenší se o $1,4cm^2$.

Kapitola 4

Příklad 4.1 (a) lokální minimum $z = -6$ v $[2;-3]$; (b) sedlový bod $[-\frac{6}{5};-\frac{6}{5}]$; (c) neostré lokální minimum $z = 0$ v bodech přímky $x-y+1 = 0$; (d) lokální maximum $z = 1$ v $[0;0]$; (e) lokální minimum $z = 7 - 10\ln 2$ v $[1;2]$; (f) lokální maximum $z = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ v $[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}]$; (g) nemá lokální extrémy ani sedlové body; (h) lokální minimum $z = 30$ v $[5;2]$.

Příklad 4.2 (a) lokální maximum $z = 3$ v $[1;1]$; (b) lokální minimum $z = -\frac{25}{12}$ v $[-\frac{1}{6};\frac{1}{36}]$; (c) lokální minimum $z = -\frac{1}{3}$ v $[-\frac{1}{3};\frac{2}{3}]$; (d) lokální minimum $z = 0$ v $[0;0]$ a lokální maximum $z = 27$ v $[3;9]$; (e) lokální maximum $z = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ v $[\frac{ab^2}{a^2+b^2};\frac{a^2b}{a^2+b^2}]$; (f) lokální maximum $z = \frac{1}{4}$ v $[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$; (g) lokální minimum $z = -3$ v $[-\frac{3}{2};1]$.

Příklad 4.3 (a) lokální maximum $z = 2$ v $[1; -1]$ a lokální minimum $z = -2$ v $[-1; 1]$; (b) lokální maximum $z = 2\sqrt{2}$ v $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ a lokální minimum $z = -2\sqrt{2}$ v $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$; (c) lokální maximum $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ v $[2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$ a lokální minimum $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ v $[-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}]$; (d) lokální maximum $z = 2e^{\frac{4}{27}}$ v $[\frac{2}{3}; -\frac{8}{27}]$ a lokální minimum $z = 1$ v $[0; 0]$; (e) lokální maximum $z = 2$ v $[1; 0]$ a lokální minimum $z = 0$ v $[-1; 0]$; (f) lokální minimum $z = 0$ v $[1; 1]$; (g) lokální maximum $z = -3\sqrt{2} - 9$ v $[\sqrt{2}; 1]$ a lokální minimum $z = 3\sqrt{2} - 9$ v $[-\sqrt{2}; 1]$.

Příklad 4.4 (a) minimum $z = -4$ v $[2; 0]$ a maximum $z = 34$ v $[-4; 1]$ a $[-4; -1]$; (b) maximum $z = \frac{37}{4}$ v $[1; \frac{3}{2}]$ a minimum $z = 7$ v $[-2; 2]$; (c) maximum $z = 1$ v $[1; 0]$, $[-1; 0]$, $[0; 1]$, $[0; -1]$ a minimum $z = 0$ v $[0; 0]$; (d) maximum $z = \frac{196}{9}$ v $[\frac{17}{3}; 0]$ a minimum $z = -2$ v $[1; 1]$; (e) maximum $z = 19$ v $[5; 2]$; (f) maximum $z = 2\sqrt{10}$ v $[\frac{6}{\sqrt{10}}; -\frac{2}{\sqrt{10}}]$; (g) minimum $z = -\frac{1}{2}$ v $[\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}]$; (h) maximum $z = \frac{4\sqrt{17}+8}{17\sqrt{17}}$ v $[\frac{1}{\sqrt{17}}; -\frac{2}{\sqrt{17}}]$ a minimum $z = \frac{4\sqrt{17}-8}{17\sqrt{17}}$ v $[-\frac{1}{\sqrt{17}}; \frac{2}{\sqrt{17}}]$; (i) maximum $z = 224$ v $[7; 7]$ a minimum $z = -8$ v $[-1; -1]$.

Příklad 4.5 $x = 15000$; $y = 10000$.

Příklad 4.6 $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, $v = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.

Příklad 4.7 $\sqrt[3]{2V}$; $\sqrt[3]{2V}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

Literatura

[1] Děmidovič, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Havlíčkův Brod: Fragment, 2003

[2] Hašek, R., Pech, *Kvadratické plochy a jejich reprezentace v programu Maple*, České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2011

[3] Jirásek, F., Čipera, S., Vacek, M.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky II*, Praha: SNTL, 1989

[4] Kočandrle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie*, Praha: Prometheus, 2008

[5] Nagy, J., Navrátil, O.: *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*, Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005

[6] Nýdl, V., Klufová, R.: *Matematika Část 2-Matematická analýza*, České Budějovice: Zemědělská fakulta Jihočeské univerzity, 1998

[7] Nýdl, V., Klufová, R., Šulista, M.: *Cvičení z matematiky pro zemědělské obory*, České Budějovice: Zemědělská fakulta Jihočeské univerzity, 2002

[8] Pech, P.:*Kuželosečky*, České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004

[9] Volný, P.:*Matematika II* [online], Ostrava: Vysoká škola báňská, dostupné z: http://homen.vsb.cz/ kre40/esfmat2/fceviceprom.html [cit. 8. 4. 2011]