UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Testování znalostí studentů - příprava ke zkoušce z předmětu Matematika 2: Dvojný integrál

Vedoucí diplomové práce:
Mgr. Iveta Bebčáková Ph.D.
Rok odevzdání: 2014

Vypracoval:
Paličková Tereza
MATEKO, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně a použila jsem k tomu pouze literaturu vyjmenovanou v seznamu literatury.

V Olomouci dne

Poděkování

Děkuji Mgr. Ivetě Bebčákové Ph.D. za podnětné rady a připomínky, které mi byly nápomocny při zpracování mé bakalářské práce.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Úvod

V akademickém roce 2012/2013 se na katedře matematické analýzy a aplikací matematiky začal realizovat plán, jehož cílem bylo doplnit povinnosti nutné ke splnění zkoušky z předmětu Matematika 2 o další stupeň, o Test připravenosti k ústní zkoušce z předmětu Matematika 2 (dále jen Test připravenosti). Pro absolvování předmětu Matematika 2 bylo do té doby třeba splnit alespoň polovinu průběžných písemných prací prověřujících látku každé hodiny, přičemž za splněnou byla tato považována po vypočtení alespoň jednoho příkladu ze dvou. Dalším stupněm byla zápočtová písemná práce zahrnující téměř celé učivo daného semestru (kromě poslední látky). Následovala zkoušková písemná práce obsahující poslední látku a byl-li student úspěšný, mohl postoupit k ústní zkoušce. Všechny stupně prověřování znalostí studentů před ústní zkouškou prověřovaly v podstatě jen praktické znalosti. Nový stupeň přistupuje k prověření studentských znalostí poněkud odlišně. Cílem této práce je komplexně představit Test připravenosti - tematický okruh dvojný integrál. V první řadě jeho plánování, které by mělo předcházet vzniku každého testu, ale také jeho sestavování. Do práce bude zahrnut také soubor otázek vytvořených k tématu dvojný integrál včetně řešení. A kromě toho v práci případně navrhneme úpravy pro budoucí použití založené mimo jiné na prověření obtížnosti jednotlivých testových položek.

Do realizace tohoto plánu bylo zapojeno osm studentů druhého ročníku na katedře matematické analýzy a aplikací matematiky (včetně autorky předkládané práce). Tito studenti si zvolili vždy jeden z tematických okruhů: limita dvou proměnných, číselné řady, extrémy funkcí dvou proměnných, vlastnosti funkcí dvou proměnných, dvojný integrál, parciální derivace, metrické prostory, funkční řady. Na toto téma pak vypracovali 100 až 150 úkolů a otázek (dále též testových položek) zabývajících se jak praxí, tak ale také teorií. Důležitou podmínkou ovšem bylo, aby bylo možné každý úkol správně vyřešit pouhou úvahou, bez pomocných výpočtů. Všechny vypracované testové položky byly následně vloženy do softwarového prostředí LMS Moodle. Po probrání a procvičení některé problematiky (například tématu dvojný integrál) byl studentům předmětu Matematika 2 zpřístupněn test, který měli možnost spouštět neomezeně a tak se v dané látce procvičovat a zlepšovat. Při každém spuštění byl studentovi náhodně vygenerován test o dvaceti položkách (v případě některých témat pětadvaceti). Pro umožnění přístupu k ústní zkoušce musel mít student splněn test ke každému z probíraných témat minimálně na osmdesát procent.

Test připravenosti není didaktickým testem, ovšem ukážeme si, že při tvorbě jakéhokoli testu je vhodné postupovat (alespoň částečně), jako by jím měl být. Didaktická literatura (například: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]) upozorňuje, že pro vytvoření kvalitního didaktického testu je třeba mimo jiné dodržet stanovený postup: 1. plánování, 2. sestavování, 3. ověřování, 4. použití testu. Dodržení tohoto postupu (i když třeba v uvolněnější podobě) přispívá k zajištění kvality jakéhokoli testu, písemné či ústní zkoušky. Tento postup totiž zajistí promyšlenost testu nebo zkoušky. Autor v takovém případě nezačíná položením náhodných otázek, ale v první řadě si stanoví tematický obsah testu či zkoušky a definuje si cíle jednotlivých otázek i celého testu. Na základě stanovených cílů může teprve začít sestavovat jednotlivé otázky a úkoly a současně stanovit způsob hodnocení jednotlivých úloh a celého testu či zkoušky. Ověřování testu v podobě odborné recenze či pilotního zadání testovaným autor patrně běžně provádět nebude, ale je vhodné vypracované zadání na nějaký čas odložit a následně se k němu opět vrátit, autor pak může nalézt chyby nebo nejasnosti, které původně neviděl. Teprve poté by měl přistoupit k použití testu či zkoušky. Tento postup byl dodržen při tvorbě Testu připravenosti k ústní zkoušce z předmětu Matematika 2 – tematický okruh dvojný integrál.

Než se pustíme do dalšího výkladu, bylo by vhodné Test připravenosti nějak charakterizovat, což můžeme učinit například dle Byčkovského klasifikace (viz například [4]) následovně:

- hledisko měřené charakteristiky výkonu: test úrovně

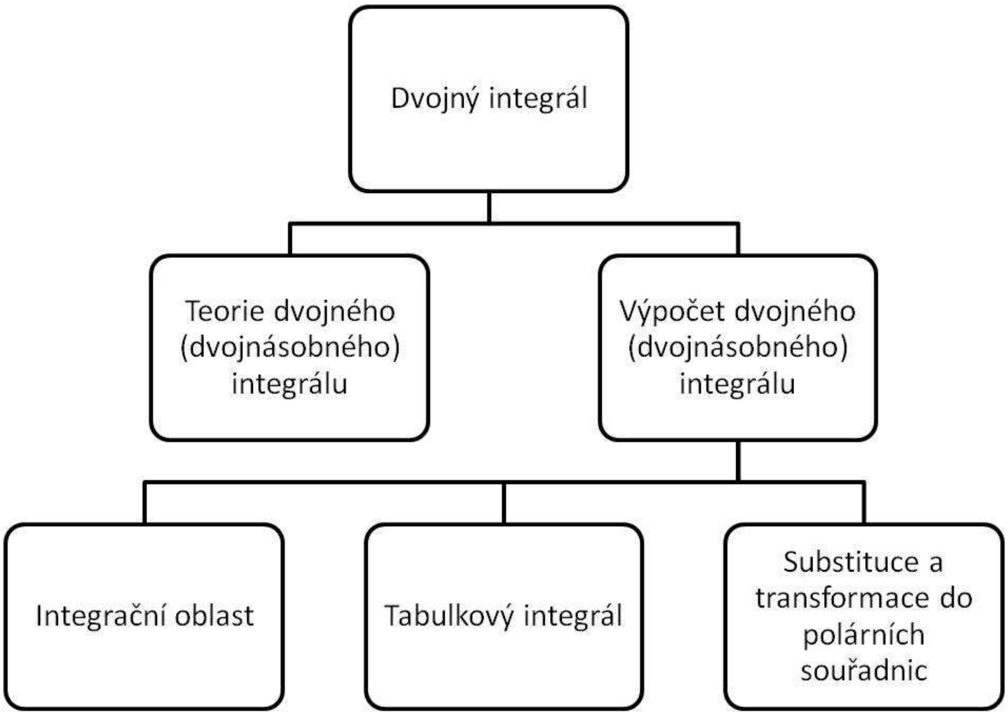
- dokonalost přípravy testu a jeho příslušenství: nestandardizovaný
- povaha činnosti testovaného: kognitivní
- míra specifičnosti učení zjišťovaného testem: test výsledků výuky
- interpretace výkonu: ověřující
- časové zařazení do výuky: výstupní
- tematický rozsah: monotematický
- míra objektivity skórování: objektivně skórovaný

1 Plánování Testu připravenosti

Na samém počátku plánování testu by si autor měl vždy rámcově vymezit obsah testu, v tomto případě byl obsah vymezen jako dvojný integrál. Dalším krokem je specifikace tohoto obsahu. V didaktice se nejčastěji používají dvě techniky, technika seznamu výukových cílů a technika specifikační tabulky (viz [2, 4, 5]). Při použití techniky seznamu výukových cílů se pro dané učivo formulují výukové cíle, jichž mělo být ve výuce dosaženo. Testové položky jsou potom vytvářeny tak, aby prověřovaly, že výukové cíle byly splněny. Jejich počet se stanovuje na základě výukového významu každého cíle. Při použití techniky specifikační tabulky se stanovují počty testových úloh, které ověřují různé úrovně osvojení učiva.

1.1 Technika seznamu výukových cílů

Autorkou byly stanoveny dva základní cíle. Jeden z cílů bylo ověření teoretických znalostí jako definice, předpoklady, vlastnosti dvojného (dvojnásobného) integrálu. Druhým cílem bylo ověření dovednosti dvojný (dvojnásobný) integrál vypočítat. Tato dovednost je závislá na vícero dílčích dovednostech, s nimiž korespondují dílčí cíle: ověřit znalost integrační oblasti, tabulkových integrálů, substituce a transformace do polárních souřadnic. Na základě těchto cílů je možné testové položky rozdělit do podskupin, se kterými budeme pracovat v celém následujícím textu. Rozdělení do skupin a podskupin zachycuje následující obrázek (Obrázek 1).



Obrázek 1: Rozdělení testových položek do podskupin

Testové položky náležející do podskupiny integrační oblast prověřují dovednost:

1. popsat graficky znázorněnou integrační oblast za pomoci množinového zápisu;
2. převést množinový zápis do grafické podoby;
3. přiřadit hranice integrace na základě množinového zápisu;
4. přiřadit hranice integrace na základě grafického znázornění;
5. zaměnit pořadí integrace.

Všechny výše zmiňované dovednosti jsou důležité pro získání konečného výsledku integrace. I kdyby student věděl, jak při výpočtu dvojného (dvojnásobného) integrálu postupovat, bez dovednosti správně popsat integrační oblast a bez dovednosti správně přiřadit hranice integrace by nikdy nemohl dojít ke konečnému výsledku.

Testové položky podskupiny tabulkový integrál prověřují dovednost použití tabulkového integrálu. Tyto testové položky byly navrhovány tak, aby je studenti mohli vyřešit bez jakýchkoli pomůcek a bez pomocných výpočtů. Proto se vždy jedná o příklady typu $\iint_K f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ – integrál ze součinu dvou elementárních funkcí $f(x)$ a $g(y)$. Prověření znalosti tabulkových integrálů a dovednosti jejich použití je opět důležité, jelikož bez nich se student není schopen dobrat konečného výsledku integrace.

Testové položky v podskupině substituce a transformace do polárních souřadnic ověřují dovednost studenta zvolit tu substituci, která integrand zjednoduší a usnadní či umožní jeho integraci. Testové položky týkající se transformace do polárních souřadnic ověřují nejen znalost příslušných postupů, ale také dovednost rozpoznat, kdy je použití transformace do polárních souřadnic vhodné.

Tabulka 1 zachycuje počty testových položek náležejících do výše popsaných skupin.

Tematická skupina otázek	**Tematická podskupina otázek**	**Počet otázek**
definice a základní pojmy, pravidla používání integrálu, základní vztahy a vlastnosti		44
výpočet dvojného (dvojnásobného) integrálu	integrační oblast	30
	tabulkový integrál	13
	substituce a transformace do polárních souřadnic	15

Tabulka 1: Rozdělení testových položek do skupin a jejich počty

1.2 Specifikační tabulka Testu připravenosti

Při plánování Testu připravenosti – tematického okruhu dvojný integrál byla sice použita technika seznamu výukových cílů a nikoli specifikační tabulky, ovšem pro další využití testu jistě není od věci testové položky rozčlenit na základě úrovně osvojení znalostí. Využijme pro to Niemierkovu taxonomii kognitivních cílů. Polský pedagog Bolesław Niemierko stanovil dvě základní úrovně osvojení, a to vědomostí a dovedností. Úroveň vědomostí dále rozdělil na zapamatování poznatků (osoba si vybavuje fakta, termíny, zákony, nezaměňuje ani nezkresluje je) a porozumění poznatkům (osoba dokáže zapamatované vědomosti předložit v jiné formě, uspořádat je a zestručnit). Úroveň dovedností dále rozdělil na používání vědomostí v typových situacích (osoba dovede používat vědomosti podle již známých vzorů) a v problémových situacích (osoba dovede používat vědomosti v dosud neznámých situacích) [8, s. 281 - 282]. Zařazení jednotlivých testových položek do těchto kategorií ukazuje následující tabulka 2.

Úroveň vědomostí a dovedností	**Čísla otázek**
A Zapamatování poznatků	1, 2, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 29, 45, 88, 92, 93, 94
B Porozumění poznatkům	4, 5, 8, 9, 16, 20, 22, 24, 25, 26, 27,28, 30, 31, 32, 55, 89, 90
C Používání vědomostí v typových situacích	33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49,50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82,83, 84, 85, 86, 87, 91, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102
D Používání vědomostí v problémových situacích	

Tabulka 2: Rozdělení testových položek dle Niemierkovy taxonomie kognitivních cílů

Nyní sestavme specifikační tabulku (Tabulka 3). Ta ukazuje, že asi 40% testových položek se zabývá definicemi, základními pojmy, pravidly používání dvojného (dvojnásobného) integrálu, základními vztahy a vlastnostmi. Tyto otázky testují především úroveň zapamatování a v menší (nikoli ale malé) míře dovednosti. Asi 60% testových položek se zabývá výpočtem dvojného (dvojnásobného) integrálu. Tyto otázky testují především dovednostní úroveň osvojení poznatků.

Obsah		**Počet úloh**	**Úroveň osvojení**		
			A	B	C
definice a základní pojmy, pravidla používání integrálu, základní vztahy a vlastnosti		44	17	15	12
výpočet dvojného (dvojnásobného) integrálu	integrační oblast	30	1	1	28
	tabulkový integrál	13	0	0	13
	substituce a transformace do polárních souřadnic	15	4	2	9
celkem		102	22	18	62

Tabulka 3: Specifikační tabulka Testu připravenosti

2 Sestavování Testu připravenosti

Jak již bylo řečeno výše, testové položky tématu dvojný integrál byly sestavovány na základě výukových cílů. V následující kapitole budou některé z testových položek z tohoto hlediska detailně rozebrány. Veškeré testové položky tématu dvojný integrál jsou uzavřenými úlohami, konkrétně jde o úlohy s výběrem odpovědí. Testovanému jsou nabízeny zpravidla tři až čtyři alternativní odpovědi, přičemž správná z nich může být jedna, ale i více.

2.1 Teorie dvojného (dvojnásobného) integrálu

Otázky v tomto oddílu se zabývají teorií dvojného, respektive dvojnásobného integrálu. Dotazují se na význam základních pojmů, na základní vlastnosti množiny integrace a integrandu vyplývající z příslušných definic a vět, na základní postupy při výpočtu.

1. Nechť jsou funkce f, g Riemannovsky integrovatelné na K a nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

   (a) $|\iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y| = \iint_K |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (b) $\iint_K [f(x,y) \cdot g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_K g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (c) $\iint_K c \cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c \cdot \iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (d) $\iint_K [f(x,y) \cdot g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \cdot \iint_K g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   Cílem této testové položky je prověření znalosti vlastností dvojného integrálu.

   - Správná je odpověď (c).
   - Odpověď (a) není správná, platí totiž
     $|\iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leq \iint_K |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
   - Odpověď (b) není správná. Tato rovnost neplatí, ale platí jiná rovnost
     $\iint_K [f(x,y) + g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_K g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

- Odpověď (d) není správná, tato vlastnost obecně není platná.

5. Za pomoci dvojného integrálu lze počítat:

   (a) obsah rovinného obrazce, který můžeme popsat jako omezenou množinu.

   (b) objem tělesa, jehož jednu podstavu tvoří omezená množina K a druhou podstavu tvoří graf omezené funkce nad K.

   (c) povrch tělesa, jehož jednu podstavu tvoří množina K a druhou podstavu tvoří graf funkce nad K.

   (d) objem koule o poloměru 4.

   Tato otázka má za cíl ověřit porozumění učivu. Pouhé umění integrál vypočítat, bez znalosti kdy a na co jej použít, je neúplné.

   - Odpověď (a) je správná, použijeme vzorec $\iint_K 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
   - Odpověď (b) je správná, použijeme vzorec $\iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li funkce $f(x,y) \geq 0$ pro všechna $(x,y) \in K$.
   - Odpověď (d) je správná, pomocí integrálu je možné spočítat objem rotačního tělesa. Konkrétně objem koule spočítáme dle následujícího vzorce:
   $$V = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$
   v našem případě se poloměr $r = 4$.
   - Odpověď (c) není srávná, povrch tělesa za pomoci dvojného integrálu nepočítáme.

33. Vyberte omezené množiny:

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$.

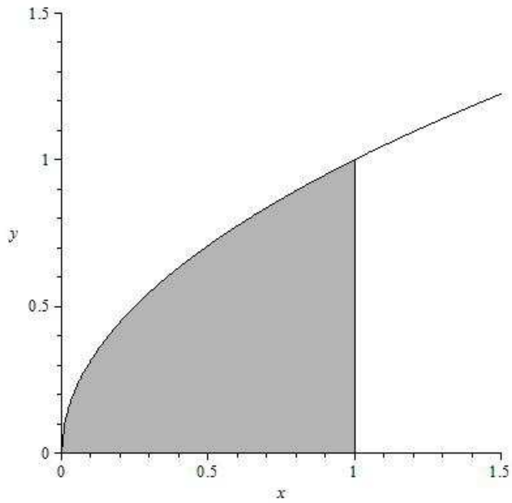
   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 0, y \geq x^2\}$.

   (d) ani jedna z uvedených možností.

Cílem otázek 33 až 38 je prověřit, zda testovaný rozpozná omezenou množinu, protože vlastní integrál lze počítat pouze přes omezenou množinu. Ovšem existuje i dvojný integrál nevlastní, který se počítá přes neomezenou množinu pomocí limity. S tímto se však studenti v kurzu Matematika 2 nesetkali.

- Odpověď (a) je správná, jelikož se jedná o mezikruží.
- Odpověď (b) není správná, protože funkce $y = \frac{1}{x}$ se pro x blížící se 0 blíží nekonečnu.
- Odpověď (c) není správná, protože tyto hranice vymezují oblast nad částí paraboly $y = x^2$ pro $x < 0$ a y není shora omezeno.
- Odpověď (d) není správná, protože odpověď (a) správná je.

41. Množina na obrázku



(a) je elementární pouze vzhledem k x.

(b) je elementární pouze vzhledem k y.

(c) je elementární.

(d) není elementární.

Cílem otázek 39 až 44 je zjistit, zda testovaný umí určit elementárnost množiny. Tato dovednost je potřebná pro správné určení mezí integrace.

- Správná odpověď je (c). Předpokládejme, že křivku na obrázku zapíšeme jako $y = \sqrt{x}$. Pak lze danou množinu popsat dvojím způsobem. Buď uvažovat, že je elementární vzhledem k x:
  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Nebo uvažovat, že je elementární vzhledem k y: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
- Odpověď (a) není správná, jelikož množinu lze vnímat také jako elementární vzhledem k y.
- Odpověď (b) není správná, jelikož množinu lze vnímat také jako elementární vzhledem k x.
- Odpověď (d) není správná, jelikož množinu lze vnímat jako elementární buď vzhledem k x, nebo vzhledem k y.

2.2 Výpočet dvojného (dvojnásobného) integrálu

Otázky v oddílu výpočet dvojného (dvojnásobného) integrálu se na rozdíl od předchozích věnují již primárně praktickým znalostem a dovednostem, i když teorie a praxe jsou vzájemně propojeny a bez teoretických znalostí by ani praktické výpočty nebyly možné. Tyto otázky můžeme rozdělit na tři již dříve zmiňované pododdíly: integrační oblast, tabulkový integrál, substituce a transformace do polárních souřadnic.

2.2.1 Integrační oblast

Pro správný výpočet dvojného (dvojnásobného) integrálu je nepostradatelná dovednost správně popsat integrační oblast, ať už je zadána pomocí množinového zápisu, nebo pomocí obrázku. Této problematice se věnují otázky v pododdílu integrační oblast.

45. Je-li funkce f spojitá na uzavřeném obdélníku $N = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, pak platí:

(a) $\iint_N f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(b) $\iint_N f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(c) $\iint_N f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(d) $\iint_N f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

Tato testová položka prověřuje znalost Fubiniovy věty pro obdélník (Příloha, Věta 1) a zároveň prověřuje dovednost přiřadit meze integrační oblasti k odpovídajícím proměnným, přes které integrujeme.

- Odpovědi (a) a (b) jsou správné, dle Fubiniovy věty pro obdélník.
- Odpovědi (c) a (d) nejsou správné, protože nepřiřazují meze integrační oblasti ke správným proměnným, přes které integrujeme.

46. Změňte pořadí integrace $\int_0^3 (\int_0^{3-x} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(a) $\int_0^3 (\int_0^{y-3} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(b) $\int_0^3 (\int_0^{-y-3} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

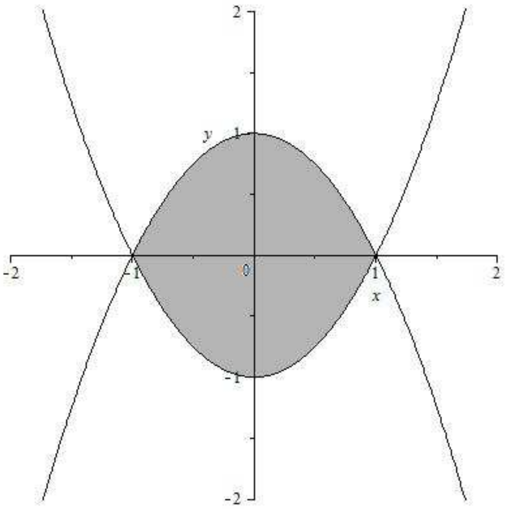
(c) $\int_0^3 (\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

Cílem této otázky je prověřit dovednost zaměnit pořadí proměnných, podle kterých integrujeme. Ověřujeme tak znalost Fubiniovy věty pro měřitelnou množinu (Příloha, Věta 2). Pouhá změna pořadí integrace totiž může výrazně zjednodušit výpočet integrálu.

- Odpověď (c) je správná. Integrační oblast máme zadanou jako $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x\}$. Proměnnou y omezuje osa x a přímka $y = 3 - x$. Proměnná x je omezena čísly 0 a 3. Při změně pořadí integrace vyjádříme přímku $y = 3 - x$ tak, aby omezovala proměnnou x, tj. $x = -(y - 3) = 3 - y$. Zbylé meze doplníme tak, aby odpovídaly zadané integrační oblasti.

- Odpověď (a) není správná, přímka $x = y - 3$ by odpovídala přímce $y = 3 + x$.
- Odpověď (b) není správná, přímka $x = -y - 3$ by odpovídala přímce $y = -3 - x$.

60. Dvojný integrál z f přes množinu zakreslenou na obrázku lze počítat jako



(a) $\int_{-1}^{1} (\int_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(b) $\int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y+1}} (\int_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

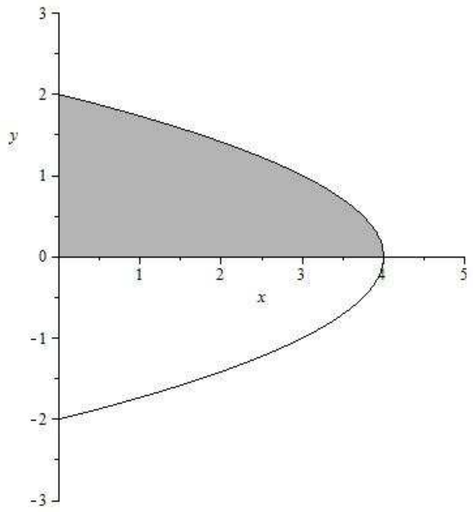
(c) $\int_{-1}^{1} (\int_{0}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} (\int_{x^2-1}^{0} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

Cílem otázek 59 až 63 je prověřit dovednost k integrační oblasti vyjádřené obrázkem správně přiřadit odpovídající zápis dvojnásobného integrálu. Analogické jsou otázky 55 až 58, jejichž cílem je prověřit dovednost přiřadit k integrační oblasti vyjádřené pomocí množinového zápisu odpovídající zápis dvojného integrálu.

- Správná odpověď je (c). Hranice integrace odpovídají množině na obrázku. Množina je v tomto případě rozdělena na dvě množiny elementární vzhledem k x. Výsledek poté obdržíme součtem dvojnásobného integrálu přes první část množiny a dvojnásobného integrálu přes druhou část množiny. Přes danou množinu by bylo možné spočítat dvojnásobný integrál také následujícím způsobem: $\int_{-1}^{1}(\int_{x^2-1}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

- Odpověď (a) není správná, jelikož kartézským součinem $x = \langle -1, 1\rangle$ a $y = \langle -1, 1\rangle$ získáme čtvercovou množinu, ale množina na obrázku čtvercová není.
- Odpověď (b) není správná, protože hranice integrace $\sqrt{y-1}$ neodpovídá množině na obrázku.

73. Zvolte množinový zápis zachycující šedou plochu na obrázku



(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{-x-4}\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{-x+4}\}$.

(c) $\{(x,y)) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x-4}\}$.

(d) ani jedna z uvedených možností

Cílem otázek 64 až 74 je prověřit dovednost studenta popsat graficky vyjádřenou integrační oblast za pomoci množinového zápisu. Tato dovednost je bezpomínečně nutná ke správnému určení hranic integrace.

- Správná odpověď je (b).

- Odpověď (a) není správná, jelikož $\sqrt{-x-4}$ odkazuje na část paraboly, která je sice stejně orientovaná, jako parabola na obrázku, ale její vrchol leží v bodě $[-4,0]$.
- Odpověď (c) není správná. Tento množinový zápis zachycuje jeden jediný bod $[4,0]$.
- Odpověď (d) není správná, protože odpověď (b) správná je.

2.2.2 Tabulkový integrál

Všechny otázky pododdílu tabulkový integrál prověřují znalost tabulkového integrálu, jelikož je pro výpočet dvojného (dvojnásobného) integrálu nepostradatelná.

87. Zvolte správný výsledek následujícího integrálu $\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$, kde $\langle a,b\rangle \subset \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

    (a) $[\frac{-\cos x}{\sin x}]_a^b [y]_c^d$.

    (b) $[-\ln|\cos x|]_a^b [y]_c^d$.

    (c) $[\operatorname{tg} x]_a^b [y]_c^d$.

    (d) ani jedna z uvedených možností

    Cílem testových položek tohoto typu je prověřit dovednost studenta provést integraci funkce za pomoci tabulkového integrálu.

    - Správná odpověď je (b). Využíváme zde okolnosti, že čitatel zlomku je zároveň opačnou hodnotou výsledku derivace jmenovatele. Jestliže derivace $\cos x$ je rovna $-\sin x$, potom integrál podle x ze zlomku $\frac{\sin x}{\cos x}$ musí být dle tabulkového integrálu roven $[-\ln|\cos x|]_a^b$.
    - Odpověď (a) není správná. V tomto případě byly funkce $\sin x$ a $\cos x$ integrovány podle x každá zvlášť a výsledky integrace byly dány do podílu, tak jako původní funkce. Tento postup ale není možný.

- Odpověď (c) není správná. Funkce $\mathrm{tg}\, x$ je definována jako $\frac{\sin x}{\cos x}$, ale neproběhla zde integrace podle x.
- Odpověď (d) není správná, jelikož odpověď (b) správná je.

2.2.3 Substituce a transformace do polárních souřadnic

Testové položky v tomto pododdílu se zabývají teoretickými a praktickými znalostmi o transformaci do polárních souřadnic a praktickými znalostmi o substituci.

93. Provedeme-li transformaci souřadnic integrálu $\iint_{B_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ a J je jakobián této transformace, výsledný integrál bude vypadat následovně:

    (a) $\iint_{B_{uv}} f(g(u,v), h(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

    (b) $\iint_{B_{uv}} f(g(u,v), h(u,v))J\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

    (c) $\iint_{B_{uv}} f(g(u,v), h(u,v))|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

    Otázky 88 až 95 se zabývají transformací do polárních souřadnic. Konkrétně tato položka prověřuje znalost věty o transformaci souřadnic ve dvojném integrálu (Příloha, Věta 3).

    - Vzorec pro transformovaný integrál je správně zapsán v odpovědi (c).
    - Odpověď (a) není správná, funkce $f(g(u,v), h(u,v))$ musí být vynásobena absolutní hodnotou Jacobiho determinantu.
    - Odpověď (b) není správná, funkce $f(g(u,v), h(u,v))$ je sice vynásobena Jacobiho determinantem, ovšem musí být vynásobena jeho absolutní hodnotou.

96. Jaký první krok byste provedli při výpočtu následujícího integrálu $\iint_M \sqrt{16 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 16\}$?

(a) Substituci $t = 16 - x^2 - y^2$.

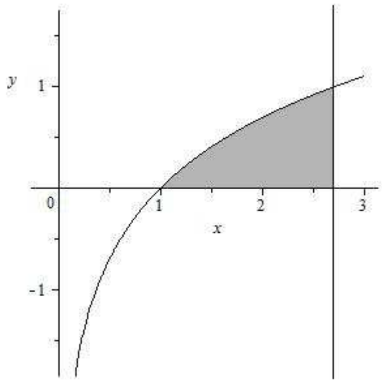
(b) Transformaci do polárních souřadnic $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$.

(c) Transformaci do polárních souřadnic $x = \rho \sin \varphi, y = \rho \cos \varphi$.

Cílem této testové položky je prověřit dovednost volby takového postupu, který povede k usnadnění výpočtu zadaného integrálu. Této problematice se věnují otázky 96 a 97.

- Správná odpověď je (b).
- Odpověď (a) není správná, protože ve dvojném integrálu nelze substituci vůbec použít. A konkrétně tato substituce by nám ani po převodu na dvojnásobný integrál nepomohla.
- Odpověď (c) není správná, jelikož substituce x a y na goniometrické funkce je zvolena nevhodně. Je třeba si uvědomit, že při pohybu po jednotkové kružnici x-ové souřadnice popisuje funkce cos a y-ové funkce sin. Substitucí $x = \rho \sin \varphi$, $y = \rho \cos \varphi$ bychom nedospěli k transformaci do polárních souřadnic.

102. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\iint_M \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq \ln x, x \leq \mathrm{e}\}$ (viz obrázek)?



(a) $t = \ln x$

(b) $t = \mathrm{e}$

(c) $t = x + y$

(d) nemusíme použít substituci

Problematice volby správné substituce se věnují otázky 98 až 102. Cílem této testové položky je prověřit, že student chápe, jak funguje substituce při výpočtu dvojného (dvojnásobného) integrálu. Student musí vědět, že substituuje v rámci integrandu a rozhodně nesubstituuje za funkce tvořící hranice integrační oblasti, to by nám nijak nepomohlo. Dále tato otázka prověřuje, zda student dovede posoudit potřebu substituovat.

- Odpověď (c) je správná, jelikož $\int_1^{\mathrm{e}} (\int_0^{\ln x} \mathrm{e}^{x+y} \mathrm{d}y)\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (\int_x^{\ln x + x} \mathrm{e}^{t} \mathrm{d}t)\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} [\mathrm{e}^t]_x^{\ln x + x}\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (\mathrm{e}^{\ln x + x} - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = (\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}) - (\mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}) - (\mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}(\mathrm{e} - 2) + \mathrm{e}$.
- Odpověď (d) je správná, jelikož $\int_1^{\mathrm{e}} (\int_0^{\ln x} \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{y} \mathrm{d}y)\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x [\mathrm{e}^y]_0^{\ln x}\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\ln x} - \mathrm{e}^0)\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = (\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}) - (\mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}) - (\mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}(\mathrm{e} - 2) + \mathrm{e}$.

- Odpověď (a) není správná, protože funkce $y = \ln x$ tvoří hranici integrační oblasti a tato substituce by nám nijak nepomohla při zjednodušování integrandu.
- Odpověď (b) není správná, poněvadž záměna konstanty e za proměnnou t nemá smysl.

3 Soubor testových položek

Tato kapitola obsahuje kompletní soubor testových položek, které jsou rozčleněny do skupin na základě výukových cílů, jak již bylo zmiňováno výše (Obrázek 1).

3.1 Teorie dvojného (dvojnásobného) integrálu

1. Nechť jsou funkce f, g Riemannovsky integrovatelné na K a nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

   (a) $|\iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y| = \iint_K |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (b) $\iint_K [f(x,y) \cdot g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_K g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (c) $\iint_K c \cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c \cdot \iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (d) $\iint_K [f(x,y) \cdot g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \cdot \iint_K g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. Co znamená pojem dvojnásobný integrál?

   (a) Jedná se o ekvivalentní termín k termínu dvojný integrál.

   (b) Jedná se o dva jednorozměrné integrály, jejichž pomocí je možné počítat dvojný integrál.

   (c) Takový termín neexistuje.

3. V případě transformace kartézských souřadnic x, y do polárních souřadnic $x = x_0 + \rho\cos\varphi, y = y_0 + \rho\sin\varphi$ dává jakobián hodnotu:

   (a) $(x_0 + y_0) \cdot \rho$.

   (b) ρ^2.

   (c) ρ.

   (d) ani jedna z uvedených možností.

4. Při výpočtu dvojného integrálu převodem na dvojnásobný integrál integrujeme nejprve podle jedné proměnné a druhou považujeme za konstantu, výsledek pak integrujeme podle zbývající proměnné. Záleží na tom, podle které proměnné budeme integrovat nejdříve?

   (a) Ne, ačkoli se postup výpočtu liší, výsledek bude nakonec stejný.

   (b) Ano, nejdříve vždy integrujeme podle x.

   (c) Ano, nejdříve vždy integrujeme podle y.

   (d) Ano, záleží na tom, jak vypadá integrační obor.

5. Za pomoci dvojného integrálu lze počítat:

   (a) obsah rovinného obrazce, který můžeme popsat jako omezenou množinu.

   (b) objem tělesa, jehož jednu podstavu tvoří omezená množina K a druhou podstavu tvoří graf omezené funkce nad K.

   (c) povrch tělesa, jehož jednu podstavu tvoří množina K a druhou podstavu tvoří graf funkce nad K.

   (d) objem koule o poloměru 4.

6. Množina, na níž integrujeme, musí být:

   (a) integrovatelná.

   (b) diskrétní.

   (c) omezená.

   (d) konvexní.

7. Obsah rovinného obrazce M spočteme pomocí dvojného integrálu následujícím způsobem:

   (a) obsah rovinného obrazce M pomocí dvojného integrálu nelze vypočítat.

   (b) $\iint_M y \mathrm{d}x$.

(c) $\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(d) $\iint_M x\mathrm{d}y$.

8. Co získáte spočtením dvojného integrálu ze spojité funkce na kompaktní množině?

   (a) primitivní funkci

   (b) graf funkce

   (c) reálné číslo

   (d) kladné číslo

   (e) množinu funkcí

9. Zvolte formulaci odpovídající některé vlastnosti dvojného integrálu.

   (a) Nechť jsou funkce $f(x, y)$ a $g(x, y)$ Riemannovsky integrovatelné na množině K, pak také součin těchto funkcí je Riemannovsky integrovatelný na množině K a tento součin je roven součinu dvojného integrálu z funkce $f(x, y)$ na množině K a dvojného integrálu z funkce $g(x, y)$ na množině K.

   (b) Nechť jsou funkce $f(x, y)$ a $g(x, y)$ Riemannovsky integrovatelné na množině K a nechť pro všechna (x, y) z množiny K platí, že funkce $f(x, y)$ je menší nebo rovna funkci $g(x, y)$, potom dvojný integrál z funkce $f(x, y)$ na množině K je menší nebo roven dvojnému integrálu z funkce $g(x, y)$ na množině K.

   (c) Nechť jsou funkce $f(x, y)$ a $g(x, y)$ Riemannovsky integrovatelné na množině K, pak také součet těchto funkcí je Riemannovsky integrovatelný na množině K a tento součet je roven součinu dvojného integrálu z funkce $f(x, y)$ na množině K a dvojného integrálu z funkce $g(x, y)$ na množině K.

   (d) Ani jedna z uvedených možností.

10. Uvažujme tvrzení: Jestliže je funkce na kompaktní množině M spojitá, pak je na M integrovatelná. Toto tvrzení

    (a) platí.

    (b) neplatí.

    (c) platí, pouze pokud je funkce prostá.

    (d) platí, pouze pokud je množina konvexní.

11. Má-li funkce na kompaktní množině M jen konečně mnoho bodů nespojitosti a je na této množině omezená, pak je na M také integrovatelná. Uvedené tvrzení

    (a) neplatí.

    (b) platí.

    (c) platí, pouze pokud je M souvislá.

    (d) platí, pouze pokud je funkce nezáporná na M.

12. Infimum množiny všech funkčních hodnot funkce f na množině M je větší nebo rovno supremu množiny všech funkčních hodnot f na M. Uvedené tvrzení

    (a) platí.

    (b) neplatí, protože na množině M nelze zároveň nalézt infimum i supremum.

    (c) neplatí, protože platí opačná nerovnost.

    (d) platí pouze v případě, že f je spojitá na M.

13. Nechť je funkce f je spojitá na množině $K \subset \mathbb{R}^2$. Potom $\iint_K f(x,y)\,dx\,dy$ existuje v případě, že K je

    (a) pouze uzavřený obdélník.

    (b) omezená množina.

    (c) libovolná množina z $\mathbb{R}^2$.

(d) kompaktní množina.

14. Dvojný Riemannův integrál existuje, pokud:

    (a) existuje alespoň horní nebo alespoň dolní Riemannův integrál.

    (b) existují horní i dolní Riemannův integrál.

    (c) existují horní i dolní Riemannův integrál a jsou si rovny.

15. Omezená funkce f je na obdélníku K Riemannovsky integrovatelná, pokud:

    (a) $\underline{\iint_K} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_K} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

    (b) $\underline{\iint_K} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \overline{\iint_K} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

    (c) $\underline{\iint_K} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \overline{\iint_K} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

16. Je-li f omezená na uzavřené omezené množině K, může nastat $\iint f(x,y)\,dx\,dy = \infty$?

    (a) Ano, pokud funkce nebude spojitá na K.

    (b) Ne.

    (c) Ano.

    (d) Ano, pokud K není souvislá

17. Kdy je funkce f integrovatelná na uzavřeném obdélníku K? Je-li

    (a) f elementární na K.

    (b) skoro všude spojitá na K.

    (c) je-li f konstantní na K.

    (d) je-li f neomezená na K.

18. Platí-li $\underline{\iint_K} f(x,y)dxdy < \overline{\iint_K} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, pak:

    (a) funkce $f(x,y)$ je integrovatelná na K.

(b) funkce $f(x,y)$ je spojitá na K.

(c) funkce $f(x,y)$ není integrovatelná na K.

19. Co je to jakobián?

(a) Jacobiova konstanta.

(b) Jacobiova matice.

(c) Jacobiův determinant.

20. Platí $\iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq \pm\infty$, jestliže funkce f je omezená a množina K je uzavřená?

(a) Ano.

(b) Ne.

21. Jak postupujete při výpočtu dvojného integrálu?

(a) Nejdříve se integruje podle x a posléze podle y.

(b) Nejdříve se integruje podle y a posléze podle x.

(c) Na pořadí integrace nezáleží.

(d) Pořadí integrace záleží na tvaru integrační oblasti.

22. Dokážeme pomocí dvojného integrálu spočítat obsah libovolné $K \subset \mathbb{R}^2$?

(a) Ne.

(b) Ano.

(c) Ano, pokud je K omezená.

(d) Ano, pokud je K souvislá.

23. Co vyjadřuje $\iint_K \sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

(a) Obsah množiny K.

(b) Objem tělesa, jehož jednu podstavu tvoří množina K a druhou tvoří graf funkce f nad K.

(c) Obsah plochy tvořené grafem funkce f nad množinou K.

24. Lze pomocí dvojného integrálu spočítat obsah plochy tvořené grafem hladké funkce f nad množinou K?

    (a) Ano.

    (b) Ne.

    (c) Ano, ale pouze v případě, že K je obdélník.

25. Výraz $\iint_K 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde K je obdélník, je roven:

    (a) obsahu množiny K.

    (b) objemu kvádru s podstavou K a výškou 1.

    (c) 1.

    (d) povrchu kvádru s podstavou K a výškou 1.

26. Je možné spočítat dvojný integrál z funkce $f(x, y)$ na jiné než obdélníkové množině?

    (a) Ano.

    (b) Ne.

    (c) Záleží na vlastnostech množiny a funkce f.

27. Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá na uzavřené omezené množině A, potom:

    (a) existuje $\iint_A f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

    (b) je A elementární.

    (c) je vždy možné použít transformaci do polárních souřadnic.

28. Kdy je výraz $\iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ roven nule, jestliže B je uzavřený obdélník?

   (a) Není-li funkce f spojitá na B.

   (b) Je-li funkce f záporná na B.

   (c) Je-li funkce f nulová na B.

   (d) Je-li funkce f rovna nule alespoň v jednom bodě z B.

29. Funkce $f(x,y)$ je Riemannovsky integrovatelná na kompaktní množině K, jestliže

   (a) $\underline{\iint_K} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_K} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (b) existuje množina dolních a množina horních Riemannových součtů funkce f na K.

   (c) f je spojitá na K.

   (d) f je spojitá na K s výjimkou jednoho bodu $(a,b) \in K$.

30. Nechť K je omezená a uzavřená množina. Za jakého předpokladu existuje $\iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

   (a) Nabývá-li funkce f na K globálních extrémů.

   (b) Je-li funkce f na K spojitá.

   (c) Je-li funkce f na K omezená shora.

   (d) Jestliže $f(x,y) = \operatorname{sgn}(xy)$ na K.

31. Výraz $\iint_K 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde K je omezená množina, je roven:

   (a) obsahu množiny K.

   (b) objemu tělesa s podstavou K a výškou 1.

   (c) 1.

   (d) ani jedna z uvedených možností.

32. Výraz $\iint_K 0 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde K je obdélník, je roven:

(a) obsahu množiny K.

(b) objemu kvádru s podstavou K a výškou 1.

(c) 0.

(d) ani jedna z uvedených možností.

33. Vyberte omezené množiny:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 0, y \geq x^2\}$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

34. Vyberte omezené množiny:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 0, y \leq -x^2\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 5, y \leq \ln x\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0, y \geq 3^x\}$.

(d) ani jedna z uvedených možností

35. Vyberte množiny, které nejsou omezené:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 4\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 16\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x}{2} \leq y, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 4\}$.

36. Vyberte omezené množiny:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y \leq -3x, 0 \leq x \leq 2\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y, y \geq -3x, 0 \leq x \leq 2\}$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq y \geq -3x, 0 \leq x \leq 2\}$.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y \leq -3x, 0 \leq x \leq 2\}$.

37. Vyberte množiny, které nejsou omezené:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \sqrt{9-y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -x^2 \leq y \leq 0\}$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 0, -x^2 \leq y \leq 0\}$.

38. Vyberte množiny, které nejsou omezené:

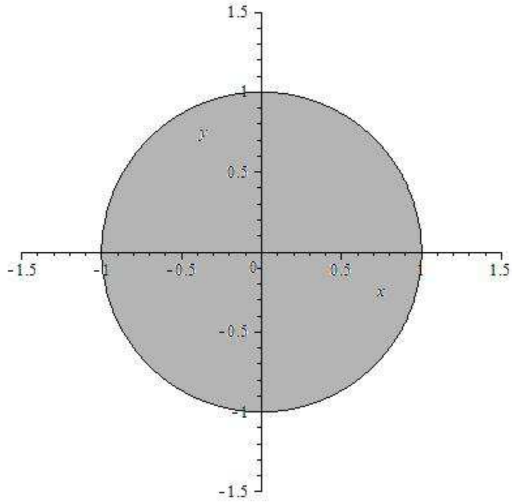
(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9, -2 \leq y \leq 2\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 9\}$.

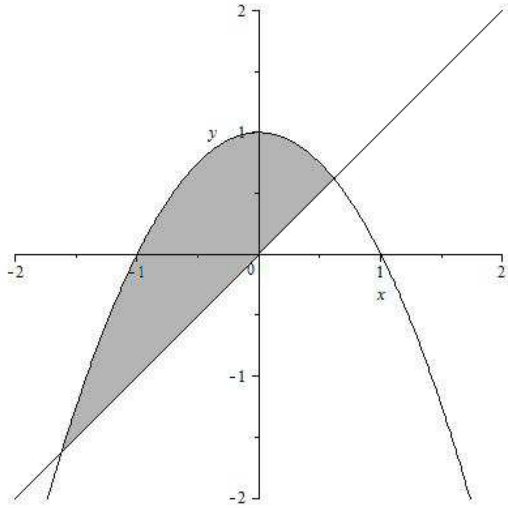
(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 9, -3 \leq y \leq 8\}$.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 9, -2 \leq y \leq 2\}$.

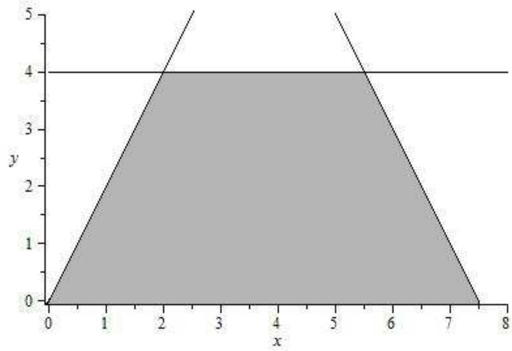
39. Která z následujících množin je elementární vzhledem k y a zároveň není elementární vzhledem k x?



(a)

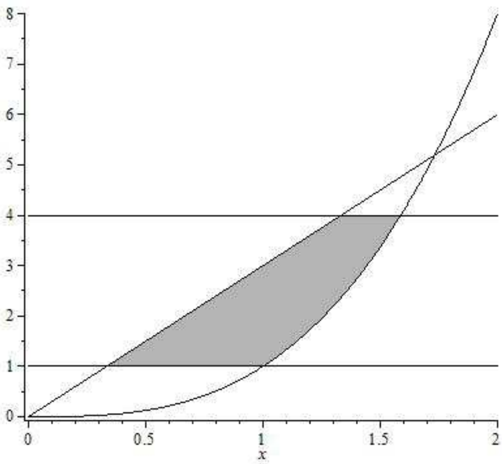


(b)



(c)

40. Množina na obrázku je elementární vzhledem k:

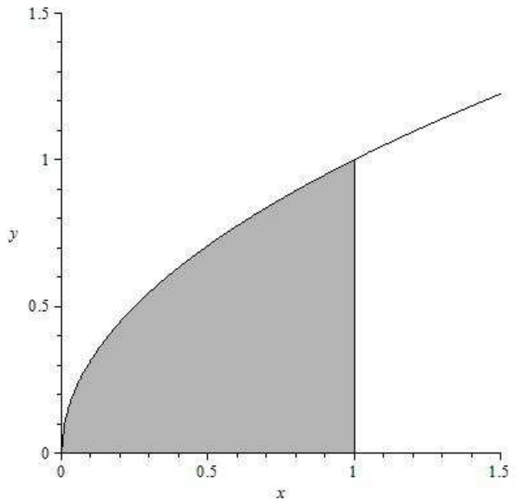


(a) x.

(b) y.

(c) tato množina není elementární ani vzhledem k x ani k y.

41. Množina na obrázku



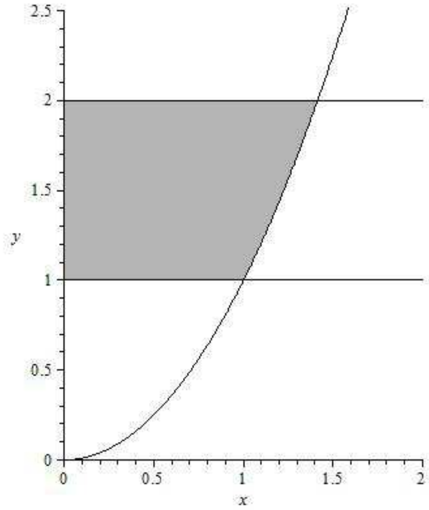
(a) je elementární pouze vzhledem k x.

(b) je elementární pouze vzhledem k y.

(c) je elementární.

(d) není elementární.

42. Množina na obrázku



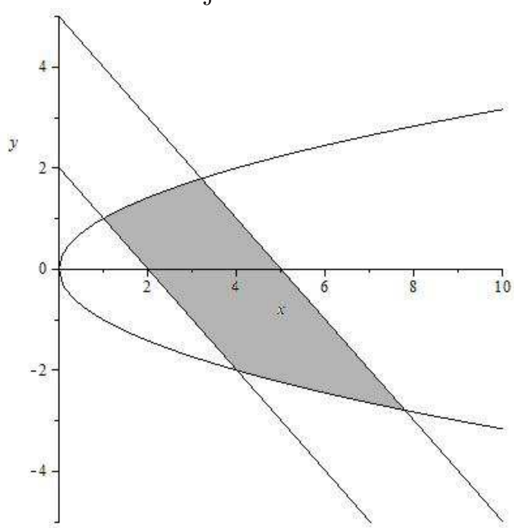
(a) je elementární pouze vzhledem k x.

(b) je elementární pouze vzhledem k y.

(c) je elementární.

(d) není elementární.

43. Daná množina je:



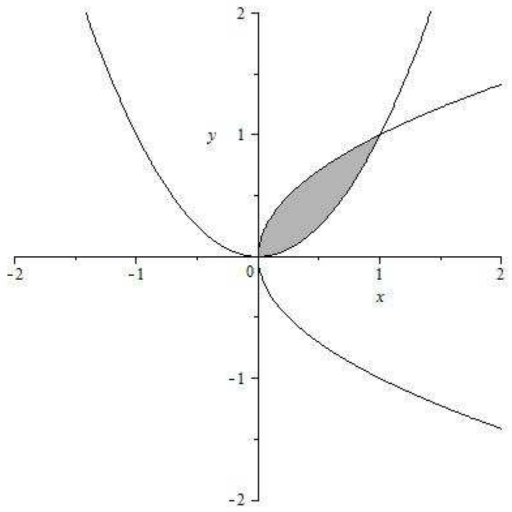
(a) elementární vzhledem k x.

(b) elementární vzhledem k y.

(c) elementární.

(d) není elementární.

44. Množina na obrázku



(a) je elementární.

(b) je elementární pouze vzhledem k x.

(c) je elementární pouze vzhledem k y.

(d) není elementární.

3.2 Výpočet dvojného (dvojnásobného) integrálu

3.2.1 Integrační oblast

45. Je-li funkce f spojitá na uzavřeném obdélníku $N = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, pak platí:

(a) $\iint_N f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(b) $\iint_N f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(c) $\iint_N f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(d) $\iint_N f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

46. Změňte pořadí integrace $\int_0^3 (\int_0^{3-x} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(a) $\int_0^3 (\int_0^{y-3} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(b) $\int_0^3 (\int_0^{-y-3} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(c) $\int_0^3 (\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

47. Zaměňte pořadí integrace $\int_0^3 (\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

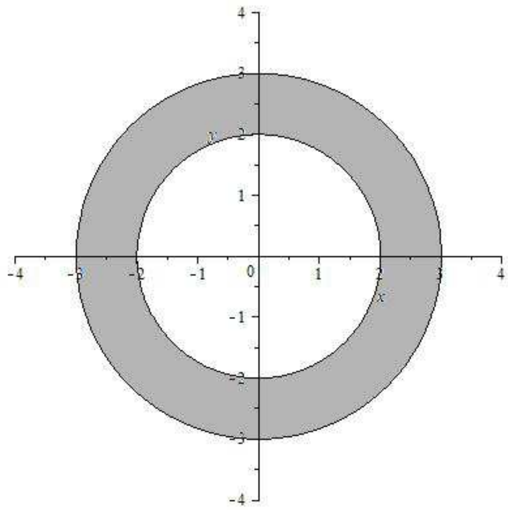
(a) $\int_0^9 (\int_{\sqrt{y}}^3 f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(b) $\int_0^9 (\int_{\sqrt{y}}^3 f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

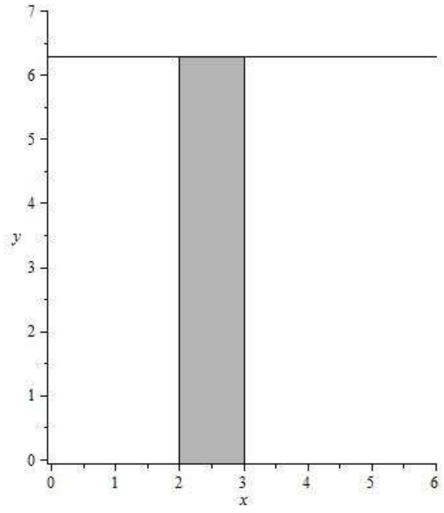
(c) $\int_0^3 (\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

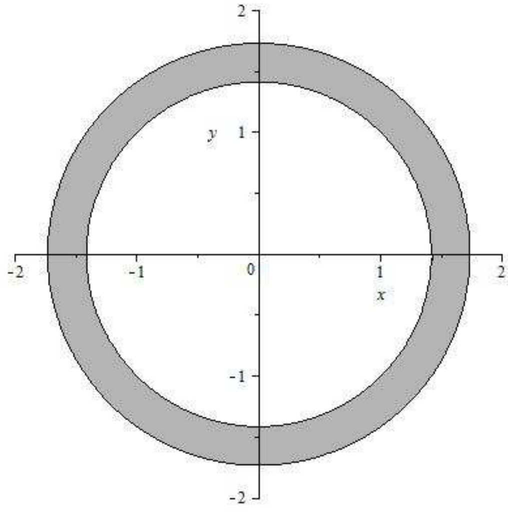
(d) $\int_0^3 (\int_{\sqrt{y}}^3 f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

48. Kterou množinu lze pomocí polárních souřadnic zadat podmínkami $\rho \in \langle 2, 3\rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$?



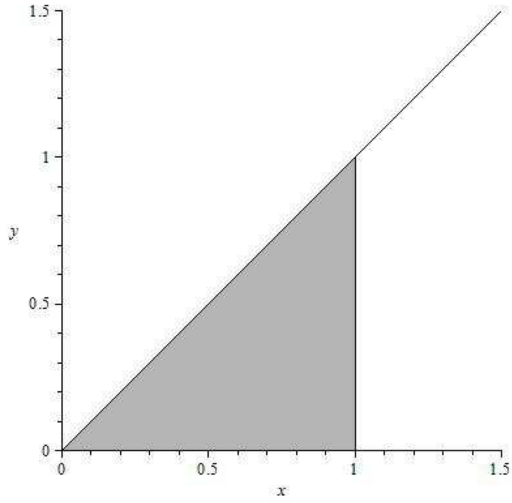
(a)

(b) 

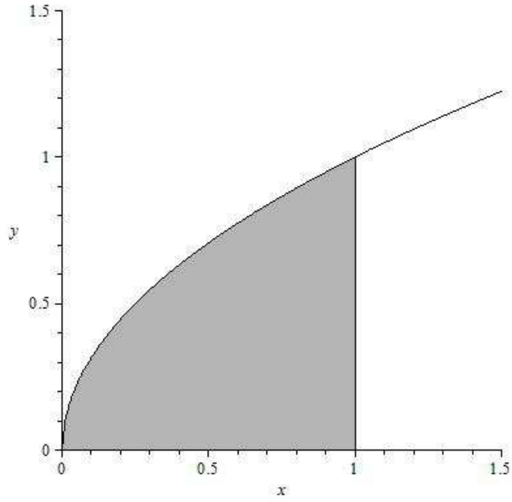
(c) 

(d) ani jedna z uvedených možností

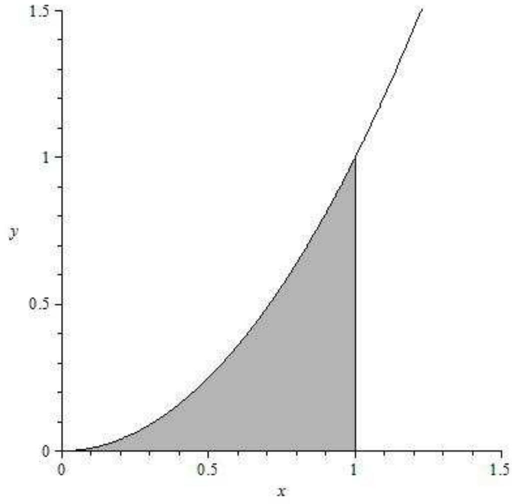
49. Která množina lze zadat podmínkami $x \in \langle \sqrt{y}, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle$?



(a)

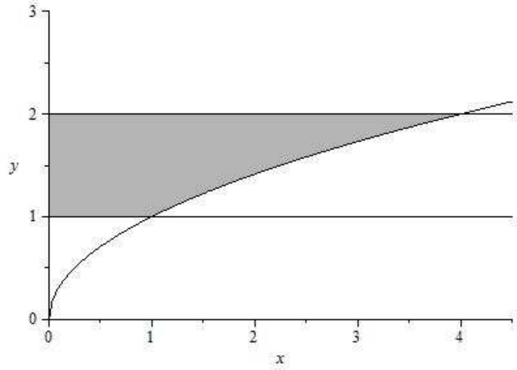


(b)

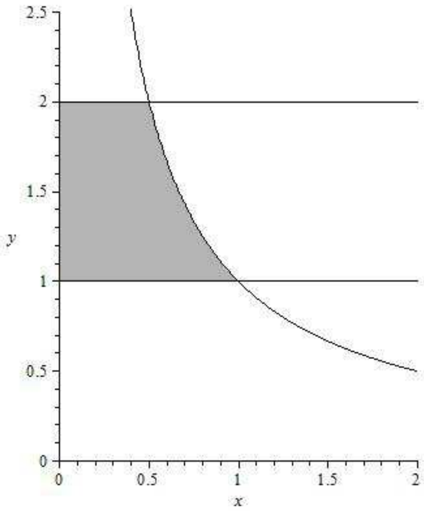


(c)

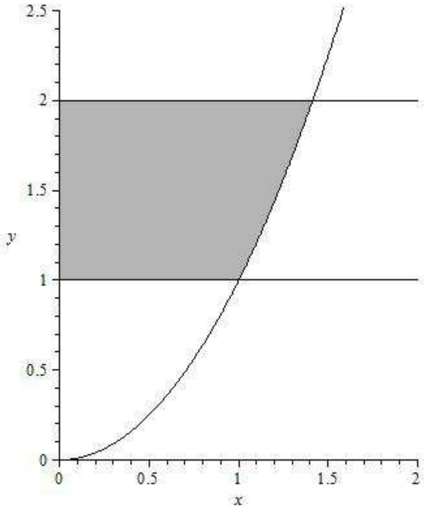
50. Množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq y^2, 1 \leq y \leq 2\}$ lze zakreslit jako:



(a)



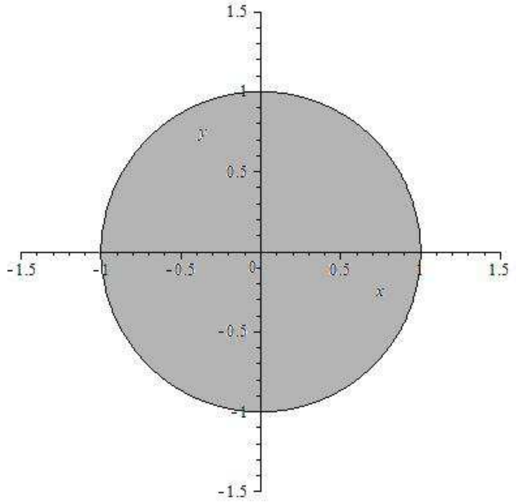
(b)



(c)

(d) ani jedna z uvedených možností

51. Množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 + x^2 \leq 1\}$ lze vyjádřit podmínkami:



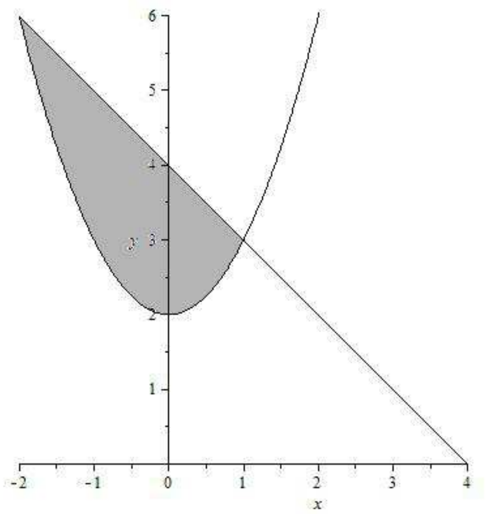
(a) $x \in \langle -1, 1\rangle, y \in \langle -\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\rangle$.

(b) $x \in \langle -\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\rangle, y \in \langle -1, 1\rangle$.

(c) $\rho \in \langle 0, 1\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ pro $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

52. Jak lze vyjádřit množina zvýrazněná na obrázku:



(a) $x \in \langle -2, 1 \rangle, y \in \langle x^2 - 2, 4 + x \rangle$.

(b) $x \in \langle -2, 1 \rangle, y \in \langle x^2 + 2, 4 - x \rangle$.

(c) $x \in \langle -\sqrt{y-2}, 4 - y \rangle, y \in \langle 2, 4 \rangle$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

53. Jestliže $\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 (\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$, potom

(a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le \sqrt{x}, 0 \le y \le 4\}$.

(b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 4, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$.

(c) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le xy \le 4\sqrt{x}\}$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

54. Jestliže $\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^7 (\int_0^{\frac{1}{x+3}} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$, potom

(a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 7, 0 \le y \le \frac{1}{x+3}\}$.

(b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 7, 0 \le y \le \frac{1}{x-3}\}$.

(c) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 7, 0 \le y \le \frac{1}{x} + 3\}$.

55. Jestliže $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ je uzavřený obdélník, potom $\iint_K f(x,y)\,dx\,dy =$

(a) $\int_b^d (\int_a^c f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(b) $\int_a^b (\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(c) $\int_a^b (\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

56. Jestliže $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x \le 5, 4 \le y \le 7\}$, potom $\iint_K \frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

(a) $\int_1^5 (\int_4^7 \frac{1}{xy}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(b) $\int_4^7 (\int_1^5 \frac{1}{xy}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(c) $\int_1^4 (\int_5^7 \frac{1}{xy}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(d) $\int_4^7 (\int_1^5 \frac{1}{xy}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

57. Jestliže $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3 \leq x \leq 12, 1 \leq y \leq 2\}$,

potom $\iint_M (3x^2 - y^{-4})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

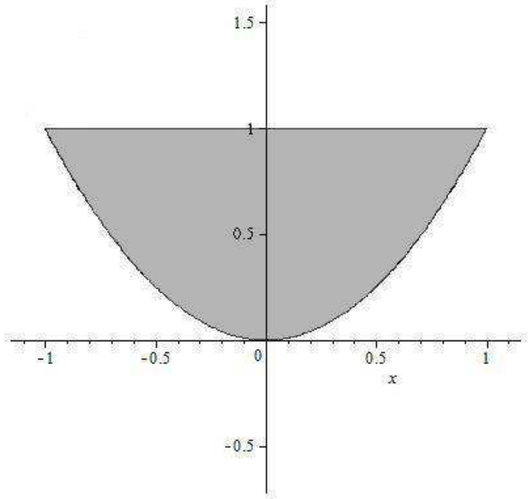
(a) $\int_3^{12} (\int_1^2 (3x^2 - y^{-4})\,\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(b) $\int_1^2 (\int_3^{12} (3x^2 - y^{-4})\,\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(c) $\int_1^2 (\int_3^{12} (3x^2 - y^{-4})\,\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

58. Jestliže $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y, y = 1\}$ (viz obrázek),

pak $\iint_M f(x, y)\, dx\, dy =$



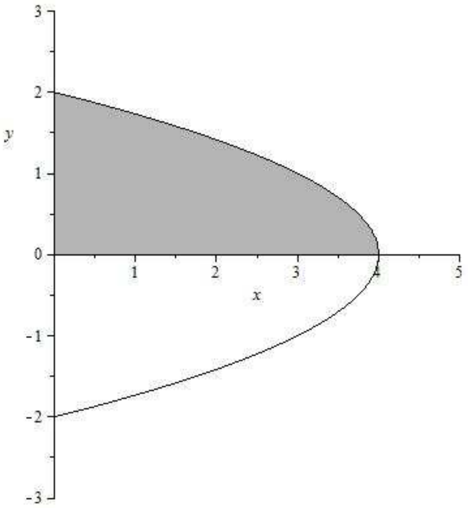
(a) $\int_0^1 (\int_{-\sqrt{x^2}}^{\sqrt{x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(b) $\int_{-1}^1 (\int_{x^2}^1 f(x, y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(c) $\int_0^1 (\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

59. Dvojný integrál z funkce f přes množinu zakreslenou na obrázku lze počítat jako:

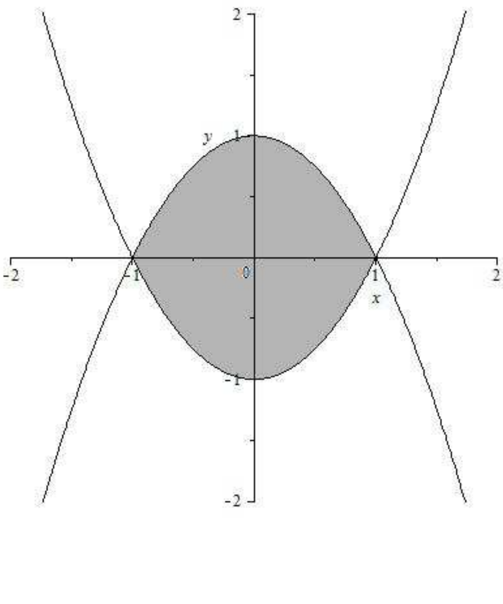


(a) $\int_0^4 (\int_0^{\sqrt{4-x}} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x.$

(b) $\int_0^4 (\int_0^{\sqrt{4-x}} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y.$

(c) $\int_0^4 (\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x.$

60. Dvojný integrál z f přes množinu zakreslenou na obrázku lze počítat jako

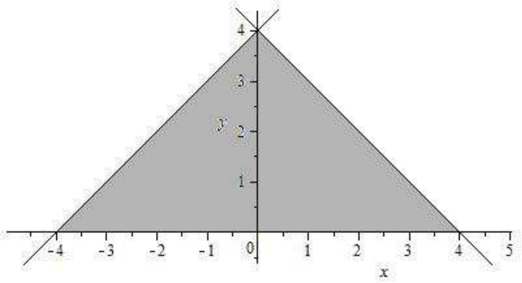


(a) $\int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x.$

(b) $\int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y+1}} (\int_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x.$

(c) $\int_{-1}^{1} (\int_{0}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} (\int_{x^2-1}^{0} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x.$

61. Kterým z následujících způsobů spočítáme obsah šedé plochy na obrázku?



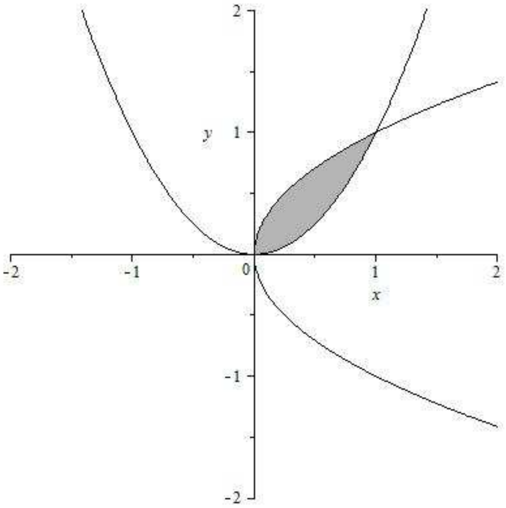
(a) $\int_{0}^{4} (\int_{-x+4}^{x+4} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x.$

(b) $\int_{0}^{4} (\int_{-x+4}^{0} f(x,y)dy)dx + \int_{0}^{4} (\int_{0}^{x+4} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x.$

(c) $\int_{-4}^{4} (\int_{4-y}^{y-4} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y.$

(d) ani jedna z uvedených možností

62. Kterým z následujících způsobů spočítáme obsah šedé plochy na obrázku (ohraničující křivky mají rovnice $y = x^2$ a $x = y^2$) ?



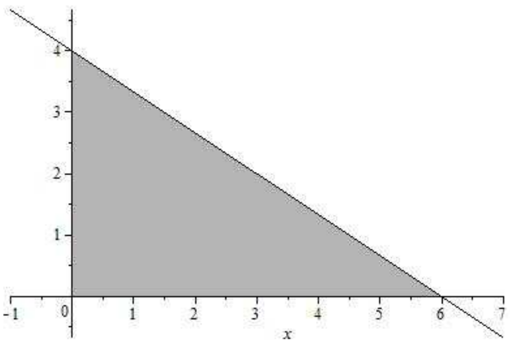
(a) $\int_0^1 (\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

(b) $\int_0^{\frac{1}{2}} (\int_{x^2}^{\frac{1}{2}} dx)dy + \int_0^{\frac{1}{2}} (\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(c) $\int_0^1 (\int_{\sqrt{y}}^{y^2} \mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(d) Ani jedna z uvedených možností.

63. Jestliže $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, x \geq 0, y \leq -\frac{2}{3}x + 4\}$, potom $\iint_M f(x, y)\, dx\, dy =$



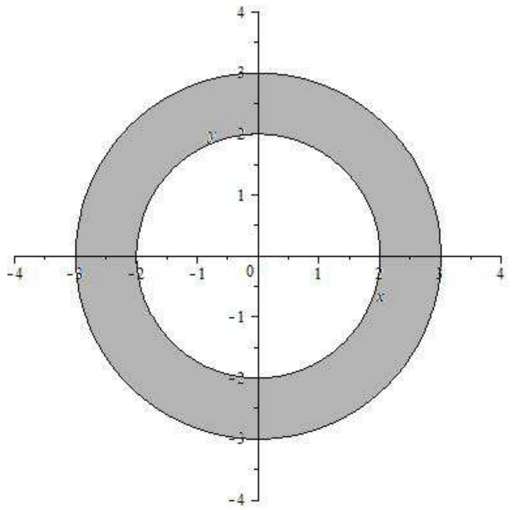
(a) $\int_0^4 (\int_0^6 f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(b) $\int_0^4 (\int_0^{-\frac{2}{3}x+4} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(c) $\int_0^{-\frac{2}{3}x+4} (\int_0^6 f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

64. Množina na obrázku lze zapsat ve tvaru:

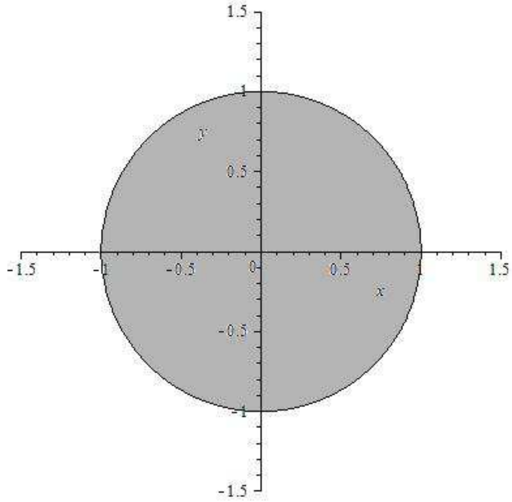


(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{2} \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{3}\}$.

65. Jak lze zapsat množinu znázorněnou na obrázku:



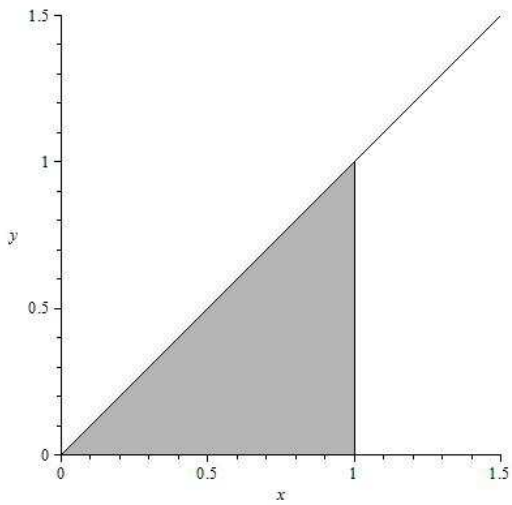
(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq -1\}$.

66. Která z následujících množin vyjadřuje množinu na obrázku:



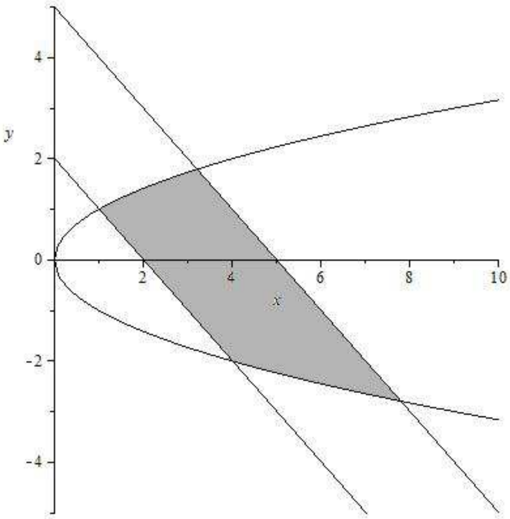
(a) ani jedna z uvedených možností.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x - y \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x - y, 0 \leq y \leq 1\}$.

67. Zvolte množinový zápis zachycující šedou plochu na obrázku



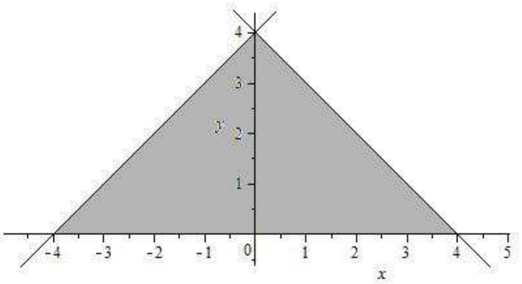
(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -x + 2 \leq y \leq -x + 5, y \leq x^2\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x - 2 \leq y \leq x - 5, y \leq x^2\}$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -x - 2 \leq y \leq -x - 5, y \leq x^2\}$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

68. Zvolte množinový zápis zachycující šedou plochu na obrázku



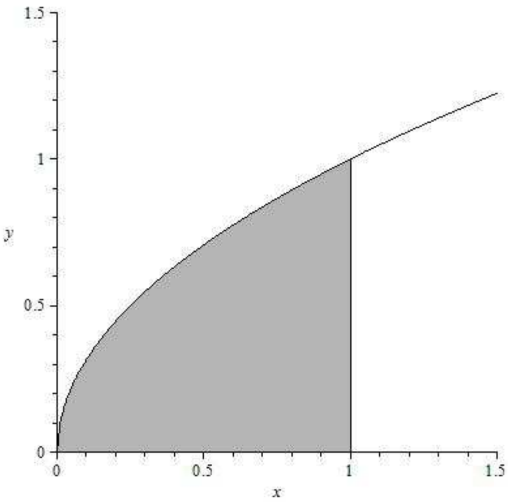
(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4 - y \leq x \leq y - 4, 0 \leq y \leq 4\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -4 - y \leq x \leq -y - 4, 0 \leq y \leq 4\}$.

(c) $\{(x, y)) \in \mathbb{R}^2; y - 4 \leq x \leq 4 - y, 0 \leq y \leq 4\}$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

69. Zvolte množinový zápis zachycující šedou plochu na obrázku



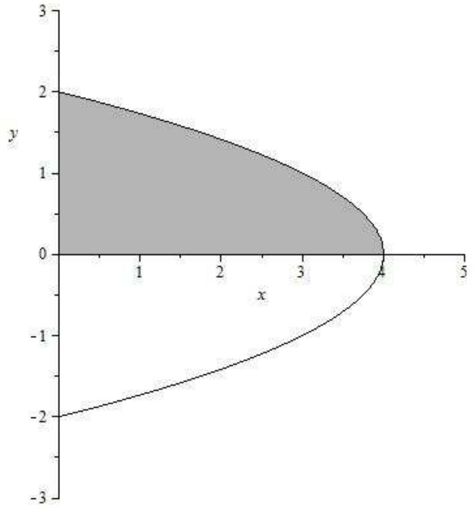
(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y^2 \leq x\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, y \geq x^2\}$.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1\}$.

70. Zvolte množinový zápis zachycující šedou plochu na obrázku



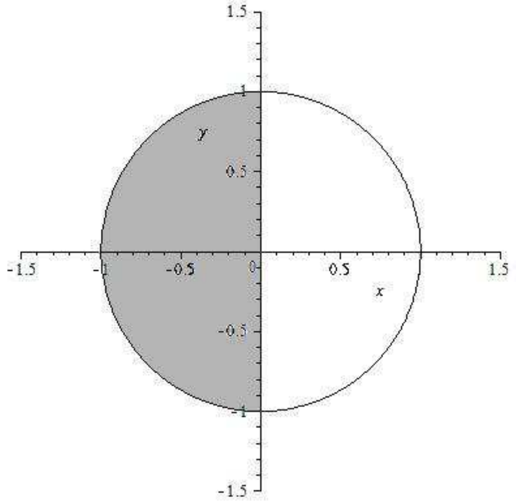
(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{-x-4}\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{-x+4}\}$.

(c) $\{(x, y)) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x-4}\}$.

(d) ani jedna z uvedených možností

71. Zvolte množinový zápis zachycující šedou plochu na obrázku



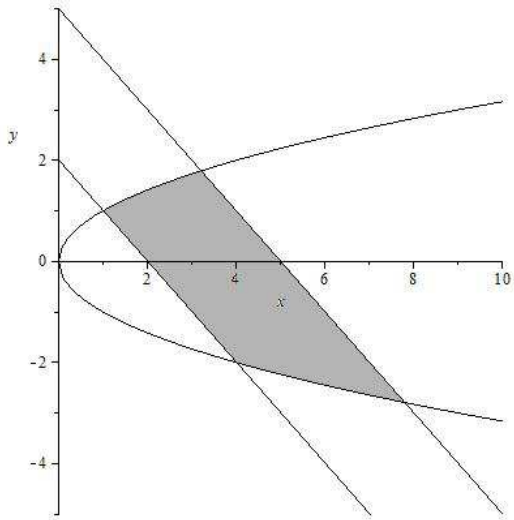
(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 0, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 0, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 0, \sqrt{-1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

72. Zvolte množinový zápis zachycující šedou plochu na obrázku



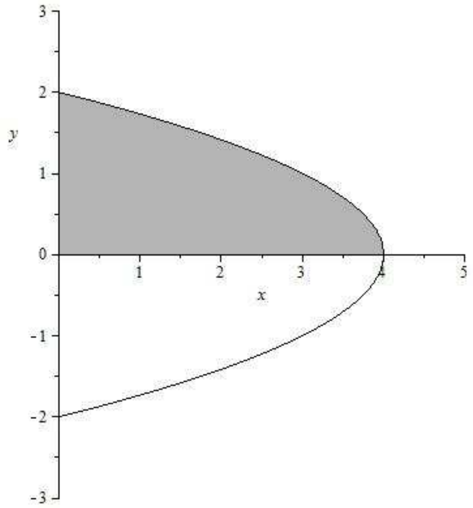
(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -x + 2 \leq y \leq -x + 5, y^2 \leq x\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -x+2 \leq y \leq -x+5, y \leq x^2\}$.

(c) $\{(x,y)) \in \mathbb{R}^2; -x-2 \leq y \leq -x-5, y^2 \leq x\}$.

(d) $\{(x,y)) \in \mathbb{R}^2; x-2 \leq y \leq x-5, y^2 \leq x\}$.

73. Zvolte množinový zápis zachycující šedou plochu na obrázku



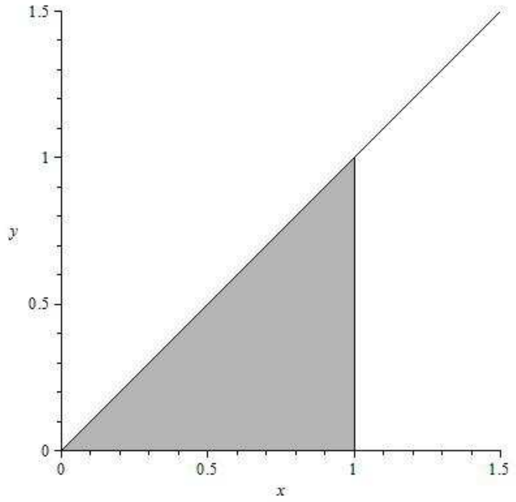
(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{-x-4}\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{-x+4}\}$.

(c) $\{(x,y)) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x-4}\}$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

74. Která z následujících množin vyjadřuje množinu na obrázku:



(a) ani jedna z uvedených možností.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, y \leq x\}$.

3.2.2 Tabulkový integrál

75. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_a^b (\int_c^d \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x) \mathrm{d}y$.

(a) $[\operatorname{tg} x]_c^d [y]_a^b$.

(b) $[\operatorname{cotg} x]_c^d [y]_a^b$.

(c) $[\operatorname{arctg} x]_a^b$.

(d) $[\operatorname{tg} x]_c^d$.

76. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d (\int_a^b \cos x \sin y \mathrm{d}x) \mathrm{d}y$.

(a) $[\sin x]_a^b [\cos y]_c^d$.

(b) $[-\sin x]_a^b [\cos y]_c^d$.

(c) $[\sin x]_a^b[-\cos y]_c^d$.

(d) $[\cos x]_a^b[\sin y]_c^d$.

77. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d(\int_a^b \frac{2x+1}{x^2+x-4}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(a) $[\ln|x^2+x-4|]_a^b$.

(b) $(d-c)\cdot[\ln|x^2+x-4|]_a^b$.

(c) $[\ln|x^2+x-4|]_a^b+[y]_c^d$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

78. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d(\int_a^b \frac{1}{y^{-3}}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(a) $[\frac{y^4}{4}]_c^d[x]_a^b$.

(b) $[\frac{1}{-2y^{-2}}]_c^d[x]_a^b$.

(c) $[\ln|y^{-3}|]_c^d[x]_a^b$.

(d) $(b-a)\cdot[\frac{1}{-2y^{-2}}]_c^d$.

79. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d(\int_a^b \frac{x^2}{y}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(a) $[\frac{x^3}{2}]_a^b[\ln|y|]_c^d$.

(b) $[\frac{x^3}{3}]_a^b[\ln y]_c^d$.

(c) $[\frac{x^3}{3}]_a^b[\ln|y|]_c^d$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

80. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d(\int_a^b \frac{2x}{1+y^2}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(a) $[\ln|1+y^2|]_c^d$.

(b) $[\operatorname{arctg} y]_c^d[x^2]_a^b$.

(c) $\left[\frac{1}{y+\frac{y^3}{3}}\right]_c^d[x^2]_a^b$.

81. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d (\int_a^b 4x^3(1-\sin y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(a) $[2x^2]_a^b[y+\cos y]_c^d$.

(b) $[x^4]_a^b[y+\cos y]_c^d$.

(c) $[\frac{x^4}{4}]_a^b[y+\cos y]_c^d$.

(d) $[x^4]_a^b[1-\sin y]_c^d$.

82. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d (\int_a^b \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(a) $[\mathrm{e}^{-y}]_c^d[x]_a^b$.

(b) $[-\mathrm{e}^{-y}]_c^d$.

(c) $[-\mathrm{e}^{-y}]_c^d[x]_a^b$.

(d) $(a-b)\cdot[\mathrm{e}^{-y}]_c^d$.

83. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d (\int_a^b \frac{x}{\mathrm{e}^{-y}}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(a) $[\frac{x^2}{2}]_a^b[-\mathrm{e}^{-y}]_c^d$.

(b) $[\frac{x^2}{2}]_a^b[\mathrm{e}^{y}]_c^d$.

(c) $[\frac{x^2}{2}]_a^b[\mathrm{e}^{-y}]_c^d$.

(d) $[\frac{x^2}{2}]_a^b[-\mathrm{e}^{y}]_c^d$.

84. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d (\int_a^b \mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(a) 1.

(b) $[x]_a^b[y]_c^d$.

(c) 0.

(d) $(d-c)\cdot(b-a)$

85. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d (\int_a^b \frac{2^x}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(a) $[\frac{2^x}{\ln 2}]_a^b[\arcsin y]_c^d$.

(b) $[\frac{2^{x+1}}{\ln 2}]_a^b[\arcsin y]_c^d$.

(c) $[2^x]_a^b[\arcsin y]_c^d$.

(d) $[2^x \cdot \ln 2]_a^b[\arcsin y]_c^d$.

86. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_c^d (\int_a^b \sin(3x+5)8^y \mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

(a) $[-\frac{1}{3}\cos(3x+5)]_a^b[\frac{8^y}{\ln 8}]_c^d$.

(b) $[\frac{3x^2}{2}+5x]_a^b[\frac{8^y}{\ln 8}]_c^d$.

(c) $[-\frac{1}{3}\cos(3x+5)(\frac{3x^2}{2}+5x)]_a^b[\frac{8^y}{\ln 8}]_c^d$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

87. Zvolte správný výsledek následujícího integrálu $\int_c^d (\int_a^b \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$,
kde $\langle a,b\rangle \subset \big(0,\frac{\pi}{2}\big)$.

(a) $[\frac{-\cos x}{\sin x}]_a^b[y]_c^d$.

(b) $[-\ln|\cos x|]_a^b[y]_c^d$.

(c) $[\operatorname{tg} x]_a^b[y]_c^d$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

3.2.3 Substituce a transformace do polárních souřadnic

88. Chceme-li pro výpočet dvojného integrálu užít transformaci do polárních souřadnic, pak jakobián:

(a) musí být nezáporný.

(b) nesmí být roven nule.

(c) musí být kladný.

89. Uvažujme $\iint_N \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde
$N=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}, 0\le y\le\frac{\pi}{4}\}$. Je vhodné pro výpočet tohoto integrálu použít transformaci do polárních souřadnic ρ a φ ?

(a) Ne, protože integrační oblast je obdélník.

(b) Ne, protože $\rho = 0$.

(c) Ano.

(d) Ne, protože nelze určit φ.

90. Uvažujme $\iint_N \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^2+1}$, kde $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$. Je vhodné pro výpočet tohoto integrálu použít transformaci do polárních souřadnic?

(a) Ne.

(b) Ne, funkce $\frac{1}{(x+y)^2+1}$ nelze zapsat v polárních souřadnicích.

(c) Ano.

91. Jak by vypadal dvojný integrál $\iint_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ po provedení transformace do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$?

(a) $\iint_M \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$.

(b) $\iint_M \sqrt{(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\,\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$.

(c) $\iint_M \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$.

(d) ani jedna z uvedených možností.

92. Transformaci do polárních souřadnic zpravidla používáme, je-li integrační oblast tvaru:

(a) kruhová výseč.

(b) mezikruží.

(c) obdélník.

(d) lichoběžník.

93. Provedeme-li transformaci souřadnic integrálu $\iint_{B_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ a J je jakobián této transformace, výsledný integrál bude vypadat následovně:

(a) $\iint_{B_{uv}} f(g(u,v), h(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

(b) $\iint_{B_{uv}} f(g(u,v), h(u,v))J\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

(c) $\iint_{B_{uv}} f(g(u,v), h(u,v))|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

94. Při transformaci do polárních souřadnic, kde $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, je ρ vždy:

(a) nulové.

(b) záporné.

(c) kladné.

(d) nezáporné.

95. Množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ se použitím transformace do polárních souřadnic převede na množinu N:

(a) $N = \{(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

(b) $N = \{(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2; \rho \in \langle 4, 9\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$.

(c) $N = M$.

(d) $N = \{(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2; \rho \in \langle 2, 3\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$.

96. Jaký první krok byste provedli při výpočtu následujícího integrálu $\iint_M \sqrt{16 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 16\}$?

(a) Substituci $t = 16 - x^2 - y^2$.

(b) Transformaci do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$.

(c) Transformaci do polárních souřadnic $x = \rho\sin\varphi, y = \rho\cos\varphi$.

97. Jaký první krok byste provedli při výpočtu následujícího integrálu $\iint_N \frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$?

(a) Substituci $x = 2, y = 3$.

(b) Transformaci do polárních souřadnic $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$.

(c) Substituci $t = \frac{x}{y}$.

98. Jakou byste použili substituci při výpočtu následujícího integrálu $\int_1^8 \left(\int_3^5 x^2 \mathrm{e}^{-x^3} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$?

(a) $t = -x^3$.

(b) $t = x^{-2}$.

(c) $t = \mathrm{e}^{-x^3}$.

(d) $t = x^2$.

99. Jakou použijete substituci při výpočtu následujícího integrálu $\int_c^d \int_a^b \frac{x^2(x^3+5)^2}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(a) $t = x^3 + 5$.

(b) $y = x^2$.

(c) $t = \frac{1}{y}$.

100. Jakou použijete substituci při výpočtu následujícího integrálu $\int_c^d \int_a^b x^{y^3-3} 3y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(a) $t = y^3 - 3$.

(b) $t = x^{y^3-3}$.

(c) $t = 3y^2$.

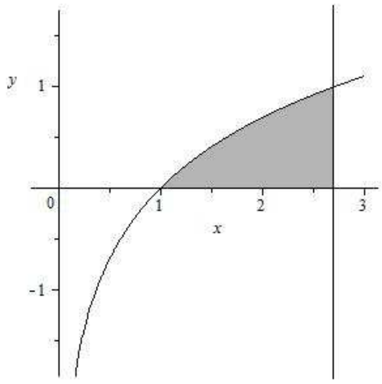
101. Jakou použijete substituci při výpočtu následujícího integrálu $\int_c^d \int_a^b \frac{\ln^2 x}{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(a) $t = \ln x$.

(b) $t = \frac{1}{y}$.

(c) $t = \frac{1}{x}$.

102. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\iint_M e^{x+y} dx dy$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq \ln x, x \leq e\}$ (viz obrázek)?



(a) $t = \ln x$.

(b) $t = e$.

(c) $t = x + y$.

(d) nemusíme použít substituci.

3.3 Řešení souboru testových položek

Teorie dvojného (dvojnásobného) integrálu

1	(c)	12	(c)	23	(c)	34	(d)
2	(b)	13	(d)	24	(a)	35	(a) (d)
3	(c)	14	(c)	25	(a) (b)	36	(a) (c) (d)
4	(d)	15	(a)	26	(c)	37	(b) (c)
5	(a) (b) (d)	16	(b)	27	(a)	38	(b)
6	(c)	17	(a) (c)	28	(c)	39	(c)
7	(c)	18	(c)	29	(a) (c) (d)	40	(b)
8	(c)	19	(c)	30	(a) (b) (d)	41	(c)
9	(b)	20	(a)	31	(a) (b)	42	(b) (c)
10	(a)	21	(d)	32	(c)	43	(c)
11	(b)	22	(c)	33	(a)	44	(a)

Výpočet dvojného (dvojnásobného) integrálu

Integrační oblast

45	(a) (b)	53	(b)	61	(d)	69	(a) (d)
46	(c)	54	(a)	62	(a) (c)	70	(d)
47	(a)	55	(c)	63	(c)	71	(a)
48	(a)	56	(a) (b)	64	(a)	72	(a)
49	(c)	57	(c)	65	(a) (b)	73	(b)
50	(a)	58	(b) (c)	66	(a)	74	(b)
51	(a) (b) (c)	59	(a)	67	(d)		
52	(b)	60	(c)	68	(c)		

Tabulkový integrál

75	(a)	79	(c)	83	(b)	87	(b)
76	(c)	80	(b)	84	(b) (d)		
77	(b)	81	(b)	85	(a)		
78	(a)	82	(c) (d)	86	(a)		

Substituce a transformace do polárních souřadnic

88	(b)	92	(a) (b)	96	(b)	100	(a)
89	(a)	93	(c)	97	(b)	101	(a)
90	(c)	94	(d)	98	(a) (c)	102	(c) (d)
91	(d)	95	(d)	99	(a)		

4 Ověřování Testu připravenosti

Dosud byl popsán postup plánování a sestavování Testu připravenosti. Testem prošli studenti předmětu Matematika 2 na katedře matematické analýzy a aplikací matematiky v letním semestru roku 2013. To, jak si studenti v testu vedli, které otázky pro ně byly obtížné a které naopak jednoduché, můžeme posoudit prověřením obtížnosti. Přistupme nyní k prověření obtížnosti jednotlivých úloh. Obecně můžeme říci, že obtížnost úlohy se prověřuje podle toho, kolik z testovaných ji vyřešilo správně.

Uvažujeme-li test sestavený z položek s jedinou správnou odpovědí, stanovujeme index obtížnosti P_1, což je podíl testovaných, kteří danou testovou položku zodpověděli správně, na celku.

$$P_1 = \frac{n_s}{n}, \tag{2}$$

kde n_s je počet testovaných, kteří odpověděli správně, n je celkový počet testovaných. $P_1 \in \langle 0, 1 \rangle$. Hodnoty blízké nule znamenají, že otázka byla příliš obtížná, a naopak hodnoty blízké jedné naznačují, že otázka byla příliš jednoduchá. [1]

Tento postup je v našem případě možné použít u jedné jediné dichotomické otázky, která se v Testu připravenosti vyskytuje, u otázky 20.[2] Test připravenosti je sestaven převážně z položek s možností vícenásobné odpovědi a pro ty existuje několik přístupů ke skórování. Pro ně didaktická literatura ([1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10]) neuvádí výpočetní vzorce indexu obtížnosti. Proto zde navrhneme vlastní výpočetní vztahy.

[1] Tvar vzorce byl převzat z [2, s. 47]. Vzorec je však uváděn pro výpočet desetinného čísla a nikoli procenta kvůli homogenitě se vzorci uvedenými níže.

[2] Původní test obsahoval více dichotomických otázek, ale většina z nich byla upravena nebo vyřazena ještě před spuštěním testu. Bylo by vhodné i tuto poslední dichotomickou otázku upravit, aby byl test homogenní. To učiníme například doplněním distraktorů (c) Ano, ale pouze pokud je množina K kruh; (d) Ano, ale pouze pokud je $f(z, y)$ konstantní.

1. Udělíme bod pouze v případě zaškrtnutí všech správných a žádné nesprávné odpovědi. Jakákoli jiná kombinace je považována za chybnou. V tomto případě je možné ověřit obtížnost úlohy způsobem uvedeným výše (viz vzorec 2).
2. Udělíme jeden pomocný bod za zaškrtnutí každé správné odpovědi a jeden pomocný bod za nezaškrtnutí každé nesprávné odpovědi. Součet získaných pomocných bodů se pak dělí celkovým počtem možných odpovědí na danou otázku. Takto získaný celkový počet bodů získaný j-tým testovaným označme b_j. Index obtížnosti P_2 poté spočteme následovně
$$P_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{n}, \tag{3}$$
kde n je celkový počet testovaných. $P_2 \in \langle 0, 1 \rangle$ se stejným významem, jako u P_1.
3. Všechny správné odpovědi jsou ohodnoceny jedním kladným bodem a všechny špatné jedním záporným bodem. Tyto body jsou mezi jednotlivé odpovědi rovnocenně rozděleny. Například jsou-li tři špatné odpovědi, bude každá ohodnocená -0,3333 body; jsou-li dvě správné, bude každá ohodnocena 0,5 body a tak podobně. Výsledným hodnocením otázky b_j je součet získaných kladných a záporných bodů. Například zvolil-li testovaný jednu správnou odpověď ohodnocenou 1 bodem a jednu špatnou odpověď ohodnocenou -0,3333 body, bude celkové hodnocení této úlohy 0,6667 bodů. Index obtížnosti P_3 poté spočteme následovně
$$P_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{n}, \tag{4}$$
kde n je celkový počet testovaných. $P_3 \in \langle -1, 1 \rangle$. I v případě P_3 můžeme říci, že hodnoty blížící se jedné znamenají přílišnou jednoduchost otázky. Hodnoty záporné a hodnoty blížící se zprava k nule poukazují na přílišnou obtížnost. Záporných hodnot začne P_3 nabývat ve chvíli, kdy špatné odpovědi testovaných výrazně převýší nad správnými.

Způsob skórování 1. používat nebudeme, protože neodpovídá ideji Testu připravenosti. Ani způsob 2. nebudeme používat, protože zaškrtne-li student všechny nabízené odpovědi, je mu uděleno $\frac{a}{k}$ bodu, kde a počet správných odpovědí a k je celkový počet nabízených odpovědí. S tímto přístupem nesouhlasíme. Proto budeme používat způsob 3.

Tabulka 2 obsahuje obtížnosti jednotlivých otázek vypočtené pomocí P_3 a v případě dichotomické otázky 20 pomocí P_1. Indexy obtížnosti u otázek číslo 39, 48, 49 a 50 nejsou uvedeny, jelikož jejich odpovědi mají podobu obrázku a software LMS Moodle neumí informaci o obrázku převést do výstupního souboru. Pro budoucí použití testu by bylo vhodné obrázky v odpovědi na testovou položku nějak označit. Například použít čísla nebo písmena. Dodejme ještě, že jsme uvažovali pouze platné pokusy. Neplatné pokusy jsou ty, kdy nebyla zvolena žádná odpověď. Vynecháváme je proto, že většinou se jednalo o pokusy, kdy testovaný spustil test, aby si jej prohlédl a nezvolil žádnou nebo jen málo odpovědí. Takto spuštěné testy by zkreslovaly obtížnost otázek. Pochopitelně je ale zkresluje i vynechání všech nezodpovězených otázek, jelikož v některých případech nemuselo jít o tyto průzkumné pokusy.

otázka	obtížnost	otázka	obtížnost	otázka	obtížnost
1	0,8222	35	0,7647	69	0,3400
2	0,9074	36	0,3889	70	0,5942
3	0,8182	37	0,2692	71	0,6049
4	0,1786	38	0,9074	72	0,8750
5	0,5614	39	X	73	0,3453
6	0,8172	40	0,6667	74	0,1818
7	0,8846	41	0,5287	75	1
8	0,5114	42	0,3334	76	0,8462
9	0,5173	43	0,5417	77	0,4306
10	1	44	0,8939	78	0,6782
11	0,6989	45	0,7708	79	0,8929
12	0,7241	46	0,8158	80	0,9400
13	0,7102	47	0,7037	81	0,6800
14	0,8500	48	X	82	0,4400
15	0,9211	49	X	83	0,6889
16	0,6000	50	X	84	0,7105
17	0,2778	51	0,6111	85	0,6795
18	0,8500	52	0,6800	86	0,5898
19	0,8043	53	1	87	0,6000
20	0,3007	54	1	88	0,2250
21	0,7308	55	0,8596	89	0,6346
22	0,4928	56	0,9130	90	0,4000
23	0,7500	57	0,9318	91	0,1976
24	0,6250	58	0,4250	92	0,7500
25	0,6111	59	0,4783	93	0,9400
26	0,4000	60	0,6400	94	0,4133
27	0,7037	61	0,3867	95	0,7813
28	0,8462	62	0,5000	96	0,9375
29	0,8333	63	0,3637	97	0,9318
30	0,5555	64	0,9355	98	0,6486
31	0,5769	65	0,6452	99	0,8636
32	0,6000	66	-0,1515	100	0,9091
33	0,8025	67	0,4111	101	0,9464
34	0,3189	68	0,2534	102	0,5909

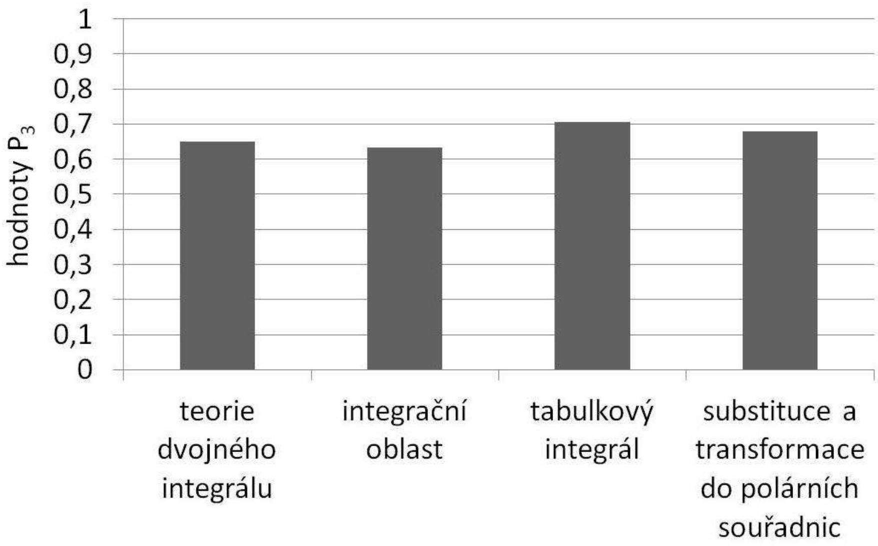
Tabulka 4: Indexy obtížnosti P_3
Indexy obtížnosti u otázek číslo 39, 48, 49 a 50 nejsou vypočteny, jelikož jejich odpovědi mají podobu obrázku a software LMS Moodle neumí informaci o obrázku převést do výstupního souboru.

Rozdělme interval hodnot, kterých může index obtížnosti nabývat na dílčí podintervaly $\langle -1; 0,2 \rangle$, $(0,2; 0,4\rangle$, $(0,4; 0,7\rangle$, $(0,7; 0,9\rangle$, $(0,9; 1\rangle$ a podle toho, do kterého intervalu spadá index obtížnosti určité otázky, tyto otázky rozčleňme na příliš obtížné, spíše obtížné, středně obtížné, spíše jednoduché a příliš jednoduché. Test by neměl obsahovat velké množství příliš obtížných ani příliš jednoduchých otázek. Zařazení otázek do těchto intervalů ukazuje následující tabulka (Tabulka 5).

interval	**obtížnost**	**otázky**	**celkem otázek**
$\langle -1; 0,2 \rangle$	příliš obtížné	4, 66, 74, 91	4
$(0,2; 0,4\rangle$	spíše obtížné	17, 20, 26, 34, 36, 37, 42, 61, 63, 68, 69, 73, 88, 90	14
$(0,4; 0,7\rangle$	středně obtížné	5, 8, 9, 11, 16, 22, 24, 25, 30, 31, 32, 40, 41, 43, 51, 52, 58, 59, 60, 62, 65, 67, 70, 71, 77, 78, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 89, 94, 98, 102	36
$(0,7; 0,9\rangle$	spíše jednoduché	1, 3, 6, 7, 12, 13, 14, 18, 19, 21, 23, 27, 28, 29, 33, 35, 44, 45, 46, 47, 55, 72, 76, 79, 84, 92, 95, 99,	28
$(0,9; 1\rangle$	příliš jednoduché	2, 10, 15, 38, 53, 54, 56, 57, 64, 75, 80, 93, 96, 97, 100, 101	16

Tabulka 5: Otázky rozdělené do intervalů dle indexů obtížnosti P_3

Průměrně dosáhly otázky indexu obtížnosti 0,6465, což je řadí mezi středně obtížné. Spočteme-li průměry indexů obtížnosti pro každý tematický okruh, obdržíme hodnoty 0,6488 pro definice a základní pojmy, 0,6339 pro integrační oblast, 0,7058 pro tabulkový integrál a 0,6780 pro substituce a transformace do polárních souřadnic (Obrázek 2). Otázky z oddílu tabulkový integrál tedy zařadíme mezi spíše jednoduché (ale index obtížnosti je dost blízko dolní hranici stanoveného intervalu). Ostatní tematické oddíly zařadíme mezi středně obtížné.



Obrázek 2: Graf průměrných indexů obtížnosti dle tematických okruhů

Také LMS Moodle poskytuje kromě mnoha jiných informací analogii indexu obtížnosti, který se nazývá facility index F_p. Vzorec pro výpočet je [3]

$$F_p = \frac{\overline{x_p} - x_p(min)}{x_p(max) - x_p(min)} \tag{5}$$

$$\overline{x_p} = \frac{\sum_{p=1}^{n} x_p}{n}, \tag{6}$$

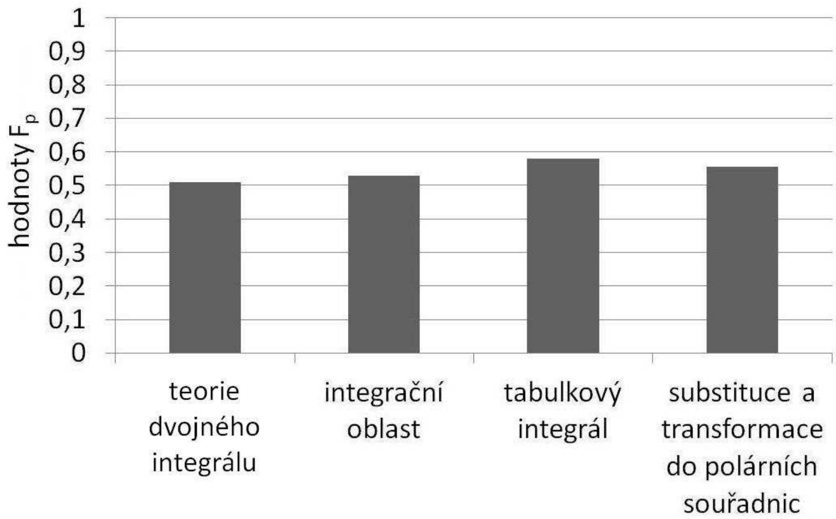
kde x_p jsou kladné celkové body získané p-tým testovaným, n je počet všech pokusů, $x_p(min)$ je minimální dosažitelná hodnota a $x_p(max)$ je maximální dosažitelná hodnota. Odečtením minimální a vydělením rozdílu minimální a maximální hodnoty se průměr $\overline{x_p}$ normalizuje. Jelikož v našem případě je $x_p(min) = 0$ a $x_p(max) = 1$, není normalizace nutná.

[3]Vzorec jsme čerpali z [12] a opět jsme jej upravili pro výpočet desetinného čísla kvůli homogenitě.

otázka	P_3	F_p	**otázka**	P_3	F_p	**otázka**	P_3	F_p
1	0,8222	0,5139	35	0,7647	0,5000	69	0,3400	0,3088
2	0,9074	0,7143	36	0,3889	0,3646	70	0,5942	0,5517
3	0,8182	0,7037	37	0,2692	0,2941	71	0,6049	0,5588
4	0,1786	0,2358	38	0,9074	0,7407	72	0,8750	0,7531
5	0,5614	0,4615	39	X	0,4516	73	0,3453	0,3590
6	0,8172	0,6423	40	0,6667	0,6029	74	0,1818	0,2353
7	0,8846	0,6396	41	0,5287	0,4912	75	1	0,6563
8	0,5114	0,4417	42	0,3334	0,3519	76	0,8462	0,6571
9	0,5173	0,5045	43	0,5417	0,3846	77	0,4306	0,4301
10	1	0,5526	44	0,8939	0,5980	78	0,6782	0,5500
11	0,6989	0,5714	45	0,7708	0,6724	79	0,8929	0,7333
12	0,7241	0,5897	46	0,8158	0,5741	80	0,9400	0,8000
13	0,7102	0,5376	47	0,7037	0,5385	81	0,6800	0,5556
14	0,8500	0,6842	48	X	0,6471	82	0,4400	0,3871
15	0,9211	0,6000	49	X	0,4167	83	0,6889	0,6571
16	0,6000	0,5143	50	X	0,6552	84	0,7105	0,4821
17	0,2778	0,3906	51	0,6111	0,4286	85	0,6795	0,5960
18	0,8500	0,7500	52	0,6800	0,6333	86	0,5898	0,5294
19	0,8043	0,6250	53	1	0,9091	87	0,6000	0,5122
20	0,3007	0,2500	54	1	0,6875	88	0,2250	0,3519
21	0,7308	0,6176	55	0,8596	0,6538	89	0,6346	0,6344
22	0,4928	0,4667	56	0,9130	0,7000	90	0,4000	0,5000
23	0,7500	0,5893	57	0,9318	0,6000	91	0,1976	0,2207
24	0,6250	0,5526	58	0,4250	0,3750	92	0,7500	0,5536
25	0,6111	0,4138	59	0,4783	0,4286	93	0,9400	0,6129
26	0,4000	0,3871	60	0,6400	0,5606	94	0,4133	0,4667
27	0,7037	0,6515	61	0,3867	0,4242	95	0,7813	0,6504
28	0,8462	0,6296	62	0,5000	0,4839	96	0,9375	0,7667
29	0,8333	0,3011	63	0,3637	0,3908	97	0,9318	0,6176
30	0,5555	0,3210	64	0,9355	0,7024	98	0,6486	0,4712
31	0,5769	0,4324	65	0,6452	0,5556	99	0,8636	0,6061
32	0,6000	0,3889	66	-0,1515	0,2593	100	0,9091	0,6613
33	0,8025	0,6204	67	0,4111	0,4359	101	0,9464	0,7714
34	0,3189	0,3750	68	0,2534	0,3333	102	0,5909	0,4483

Tabulka 6: Porovnání indexů obtížnosti P_3 a facility indexů F_p

Průměrně dosáhl facility index hodnoty 0,5310, což jej opět řadí mezi středně obtížné. Spočteme-li průměry indexů obtížnosti pro každý tematický okruh, obdržíme hodnoty 0,5102 pro definice a základní pojmy, 0,5278 pro integrační oblast, 0,5805 pro tabulkový integrál a 0,5555 pro substituce a transformace do polárních souřadnic (Obrázek 3). Vidíme, že v tomto případě jsou si jednotlivé hodnoty facility indexu mnohem blíže a všechny tematické oddíly zařadíme mezi středně obtížné.



Obrázek 3: Graf průměrných facility indexů dle tematických okruhů

V tabulce 3 uvádíme pro každou položku vypočtený index obtížnosti P_3 a facility index F_p, který poskytuje LMS Moodle. Můžeme si všimnout, že hodnoty facility indexu F_p jsou v mnoha případech podstatně odlišné od hodnot indexu obtížnosti P_3, s nímž jsme dosud počítali my. Jeden důvod je, že LMS Moodle uvažuje veškeré pokusy, kdežto my jsme uvažovali pouze pokusy platné, tj. jenom ty pokusy, kdy testovaný zvolil nějakou odpověď. Pokusy, kdy student nezvolil vůbec žádnou odpověď, jsme klasifikovali jako neplatné. Nejčastěji se jednalo o takové testy, kdy testovaný neodpověděl ani na jedinou otázku, nebo odpověděl na méně než polovinu otázek. My nejsme schopni od sebe odlišit pokusy, kdy student spustil test s tím, že jej chce splnit a byl neúspěšný, a pokusy, kdy jej spustil jen, aby si ho prošel a učinil si o něm určitou představu. Zařazení těchto průzkumných pokusů zkresluje výsledné hodnocení obtížnosti, stejně tak je ale zkresluje i úplné vyřazení vynechaných odpovědí, což znamená, že ani facility index F_p ani index obtížnosti

P_3, se kterým jsme počítali my, není v tomto případě absolutně přesný. Další důvodem odlišných výsledků je přístup LMS Moodle k odpovědím. Započítává totiž ty odpovědi, kdy testovaný zvolil všechny správné možnosti, část správných možností a správnou možnost spolu s možností nesprávnou do chvíle, kdy by testovaný dosáhl záporných bodů. Jinak řečeno, započítává pouze kladné celkové hodnocení otázky. Součet kladných celkových hodnocení poté dělí celkovým počtem všech pokusů. Je otázka, zda je vhodné uvažovat nesprávné odpovědi jen v případě, kdy jejich bodové ohodnocení nepřeváží hodnocení odpovědí správných. Takový index obtížnosti se nám zdá být neúplným.

Uveďme dva příklady výpočtu, abychom jasněji viděli rozdíl mezi indexem obtížnosti P_3 a facility indexem F_p. Nejprve se zaměříme na otázku 57, kde $P_3 = 0,9318$ a otázka tím pádem patří mezi velmi jednoduché a $F_p = 0,6000$, což otázku řadí spíše mezi středně obtížné. Otázka 57 byla generována celkem 35 krát. Z toho 21 odpovědí bylo správných (s ohodnocením 1), 1 byla nesprávná (s ohodnocením -0,5) a 13 krát testovaný neodpověděl.

Výpočet indexu obtížnosti:

$$n = 22 \text{ - bereme v potaz pouze platné pokusy}$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} b_j = 20,5$$

$$P_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{n} = \frac{20,5}{22} = 0,9318.$$

Při kontrole jednotlivých testů zjistíme, že kromě jednoho případu, nezodpovězené otázky můžeme skutečně považovat za neplatné pokusy. Tím máme na mysli, že v daném testu nebyla zodpovězena ani jedna z položených otázek. Jedinou výjimku tvoří test, ve kterém nebylo zodpovězeno celkem 7 otázek. Jestliže tuto výjimku začleníme do platných pokusů obdržíme $P_3 = 0,8913$, což otázku přeřazuje z příliš jednoduchých do spíše jednoduchých. Ale stále zůstává blízko hranice stanoveného intervalu.

Výpočet facility indexu:

$$n = 35 \text{ - bereme v potaz veškeré pokusy, které proběhly}$$

$$\sum_{p=1}^{n} x_p = 21 \text{ - bereme v potaz pouze kladné celkové hodnocení otázky}$$

$$\overline{x_p} = \frac{\sum_{p=1}^{n} x_p}{n} = \frac{21}{35} = 0,6000$$

$$F_p = 0,6000.$$

Vidíme, že facility index se od indexu obtížnosti v tomto případě hodně odlišuje.

Nyní se podíváme na otázku 74, kde $P_3 = 0,1818$, což otázku řadí mezi příliš obtížné, a $F_p = 0,2353$, který ji řadí mezi spíše obtížné otázky ale nikoli tolik, abychom ji vyřadili nebo se vážněji zamýšleli nad její úpravou. Otázka 74 byla generována celkem 17 krát.

Bodové ohodnocení odpovědí

správně	špatně	celkem
0	-0,3333	-0,3333
0	0	0
1	-0,3333	0,6667
0	-0,3333	-0,3333
0	0	0
1	-0,3333	0,6667
0	0	0
0	0	0
1	0	1
0	0	0
0	-0,3333	-0,3333
1	-0,3333	0,6667
0	-0,3333	-0,3333
0	-0,3333	-0,3333
1	0	1
0	-0,3333	-0,3333
0	0	0

Výpočet indexu obtížnosti:

$$n = 11 \text{ - bereme v potaz pouze platné pokusy}$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} b_j = 2,0003$$

$$P_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{n} = \frac{2,0003}{11} = 0,1818.$$

Při kontrole zjistíme, že všechny nezodpovězené otázky budeme považovat za neplatné pokusy. V jednom případě testovaný nezodpověděl 10 otázek a ve zbylých případech nebyla zodpovězena žádná. Započtením jednoho případu nezodpovězení bychom dostali $P_3 = 0,16666$ a otázka by byla stále příliš obtížná.

Výpočet facility indexu:

$$n = 17 \text{ - bereme v potaz veškeré pokusy, které proběhly}$$

$$\textstyle\sum_{p=1}^{n} x_p = 4,0001 \text{ - bereme v potaz pouze kladné celkové hodnocení otázky}$$

$$\overline{x_p} = \frac{\sum_{p=1}^{n} x_p}{n} = \frac{4,0001}{17} = 0,2353$$

$$F_p = 0,2353.$$

Index obtížnosti P_3 a facility index F_p se skutečně vzájemně liší. To jak moc je jeden od druhého vzdálený záleží jednak na tom, kolikrát bylo na otázku odpovězeno nesprávně, jednak na tom, kolik neplatných pokusů se u otázky objevilo.

5 Zdokonalení Testu připravenosti

Dosud jsme popsali proces vzniku Testu připravenosti včetně jeho přípravy a sestavování, uvedli jsme kompletní znění testových položek a indexy obtížnosti vypočtené jak pro jednotlivé položky, tak také pro tematické oddíly položek. Nyní přistupme k návrhům na úpravu Testu připravenosti. Test připravenosti má podobu e-testu. Stejně jako jakýkoli jiný prostředek ověřování vědomostí, znalostí a dovedností má i e-test jednak pozitiva, jednak negativa [11]. Mezi pozitiva e- testu patří možnost přístupu z různých míst a v různou dobu. Testovaný může test absolvovat ve chvíli, kdy se cítí dobře, cítí se připravený; může jej absolvovat z domova nebo jiného místa, kde se cítí dobře, kde jej nic neruší. Ovšem to, že je test v elektronické podobě, se zároveň stává jeho negativem. Jako negativum bývá často zmiňována nedostupnost počítačové techniky. Tento problém v našem případě odpadá, jelikož počítačová technika je přístupná všem studentům ve školních zařízeních. Dalším omezením je neznalost a nezkušenost testovaných s počítačovou technikou (i toto negativum odpadá, jelikož testy mají jednoduché ovládání analogické k vyplňování testu v písemné podobě). Největším negativem v našem případě je nebezpečí podvodu. Splnění každého tematického okruhu testu na osmdesát procent bylo podmínkou pro přístup k ústní zkoušce, ovšem studenti jej mohli skládat zcela bez dozoru kdekoli. A v tom se skrývá nebezpečí, že někteří z nich mohli podvádět. V této chvíli je to otázka pouze jejich svědomí a ctižádosti. Do budoucna se ale počítá s tím, že test bude probíhat pod dozorem v prostorech školy.

Studenti byli z každého výše zmiňovaného tématu testování dvaceti (v případě některých tematických okruhů pětadvaceti) otázkami, které byly náhodně vybrané softwarem ze souboru testových položek. Tento soubor ale, jak jsme si řekli výše, obsahuje různé množství různě tematicky zaměřených otázek, které mají různé cíle a testují různou úroveň osvojení vědomostí. (Tato různost by se zcela jistě projevila i v případě, že by administrátor nevěnoval žádnou pozornost přípravě testu a pustil by se rovnou do navrhování jednotlivých položek.) A tak si lze snadno představit, že konkrétní test bude obsahovat většinu otázek se shodným tematickým zaměřením a naopak žádné otázky jiného tematického zaměření; nebo bude obsahovat většinu otázek testujících jednu úroveň osvojení a naopak téměř žádnou z jiného. Tudíž výsledný test nebude mít tu vypovídací hodnotu, kterou od něj očekáváme. Této situaci je možné zamezit. Je možné testové položky v testovacím programu rozdělit do skupin podle určitého kriteria. V případě tematického okruhu dvojný integrál by testové položky měly být rozděleny na základě výukových cílů, jelikož na jejich základě byly také sestavovány. Následně je možné nadefinovat, kolik otázek bude do každého testu z jednotlivých skupin náhodně zvoleno. Například uvažujme test, do kterého bude náhodně zvoleno osm testových položek ze skupiny definice a základní pojmy, pět položek ze skupiny integrační oblast, čtyři ze skupiny tabulkový integrál a tři ze skupiny substituce a transformace do polárních souřadnic.

V předchozí kapitole jsme se zabývali indexem obtížnosti. V souvislosti s ním se obvykle také uvádí informace, že ty otázky, jejichž index obtížnosti nespadá do intervalu $\langle 0,20; 0,80\rangle$ je nutné z testu vyřadit jako příliš obtížné ($< 0,20$) či příliš snadné ($> 0,80$). Tento interval se ale zaprvé vztahuje k rozlišujícím testům, to jest testům, jejichž cílem je rozlišit lepší a horší studenty od sebe navzájem. Test připravenosti je ale testem ověřujícím, chceme ověřit, že studenti znají téma dvojného (dvojnásobného) integrálu alespoň na osmdesát procent. A za druhé se tento interval vztahuje k indexu obtížnosti P_1. Z tohoto důvodu bychom se nad daným intervalem měli zamyslet. Dolní hranici je možné ponechat, i když počítáme index obtížnosti P_3, který nám dává i záporná čísla. U otázek s $P_3 < 0,20$ se ve více než v polovině platných pokusů objevila nesprávná odpověď. To znamená, že takovou studenti buď nepochopili nebo je pro ně příliš obtížná a je nutné ji přeformulovat nebo vyřadit. Ovšem určení horní hranice již není tak jednoduché. Jestliže mají studenti celý test splnit minimálně na osmdesát procent není příliš logické vynechat všechny otázky s indexem obtížnosti $> 0,80$. Určitě bychom se ale měli zamyslet nad otázkami s indexem obtížnosti $P_3 \geq 0,90$.

Dle tabulky 1 byly příliš obtížné otázky 4, 66, 74 a 91. Zopakujme tyto otázky a navrhněme jejich úpravu.

4. Při výpočtu dvojného integrálu převodem na dvojnásobný integrál integrujeme nejprve podle jedné proměnné a druhou považujeme za konstantu, výsledek pak integrujeme podle zbývající proměnné. Záleží na tom, podle které proměnné budeme integrovat nejdříve?

(a) Ne, ačkoli se postup výpočtu liší, výsledek bude nakonec stejný.

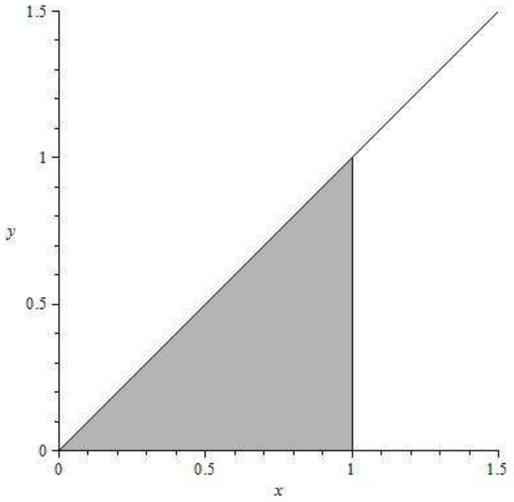
(b) Ano, nejdříve vždy integrujeme podle x.

(c) Ano, nejdříve vždy integrujeme podle y.

(d) Ano, záleží na tom, jak vypadá integrační obor.

V tomto případě distraktory (b) a (c) nebyly pro studenty vůbec atraktivní a jako takové by měly být nahrazeny nebo odstraněny. Atraktivnější a přitom smysluplné distraktory v případě této otázky však nalezneme jen těžko. Distraktor (a) byl pro testované naopak velmi atraktivní. Tato odpověď by byla správná, kdybychom integrál počítali na obdélníku (Příloha, Věta 1). A zde se nám naskytuje možnost, jak otázku zjednodušit. Pouze pozměníme zadání na: Při výpočtu dvojného integrálu na uzavřeném obdélníku převodem na dvojnásobný . . . Potom bude jedinou správnou odpovědí (a).

66. Která z následujících množin vyjadřuje množinu na obrázku:



(a) ani jedna z uvedených možností

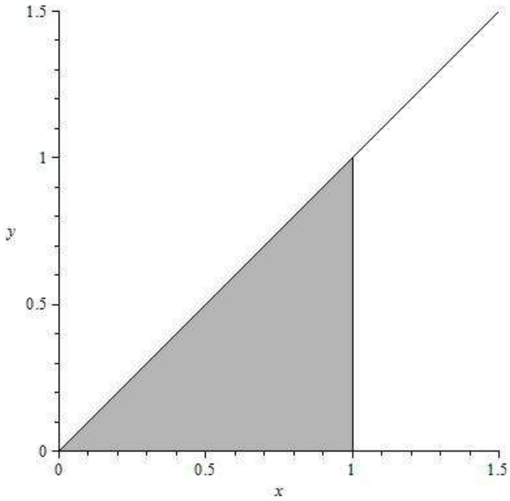
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x - y, 0 \leq y \leq 1\}$

Správnou odpověď (a) na tuto otázku zvolila jen třetina dotazovaných studentů (7 z 22). Oproti tomu více než polovina (12) zvolila odpověď (b) a více než polovina (13) odpověď (c). Je poněkud překvapivé, že množinu ohraničenou přímkami $y = x$, $y = 0$ a $x = 1$ a tedy množinově zapsanou buď $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ anebo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, by správně zapsala pouze třetina studentů. V případě této otázky nepřistoupíme k žádným opatřením, otázku nevyloučíme ani nezjednodušíme. Množina je jednoduše popsatelná a studenti by měli umět odhalit, že ani jeden z nabízených předpisů ji nepopisuje. Tím spíše, když nabízené distraktory popisují množiny, které nejsou omezené, zatímco množina na obrázku omezená je.

74. Která z následujících množin vyjadřuje množinu na obrázku:



(a) ani jedna z uvedených možností

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, y \leq x\}$.

Otázka 74 má totožné zadání, jako otázka 66, ale nabízí jiné odpovědi. Překvapivě správnou odpověď (b) zvolila opět pouze třetina dotazovaných (5 ze 17). Téměř třetina (5 ze 17) volila odpověď (a) a čtvrtina (4 ze 17) odpověď (d). Distraktor (c) nezvolil nikdo a jako takový by se měl nahradit například možností $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, x \leq y\}$. Zopakujme, že dovednost popsat množinu uvedenou na obrázku považujeme za základní a tudíž otázku 74 nebudeme ani vylučovat ani zjednodušovat.

91. Jak by vypadal dvojný integrál $\iint_M \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ po provedení transformace do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$?

(a) $\iint_M \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$.

(b) $\iint_M \sqrt{(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)\, \rho}\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi$.

(c) $\iint_M \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}\, \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi$.

(d) ani jedna z uvedených možností

Správná odpověď je (d). Jestliže jsme na množině M, přes kterou integrujeme, provedli transformaci do polárních souřadnic, již ji nadále nemůžeme označovat M. Musíme nějak pozměnit její značení. Proto nejsou odpovědi (a) až (c) správné. Upravme nyní tuto testovou položku:

Jak by vypadal dvojný integrál $\iint_{M_{x,y}} \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ po provedení transformace do polárních souřadnic $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$?

(a) $\iint_{M_{\varphi,\rho}} \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi$.

(b) $\iint_{M_{\varphi,\rho}} \sqrt{(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)\, \rho}\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi$.

(c) $\iint_{M_{\varphi,\rho}} \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}\, \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi$.

(d) ani jedna z uvedených možností

Kde jedinou správnou odpovědí je (c).

Otázky 2, 10, 15, 38, 53, 54, 56, 57, 64, 75, 80, 93, 96, 97, 100 a 101 byly na rozdíl od předchozích pro studenty až příliš jednoduché s indexem obtížnosti $P_3 \geq 0,9$. Některé z těchto otázek nyní upravíme, ale některé z nich zůstanou ve svém původním znění, jelikož prověřují základní znalosti a dovednosti, což je základním cílem Testu připravenosti.

10. Uvažujme tvrzení: Jestliže je funkce na kompaktní množině M spojitá, pak je na M integrovatelná. Toto tvrzení

(a) platí

(b) neplatí

(c) platí pouze pokud je funkce prostá

(d) platí pouze pokud je množina konvexní

Namísto distraktorů (c) a (d) navrhneme jiné. Například: (c) platí pouze pokud je funkce nezáporná, (d) platí pouze je-li funkce kladná.

38. Vyberte množiny, které nejsou omezené:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9, -2 \leq y \leq 2\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 9\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 9, -3 \leq y \leq 8\}$.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 9, -2 \leq y \leq 2\}$.

Pozměňme distraktor (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq -x^2 + 1\}$

53. Jestliže $\iint_M f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^4 (\int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \mathrm{d}y) \mathrm{d}x$, potom

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \sqrt{x}, 0 \leq y \leq 4\}$

(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

(c) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq xy \leq 4\sqrt{x}\}$

(d) ani jedna z uvedených možností

V případě této otázky navrhneme zcela novou nabídku řešení:

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$

(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

(c) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -y^2 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$

(d) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$.

Kde odpovědi (a) a (b) jsou správné a odpovědi (c) a (d) správné nejsou.

54. Jestliže $\iint_M f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^7 (\int_0^{\frac{1}{x+3}} f(x,y) \mathrm{d}y) \mathrm{d}x$, potom

(a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq \frac{1}{x+3}\}$

(b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq \frac{1}{x-3}\}$

(c) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} + 3\}$

Také u této otázky navrhneme novou nabídku řešení:

(a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq \frac{1}{x+3}\}$

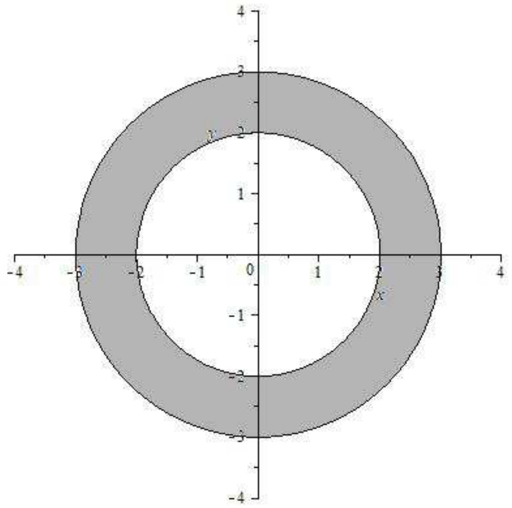
(b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{y} + 3 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq \frac{1}{3}\}$

(c) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{3}{y} \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq \frac{1}{3}\}$

(d) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \frac{1}{y+3}, 0 \leq y \leq 7\}$

Kde správná je odpověď (a) a ostatní odpovědi jsou nesprávné.

64. Množina na obrázku lze zapsat ve tvaru:



(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{2} \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{3}\}$

Tuto testovou položku doplňme ještě o jednu správnou odpověď:
(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4 - y^2 \leq x^2 \leq 9 - y^2\}$.

75. Zvolte správný výsledek následující integrace $\int_a^b (\int_c^d \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x) \mathrm{d}y$.

(a) $[\operatorname{tg} x]_c^d [y]_a^b$.

(b) $[\operatorname{cotg} x]_c^d [y]_a^b$.

(c) $[\operatorname{arctg} x]_a^b$.

(d) $[\operatorname{tg} x]_c^d$.

Namísto distraktorů (c) a (d) navrhneme jiné. Například:
(c) $[\frac{1}{\sin^2 x}]_c^d [y]_a^b$, (d) $[\frac{1}{-\sin^2 x}]_c^d [y]_a^b$.

96. Jaký první krok byste provedli při výpočtu následujícího integrálu
$\iint_M \sqrt{16 - x^2 - y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 16\}$?

(a) Substituci $t = 16 - x^2 - y^2$.

(b) Transformaci do polárních souřadnic $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$.

(c) Transformaci do polárních souřadnic $x = \rho \sin \varphi, y = \rho \cos \varphi$.

Doplňme distraktor (d) $t = -x^2 - y^2$.

97. Jaký první krok byste provedli při výpočtu následujícího integrálu $\iint_N \frac{x}{y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$,
$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$?

(a) Substituci $x = 2, y = 3$.

(b) Transformaci do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$.

(c) Substituci $t = \frac{x}{y}$.

Doplňme distraktor (d) ani jedna z uvedených možností.

100. Jakou použijete substituci při výpočtu následujícího integrálu $\int_c^d \int_a^b x^{y^3-3} 3y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(a) $t = y^3 - 3$.

(b) $t = x^{y^3-3}$.

(c) $t = 3y^2$

Namísto distraktoru (c), který nebyl vůbec atraktivní navrhněme například $t = x^{y^3-3}3y^2$. A doplňme distraktor (d) ani jedna z uvedených možností.

101. Jakou použijete substituci při výpočtu následujícího integrálu $\int_c^d \int_a^b \frac{\ln^2 x}{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(a) $t = \ln x$.

(b) $t = \frac{1}{y}$.

(c) $t = \frac{1}{x}$.

Doplňme distraktor (d) $t = \ln^2 x$.

Poznámka: Na základě facility indexu bychom se zabývali pouze otázkami 53 a 80 jako příliš jednoduchými. Ostatní otázky, kterým jsme se v této kapitole věnovali spadají do přípustných hodnot (viz tabulka 6).

Závěr

V úvodu této práce jsme si řekli, že podle didaktické literatury by test měl projít čtyřmi fázemi: 1. plánování, 2. sestavování, 3. ověřování, 4. použití testu. Všemi těmito fázemi Test připravenosti k ústní zkoušce z předmětu Matematika 2 - tematický okruh dvojný integrál prošel, což jsme poměrně detailně ilustrovali právě touto prací.

V první řadě jsme popsali proces plánování testu za použití techniky seznamu výukových cílů. Tuto techniku jsme ale doplnili také o specifikační tabulku, v níž jsme zpětně rozčlenili veškeré testové položky na základě úrovně osvojení znalostí, jelikož by mohla být nápomocná při dalším použití Testu připravenosti. Následně jsme charakterizovali některé testové položky z hlediska výukových cílů, aby bylo zcela jasné, jaké znalosti a dovednosti měly být danou otázkou (respektive otázkami stejného typu) ověřovány a testovány. Což jsme doplnili o detailní rozbor řešení. Skutečně nedílnou součástí této práce je kompletní soubor testových položek seřazených do oddílů na základě předem stanovených tematických okruhů, které korespondují se stanovenými výukovými cíli.

Po sestavení testu a před konečným spuštěním by optimálně mělo proběhnout pilotní testování, které si ale v běžné učitelské praxi lze představit jen těžko. Proto ověřování Testu připravenosti vyšlo až z prvního spuštění testu v letním semestru 2012/2013. Pro ověření obtížnosti otázek s vícenásobnou odpovědí jsme navrhli vlastní index obtížnosti P_3. Pro něj jsme stanovili intervaly hodnot, které slouží k selekci těch testových položek, jež byly pro studenty příliš jednoduché či příliš složité. Takové otázky pak byly ve většině případů upraveny tak, aby se přiblížily středně obtížným otázkám, kterých byla v testu největší část. Některé z těchto otázek však byly ponechány v původním znění, jelikož se zabývaly základními znalostmi a jako takové jsou v Testu připravenosti nepostradatelné. Kromě návrhů na úpravu některých otázek byly na konci práce navrženy ještě další změny jako je stanovení místa a času vykonání testu coby prevence podvodu, či hlubší specifikace toho, jakým způsobem bude každý test o dvaceti otázkách generován.

Příloha

Věta 1 (Fubiniho věta pro obdélník) *Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném obdélníku $K = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Potom platí:*

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y.$$

Věta 2 (Fubiniho věta pro měřitelnou množinu) *Nechť je funkce f spojitá na uzavřené elementární množině K vzhledem k proměnné x, tj.*
$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$. Potom platí:

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

Nechť je funkce f spojitá na uzavřené elementární množině K vzhledem k proměnné y, tj. $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; c \le y \le d, \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$. Potom platí:

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y.$$

Věta 3 (Transformace souřadnic ve dvojném integrálu) *Nechť se uzavřená omezená množina $N \subset \mathbb{R}^2$ (proměnných u, v) zobrazí pomocí soustavy rovnic*

$$\begin{aligned} x &= g(u,v) \\ y &= d(u,v) \end{aligned}$$

vzájemně jednoznačně na uzavřenou omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ (proměnných x, y), přičemž funkce g a h jsou v N spojité spolu se svými parciálními derivacemi $\frac{\delta g}{\delta u}$, $\frac{\delta g}{\delta v}$, $\frac{\delta h}{\delta u}$ a $\frac{\delta h}{\delta v}$ a pro tzv. jacobiův determinant (jakobián) platí

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta g}{\delta u} & \frac{\delta g}{\delta v} \\ \frac{\delta h}{\delta u} & \frac{\delta h}{\delta v} \end{vmatrix} \neq 0$$

ve všech bodech množiny N. Dále nechť funkce $f = f(x,y)$ je spojitá na M. Potom platí

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \iint_N f(g(u,v),h(u,v))|J|\,du\,dv,$$

kde $|J|$ je absolutní hdnota jakobiánu.

Literatura

[1] ŘEŠÁTKO, Miloš. *Didaktické testy ve školní praxi.* Praha: SNTL, 1975.

[2] CHRÁSKA, Miroslav. *Didaktické testy v práci učitele.* Olomouc: Krajský pedagogický ústav, 1988.

[3] HALIŠKA, Jaromír. *Jak testy sestavit a pracovat s nimi.* 2. vyd. Brno: Středisko služeb školám, 1999.

[4] CHRÁSKA, Miroslav. *Didaktické testy. Příručka pro učitele a studenty učitelství.* Brno: Paido, 1999.

[5] ŠKODA, Jiří; DOULÍK, Pavel; HAJEROVÁ-MÜLLEROVÁ, Lenka. *Zásady správné tvorby, použití a hodnocení didaktických testů v přípravě budoucích učitelů* [online]. 2006 [cit. 2014-02-16]. Dostupné z: http://cvicebnice.ujep.cz/cvicebnice/FRVS1973F5d/.

[6] ŠKODA, Jiří; DOULÍK, Pavel. *Tvorba a hodnocení didaktických testů.* Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně v Ústí nad Labem, 2007.

[7] CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ. *Didaktické testy* [online]. 2010 [cit. 2014-02-16]. Dostupné z: http://www.cermat.cz/didakticke-testy-1404034141.html.

[8] KALHOUS, Zdeněk; OBST, Otto a kol. *Školní didaktika.* Praha: Portál, 2002.

[9] FENCLOVÁ, Jitka; JOSÍFKO, Marcel; TUČEK, Alexandr. *Didaktické testy a jejich zpracování.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972.

[10] BÍLEK, Martin; JEŘÁBEK, Ondřej. *Teorie a praxe tvorby didaktických testů.* [online]. Olomouc, 2010 [cit. 2014-02-16]. Dostupné z: http://zvyp.upol.cz/publikace/bilek_jerabek.pdf.

[11] ZOUNEK, Jiří. *Učení (se) s on-line technologiemi.* Praha: Wolters Kluwer Česká republika, 2012.

[12] *Dokumentace Moodle.* [online]. 2013 [cit. 2014-04-01]. Dostupné z: http://docs.moodle.org/dev/Quiz_statistics_calculationsFacility_index.