

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

SROVNÁNÍ FEM A BEM

COMPARING FEM WITH BEM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

VÍT ZAJÍČEK

VEDOUcí PRÁCE

SUPERVISOR

ING. TOMÁŠ NÁVRAT, PH.D

BRNO 2009

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2008/2009

ZADÁNÍ BAKALÁRSKÉ PRÁCE

student(ka): Vít Zajíček

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem c.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Srovnání FEM a BEM

v anglickém jazyce:

Comparing FEM with BEM

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Metoda hraničních prvků nabízí řešení problému pružnosti, ve kterých jiné metody (např. MKP)

nedosahují uspokojivých výsledků. Vzhledem ke "komerčnímu" vítězství MKP, je metoda hraničních prvků šířena formou konkrétních programů.

Cíle bakalářské práce:

- Studium a seznámení se s teoretickými základy metody konečných a hraničních prvků.
- Shrnutí základních poznatků a rozdílů obou metod.

Seznam odborné literatury:

- Katsikadelis, J. T., (2002) Boundary elements - theory and applications, Elsevier
Kolár, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíšek, A.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL Praha, 1979
Petruška, J.: Počítačové metody mechaniky II, Metoda konečných prvků, FSI VUT Brno 2003, výukový text

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/2009.

V Brně, dne 19.11.2008

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc. doc.
Ředitel ústavu

RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

LICENČNÍ SMLOUVA:

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá možnostmi řešení problémů pružnosti a pevnosti. V první kapitole je obecné rozdělení možných přístupů k těmto problémům. V následujících jsou pak prezentovány základní principy metody konečných prvků a metody hraničních prvků na jednoduchých příkladech. Dále uvádí srovnání těchto metod.

ABSTRACT

The thesis explores the possibilities of dealing with problems concerning Elasticity and Strength of materials. In first chapter there is general division of approaches to those problems.

Following chapter describes basic principles of Finite Element Method and Boundary Element Method and their use in some simple examples. There is a comparison of those methods as well.

KLÍČOVÁ SLOVA

Numerické metody mechaniky, obecné rovnice pružnosti, metoda konečných prvků, princip mkp, konvergence mkp, metoda hraničních prvků, princip mhp, srovnání mkp a mhp

KEYWORDS

Numerical method of mechanics, general equations of elasticity, finite element method, principle fem, convergence fem, boundary element method, principle bem, comparing fem with bem

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

Zajíček, Vít. *Srovnání FEM a BEM: Bakalářská práce*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 38 s., Vedoucí práce Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Srovnání FEM a BEM“ vypracoval samostatně po konzultacích s vedoucím práce. Vycházel jsem přitom ze svých vědomostí získaných při studiu, čerpal z uvedené literatury a internetových zdrojů.

V Brně dne

.....

Vít Zajíček

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji Ing. Tomáši Návratovi, Ph.D, vedoucímu bakalářské práce, za odborné vedení a poskytnutou pomoc při zpracování této práce.

OBSAH

Úvod	10
1. Základní problematika a přístupy k řešení problémů pružnosti	12
1.1. Obecné rovnice pružnosti	12
1.2. Přístupy k řešení problémů pružnosti	14
2. Metoda konečných prvků	16
2.1. Historie a vývoj MKP	16
2.2. Základní princip MKP	16
2.2.1. Diskretizace spojitého problému	18
2.2.2. Vytvoření matice tuhosti	19
2.2.3. Matice zatížení prvku	20
2.2.4. Globální matice tuhosti a zatížení	20
2.2.5. Základní rovnice MKP	22
2.3. Pojednání o konvergenci a přesnosti MKP	23
2.3.1. Výsledná energetická chyba e	24
2.3.2. Relativní energetická chyba E	25
3. Metoda hraničních prvků	26
3.1. Historie a vývoj MHP	26
3.2. Základní princip MHP	27
3.3. Princip výpočtu	29
4. Srovnání MKP s MHP	32
Závěr	35
Seznam použitých zdrojů	36
Seznam použitých veličin	39

ÚVOD

V návrhu inženýrských konstrukcí a řešení technických i vědeckých problémů hrají numerické metody stále významnější roli. Tuto skutečnost lze podložit několika podstatnými důvody.

- Stále se zvyšující nároky na inženýrské konstrukce, jak hlediska pevnosti, tak z pohledu výkonnosti a efektivity.
- Diferenciální rovnice, kterými se popisují tyto problémy lze řešit analyticky pro velmi omezené třídy problémů a pro jednoduchou geometrii.
- Zpravidla velké finanční nároky na experimentální řešení.
- Snížení časů při navrhování a řešení inženýrských problémů, tudíž i snížení celkových výrobních nákladů.
- Rychle se vyvíjející a stále výkonnější výpočetní technika.

Aby bylo možné doplnit nebo dokonce nahradit experimenty. Jsou kladeny na tyto metody velké nároky. Zásadní požadavek je ten, že modelové řešení musí spět k přesnému a spolehlivému výsledku.

Mezi numerické metody zabývající se řešením inženýrských problémů bych zmínil *metodu konečných diferencí (MKD)*, *metodu konečných objemů (MKO)*, *metodu konečných prvků (MKP)* a *metodu hraničních prvků (MHP)*, každá z těchto metod má své specifické výhody a nevýhody. Nejpoužívanější metody jsou MKP a MHP.

Cílem této práce je ve formě přehledu a shrnutí pojednat o obou metodách, porovnat jejich výhody, nevýhody a použití v technické praxi.

Bakalářská práce je rozdělena do čtyř částí. V první části je popsána základní problematika úloh pružnosti a možné způsoby jak tyto problémy řešit. Druhá kapitola pojednává o MKP, zahrnuje její historický vývoj, popisuje její princip na jednoduchém případě; uvádí konvergenci metody a chyby při řešení. Třetí kapitola se zabývá MHP. Je zde zpracován její historický vývoj a její základní princip na jednoduchém příkladě. Ve čtvrté kapitole jsou obě metody srovnány, jak po stránce matematické, tak po stránce praktické.

Při psaní o MKP jsem používal uvedenou česky psanou literaturu. Čerpal jsem z prakticky získaných zkušeností při řešení příkladů v programu Ansys, vyučovaného ve volitelném předmětu *Metoda konečných prvků a výpočetní systém ANSYS* na VUT FSI Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky.

Zpracování MHP bylo obtížnější, česky psaných textů je málo a v některých případech neposkytují adekvátní informace, tudíž jsem čerpal

z anglicky psané literatury, internetových stránek zahraničních univerzit, stránek zahraničních firem zabývajících se touto problematikou.

V obou případech jsem práci konzultoval s vedoucím práce a s výpočtáři zaměstnanými ve firmě, kde pracuji.

1. Základní problematika a přístupy k řešení problémů pružnosti^{[1][2]}

Všechny stroje či nástroje jsou navrhovány za účelem plnění různých funkcí. Z toho vyplývá, že na všechny nástroje či stroje jsou v praxi kladeny různé nároky např. spolehlivost, bezpečnost, pevnostní únosnost, tuhost, ale také odolnost vůči vnějším vlivům či prostředí, ve kterém je součást používána. Tudíž musí být součást sestrojena tak, aby při jejím provozu nenastaly možné mezní stavy.

„Mezní stavy jsou stavy, u nichž deformace nebo porušení objektu se mění z funkčně přípustných na funkčně nepřípustné. Protože jde o mezní stavy z hlediska deformace a porušování těles, jsou to deformačně-pevnostní mezní stavy.“ [9, str. 5]

Tyto problémy lze řešit matematickými teoriemi, jež jsou představovány *obecnými rovnicemi pružnosti*, jež jsou výchozím principem pro řešení analytické i numerické a používají se pro řešení problémů dle [1] přímých i nepřímých.

- Přímý problém pružnosti- Pro těleso s danými materiálovými charakteristikami, danými rozměry, jednoznačně zadaným zatížením a uložením v prostoru či rovině vyhodnocujeme napjatost a deformaci.
- Nepřímý problém pružnosti- V těchto úlohách známe projevy tělesa (napjatost, deformaci) vzniklé jako reakce na zatížení. Řešíme potřebné rozměry tělesa, materiálové vlastnosti či charakter vazeb tělesa s okolím. Tyto úlohy nelze řešit metodou konečných prvků.

1.1. **Obecné rovnice pružnosti** [1]

V obecné prostorové statické úloze hledáme celkem 15 neznámých funkcí proměnných x, y, z . Jedná se o:

- tři posuvy u, v, w
- šest přetvoření $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- šest napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

- Rovnice rovnováhy: jedná se o rovnice rovnováhy na elementárním prvku, na který působí mimo složek vnitřních napětí také vnější objemová síla (např. gravitace). Představují vzájemné závislosti mezi

složkami tenzoru napětí.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x &= 0 & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

- Rovnice geometrické: platí pro malá přetvoření řádově 10^{-2} a menší. Vyjadřují vazbu mezi složkami posuvů a přetvoření. Jedná se o složky tenzoru přetvoření.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2)$$

- Konstitutivní vztahy: Vyjadřují závislost mezi deformací a napětím v bodě tělesa. Nejjednodušší závislost je pro lineárně pružný, izotropní (Hookovský) materiál. Jehož vlastnosti nám určují dvě experimentálně určené konstanty- Joungův modul pružnosti E a Poissonovo číslo μ . Tato závislost musí být pro každý materiál určena experimentálně. Vztahy též nazýváme *zobecněný Hookeův zákon*.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\text{Pro modul pružnosti ve smyku: } G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

- Okrajové podmínky: Vzhledem k tomu, že se jedná o diferenciální rovnice je nutné pro jejich řešení předepsat okrajové podmínky. Jsou to podmínky dvojího typu- geometrické, silové. V daném místě povrchu tělesa, lze předepsat jen jednu z těchto podmínek.

Geometrické podmínky- vyjadřují zadání posuvů, jež předem známe z vlastností uložení tělesa. Např.: Posuv ve vetknutí je roven 0 $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$. V tomto případě se jedná homogenní geometrické

podmínky.

Silové podmínky: vyjadřují rovnováhu mezi silami působícími na těleso a vnitřními silami.

Uvedené vztahy obecné pružnosti nám spolu s okrajovými podmínkami postačují k nalezení všech 15 neznámých funkcí posuvů, přetvoření a napětí. Nalézt, však toto řešení je velmi náročné. Během historického vývoje se vyvinuly různé přístupy k hledání tohoto řešení.

1.2. Přístupy k řešení problémů pružnosti [1],[2]

Přístupy k řešení problémů lze posuzovat podle [1, str. 248] následovně:

- podle použité matematické formulace problému (*diferenciální a variační*),
- podle výběru nezávislých neznámých funkcí (*deformační, silový a smíšený*),
- podle způsobu vlastní realizace řešení (analytické a numerické).

○ Hledisko matematické formulace problému:

Diferenciální přístup formuluje problém pružnosti v podobě soustavy diferenciálních rovnic vyjádřených z úpravy vztahů (1).

Variační princip hledá řešení jako stav, v němž energie analyzovaného tělesa nabývá minima, tudíž stacionární hodnoty.

- ### ○ Hledisko nezávislých funkcí pružnosti:
- při řešení problémů se nikdy nehledá všech 15 funkcí pružnosti. Postupným dosazování obecných rovnic pružnosti se vylučují jednotlivé skupiny neznámých funkcí (např. jen posuvy, nebo jen napětí), které označujeme jako *nezávislé neznámé funkce*.

Přístup deformační: za nezávislé funkce považujeme složky posuvů.

Přístup silový: za nezávislé funkce považujeme složky napětí.

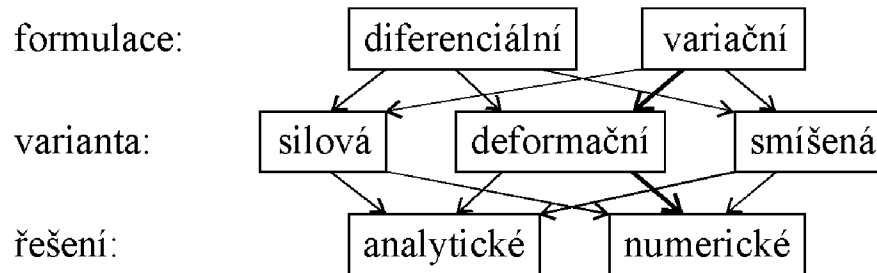
Přístup smíšený: za nezávislé funkce považujeme složky napětí i posuvů.

○ Hledisko vlastní realizace řešení:

Analytické řešení: výsledek hledáme ve formě spojitých funkcí použitím metod matematické analýzy s využitím integrálního a diferenciálního počtu. Analytický přístup má nesporné výhody v porovnání s numerickým řešením. Hlavní výhodou je, že řešením je funkční závislost vstupních a výstupních veličin. Další výhodou je

nízká operační složitost a přesnost výsledků. Avšak hlavní nevýhodou je, že analytickými metodami můžeme řešit jen tělesa jednoduchých tvarů, tzv. elementární tělesa.

Numerické řešení: problém hledání spojitého řešení se převádí na hledání konečného počtu neznámých parametrů, pomocí nichž se hledané funkce přibližně aproximují.



Obr.1 Schéma přístupů k řešení problémů pružnosti a pevnosti

2. Metoda konečných prvků [1][2][3][4]

Jedná se o numerickou výpočetní metodu, pomocí níž jsme schopni řešit nejrůznější problémy technické praxe. Podstatnou výhodou ve srovnání s analytickými metodami je zejména možnost řešit problémy pružnosti na obecných tělesech, které jsou analytickými metodami "neřešitelné".

2.1. Historie a vývoj MKP [1][3]

MKP je historicky následníkem metody známé jako Matrix Structural Analysis (maticová strukturální analýza) která, podle typu primárních neznámých, byla známa ve formulaci deformační a silové. Dualitu obou formulací prokázal Argyris v publikaci: *Energy Theorems and Structural Analysis*. Zpočátku byla MKP metodou náhradní mřížoviny později byla její formulace upřesněna. Za počátek MKP jako můžeme považovat rok 1956, kdy M. Turner, R. Clough, H. Martin a L. Topp vydali práci: *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*. Jejich cílem bylo nalézt matematické modelování, s jehož pomocí, by bylo možné dostatečně přesně řešit problémy pružnosti složených z obecných těles v leteckém, jaderném a kosmickém inženýrství.

Později vznikla její variační formulace, jež umožnila rozšíření MKP na celou mechaniku kontinua. Díky tomu je možné řešit problémy z nejrůznějších odvětví technických oborů např. proudění kapalin a plynů, tepelné přenosy, elektřina a magnetismus. Za zmínění stojí, že ke konkrétní matematické formulaci přispěli profesori z VUT A. Ženíšek a M. Zlámal.

V dnešní době umožňuje MKP řešit tyto typy úloh:

- Napětově deformační analýza při statickém, cyklickém, dynamickém zatěžování, včetně nejrůznějších nelineárních úloh např. kontaktní úlohy.
- Kmitání soustavy, vlastní, vynucené, s tlumením i bez tlumení.
- Analýza stacionárního i nestacionárního vedení tepla a určení teplotní napjatosti (včetně zbytkové).

2.2. Základní princip MKP [1][3]

Již z názvu vyplývá, že základním kamenem MKP je prvek konečných rozměrů. Tato analýza vyžaduje rozdělení řešené oblasti do podoblastí tzv. prvků, které musí tuto oblast spojitě a jednoznačně vyplňovat. Tato operace se nazývá *diskretizace oblasti*. Pro každý typ prvku je kromě dimenze

(prutový, dvourozměrný, třírozměrný) a tvaru, charakteristický počet a poloha bodů, v nichž se určují neznámé parametry řešení problému. Pro tyto prvky se používá název uzly. Hustota, rozložení a typ zvoleného prvku mají klíčový vliv na kvalitu řešení a kapacitní nároky na paměť počítačů.

MKP založena na počtu variačním, jenž hledá minimum funkcionálu. Základní dělení MKP vychází z variačního principu, který je použit:

- Silová varianta metody konečných prvků- vyplývá z Castiglianova variačního principu. Nezávislé veličiny jsou složky tenzoru napjatosti.
- Deformační varianta metody konečných prvků- vyplývá z Lagrangeova variačního principu. Neznámé funkce jsou posuvy.

„Mezi všemi přípustnými funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, jsou funkcemi pružnosti ty posuvy, které minimalizují funkcionál zatíženého tělesa.“ [1, str. 252]

Tento princip můžeme pozorovat u různých dějů, jak v přírodě, tak v technice, kdy všechny děje spějí k minimalizaci svého energetického stavu. Například v definici druhého zákona termodynamiky, který nám říká, že:

„Teplo nemůže samovolně přecházet z tělesa o teplotě nižší na těleso o teplotě vyšší. (Clausius)“ [6, str.57]

V současné době se převážně používá deformační varianta, jejímž funkcionálem je celková potencionální energie tělesa Π , definována jako rozdíl energie napjatosti W a potenciálu vnějšího zatížení tělesa P :

$$\Pi = W - P, \quad (2.1)$$

kde energie napjatosti a potenciál zatížení jsou dány vztahy:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV, \quad P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{o} \cdot dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dS. \quad (2.2)$$

V uvedených vztazích vystupují sloupcové matice:

- posuvů $\mathbf{u}^T = [u, v, w]$
- přetvoření $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]$

- napětí $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$
- objemového zatížení tělesa $\mathbf{o}^T = [o_x, o_y, o_z]$
- plošného zatížení tělesa $\mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z]$

Variační metody matematiky nám umožňují najít stacionární (resp. minimální) hodnotu tohoto funkcionálu, tudíž i takový tvar, který bude těleso vzhledem ke svým okrajovým podmínkám zaujímat. Z deformačních posuvů pak lze jednoznačně určit tenzory přetvoření, následně pak pomocí daných konstitutivních vztahů při známých materiálových charakteristikách vyhodnotit složky tenzoru napětí.

„Funkcionál je zobrazení z množiny funkcí do množiny čísel. Je to tedy pravidlo, podle něhož přiřadíme funkci na jejím definičním oboru (nebo jeho části) nějakou číselnou hodnotu. Příkladem je určitý integrál funkce.“ [4, str. 1]

2.2.1. Diskretizace spojitého problému

Těleso je rozděleno na určitý počet vhodných prvků. Vhodnými prvky rozumíme dělení, jež je postačující z hlediska řešeného problému s ohledem na výpočetní náročnost a požadovanou přesnost výsledku. Například pokud lze úlohu řešit, jako rovinou zvolíme rovinné prvky, pokud to řešení dovoluje; prutové prvky. Pro názornost je další postup uveden pro prutové těleso zatížené jen vlastní tíhou.

V MKP jsou posuvy aproximovány jako součet předem daných bázevých funkcí $\tilde{u}_i, \tilde{v}_j, \tilde{w}_k$.

$$u = \sum_{i=1}^l a_i \cdot \tilde{u}_i; \quad v = \sum_{j=1}^m b_j \cdot \tilde{v}_j; \quad w = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \tilde{w}_k,$$

kde $\tilde{u}_i, \tilde{v}_j, \tilde{w}_k$ jsou zmíněné známé bázevé funkce a koeficienty a_j, b_j, c_j , jsou neznámé koeficienty.

Tudíž volíme stupeň polynomu bázevé funkce, kterou budeme aproximovat posuvy. Stupeň polynomu volíme s uvážením stejných zásad jako u volby prvku. Pro již zmíněnou rovinou prutovou úlohu postačuje lineární aproximace. Typu:

$$u(x) = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta}, \tag{2.3}$$

kde $\mathbf{N} = [N_1, N_2]$ je matice bázevých funkcí posuvů,

$\delta = [u_1, u_2]^T$ je matice deformačních parametrů; její prvky jsou posuvy uzlových bodů, které představují neznámé parametry řešení. Bázové funkce mají explicitně daný tvar a musí splňovat určité předpoklady (více v kapitole 2.3). Pro ilustraci uvádím tvar:

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

v němž x_1 x_2 jsou souřadnice uzlových bodů.

Posuv libovolného vnitřního bodu je pak dán vztahem:

$$u(x) = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2. \quad (2.4)$$

Stejným způsobem jsou aproximovány průběhy $u(x)$ na ostatních prvcích, přičemž sdílení stejného uzlu mezi prvky znamená sdílení i stejného deformačního parametru a tedy automatické mezivprvkové spojitosti posuvu $u(x)$.

2.2.2. Vytvoření matice tuhosti

Potenciální energie vnějších sil je integrální veličina. Její výsledná hodnota je součtem jednotlivých příspěvků na jednotlivých prvcích:

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \Pi_i,$$

kde $\Pi_1 = W_1 - P_1$

a energie napjatosti (uvážíme-li, že $dV = S dx$) má tvar:

$$W_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon S dx \quad (2.5)$$

Pro výpočet energie napjatosti (2.5), je nutné vyjádřit napětí a přetvoření jako funkce posuvů $u(x)$.

Z geometrických rovnic (1.2) víme, že přetvoření je derivace funkce posuvu $u(x)$ podle x .

$$\varepsilon = \frac{d}{dx}(\mathbf{N} \cdot \delta) = \mathbf{B} \cdot \delta, \quad (2.6)$$

kde matice \mathbf{B} vznikla derivací matice \mathbf{N} .

Tudíž pro lineární aproximaci posuvů (lineární bázovou funkci) je přetvoření nad prvkem o řád nižší, tedy konstantní. Totéž platí pro napětí.

$$\sigma = E \cdot \mathbf{B} \cdot \delta = \delta^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot E \quad (2.7)$$

Dosazením (2.6) a (2.7) do (2.5) po úpravách vyjádříme energii napjatosti prvku do tvaru:

$$W_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \cdot \left(ES \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right) \cdot \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta} , \quad (2.8)$$

kde k je prvková **matice tuhosti prvku**:

$$\mathbf{k} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Prvky této matice mají fyzikální rozměr tuhosti. Dále uvádím další známé míry tuhosti přímého prutu délky L_p . Tuhost konce prutu $4EJ/L_p$, převádějící tuhost $2EJ/L_p$, výchylková tuhost $6EJ/L_p^2$, posouvající tuhost $12EJ/L_p^3$.

2.2.3. Matice zatížení prvku

Prut je zatížen jen vlastní tíhou což je objemová síla $o=\rho \cdot g$ působící v elementárním objemu $dV=Sdx$. Po dosazení do vztahu pro potenciál zatížení dostaneme:

$$P_1 = \int_{x_1}^{x_2} u \rho g S dx . \quad (2.10)$$

Dosazením za $u(x)$ z rovnice (2.3) vyjádříme potenciál:

$$P_1 = \boldsymbol{\delta}^T \cdot \mathbf{f} , \quad (2.11)$$

kde \mathbf{f} je prvková matice *vnějšího zatížení*

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Matice \mathbf{f} zabezpečuje diskretizaci spojitého zatížení. Její prvky představují celkovou objemovou sílu působící na prvek, soustředěnou do krajních uzlů v podobě uzlových sil. Obdobně by byla do uzlů rozdělena i další zatížení. Všechna zatížení jsou soustředěna v uzlech a silová interakce mezi prvky probíhá pomocí uzlů, přestože uživatel zadává zatížení obvykle jako liniová, plošná nebo prostorová, je zatížení ve smyslu statické ekvivalence nahrazeno do jednotlivých uzlů.

2.2.4. Globální matice tuhosti a zatížení

Matice \mathbf{k} , \mathbf{f} nám umožňují vyjádření energie napjatosti i potenciál zatížení jako funkce posuvu prvku. Pro ostatní prvky vyjádříme jejich matice analogicky. Pokud rozdělíme řešený prut na prvky stejné délky, při

zachování E , S , ρ budou jejich matice \mathbf{k} , \mathbf{f} identické s maticemi již vyjádřenými.

Nyní potřebujeme vyjádřit celkový potenciál řešeného tělesa. K tomu je vhodné sdružit všechny deformační parametry úlohy do jediné, globální matice deformačních parametrů $\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$. Chceme-li pak energii napjatosti prvního prvku vyjádřit podobně jako ve vztahu (2.8)

$$W_1 = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{U} , \quad (2.13)$$

je třeba matici tuhosti prvku rozšířit o příslušný počet řádků a sloupců:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.14)$$

Celková energie napjatosti je pak součtem prvkových příspěvků

$$W = \sum_{i=1}^3 W_i = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3) \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} , \quad (2.15)$$

kde

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} , \quad (2.16)$$

je globální *matice tuhosti* (též *matice tuhosti konstrukce*). Jedná se o algebraický součet lokalizovaných matic tuhosti všech prvků.

Stejným způsobem získáme i *celkovou matici zatížení* \mathbf{F} , algebraický součet všech lokalizovaných vektorů transformovaného zatížení všech prvků

$$P = \sum_{i=1}^3 P_i = \mathbf{U}^T \cdot (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} , \quad (2.17)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (2.18)$$

2.2.5. Základní rovnice MKP

Vycházíme ze základní rovnice pro celkovou potencionální energii tělesa $\Pi = W - P$. Tu rozepíšeme pomocí rovnic (2.16) a (2.18) v závislosti na konečném počtu deformačních parametrů, uspořádaných v matici \mathbf{U} :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2.19)$$

Z Lagrangeova variačního principu hledáme minimum funkce Π resp. stacionární hodnotu, jenž je dána podmínkou:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Z níž plyne:

$$\frac{d\Pi}{d\mathbf{U}} = \mathbf{K}\Delta - \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

Tím dospíváme k základní obecně platné rovnici deformační varianty metody konečných prvků.

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.21)$$

Lze snadno dokázat, že determinant matice \mathbf{K} je nulový. Tudiž se jedná o singulární matici a soustava tím pádem nemá jednoznačné řešení. To však lze očekávat, jelikož ještě nebyly předepsány okrajové podmínky a nejednoznačnost řešení odráží prostorovou neurčitost tělesa jako celku. Pro deformační variantu MKP ve statických úlohách pružnosti tedy platí obecná zásada:

„Řešitel musí vždy předepsat alespoň takové okrajové podmínky, aby zamezil pohybu tělesa jako celku ve všech jeho složkách, které jsou možné s ohledem na typ a dimenzi úlohy.“ [1, str.255]

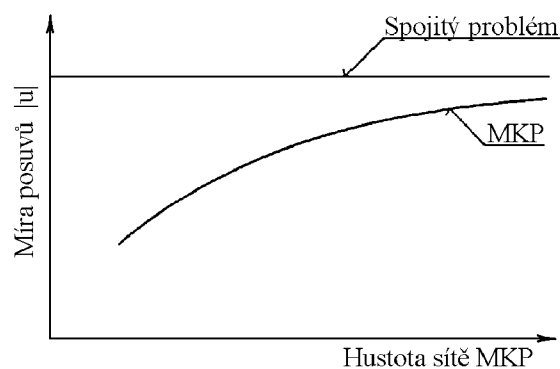
Znamé deformační parametry např. $u_1=0$ tedy vypouštíme z matice neznámých parametrů \mathbf{U} , čímž se matice soustavy stává nesingulární a řešením rovnice (2.21) získáváme posuvy všech uzlových bodů. Tím pádem jsme schopni z rovnice (2.6) určit jednotlivá přetvoření a napětí z rovnice (2.7). V libovolném uzlu řešené oblasti.

2.3. Pojednání o konvergenci a přesnosti MKP[1][2]

Konvergencí výpočtu rozumíme přibližování výsledku výpočtu MKP k řešení spojitého problému při zhušťování sítě konečných prvků. Konvergence řešení je nutná pro dosažení dostatečně přesného výsledku. Aby toho bylo dosaženo, musí dle [2] každý typ prvku splňovat následující kritéria:

- Na hranici mezi prvky i uvnitř prvku musí aproximované posuvy splňovat minimální požadavky spojitosti, závislé na typu úlohy. Konkrétněji: u masivních tělesových prvků s deformačními parametry u , v , w . Obvykle postačuje spojitost v posuvech na hranicích; u tenkostěnných prvků s rotačními parametry φ_x , φ_y , φ_z je potřebná i spojitost prvních derivací posuvů; hladkost průhybové čáry, resp. plochy.
- Při posuvu prvku jako celku musí zůstat napětí i přetvoření nulová.
- Prvek musí být schopen přesně popsat stav konstantního přetvoření.

U prvků, jež splňují následující podmínky je zaručená konvergence, jedná se o monotónní konvergenci zdola, vyjádřeno v posuvech (viz. obr.2.1). Znamená to tedy, že vypočtené posuvy jsou obecně menší než skutečné. Zvyšováním počtu prvků tedy zvyšujeme poddajnost výpočtového modelu.



Obr.2.1 Konvergence posuvů

Podstatná je pro nás chyba konkrétního výpočtu pro zvolený typ prvku a vybranou hustotu sítě. Jedná se o tzv. diskretizační chybu vzniklou řešením spojitého problému numerickým výpočtem, poskytujícím po částech spojité výsledky.

Základní problém při určování této chyby je ten, že hledáme chybu vzhledem ke spojitému řešení, které u většiny praktických úloh neznáme.

Proto vycházíme z míry nespojitosti numericky získaných napětí na hranicích mezi prvky. Jak již bylo uvedeno, při lineární či kvadratické

aproximaci je mezivprvkový průběh posuvů spojitý, ale napětí mají obecně nespojitý průběh na hranách prvků. K získání přijatelnějšího průběhu jsou napětí po hranách prvků zprůměrována a proložena vhodnou spojitou křivkou. Nad každým prvkem pak máme napětí dvojího typu: primární výsledek výpočtu σ^i , mezi prvky nespojitý, a dodatečnou spojitou aproximaci σ^a . Rozdíl mezi nimi označujeme $\Delta\sigma$.

V současné době se obvykle považuje za chybový parametr odchylka v energiích napjatosti pro stav určený napětím σ^i a stav určený napětím σ^a .

Pro určení chyby existují tyto možnosti:

2.3.1. Výsledná energetická chyba e .

Na obr.2.2 jsou uvedena napětí zobrazena pro příklad prutu namáhaného tahem. Potom pro každý prvek můžeme vyčíslit chybu energie napjatosti i -tého prvku e_i jako integrál

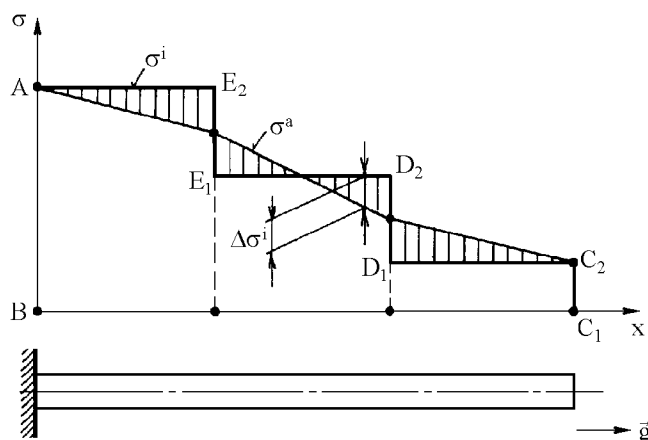
$$e_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \Delta\sigma^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \Delta\sigma \, dV \quad , \quad (2.221)$$

kde \mathbf{D} je matice materiálových parametrů. Výslednou energetickou chybu celé konstrukce získáme jako součet prvkových příspěvků.

$$e = \sum_{i=1}^{N_r} e_i \quad , \quad (2.232)$$

kde e je energetická chyba celé konstrukce, N_r je počet prvků celé řešené oblasti, pro kterou chybu vyčíslujeme. Představu o celkové energetické chybě nám dává vyšrafovaná oblast na obr.2.2.

Bylo teoreticky ukázáno, že nejefektivnější model při dané hustotě sítě je takový, pro který je hodnota energetické chyby e_i pro všechny prvky stejná.



Obr. 2.2 Průběh napětí po prvku

2.3.2. Relativní energetická chyba E

Tato hodnota je v procentech vztažena k celkové energii napjatosti U. Energie napjatosti je určena z neaproximovaných průběhů napětí a přetvoření. Představu o celkové energii napjatosti graficky poskytuje plocha uzavřená čarou ABC₁C₂D₁D₂E₁E₂A na obr.2.2.

$$E = 100 \cdot \sqrt{\frac{e}{U + e}} \quad (2.24)$$

Uvedený odhad chyby E je schopen posoudit jen vhodnost navržené sítě vzhledem k *danému modelu geometrie*, **nikoli** ke skutečné geometrii. Chyba při vytváření modelu geometrie (zanedbání pevnostně důležitého tvarového detailu) je tímto přístupem neodhalitelná.

3. Metoda hraničních prvků[7][8]

MHP představuje způsob řešení určité skupiny problémů, kde řešení hraničních hodnot funkcí je z hlediska řešené problematiky dostačující. Podle určitých integrálních vztahů je možné vypočítat i hodnoty uvnitř oblasti ze známých hraničních hodnot. Ve značné míře je tato metoda užívána pro řešení fyzikální a matematických problémů. MHP se začala rozvíjet především v souvislosti s potřebou snížit dimenzi výsledné soustavy rovnic a vychází z *hraničních integrálních rovnic*, je to v podstatě metoda pro jejich řešení. Výhodou této metody je snížení dimenze úlohy, neboť se diskretizuje pouze hranice, nikoliv celá uvažovaná oblast.

3.1. Historie a vývoj MHP

Do začátku osmdesátých let byla metoda hraničních prvků známa jako metoda hraničních integrálních rovnic (Boundary Integral Equation Method). Jako metoda pro řešení matematicko-fyzikálních problémů, založena na publikaci G. Greena: *An Essay on the Application on Mathematical Analysis to the Teories of Electricity and Magnetism*.

Ten formuloval roku 1828, integrální znázornění pro řešení Dirichletových a Neumannových problémů Laplasovi rovnice, které nazval Greenovi funkce.

Roku 1872 prezentoval obecnou metodu pro integrování rovnic elasticity a odvodil jejich řešení v integrální formě. To může být v podstatě pokládané za přímé rozšíření Greenova přístupu k Navierovým rovnicím elasticity.

V roce 1885 Somigliana použil Bettiho teorii a odvodil integrální prezentaci řešení problému elasticity, zahrnující výraz tělesových sil a hraničních přemístění.

Avšak otcovství metody hraničních prvků může být připisáno Fredholmovi. Začátkem dvacátého století jako první použil singulární hraniční integrální rovnici, aby našel neznámou hranici elektrického potencionálu. Původně byla MHP používána jako matematický nástroj k určení nezbytných okrajových podmínek pro dobře definovaný matematicko-fyzikální problém.

Až do padesátých byla metoda přehlížena, avšak s příchodem počítačů se vrátila do pozornosti jako numerická metoda pro řešení inženýrských problémů.

První práce, které položily základy MHP, jako metody pro řešení technických problémů se objevily na počátku šedesátých let. Poté vzal vývoj i aplikace v nejrůznějších inženýrských odvětvích rychlý spád. Rizzo a Cruse použili metodu na dvou a tří rozměrné problémy elasticity, Rizzo a

Shippy rozšířili metodu o anizotropní elasticitu, zatímco Cruse a Rizzo vyřešili elasto-dynamický problém. Ignaczak a Novacki vyjádřili integrální rovnice termoelasticity a Mendelson studoval problémy elasto-plastického krutu.

Již na konci osmdesátých let je možné nalézt četné publikace v odborné literatuře, kde je MHP použita pro celou řadu technických problémů. Mezi nimi jsou statické i dynamické, lineární nebo nelineární problémy pružnosti desek, skořepin. Dále v geomechanice, dynamice tekutin, lomové mechanice, tepelné vodivosti aj.

Další vývoj MHP je zaměřen na překonávání nevýhod této metody. Při řešení složitých časově závislých problémů, lineárních problémů, pro které není známo fundamentální řešení.

Nejslibnější metody, které úspěšně překonaly většinu obtíží a zároveň udržují čistě hraniční charakter z MHP, jsou metody Dual Reciprocity Method (DMR), která má však určitá omezení a metoda Analog Equation method (AEM).

3.2. Základní princip MHP [7][8]

MHP řeší hraniční integrální rovnice ty je možné dle [8, str. 1] definovat dvěma základními způsoby:

- *Přímá formulace*, vede k sestavení integrálních rovnic obsahující jako neznámé funkce ty funkce, které vystupují v původní diferenciální rovnici.
- *Nepřímá formulace*, vede k sestavení integrálních rovnic obsahující tzv. hustoty potenciálů jednoduché vrstvy a dvojevrstvy, ze kterých se teprve hledaná funkce vystupující v původní diferenciální rovnici musí vypočítat.

V praxi se převážně používá formulace přímá, jehož základem je tzv. fundamentální řešení diferenciálních rovnic resp. Greenova funkce a Greenovi nebo Somiglianovi vzorce. Základem nepřímé formulace je teorie potencionálů.

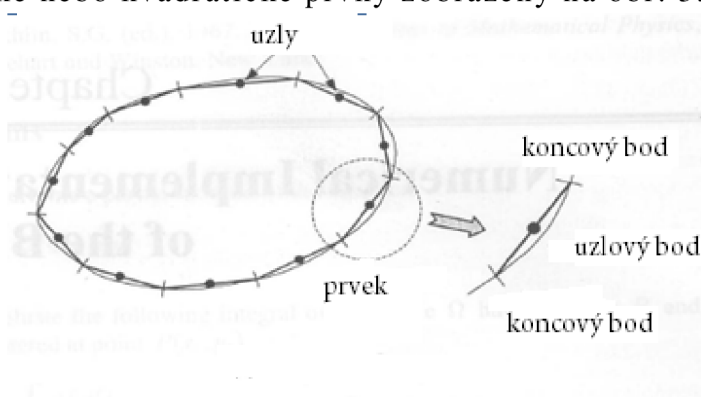
V MHP se diskretizuje hranice do konečného počtu segmentů, které nemusí být nutně stejně dlouhé; nazývají se hraniční prvky.

Na každém hraničním prvku se aproximuje přesné řešení úlohy do uzlových bodů pomocí interpolačních funkcí. Po vyřešení soustavy rovnic pro neznámé hodnoty posuvů na hranicích oblasti se hodnoty posuvů resp. napětí uvnitř oblasti stanoví analyticky na základě fundamentálního řešení.

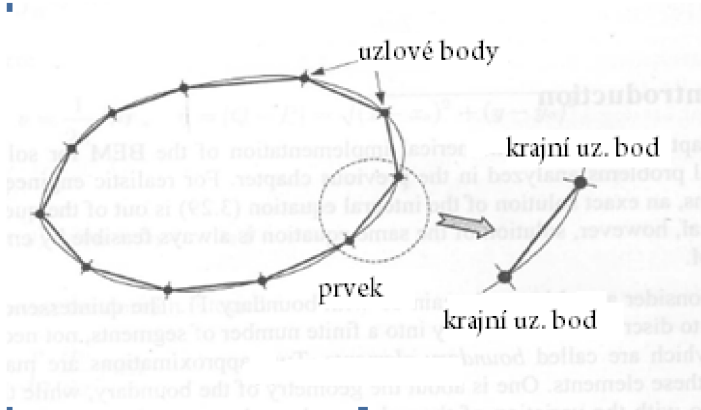
Uvažujme libovolné těleso Ω s hranicí Γ . Nad každým prvkem jsou dvě aproximace, jedna charakterizuje geometrii, zatímco druhá určuje *neznámou* změnu hranice prvku.

Obvykle používané hraniční prvky jsou:

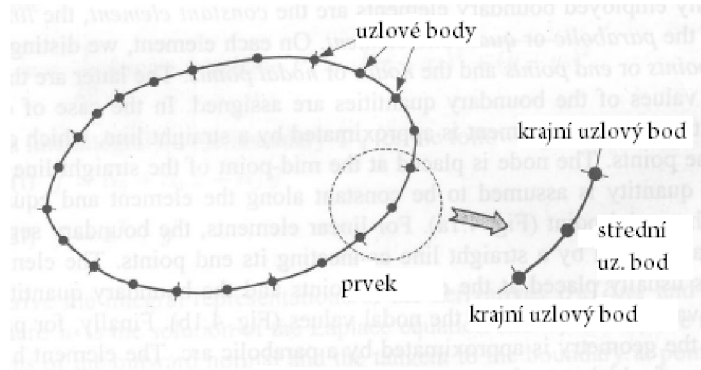
- konstantní prvek zobrazený na obr. 3.1
- lineární prvek zobrazený na obr. 3.2
- parabolické nebo kvadratické prvky zobrazeny na obr. 3.3



Obr. 3.1- Konstantní hraniční prvek



Obr. 3.2- Lineární hraniční prvek



Obr. 3.3- Kvadratický hraniční prvek

Na prvku s konstantní aproximací, rozlišujeme koncové a uzlové body. Uzlové body se nachází vždy ve středu přímky.

Pro prvky s aproximací lineární má prvek dva uzly obvykle umístěny na krajních bodech oblasti.

Parabolické prvky mají geometrii aproximovanou pomocí parabolického oblouku. Prvek má tři uzly, z nichž dva jsou umístěny na koncích a třetí obvykle v polovině. Volba prvku stejně jako u MKP významně ovlivňuje přesnost a výpočetní náročnost řešeného problému.

3.3. Princip výpočtu[8]

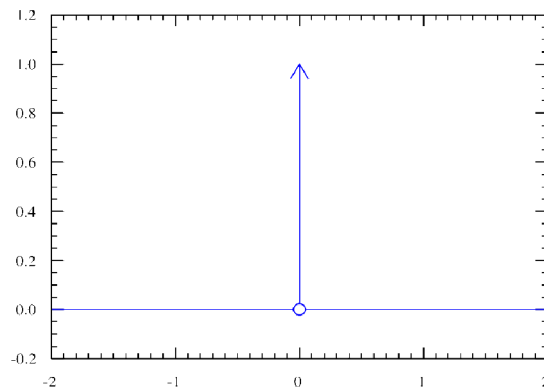
V této kapitole uvádím princip výpočtu MHP pro výpočet průhybu prutu. Ze začátku výpočtu je třeba určit fundamentální řešení problému, pro náš případ je podle [8] fundamentálním řešením Greenova funkce ve tvaru

$$G(x, \xi) = A^{-1} \delta(x - \xi), \tag{3.1}$$

kde A^{-1} je inverzní operátor,

δ je Diracova delta funkce. Průběh této funkce je zobrazen na obr. 3.4. Tato funkce má pro nás ještě jednu důležitou vlastnost a to, že její integrál přes celý prostor je roven 1.

$$\int \delta(x) dx = 1$$



Obr. 3.4 Průběh Diracovi delta funkce

Pro výpočet prutového tělesa má integrální rovnice rovnováhy a okrajových podmínek tvar:

$$\int_0^L \delta w (EI w'' - p_z) dx + \left[\delta w (T - \bar{T}) + \delta \theta (M - \bar{M}) \right]_{\Gamma_\sigma} - \left[\delta M (\theta - \bar{\theta}) + \delta T (w - \bar{w}) \right]_{\Gamma_u} = 0, \tag{3.2}$$

kde T označuje posouvající sílu,
 M ohybový moment,

w průhyb,
 θ natočení,
 w^{iv} označuje čtvrtou derivaci podle x.

Pruhem jsou označeny jejich předepsané okrajové hodnoty.

První člen rovnice (3.2) budeme integrovat metodou per partes, tento postup opakujeme do té doby, než nedostaneme hodnotu w^{iv} v nederivovaném tvaru

$$\int_0^L \delta w EI w^{iv} dx = -[\delta w T + \delta \theta M]_{\Gamma_\sigma + \Gamma_u} + [\delta T w + \delta M \theta]_{\Gamma_\sigma + \Gamma_u} + \int_0^L \delta w^{iv} EI w dx. \quad (3.3)$$

Zpětným dosazením rovnice (3.3) do původní rovnice (3.2) dostáváme následující tvar

$$\int_0^L \delta w^{iv} EI w dx - \int_0^L \delta w p_z dx - [\delta w T + \delta \theta M]_{\Gamma_u} + [\delta T w + \delta M \theta]_{\Gamma_\sigma} - [\delta w \bar{T} + \delta \theta \bar{M}]_{\Gamma_\sigma} + [\delta T \bar{w} + \delta M \bar{\theta}]_{\Gamma_u} = 0. \quad (3.4)$$

Po úpravě dostaneme rovnici (3.4) do tvaru

$$\int_0^L \delta w^{iv} EI w dx = \int_0^L \delta w p_z dx + \delta w_L T_L + \delta \theta_L M_L - \delta w_0 T_0 - \delta \theta_0 M_0 - \delta T_L w_L - \delta M_L \theta_L + \delta T_0 w_0 + \delta M_0 \theta_0, \quad (3.5)$$

nyní je potřeba zvolit funkci δw tak, aby vyhovovala rovnici

$$\delta w^{iv} EI = \delta(x - \xi). \quad (3.6)$$

S využitím vlastností Diracovy delta funkce přejde integrál na pravé straně rovnice (3.5) v hodnotu průhybu v bodě ξ to je hledaná funkce $w(\xi)$. Ve smyslu rovnice (3.1) je pak řešení rovnice (3.6) Greenovou funkcí $G(x, \xi)$, kterou vyjádříme následovně:

$$\begin{aligned} \delta w(x, \xi) &= G(x, \xi) = \frac{1}{12EI} \operatorname{sgn}(x - \xi)(x - \xi)^3 = w^*(x, \xi), \\ \delta \theta(x, \xi) &= -\frac{d}{dx} \delta w = -\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} = -\frac{1}{4EI} \operatorname{sgn}(x - \xi)(x - \xi)^2 = \theta^*(x, \xi), \\ \delta M(x, \xi) &= -EI \frac{d^2}{dx^2} \delta w = -EI \frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \xi)(x - \xi) = M^*(x, \xi), \\ \delta T(x, \xi) &= -EI \frac{d^3}{dx^3} \delta w = -EI \frac{\partial^3 G(x, \xi)}{\partial x^3} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \xi) = T^*(x, \xi), \end{aligned}$$

$$\operatorname{sgn}(x - \xi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > \xi \\ -1 & \text{pro } x < \xi \end{cases}$$

kde w^* , θ^* , M^* , T^* jsou odezvy v bodě x na zatížení nekonečně dlouhého prutu jednotkovou silou v bodě ξ .

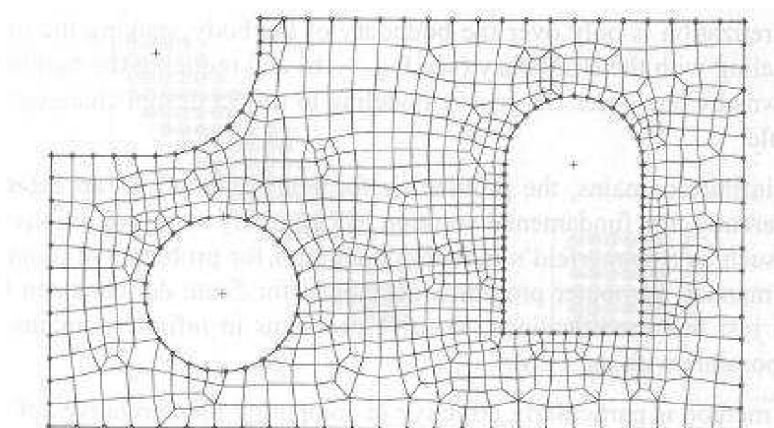
4. Srovnání MKP a MHP:

MHP nám neumožňuje řešit takové množství problémů jako MKP. Nastává tedy otázka. Proč použít MHP, když můžeme problém řešit MKP?

Odpověď je následující. Modelování řešené oblasti konečnými prvky může být pro určité oblasti problémů neefektivní a zbytečně pracné. Takže MKP navzdory její obecnosti v inženýrských problémech, není bez nedostatků.

Nejdůležitější nedostatky jsou:

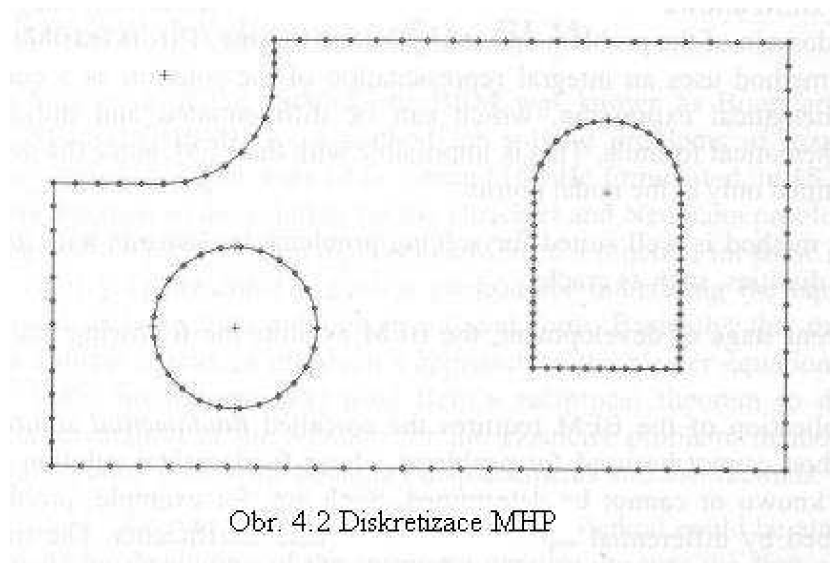
- Diskretizace je pro celou oblast řešeného problému, zobrazeno na obr.4.1. Tudíž, generování a kontrola sítě konečných prvků je obtížná, pracná a časově náročná. Zejména pokud geometrie analyzované oblasti není jednoduchá. Například, pokud součást obsahuje velké gradienty napětí je třeba nejen zjemnění sítě prvků, ale i použití vhodné diskretizace. Najít takovou vhodnou diskretizaci, při níž se řešení přibližně blíží k analytickému je zpravidla velmi pracné.
- Úprava diskretizace modelu pro zvýšení přesnosti v řešení, nebo lepší přizpůsobení změnám tvaru může být obtížná a vyžadovat mnoho úsilí a času.
- V případě řešení problémů popsaných diferenciálními rovnicemi čtvrtého a vyššího řádu, v souladu s požadavky na řešení. Může být takováto práce nudná a použití MKP nepraktická.
- Přestože MKP počítá přesně v oblasti neznámých funkcí je méně účinná při určování jejich derivací. Přesnost značně klesne v oblastech velkých gradientů hodnot.



Obr. 4.1 Diskretizace MKP

Naopak, MHP má mnohé výhody, z nichž nejdůležitější jsou:

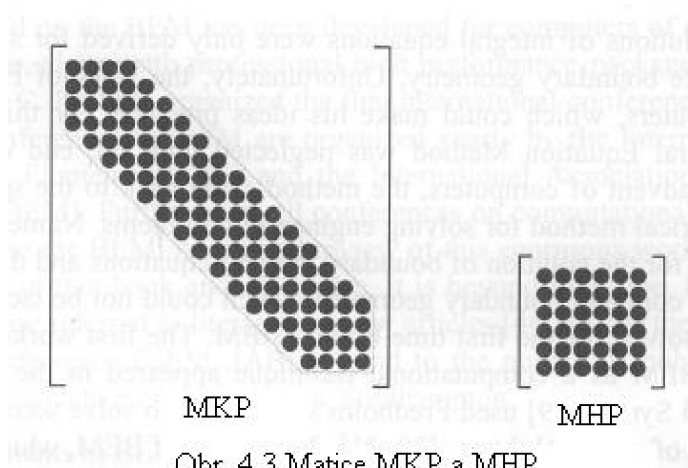
- Snadnost použití. MHP využívá pouze 2D prvků na plochách. Proto mohou uživatelé nastavit problém rychle a snadno.
- Přesnější výsledky. MHP umožňuje ve všech oblastech proměnných v jakémkoli bodě řešené oblasti získat velmi přesné řešení. Také výsledky jsou přesnější, protože integrace je zákonitě přesnější než diferenciací MKP.
- Analýza neuzavřené struktury (např. elektromagnetická pole) lze vyřešit MHP bez dodatečného úsilí, protože vnější pole se řeší stejným způsobem jako vnitřní oblasti.
- Diskretizace je pouze přes hranice řešeného problému, čímž se numerické modelování MHP stává snadnější a sníží se počet neznámých. Což znamená, že opětovné modelování změny tvaru řešené oblasti je jednodušší. Zobrazeno na obr. 4.2.
- Tato metoda je zvláště účinná při výpočtu derivací funkcí (deformace, napětí).
- MHP umožňuje hodnocení řešení a jeho derivací v jakémkoli bodě řešené oblasti a to časově úsporně. Z toho důvodu, že metoda využívá integrální formulaci řešení a spojitě matematické vyjádření, které může být používáno jako matematický vzorec. To je nemožné při použití MKP, protože řešení je dosaženo pouze v uzlových bodech.
- Tato metoda je vhodná pro řešení problémů v oblastech geometrických zvláštností, jako jsou např. praskliny, vruby.



Obr. 4.2 Diskretizace MHP

Na své aktuální (doba vydání publikace [6]) etapě vývoje, má MHP zatím tyto hlavní nevýhody:

- Použití MHP vyžaduje fundamentální řešení. Metodu nelze použít pro problémy, jejichž fundamentální řešení není známé, nebo nelze určit. Takové jsou například problémy popsané diferenciálními rovnicemi s proměnnými koeficienty
- Metoda při řešení nelineárních problémů ztrácí své výhody.
- Nutný předpoklad homogenního prostředí uvnitř modelované oblasti. Tedy MHP nelze řešit kompozitní materiály.
- Numerické realizace výsledků MHP vychází ze soustav lineárních algebraických rovnic, jejíž matice je nesymetrická a plně obsazená. V MKP mají matice velmi příjemné vlastnosti, jsou pásové a symetrické. Tento zápor MHP je ale vyvážen tím, že řešená matice má mnohem menších rozměry. Jednotlivé matice jsou zobrazeny na obrázku 4.3.



Obr. 4.3 Matice MKP a MHP

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo porovnat metodu konečných prvků s metodou hraničních prvků a popsat jejich výhody i nevýhody.

První kapitola popisuje základní problematiku a přístupy k výpočtům pružnosti a pevnosti. Z této kapitoly je patrné, že při zvolení jakékoli *formulace, varianty* či *řešení* těchto problémů, vždy vycházíme z obecných rovnic pružnosti. Analytický přístup volíme tehdy, je-li předmětem problému těleso jednoduchých tvarů (elementární těleso), tento přístup je možno použít i při výpočtech obecných těles tak, že řešené těleso vhodně aproximujeme tělesem elementárním. Musíme však vzít v úvahu, že výsledky těchto výpočtů jsou zkrácené a pouze orientační. Numerický přístup použijeme v případech, nejedná-li se o elementární tělesa nebo je třeba do výpočtu zahrnout další vlivy, kterým je součástí v provozu vystavena např. působení vysokých teplot, seismicita, kmitání, zbytková napjatost po technologických operacích aj. Dále také při řešení nelineárních úloh.

Druhá kapitola je věnována metodě konečných prvků. Při použití této metody je důležité aplikovat vhodnou diskretizaci resp. vhodné prvky a vhodnou hustotu sítě. Tato volba je podstatná pro získání věrohodných výsledků, její správná volba je dána zkušenostmi výpočtáře.

Ve třetí kapitole je popsána metoda hraničních prvků, její vývoj a princip na jednoduchém příkladu.

Následující čtvrtá kapitola popisuje shrnutí kladů a záporů jednotlivých metod, ze kterých vyvozují následující závěry.

Metoda konečných prvků se díky své universálnosti jeví jako metoda výhodnější pro výpočty praktických inženýrských problémů. Jedním z důvodů je bezpochyby softwarová dostupnost, kdy jsme schopni za pomoci jednoho počítačového programu (např. Ansys) řešit celou řadu úloh.

Metoda hraničních prvků nám poskytuje věrohodné a spolehlivé výsledky v oblastech velkých singularit. Nabývá tedy na významu při výpočtech úloh o koncentraci napětí např. určení součinitele intenzity napětí pro těleso s trhlinou.

MHP je vhodnější pro výpočty nekonečných oblastí, její použití v těchto případech je méně pracné než při použití MKP. Také pro řešení neuzavřených struktur jako je např. elektrický potenciál, je použití této metody výhodnější.

Dále při výpočtech velkých a rozlehlých ploch je použití MHP jednodušší a méně náročné na hardwarové vybavení.

Avšak aplikace MHP je omezená na problémy pro které známe fundamentální řešení, což je její podstatnou nevýhodou.

Obě metody mají tedy svá pro a proti, důležitým ukazatelem pro rozhodnutí zdali použít MKP nebo MHP je charakter řešeného problému. Nároky na výpočtovou přesnost, časovou náročnost, dostupné softwarové a hardwarové prostředky. V neposlední řadě také kvalifikace a zkušenosti odborných pracovníků.

Rozvoj numerických metod má za následek častou neznalost analytického přístupu základních úloh pružnosti. Znalost analytického řešení je však jednou ze základních odborných znalostí, důležitou pro racionální posouzení a vyhodnocení správnosti numerických výsledků.

V dnešní době se stále více rozvíjí tzv. hybridní metody (BE-FE). V těchto metodách je podle mého názoru velký potenciál do budoucích let, protože kombinují silné stránky obou metod.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky hledání souvislostí : Učební texty I*. 1. vyd. Brno : AN CERM, 2007. 682 s. ISBN 9768021435452.
- [2] PETRUŠKA, Jindřich. Počítačové metody mechaniky II : Metoda konečných prvků . *Studijní opory* [online]. 2003. Dostupný z WWW: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/index.php?option=com_content&task=view&id=79&Itemid=37>.
- [3] Kolář, V., Kratochvíl J., Leitner F., Ženíšek A.: *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1979.
- [4] BURŠA, Jiří. *MKP* [online]. 2008 [cit. 2009-04-10]. Dostupný z WWW: <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/>>.
- [5] ONDRÁČEK, Emanuel, et al. *Mechanika těles : Pružnost a pevnost II*. 4. přeprac. vyd. Brno : AN CERM, 2006. 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [6] PAVELEK, Milan. *Termomechanika*. 3. přeprac. vyd. Brno : AN CERM, 2003. 284 s. ISBN 80-214-2409-5.
- [7] KATSIKADELIS, John. *Boundary elements : Theory and applications*. 1st edition. Athens : Elsevier science, 2002. 344 s. ISBN 0-080-44107-6.
- [8] KOTOUL, Michal. *Metoda hraničních integrálních rovnic I : jednodimensionální úlohy, Poissonova a Laplaceova rovnice* [online]. 2009 [cit. 2009-05-15]. Dostupný z WWW: <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/~mkotoul/Vybrane-matematicke-metody.htm>>.
- [9] JANÍČEK, Přemysl, et al. *Mechanika těles : Pružnost a pevnost I*. 3. přeprac. vyd. Brno : AN CERM, 2004. 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [9] *Modelování stability svahů* [online]. 2003 [cit. 2009-04-20]. Dostupný z WWW: <http://geologie.vsb.cz/svadef/Text/7_stabilita.htm>.
- [10] *Integrated Engineering Software* [online]. 2009 [cit. 2009-05-15]. Dostupný z WWW: <<http://www.integratedsoft.com/>>.

[11] *Boundary Element Methods : Introduction* [online]. Uni Stuttgart- Institut a fuer Mechanik, 2009 [cit. 2009-05-10]. Dostupný z WWW: <http://www.iam.uni-stuttgart.de/bem/home_bem_introduc.html>.

[12] *Diracova delta funkce* [online]. 2009 [cit. 2009-05-20]. Dostupný z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Diracova_delta_funkce>.

SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN

Veličina	Symbol	Jednotka
Normální napětí	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	[Pa]
Smykové napětí	$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	[Pa]
Přetvoření	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	[-]
Úhlové přetvoření	$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	[-]
Posuv	u, v, w	[m]
Energie napjatosti	W	[J]
Potenciál zatížení	P	[J]
Celková potencionální energie	Π	[J]
Hustota	ρ	[kg*m ⁻³]
Plocha	S	[m ²]
Síla	F	[N]
Objem	V	[m ³]

Fyzikální konstanty:

Veličina	Symbol
*Youngův modul pružnosti	$E = (1,9-2,4) \cdot 10^5 \text{ Pa}$
*Poissonovo číslo	$\mu = 0,3$
Gravitační zrychlení	$g = 9,81 \text{ m*s}^{-2}$

(*) Uvedené hodnoty se vztahují pro oceli.