UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Banachova věta o pevném bodě v diferenciálních rovnicích

Vedoucí bakalářské práce:
prof. RNDr. Svatoslav Staněk, CSc.
Rok odevzdání: 2010

Vypracovala:
Kateřina Stránská
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení a pomoci prof. RNDr. Svatoslava Staňka, CSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při psaní práce.

V Olomouci dne 14. dubna 2010

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala zejména vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. Svatoslavu Staňkovi, CSc. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Použité symboly

$\mathbb{N}$	obor přirozených čísel
$\mathbb{R}$	obor reálných čísel
$\mathbb{R}_+$	obor nezáporných reálných čísel
$\mathbb{R}^n$	reálný eukleidovský prostor dimenze n nad $\mathbb{R}$
(a, b)	otevřený interval
$[a, b]$	uzavřený interval
$U(x_0, \delta)$	δ-okolí bodu x_0
$y \in C(\mathcal{J})$	y je spojitá na $\mathcal{J}$
$y \in C^n(\mathcal{J})$	y je spojitě diferencovatelná do řádu n na $\mathcal{J}$

Třetí kapitola

$\mathcal{I}$	$[a, \infty),\ a \geq 0$
$C_\infty(\mathcal{I})$	prostor spojitých a ohraničených funkcí na $\mathcal{I}$
$\lVert . \rVert_\infty$	norma v $C_\infty(\mathcal{I})$
$C^1_\infty(\mathcal{I})$	prostor spojitých a ohraničených funkcí se spojitou a ohraničenou derivací na $\mathcal{I}$
$\lVert . \rVert_1$	norma v $C^1_\infty(\mathcal{I})$
$\lVert . \rVert_g$	norma v $C^1_\infty(\mathcal{I})$ definovaná pomocí ohraničené funkce $g : \mathcal{I} \to [c, d],\ 0 < c \leq d < \infty$

Čtvrtá kapitola

$f \in C(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$	f je spojitá vektorová funkce z $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$
$\lvert . \rvert$	eukleidovská norma v prostoru $\mathbb{R}^n$
$\lvert z(x) \rvert = O(\exp(\lambda x))$	funkce $z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ splňuje $\limsup\limits_{x \to \infty} \frac{\lvert z(x) \rvert}{\exp(\lambda x)} < \infty$, kde $\lambda > 0$
$\mathcal{S}$	prostor spojitých funkcí $z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, které splňují podmínku $\lvert z(x) \rvert = O(\exp(\lambda x))$
$\lvert . \rvert_{\mathcal{S}}$	norma v $\mathcal{S}$

Úvod

Matematická teorie diferenciálních rovnic se zabývá existencí řešení, jednoznačností, závislostí řešení na počátečních a okrajových podmínkách.

Problematika obyčejných diferenciálních rovnic se začala rozvíjet už v 17. století. Už v tomto století Isaac Newton zformuloval svůj druhý pohybový zákon ve tvaru $f = \frac{d}{dt}(mv)$, tj. síla způsobující pohyb tělesa se rovná časové změně hybnosti. Brzy potom se podařilo popsat pohyb planet okolo Slunce pomocí diferenciálních rovnic, na základě kterých je možné předpovídat jejich polohu ve vesmíru. Od těchto dob diferenciálním rovnicím věnovali trvalou pozornost fyzikové a matematici hlavně proto, že je pomocí nich možné formulovat mnohé fyzikální zákony, vytvářet a analyzovat matematické modely reálného světa a umožnit další rozvoj nejen přírodních a technických věd.

Původním cílem matematiků a fyziků bylo najít řešení dané diferenciální rovnice, které by charakterizovalo příslušný fyzikální děj. Velmi rychle se však zjistilo, že existují matematické modely přírodních a technických zákonitostí ve tvaru diferenciálních rovnic, které se nedají řešit elementárními integračními metodami, a proto se matematické modely zjednodušovaly, zanedbávaly se často i významné skutečnosti, což zkreslovalo reálnost daného modelu. Proto se začaly hledat cesty, jak vyjít z tohoto začarovaného kruhu. Už v 19. století A. M. Ljapunov, R. Lipschitz, A. L. Cauchy, G. Peano, C. Sturm, E. Picard a další si ve svojich pracích položili otázku, za jakých podmínek daná diferenciální rovnice má vůbec řešení a jaké vlastnosti toto řešení má. Kromě toho se souběžně rozvíjely metody řešení diferenciálních rovnic pomocí nekonečných řad a začaly se rozvíjet přibližné metody řešení diferenciálních rovnic. Mnohé z těchto výsledků tvoří dnes základy moderní teorie diferenciálních rovnic.

Rozvojem výpočetní techniky a numerických metod řešení diferenciálních rovnic se úloha teorie diferenciálních rovnic nedostala do pozadí, protože právě dobrá znalost vlastností řešení umožňuje efektivnější využití počítačů.

Obyčejné diferenciální rovnice jsou dnes významným nástrojem zkoumání využívaným nejen ve fyzice a technických vědních disciplínách, ale také v biologii, ekologii i v chemii a pronikají též do ekonomie a dalších společenských věd.

V této bakalářské práci budeme vyšetřovat existenci a v některých případech i jednoznačnost řešení dvou typů diferenciálních rovnic definovaných na polopřímce. V přípravné kapitole jsou definovány základní pojmy z teorie diferenciálních rovnic, které budeme používat. Dále jsou zde zavedeny metrické prostory, lineární prostory a normované lineární prostory. Ve druhé kapitole je uvedena a dokázána Banachova věta o pevném bodě, která bude stěžejním nástrojem pro dokázání vět uvedených ve třetí a čtvrté kapitole. Ve třetí kapitole, která je zpracovaná podle [1], ukážeme, že diferenciální rovnice druhého řádu tvaru

$$y''(x) + F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

má na polopřímce právě jedno řešení při splnění jistých podmínek kladených na funkci F a jaké vlastnosti toto řešení má. Ve čtvrté kapitole, která je zpracovaná podle [2], se budeme zabývat systémem diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem tvaru

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x-1))$$

s počátečními podmínkami

$$y(x-1) = \phi(x) \quad (0 \le x < 1), \quad y(0) = y_0.$$

Taktéž uvedeme podmínky kladené na funkci f, které v jednom případě zajišťují existenci i jednoznačnost řešení na $\mathbb{R}_+$ a ve druhém případě jednoznačnost řešení na $\mathbb{R}_+$, pokud to řešení existuje. Na konci obou kapitol najdeme příklady, na kterých jsou některé věty aplikovány.

1 Přípravná kapitola

V této kapitole uvedeme některé pojmy z teorie diferenciálních rovnic, které jsou použity v dalším textu ([6], [7]). Dále zavedeme metrické prostory, lineární prostory a normované lineární prostory ([3], [4]). Vše rozděleno do příslušných podkapitol.

1.1 Diferenciální rovnice

Definice 1.1. Nechť $F\colon \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ je funkce. Rovnice $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ se nazývá **diferenciální rovnice n-tého řádu**. Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace neznámé funkce, která v rovnici vystupuje.
Jestliže v diferenciální rovnici je $y^{(n)}$ vyjádřena pomocí $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, dostáváme diferenciální rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

v normálním tvaru.
Zde je funkce $f : \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. $\mathcal{G}$ je definiční obor funkce f.

1.2 Řešení diferenciální rovnice

Definice 1.2. Funkce $y : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ je interval, se nazývá (klasické) **řešení** rovnice (1) na $\mathcal{J}$, jestliže :

a) $y \in C^n(\mathcal{J})$,

b) $(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in \mathcal{G},\ \forall x \in \mathcal{J}$,

c) rovnost $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ platí $\forall x \in \mathcal{J}$.

Je-li $y : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ řešením rovnice (1) na $\mathcal{J}$, pak jeho graf $(\{(x, y(x)) : x \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{R}^2)$ se nazývá **integrální křivka** (1).

Definice 1.3. Nechť $y : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ je řešením rovnice (1) na intervalu $\mathcal{J}$. Řešení $v : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{I}$ je interval, se nazývá **prodloužením řešení** y, jestliže

$\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, $\mathcal{J} \neq \mathcal{I}$ a $y(x) = v(x)$, $\forall x \in \mathcal{J}$.
Řešení rovnice (1), které nemá prodloužení, se nazývá **úplné řešení**.

Definice 1.4. Obecným řešením diferenciální rovnice (1) rozumíme její řešení $y = (x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, které obsahuje tolik integračních konstant $c_1, \ldots, c_n$, kolik je řád (1), přičemž pro každou konkrétní volbu konstant $c_1, \ldots, c_n$ dostáváme řešení (1) a ke každému řešení $u : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ rovnice (1) $\exists$ n-tice čísel $\widetilde{c_1}, \ldots, \widetilde{c_n}$ taková, že rovnost $u(x) = y(x, \widetilde{c_1}, \ldots, \widetilde{c_n})$ platí $\forall x \in \mathcal{J}$.
Partikulárním řešením rovnice (1) rozumíme takové její řešení, které dostaneme z jejího obecného řešení konkrétní volbou konstant $c_1, \ldots, c_n$.
Regulárním řešením rovnice (1) rozumíme takové její řešení, jehož každým bodem prochází jediné řešení (1).
Singulárním řešením rovnice (1) rozumíme takové její řešení, jehož každým bodem procházejí alespoň 2 různá řešení (1).

1.3 Cauchyova úloha

Definice 1.5. Nechť y: $\mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ a nechť $(x_0, \xi_0, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathcal{G}$. Pak úloha najít řešení y rovnice (1) splňující počáteční podmínky

$$y^{(j)}(x_0) = \xi_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{2}$$

se nazývá **Cauchyova** (nebo počáteční) **úloha** pro rovnici (1).

1.4 Metrické prostory

Definice 1.6. Buď $\mathcal{X}$ neprázdná množina. Reálná funkce $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ se nazývá **metrika**, jestliže

(i) $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $\quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$,

(iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$.

Množina $\mathcal{X}$ s metrikou ρ se nazývá **metrický prostor**.
Píšeme $(\mathcal{X}, \rho)$, resp. pouze $\mathcal{X}$, pokud nehrozí nedorozumění.

Definice 1.7. Nechť $\mathcal{X}$ je metrický prostor, $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$. Řekneme, že

a) $\mathcal{M}$ je **ohraničená množina**, jestliže $\mathcal{M}$ leží v nějaké kouli. Číslo

$$\operatorname{diam}\mathcal{M} = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in \mathcal{M}\}$$

se nazývá **průměr** $\mathcal{M}$.

b) x je **hromadný bod** množiny $\mathcal{M}$, jestliže v každé kouli o středu v x leží alespoň jeden bod $\mathcal{M}$, který je různý od x.
Je-li $\mathcal{H}$ množina všech hromadných bodů množiny $\mathcal{M}$, pak $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{H} \cup \mathcal{M}$ se nazývá **uzávěr** $\mathcal{M}$.

c) $\mathcal{M}$ je **uzavřená množina**, jestliže $\mathcal{M} = \bar{\mathcal{M}}$.

d) $\mathcal{M}$ je **otevřená množina**, jestliže $\mathcal{X} \setminus \mathcal{M}$ je uzavřená množina.

Definice 1.8. Nechť $\mathcal{X}$ je metrický prostor a $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$. Řekneme, že

a) posloupnost $\{x_n\}$ je **konvergentní**, jestliže $\exists x \in \mathcal{X} : \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.
Píšeme také $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, resp. $x_n \to x$ pro $n \to \infty$, resp. $x_n \to x$.
Prvek x se pak nazývá **limitou posloupnosti** $\{x_n\}$.

b) $\{x_n\}$ je **cauchyovská posloupnost**, jestliže $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_\epsilon :$ $\rho(x_m, x_n) < \epsilon$.

Poznámka 1.1. Každá konvergentní posloupnost má právě jednu limitu.
Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.
Každá cauchyovská posloupnost je ohraničená.

Definice 1.9. Řekneme, že posloupnost reálných funkcí $\{f_n\}$ **konverguje stejnoměrně** na množině $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ k limitní funkci f, jestliže $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$, $\forall x \in \mathcal{D} : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Značíme $f_n \overset{\mathcal{D}}{\rightrightarrows} f$.

Definice 1.10. Řekneme, že posloupnost reálných funkcí $\{f_n\}$ **konverguje** k funkci f **lokálně stejnoměrně** na množině $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, jestliže $\forall x_0 \in \mathcal{D}\ \exists \delta > 0$: $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ \forall x \in \mathcal{D} \cap U(x_0, \delta)$.

Definice 1.11. Nechť $\mathcal{X}$ je metrický prostor. Řekneme, že $\mathcal{X}$ je **úplný** metrický prostor, jestliže každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Definice 1.12. Metrický prostor $\mathcal{X}$ se nazývá **totálně omezený** (ohraničený), jestliže z každé posloupnosti prvků z $\mathcal{X}$ lze vybrat cauchyovskou posloupnost.

Definice 1.13. Metrický prostor $\mathcal{X}$ se nazývá **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti prvků z $\mathcal{X}$ lze vybrat konvergentní posloupnost.

Definice 1.14. Řekneme, že podmnožina $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ metrického prostoru $(\mathcal{X}, \rho)$ je **kompaktní podmnožina**, jestliže metrický prostor $(\mathcal{M}, \rho/_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}})$ je kompaktní (tj. z každé posloupnosti prvků $\mathcal{M}$ lze vybrat konvergentní posloupnost, jejíž limita leží v $\mathcal{M}$).

Definice 1.15. Nechť $\mathcal{X}$ je metrický prostor. Pak zobrazení $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ se nazývá **reálný funkcionál**.

1.5 Lineární prostory a normované lineární prostory

Definice 1.16. Množina $\mathcal{X}$ se nazývá **lineární prostor**, jestliže na $\mathcal{X}$ je definována operace sčítání a operace násobení reálným skalárem splňující

(i) vzhledem ke sčítání je $\mathcal{X}$ komutativní grupa,

(ii) vzhledem k násobení skalárem platí:
$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
$1x = x,\ \forall x, y \in \mathcal{X},\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ je těleso skalárů.

Definice 1.17. Řekneme, že množina $\mathcal{X}$ je **normovaný lineární prostor**, jestliže

a) $\mathcal{X}$ je lineární prostor,

b) na $\mathcal{X}$ je definován funkcionál $\|.\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, který nazýváme **normou** a který splňuje následující axiomy:

  (i) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in \mathcal{X}, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

  (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \, , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathcal{X},$

  (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, , \ \forall x, y \in \mathcal{X}.$

  $\mathbb{R}$ je těleso skalárů.

Úplný normovaný lineární prostor se nazývá **Banachův prostor**.

Poznámka 1.2. Každý normovaný lineární prostor je metrický prostor s metrikou definovanou formulí $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Místo $(\mathcal{X}, \rho)$ budeme psát $(\mathcal{X}, \|.\|)$.

2 Banachova věta o pevném bodě

Naším hlavním nástrojem pro dokázání existence a v některých případech i jednoznačnosti řešení rovnic uvedených v úvodu bude Banachova věta o pevném bodě, kterou v roce 1922 zformuloval a dokázal polský matematik Stefan Banach ([3], [5]).

Věta 2.1. (Banachova věta o pevném bodě) *Nechť $\mathcal{X}$ je úplný metrický prostor a $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ je kontraktivní zobrazení, tj. $\exists k \in (0,1) : \rho\left(F(x), F(y)\right) \leq k\rho\left(x, y\right)$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$.*
Pak existuje jediný bod x_* takový, že $F(x_*) = x_*$. Bod x_* se nazývá ***pevný bod*** *zobrazení F.*

Důkaz: Důkaz existence:
Nechť $x_1 \in \mathcal{X}$. Definujme posloupnost $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ rekurentním předpisem $x_{n+1} = F(x_n)$ (metoda postupných aproximací). Dokážeme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Platí vztah

$$\begin{aligned}
\rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(Fx_n, Fx_{n-1}) \leq \\
&\leq k\rho(x_n, x_{n-1}) = \\
&= k\rho(Fx_{n-1}, Fx_{n-2}) \leq \\
&\leq k^2\, \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \\
&\leq \dots \leq k^{n-1}\rho(x_2, x_1), \;\; \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Nechť $m > n$. Pak platí následující nerovnosti

$$\begin{aligned}
\rho(x_m, x_n) &\leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_n) \leq \\
&\leq \dots \leq \;\rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \\
&\leq (k^{m-2} + k^{m-3} + \dots + k^{n-1})\rho(x_2, x_1) \leq \\
&\leq (k^{n-1} + k^n + \dots)\rho(x_2, x_1) = \frac{k^{n-1}}{1-k}\rho(x_2, x_1).
\end{aligned}$$

Tedy $\rho(x_m, x_n) \leq \frac{k^{n-1}}{1-k}, \;\forall m > n$.

Z poslední nerovnosti plyne, že $\lim_{m,n\to\infty} \rho(x_m, x_n) = 0$, tedy posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská.

Jelikož podle předpokladu je $\mathcal{X}$ úplný metrický prostor, je posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní. Nechť $x_n \to x_*$. Ze vztahu

$$0 \leq \rho(Fx_n, Fx_*) \leq k\rho(x_n, x_*) \to 0$$

plyne

$$\lim_{n\to\infty} \rho(Fx_n, Fx_*) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} Fx_n = Fx_*.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ ve vztahu $x_{n+1} = Fx_n$ dostáváme $x_* = Fx_*$. Tedy x_* je pevný bod F.

Důkaz jednoznačnosti:

Předpokládejme, že $Fy_* = y_*$ pro nějaké $y_* \in \mathcal{X}, y_* \neq x_*$.

Pak

$$\rho(y_*, x_*) = \rho(Fy_*, Fx_*) \leq k\rho(y_*, x_*),$$

což je spor s tím, že $k \in (0, 1)$. Tedy existuje právě jeden pevný bod.

$\square$

3 Diferenciální rovnice druhého řádu

V této kapitole se zaměříme na rovnici tvaru

$$y''(x) + F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in \mathcal{I}, \tag{3}$$

kde symbolem $\mathcal{I}$ budeme v celé třetí kapitole značit interval $\mathcal{I} = [a, \infty)$, $a \geq 0$. $F : \mathcal{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá ve všech třech proměnných. Cílem našich úvah bude důkaz existence řešení rovnice (3) na polopřímce $\mathcal{I}$.

V části 3.1 zavedeme pojmy, které budeme potřebovat v části 3.2, kde budou uvedeny věty o existenci řešení rovnice (3) na $\mathcal{I}$.

Tato kapitola je zpracovaná podle článku [1].

3.1 Potřebné pojmy

Nechť

$C_\infty(\mathcal{I}) = \{u \in C(\mathcal{I}) : u \text{ je ohraničená na } \mathcal{I}\}$,

$C^1_\infty(\mathcal{I}) = \{u \in C^1(\mathcal{I}) : u \text{ a } u' \text{ jsou ohraničené na } \mathcal{I}\}$.

Označme $\mathcal{X} = (C_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_\infty)$ metrický prostor indukovaný normou

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{I}} |u(x)| \,. \tag{4}$$

Ověříme, že norma $\|.\|_\infty$ je definována korektně:

(i) $\|u\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathcal{I}} |u(x)| \geq 0, \ \forall u \in C_\infty(\mathcal{I}), \quad \|u\|_\infty = 0 \Leftrightarrow u = 0,$

(ii) $\|ku\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathcal{I}} |ku(x)| = |k| \sup\limits_{x \in \mathcal{I}} |u(x)| \,, \ \forall u \in C_\infty(\mathcal{I}), \ \forall k \in \mathbb{R},$

(iii) $\|u + v\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathcal{I}} |u(x) + v(x)| \leq \sup\limits_{x \in \mathcal{I}} \{|u(x)| + |v(x)|\} \leq$
$\leq \sup\limits_{x \in \mathcal{I}} |u(x)| + \sup\limits_{x \in \mathcal{I}} |v(x)| = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \,, \ \forall u, v \in C_\infty(\mathcal{I}).$

Metrika ρ na prostoru $\mathcal{X}$ je tedy definována formulí $\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty$.

Lemma 3.1. *$\mathcal{X} = (C_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_\infty)$ je úplný metrický prostor.*

Důkaz: Nechť $\{u_n\} \subset \mathcal{X}$ je cauchyovská posloupnost. Pak $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \geq n_0 : \|u_m - u_n\|_\infty < \epsilon$, tedy $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0, \; \forall x \in \mathcal{I}$: $|u_n(x) - u_m(x)| < \epsilon$. Odtud plyne, že $\{u_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně na $\mathcal{I}$. Proto existuje $u \in C(\mathcal{I})$ takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$. Jelikož $\{u_n\}$ je cauchyovská posloupnost, je ohraničená, což znamená, že $|u_n(x)| \leq K$ pro $x \in \mathcal{I}$ a $n \in \mathbb{N}$, kde K je kladná konstanta. Pak ovšem $|u(x)| \leq K$ na $\mathcal{I}$ a tedy $u \in C_\infty(\mathcal{I})$. Tím je dokázáno, že $\{u_n\}$ je konvergentní v $\mathcal{X}$ a u je její limita. Tedy $\mathcal{X}$ je úplný metrický prostor.

□

Nechť $\mathcal{X}_\infty = \{u \in \mathcal{X} : u(x) \geq 0 \text{ pro } x \in \mathcal{I}\}$. Důležitá vlastnost metrického prostoru $\mathcal{X}_\infty$ je uvedena v následujícím lemmatu.

Lemma 3.2. $(\mathcal{X}_\infty, \|.\|_\infty)$ *je úplný metrický prostor.*

Důkaz: Protože každá uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru je úplný metrický prostor a protože z lemmatu 3.1 víme, že $\mathcal{X}$ je úplný metrický prostor, k důkazu tohoto lemmatu stačí dokázat uzavřenost $\mathcal{X}_\infty$ v $\mathcal{X}$.
Nechť $\{u_n\} \subset \mathcal{X}_\infty$ je konvergentní posloupnost a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ v $\mathcal{X}$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ stejnoměrně na $\mathcal{I}$. Podle předpokladu $u_n(x) \geq 0$ pro $x \in \mathcal{I}$ a $n \in \mathbb{N}$. Proto $u(x) \geq 0$ na $\mathcal{I}$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ v $\mathcal{X}_\infty$. Tím je dokázáno, že množina $\mathcal{X}_\infty$ je uzavřená v $\mathcal{X}$.

□

Nyní ověříme, že

$$\|u\|_1 = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty \tag{5}$$

je norma na množině $C^1_\infty(\mathcal{I})$. Předně je zřejmé, že $\|u\|_1$ je konečné číslo pro každé $u \in C^1_\infty(\mathcal{I})$. Dále platí

(i) $\|u\|_1 = \underbrace{\|u\|_\infty}_{\geq 0} + \underbrace{\|u'\|_\infty}_{\geq 0} \geq 0, \; \forall u \in C^1_\infty(\mathcal{I}), \quad \|u\|_1 = 0 \Leftrightarrow u = 0,$

(ii) $\|ku\|_1 = \|ku\|_\infty + \|ku'\|_\infty = |k| \left(\|u\|_\infty + \|u'\|_\infty\right) = |k| \, \|u\|_1, \; \forall u \in C^1_\infty(\mathcal{I}),$ $\forall k \in \mathbb{R}$,

(iii) $\|u+v\|_1 = \|u+v\|_\infty + \|u'+v'\|_\infty \leq (\|u\|_\infty + \|u'\|_\infty) + (\|v\|_\infty + \|v'\|_\infty) =$
$= \|u\|_1 + \|v\|_1\,,\ \forall u, v \in C^1_\infty(\mathcal{I})$.

Lemma 3.3. $(C^1_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_1)$ *je úplný metrický prostor.*

Důkaz: Nechť $\{u_n\} \subset (C^1_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_1)$ je cauchyovská posloupnost. Pak $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0,\ \forall x \in \mathcal{I} : |u_n(x) - u_m(x)| + |u'_n(x) + u'_m(x)| < \epsilon$. Tedy $\{u_n(x)\}$ a $\{u'_n(x)\}$ konvergují stejnoměrně na $\mathcal{I}$ a navíc, jelikož $\{u_n\}$ je cauchyovská posloupnost, jsou posloupnosti $\{\|u_n\|_\infty\}, \{\|u'_n\|_\infty\}$ ohraničené. Nechť $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, $\lim_{n\to\infty} u'_n(x) = v(x)$, tedy posloupnosti $\{u_n(x)\}$ a $\{u'_n(x)\}$ konvergují stejnoměrně na $\mathcal{I}$ a $u(x)$ a $v(x)$ nechť jsou jejich limity. Pak z ohraničenosti $\{\|u_n\|_\infty\}$ a $\{\|u'_n\|_\infty\}$ plyne, že $u, v \in C_\infty(\mathcal{I})$. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ v rovnosti

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u'_n(t)\mathrm{d}t$$

dostáváme

$$u(x) = u(0) + \int_0^x v(t)\mathrm{d}t, \quad x \in \mathcal{I}.$$

Z poslední rovnosti plyne, že $u'(x) = v(x)$ pro $x \in \mathcal{I}$. Tím je dokázáno, že $\lim_{n\to\infty} u_n^{(j)}(x) = u^{(j)}(x)$ stejnoměrně na $\mathcal{I}$ pro $j = 0, 1$. Tedy $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ v $(C^1_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_1)$, což říká, že cauchyovská posloupnost $\{u_n\}$ je konvergentní a u je její limita.

□

Nechť $M > 0$ a nechť

$$\mathcal{X}_M = \left\{u \in \left(C^1_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_1\right) : 0 \leq u(x) \leq M, u'(x) \geq 0 \text{ pro } x \in \mathcal{I}\right\}$$

je podmnožina v metrickém prostoru $(C^1_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_1)$.

Lemma 3.4. $(\mathcal{X}_M, \|.\|_1)$ *je úplný metrický prostor.*

Důkaz: Postupujeme analogicky jako v důkazu lemmatu 3.2. Stačí dokázat, že $\mathcal{X}_M$ je uzavřená podmnožina v $(C^1_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_1)$. Nechť $\{u_n\} \subset \mathcal{X}_M$ je konvergentní posloupnost v $(C^1_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_1)$ a nechť $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Pak $\lim_{n\to\infty} u_n^{(j)}(x) = u^{(j)}(x)$

stejnoměrně na $\mathcal{I}$ pro $j = 0, 1$. Jelikož $0 \leq u_n \leq M, u_n'(x) \geq 0$ pro $x \in \mathcal{I}$ a $n \in \mathbb{N}$, je $0 \leq u(x) \leq M, u'(x) \geq 0$ pro $x \in \mathcal{I}$, což říká, že $u \in \mathcal{X}_M$. Tedy $\mathcal{X}_M$ je uzavřená podmnožina v $(C^1_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_1)$.

$\square$

Nyní ukážeme, že pro každou ohraničenou funkci $g : \mathcal{I} \to [c, d]$, $0 < c \leq d < \infty$ je předpisem

$$\|u\|_g = \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{u(x)}{g(x)}\right| + \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{u'(x)}{g(x)}\right| \tag{6}$$

definována norma na množině $C^1_\infty(\mathcal{I})$.

Předně z nerovností $\left|\frac{u(x)}{g(x)}\right| \leq \frac{1}{c}|u(x)|$, $\left|\frac{u'(x)}{g(x)}\right| \leq \frac{1}{c}|u'(x)|$ pro $x \in \mathcal{I}$ plyne, že $\|u\|_g < \infty$ pro každé $u \in C^1_\infty(\mathcal{I})$. Dále platí

(i) $$\|u\|_g = \sup_{x\in\mathcal{I}} \underbrace{\left|\frac{u(x)}{g(x)}\right|}_{\geq 0} + \sup_{x\in\mathcal{I}} \underbrace{\left|\frac{u'(x)}{g(x)}\right|}_{\geq 0} \geq 0,\ \forall u \in C^1_\infty(\mathcal{I}), \quad \|u\|_g = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

(ii) $$\|ku\|_g = \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{ku(x)}{g(x)}\right| + \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{ku'(x)}{g(x)}\right| = |k| \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{u(x)}{g(x)}\right| + |k| \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{u'(x)}{g(x)}\right| =$$
$$= |k| \left(\sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{u(x)}{g(x)}\right| + \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{u'(x)}{g(x)}\right| \right) = |k|\,\|u\|_g,\ \forall u \in C^1_\infty(\mathcal{I}),\ \forall k \in \mathbb{R},$$

(iii) $$\|u + v\|_g = \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{u(x)+v(x)}{g(x)}\right| + \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{u'(x)+v'(x)}{g(x)}\right| \leq$$
$$\leq \sup_{x\in\mathcal{I}} \left\{ \left|\frac{u(x)}{g(x)}\right| + \left|\frac{v(x)}{g(x)}\right| \right\} + \sup_{x\in\mathcal{I}} \left\{ \left|\frac{u'(x)}{g(x)}\right| + \left|\frac{v'(x)}{g(x)}\right| \right\} \leq$$
$$\leq \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{u(x)}{g(x)}\right| + \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{v(x)}{g(x)}\right| + \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{u'(x)}{g(x)}\right| + \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{v'(x)}{g(x)}\right| =$$
$$= \|u\|_g + \|v\|_g,\ \forall u, v \in C^1_\infty(\mathcal{I}).$$

Zcela analogicky jako v lemmatech 3.3 a 3.4 se dokáže, že $(C^1_\infty(\mathcal{I}), \|.\|_g)$ a $(\mathcal{X}_M, \|.\|_g)$ jsou úplné metrické prostory.

Lemma 3.5. *Normy $\|.\|_g$ a $\|.\|_1$ jsou na $C^1_\infty(\mathcal{I})$ ekvivalentní a platí*

$$\frac{\|u\|_1}{d} \leq \|u\|_g \leq \frac{\|u\|_1}{c} \quad \textit{pro } u \in C^1_\infty(\mathcal{I}).$$

Důkaz: Tvrzení lemmatu 3.5 plyne z následujících relací

$$\|u\|_g = \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\tfrac{u(x)}{g(x)}\right| + \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\tfrac{u'(x)}{g(x)}\right| \le \tfrac{1}{c}\left(\|u\|_\infty + \|u'\|_\infty\right) = \tfrac{1}{c}\|u\|_1,$$

$$\|u\|_g = \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\tfrac{u(x)}{g(x)}\right| + \sup_{x\in\mathcal{I}} \left|\tfrac{u'(x)}{g(x)}\right| \ge \tfrac{1}{d}\left(\|u\|_\infty + \|u'\|_\infty\right) = \tfrac{1}{d}\|u\|_1.$$

□

3.2 Ohraničené řešení úlohy (3) na $\mathcal{I}$

V této podkapitole vyšetřujeme existenci řešení rovnice (3) na polopřímce $\mathcal{I}$, které mají konečnou limitu pro $x \to \infty$, jsou kladné na intervalu $[x_0, \infty] \subset \mathcal{I}$ a mají i další vlastnosti. Ve větách 3.1 a 3.2 je hodnota této limity předepsána, zatímco ve větě 3.3 je pro rovnici $y'' = F(x, y)$ dokázána pouze existence konečné limity. Všechny důkazy jsou založeny na zavedení vhodných kontraktivních zobrazení. Jejich jediné pevné body jsou řešením rovnice (3) (případně $y'' = F(x, y)$) na $\mathcal{I}$ a mají požadované vlastnosti.

Věta 3.1. *Nechť funkce F v rovnici* (3) *splňuje následující podmínky*

(P_1) *F je spojitá na množině $\mathcal{I} \times \mathbb{R}^2$ a nezáporná na množině $\mathcal{I} \times (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$,*

(P_2) *existuje spojitá funkce $k : \mathcal{I} \to \mathbb{R}_+$ taková, že pro každé $y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathcal{I}$ platí nerovnost*

$$|F(x, y_1, y_2) - F(x, z_1, z_2)| \le k(x)\left(|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|\right) \tag{7}$$

a také

$$\int_0^\infty xk(x)\mathrm{d}x < \infty. \tag{8}$$

Nechť $M > 0$. Jestliže $\forall u \in \mathcal{X}_M$ platí, že

$$\int_a^\infty xF(x, u(x), u'(x))\mathrm{d}x \le M, \tag{9}$$

pak existuje jediné kladné řešení $y \in \mathcal{X}_M$ rovnice (3) *na intervalu $\mathcal{I}$ takové, že*

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = M.$$

Navíc platí $0 \leq y'(x) \leq \frac{y(x)}{x}$ *pro* $x \in \mathcal{I}$.

Důkaz: Předpokládejme, že nerovnost (9) je splněna $\forall u \in \mathcal{X}_M$. Definujme funkci g předpisem

$$g(x) = \exp\left(3\int_x^\infty (t-a+1)k(t)\mathrm{d}t\right), \quad x \in \mathcal{I}.$$

Jelikož $1 \leq x-a+1 \leq \max\{2, 2x\}$ pro $x \in \mathcal{I}$, plyne ze vztahu (8), že funkce $\int_x^\infty (t-a+1)k(t)\mathrm{d}t$ je spojitá a ohraničená na $\mathcal{I}$.

Nechť $u \in \mathcal{X}_M$ a položme

$$p(x) = M - \int_x^\infty (t-x)F(t,u(t),u'(t))\mathrm{d}t, \quad x \in \mathcal{I}.$$

Z předpokladů (P_1) a (9) plyne, že funkce p je spojitá na $\mathcal{I}$ a má spojitou nezápornou derivaci

$$p'(x) = \int_x^\infty F(t,u(t),u'(t))\mathrm{d}t, \quad x \in \mathcal{I}.$$

Jelikož p je neklesající na $\mathcal{I}$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = M$ a

$$\begin{aligned} p(a) &= M - \int_a^\infty (t-a)F(t,u(t),u'(t))\mathrm{d}t = \\ &= M - \underbrace{\int_a^\infty tF(t,u(t),u'(t))\mathrm{d}t}_{\leq M} + a\int_a^\infty F(t,u(t),u'(t))\mathrm{d}t \geq \\ &\geq a\int_a^\infty F(t,u(t),u'(t))\mathrm{d}t \geq 0, \end{aligned}$$

splňuje funkce p nerovnost $0 \leq p(x) \leq M$ pro $x \in \mathcal{I}$. Tím je dokázáno, že $p \in \mathcal{X}_M$. Jsme tedy oprávnění definovat zobrazení $T : (\mathcal{X}_M, \|.\|_g) \to (\mathcal{X}_M, \|.\|_g)$ předpisem

$$(Tu)(x) = M - \int_x^\infty (t-x)F(t,u(t),u'(t))\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Pak $0 \leq (Tu)(x) \leq M$ a $0 \leq (Tu)'(x)$ pro $x \in \mathcal{I}$ a $u \in \mathcal{X}_M$. Speciálně $(Tu)(x)$ je neklesající a $\lim\limits_{x\to\infty}(Tu)(x) = M$.

Předpokládejme, že u je pevný bod T. Pak rovnost

$$u(x) = M - \int_x^\infty (t-x)F(t, u(t), u'(t))\mathrm{d}t$$

platí pro $x \in \mathcal{I}$. Derivací poslední rovnosti dostáváme

$$u'(x) = \int_x^\infty F(t, u(t), u'(t))\mathrm{d}t$$

a další derivací pak

$$u''(x) = -F(x, u(x), u'(x)), \quad x \in \mathcal{I}.$$

Odtud plyne, že pevný bod u zobrazení T je řešením (3).
Nyní ukážeme, že T je kontraktivní zobrazení na $(\mathcal{X}_M, \|.\|_g)$. Nechť $u, v \in \mathcal{X}_M$, $x, \widetilde{x} \in \mathcal{I}$. Potom s použitím předpokladu (7) dostáváme

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{g(x)} \int_x^\infty (t-x) \left| F(t, u(t), u'(t)) - F(t, v(t), v'(t)) \right| \mathrm{d}t + \\
& + \frac{1}{g(\widetilde{x})} \int_{\widetilde{x}}^\infty \left| F(t, u(t), u'(t)) - F(t, v(t), v'(t)) \right| \mathrm{d}t \leq \\
\leq \; & \frac{1}{g(x)} \int_x^\infty (t-x)k(t)\frac{g(t)}{g(t)}(|u(t)-v(t)| + |u'(t)-v'(t)| \,\mathrm{d}t) + \\
& + \frac{1}{g(\widetilde{x})} \int_{\widetilde{x}}^\infty k(t)\frac{g(t)}{g(t)}(|u(t)-v(t)| + |u'(t)-v'(t)| \,\mathrm{d}t) \leq \\
\leq \; & \frac{\|u-v\|_g}{g(x)} \int_x^\infty (t-x)k(t)g(t)\mathrm{d}t + \frac{\|u-v\|_g}{g(\widetilde{x})} \int_{\widetilde{x}}^\infty k(t)g(t)\mathrm{d}t = \\
= \; & \frac{\|u-v\|_g}{g(x)} \int_x^\infty \frac{(t-x)g'(t)}{-3(t-a+1)}\mathrm{d}t + \frac{\|u-v\|_g}{g(\widetilde{x})} \int_{\widetilde{x}}^\infty \frac{g'(t)}{-3(t-a+1)}\mathrm{d}t \leq \\
\leq \; & \frac{\|u-v\|_g}{g(x)} \int_x^\infty \frac{g'(t)}{-3}\mathrm{d}t + \frac{\|u-v\|_g}{g(\widetilde{x})} \int_{\widetilde{x}}^\infty \frac{g'(t)}{-3}\mathrm{d}t = \\
= \; & \left(\frac{g(x)-1}{g(x)}\right)\frac{\|u-v\|_g}{3} + \left(\frac{g(\widetilde{x})-1}{g(\widetilde{x})}\right)\frac{\|u-v\|_g}{3} < \frac{2\,\|u-v\|_g}{3}.
\end{aligned}$$

Odtud $\|Tu - Tv\|_g \leq \frac{2}{3}\|u-v\|_g$. Z Banachovy věty plyne, že existuje jediný pevný bod $y \in (\mathcal{X}_M, \|.\|_g)$ zobrazení T.

Protože $\lim\limits_{x\to\infty}(Ty)(x) = M$, je $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = M$.

Z relace

$$\begin{aligned}\frac{y(x)}{x} &= \frac{1}{x}(Ty)(x) = \frac{1}{x}\left(M - \int_x^\infty tF(t, y(t), y'(t))\mathrm{d}t\right) + \\ &+ \int_x^\infty F(t, y(t), y'(t))\mathrm{d}t \geq \int_x^\infty F(t, y(t), y'(t))\mathrm{d}t = y'(x)\end{aligned}$$

ihned plyne

$$\frac{y(x)}{x} \geq y'(x) \geq 0 \quad \text{pro } x \in \mathcal{I}. \tag{11}$$

□

Věta 3.2. *Nechť funkce F je spojitá na $\mathcal{I} \times \mathbb{R}^2$ a nechť je splněna podmínka (P_2) uvedená ve větě* 3.1. *Nechť $M > 0$. Jestliže pro nějaké $v \in C^1_\infty(\mathcal{I})$ platí*

$$\int_a^\infty |tF(t, v(t), v'(t))| \,\mathrm{d}t < \infty, \tag{12}$$

pak rovnice (3) *má jediné řešení $y(x) \in C^1_\infty(\mathcal{I})$ na intervalu $\mathcal{I}$ s vlastností, že*

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = M$$

a existuje $x_0 \geq a$ takové, že $y(x) > 0$ pro každé $x \geq x_0$.
Navíc toto řešení má vlastnost, že $y'(x) < \frac{y(x)}{x}$ pro každé $x \geq x_0$.

Důkaz: Nechť pro nějaké $v \in C^1_\infty(\mathcal{I})$ platí (12). Z předpokladů (7), (8) a (12) platí pro všechna $u \in C^1_\infty(\mathcal{I})$

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_a^\infty |tF(t, u(t), u'(t))| \,\mathrm{d}t \leq \\ &\leq \int_a^\infty t(|F(t, u(t), u'(t)) - F(t, v(t), v'(t))| + |F(t, v(t), v'(t))|)\mathrm{d}t \leq \\ &\leq \|u - v\|_1 \int_a^\infty tk(t)\mathrm{d}t + \int_a^\infty |tF(t, v(t), v'(t))| \,\mathrm{d}t < \infty.\end{aligned}$$

Tedy

$$\int_a^\infty |tF(t,u(t),u'(t))|\,\mathrm{d}t < \infty,\ \forall u \in C^1_\infty(\mathcal{I}).$$

Nechť $u \in C^1_\infty(\mathcal{I})$. Z relací

$$\int_x^\infty |(t-x)F(t,u(t),u'(t))|\,\mathrm{d}t \le \int_x^\infty |tF(t,u(t),u'(t))|\,\mathrm{d}t \le$$
$$\le \int_a^\infty |tF(t,u(t),u'(t))|\,\mathrm{d}t < \infty,\ \forall x \in \mathcal{I},$$

$$\int_x^\infty |F(t,u(t),u'(t))|\,\mathrm{d}t \le \int_a^\infty |tF(t,u(t),u'(t))|\,\mathrm{d}t,\ \forall x \ge \max\{a,1\}$$

plyne, že funkce

$$q(x) = M - \int_x^\infty (t-x)F(t,u(t),u'(t))\mathrm{d}t$$

je spojitá na $\mathcal{I}$ a má zde spojitou derivaci

$$q'(x) = \int_x^\infty F(t,u(t),u'(t))\mathrm{d}t.$$

Tedy $q \in C^1_\infty(\mathcal{I})$. Navíc $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = M$.

Vzhledem k výše uvedeným vlastnostem funkce q můžeme definovat zobrazení $T : C^1_\infty(\mathcal{I}) \to C^1_\infty(\mathcal{I})$ předpisem

$$(Tu)(x) = M - \int_x^\infty (t-x)F(t,u(t),u'(t))\mathrm{d}t.$$

Pak $\lim\limits_{x\to\infty} (Tu)(x) = M,\ \forall u \in C^1_\infty(\mathcal{I})$.

Nechť g je funkce definovaná v důkazu věty 3.1. Stejným postupem jako v důkazu věty 3.1 dokážeme, že

$$\|Tu - Tv\|_g \le \frac{2}{3}\|u-v\|_g\,,\ \forall u,v \in C^1_\infty(\mathcal{I}).$$

Pak T je kontraktivní zobrazení a podle Banachovy věty existuje jediný pevný bod $y \in C^1_\infty(\mathcal{I})$ zobrazení T. Protože $\lim\limits_{x\to\infty}(Tu)(x){=}M$, $\forall u \in C^1_\infty(\mathcal{I})$, je $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = M$. Jelikož $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = M,\ M > 0$ a podle první části důkazu je

$$\int_a^\infty |tF(t, y(t), y'(t))| \,\mathrm{d}t < \infty,$$

existuje $x_0 \geq a$ takové, že $y(x) > 0$ a

$$\int_x^\infty tF(t, y(t), y'(t))\mathrm{d}t < M,\ \forall x \geq x_0.$$

Zbývající nerovnost $y'(x) < \frac{y(x)}{x}$ pro $x \geq x_0$ plyne z relací

$$\begin{aligned}
\frac{y(x)}{x} &= \frac{1}{x}\left(M - \int_x^\infty (t-x)F(t, y(t), y'(t))\mathrm{d}t\right) = \\
&= \frac{1}{x}\left(M - \int_x^\infty tF(t, y(t), y'(t))\mathrm{d}t\right) + \int_x^\infty F(t, y(t), y'(t))\mathrm{d}t > \\
&> \int_x^\infty F(t, y(t), y'(t))\mathrm{d}t = y'(x).
\end{aligned}$$

□

Dříve, než uvedeme následující výsledek, připomeňme, že $C_\infty(\mathcal{I})$ je množina spojitých a ohraničených funkcí na $\mathcal{I}$ a že množina funkcí $\{u \in C_\infty(\mathcal{I}) : u(x) \geq 0$ pro $x \in \mathcal{I}\}$ s metrikou indukovanou normou $\|u\|_\infty$ definovanou v (4) je podle lemmatu 3.2 úplný metrický prostor $\mathcal{X}_\infty$.

Věta 3.3. *Nechť funkce $F = F(x, y)$ je spojitá na $\mathcal{I} \times \mathbb{R}$ a nezáporná na $\mathcal{I} \times \mathbb{R}_+$. Nechť existuje spojitá funkce $k : \mathcal{I} \to \mathbb{R}_+$ taková, že pro každé $y, z \in \mathbb{R}$ a každé $x \in \mathcal{I}$ platí nerovnost*

$$|F(x, y) - F(x, z)| \leq k(x)\,|y - z| \tag{13}$$

a

$$\int_a^\infty tk(t)\mathrm{d}t < 1. \tag{14}$$

Dále nechť pro nějaké $v \in \mathcal{X}_\infty$ platí

$$\int_a^\infty tF(t, v(t))\mathrm{d}t < \infty. \tag{15}$$

Pak existuje jediné řešení $y \in \mathcal{X}_\infty$ rovnice

$$y'' + F(x, y(x)) = 0 \tag{16}$$

takové, že

$$y(a) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = \int_a^\infty (t-a)F(t, y(t))\mathrm{d}t \quad a \quad y'(x) \geq 0 \quad pro \quad x \in \mathcal{I}.$$

Navíc v případě, že $\mathcal{I} = [0, \infty)$, je $y'(x) \leq \frac{y(x)}{x}$ pro $x \in [0, \infty)$ a $\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x} = y'(0)$.

Důkaz: Poznamenejme, že z podmínky $F(x, z) \geq 0$ pro $(x, z) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+$ plyne: $F(x, u(x)) \geq 0$ pro $x \in \mathcal{I}$ a $u \in \mathcal{X}_\infty$.
Z předpokladů (13), (14) a (15) dostáváme, že pro každé $u \in \mathcal{X}_\infty$ je

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_a^\infty tF(t, u(t))\mathrm{d}t = \int_a^\infty t(F(t, u(t)) - F(t, v(t)))\mathrm{d}t + \int_a^\infty tF(t, v(t))\mathrm{d}t \leq \\
&\leq \int_a^\infty tk(t)\,|u(t) - v(t)|\,\mathrm{d}t + \int_a^\infty tF(t, v(t))\mathrm{d}t \leq \\
&\leq \|u - v\|_\infty \int_a^\infty tk(t)\mathrm{d}t + \int_a^\infty tF(t, v(t))\mathrm{d}t < \infty.
\end{aligned}$$

Proto

$$0 \leq \int_x^\infty (x-a)F(t, u(t))\mathrm{d}t \leq \int_x^\infty tF(t, u(t))\mathrm{d}t < \infty$$

pro každé $u \in \mathcal{X}_\infty$ a $x \in \mathcal{I}$.
Definujme zobrazení $\widetilde{T} : (\mathcal{X}_\infty, \|.\|_\infty) \to (\mathcal{X}_\infty, \|.\|_\infty)$ předpisem

$$(\widetilde{T}u)(x) = \int_a^x (t-a)F(t, u(t))\mathrm{d}t + \int_x^\infty (x-a)F(t, u(t))\mathrm{d}t.$$

Vzhledem k první části důkazu je zobrazení $\widetilde{T}$ dobře definované, $(\widetilde{T}u)(a) = 0$ a $\lim\limits_{x\to\infty} (\widetilde{T}u)(x) = \int_a^\infty (t-a)F(t,u(t))\mathrm{d}t$. Ze vztahu

$$(\widetilde{T}u)'(x) = (x-a)F(x,u(x)) - (x-a)F(x,u(x)) + \int_x^\infty F(t,u(t))\mathrm{d}t =$$
$$= \int_x^\infty F(t,u(t))\mathrm{d}t \geq 0$$

plyne, že $(\widetilde{T}u)(x)$ je neklesající na $\mathcal{I}$.

Nyní dokážeme, že $\widetilde{T}$ je kontraktivní zobrazení. Pro každé $u, v \in \mathcal{X}_\infty$ a $x \in \mathcal{I}$ je

$$\begin{aligned}
\left|(\widetilde{T}u)(x) - (\widetilde{T}v)(x)\right| &\leq \int_a^x (t-a)\left|F(t,u(t)) - F(t,v(t))\right|\mathrm{d}t + \\
&\quad + \int_x^\infty (x-a)\left|F(t,u(t)) - F(t,v(t))\right|\mathrm{d}t \leq \\
&\leq \|u-v\|_\infty \left(\int_a^x (t-a)k(t)\mathrm{d}t + \int_x^\infty (x-a)k(t)\mathrm{d}t\right) \leq \\
&\leq \left(\int_a^\infty (t-a)k(t)\mathrm{d}t\right) \|u-v\|_\infty .
\end{aligned}$$

Z (14) ihned plyne, že

$$0 < \int_a^\infty (t-a)k(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^\infty tk(t)\mathrm{d}t < 1,$$

což implikuje, že $\widetilde{T}$ je kontraktivní zobrazení. Podle Banachovy věty má operátor $\widetilde{T}$ jediný pevný bod $y \in \mathcal{X}_M$. Jelikož

$$y'(x) = (\widetilde{T}y)'(x) = (x-a)F(x,y(x)) + \int_x^\infty F(t,y(t))\mathrm{d}t - (x-a)F(x,y(x)) =$$
$$= \int_x^\infty F(t,y(t))\mathrm{d}t,$$

je

$$y''(x) = -F(x,y(x)) \quad \text{pro } x \in \mathcal{I}.$$

Tedy y je řešením rovnice (16) na intervalu $\mathcal{I}$. Z vlastností zobrazení $\widetilde{T}$ plyne, že $y(a) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \int_a^\infty (t-a)F(t,y(t))\mathrm{d}t$ a $y'(x) \geq 0$ pro $x \in \mathcal{I}$.

Nechť $a = 0$. Protože $y'(x)$ je nerostoucí na $[0, \infty)$, věta o střední hodnotě implikuje, že

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{y(x) - y(0)}{x} = y'(\xi) \mid_{\xi \in (0,x)} \geq y'(x) \text{ pro } x > 0$$

a

$$y'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{y(x)}{x} \geq \lim_{x \to 0^+} y'(x) = y'(0).$$

Odtud ihned plyne, že $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{y(x)}{x} = y'(0)$.

□

3.3 Příklady

Příklad 3.1. Uvažujme diferenciální rovnici

$$y'' + \frac{y}{1 + x^3} = 0. \tag{17}$$

Nechť $\mathcal{I} = [1, \infty)$.

Rovnice (17) je speciálním případem rovnice (3) pro funkci $F(x, y, z) = \frac{y}{1+x^3}$, která nezávisí na proměnné z.

Funkce $F_1(x, y) = \frac{y}{1+x^3}$ je spojitá na $\mathcal{I} \times \mathbb{R}$ a nezáporná na $\mathcal{I} \times \mathbb{R}_+$.

Pro $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathcal{I}$ platí

$$\left| \frac{1}{1 + x^3} y_1 - \frac{1}{1 + x^3} y_2 \right| \leq k(x) \left| y_1 - y_2 \right|,$$

kde $k(x) = \frac{1}{1+x^3}$ je spojitá funkce z $\mathcal{I}$ do $\mathbb{R}_+$.

Protože pro $k = 2$ je

$$\lim_{x \to \infty} x^k g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{1 + x^3} = 1 < \infty,$$

je podle limitního srovnávacího kriteria (věta 6.3, [8])

$$\int_0^\infty x k(x) \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x}{1 + x^3} \mathrm{d}x < \infty. \tag{18}$$

Nechť $M > 0$ a nechť $u \in \mathcal{X}_M$, tedy $0 \leq u(x) \leq M$. Pak

$$\int_1^\infty xF_1(x, u(x))\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}u(x)\mathrm{d}x \leq M \int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x.$$

Jelikož

$$\frac{x}{1+x^3} \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{pro } x \in \mathcal{I}$$

a

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1,$$

je

$$\int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x \leq 1, \tag{19}$$

a tedy

$$\int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}u(x)\mathrm{d}x \leq M.$$

Funkce F_1 splňuje podmínky věty 3.1. Diferenciální rovnice (17) má tedy pro každé $M > 0$ jediné kladné řešení $y \in \mathcal{X}_M$ na $\mathcal{I}$ takové, že $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = M$. Navíc platí $0 \leq y'(x) \leq \frac{y(x)}{x}$ pro $x \in \mathcal{I}$.

Příklad 3.2. Uvažujme diferenciální rovnici

$$y'' + m\frac{y + |\sin y'|}{1+x^3} = 0. \tag{20}$$

Nechť $\mathcal{I} = [1, \infty),\ m \in (0, 1)$.
Funkce $F(x, y, z) = m\frac{y+|\sin z|}{1+x^3}$ je spojitá na $\mathcal{I} \times \mathbb{R}^2$ a nezáporná na $\mathcal{I} \times (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.
Pro $y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathcal{I}$ platí

$$\left| m\frac{y_1 + |\sin y_2|}{1+x^3} - m\frac{z_1 + |\sin z_2|}{1+x^3} \right| =$$

$$= m \left| \frac{1}{1+x^3}\left(y_1 + |\sin y_2| - z_1 - |\sin z_2|\right) \right| \leq$$

$$\leq k(x)\left(|y_1 - z_1| + ||\sin y_2| - |\sin z_2||\right) \leq$$

$$\leq k(x)(|y_1 - z_1| + |\underbrace{\sin y_2 - \sin z_2}_{=\cos(\xi)(y_2 - z_2)}|) \leq$$
$$\leq k(x)\left(|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|\right),$$

kde ξ leží v intervalu s krajními body y_2 a z_2 a kde $k(x) = \frac{m}{1+x^3}$ je spojitá funkce z $\mathcal{I}$ do $\mathbb{R}_+$.
S přihlédnutím ke vztahu (18) víme, že platí

$$\int_0^\infty xk(x)\mathrm{d}x = m\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x < \infty.$$

Nechť $u \in \mathcal{X}_{m/(1-m)}$, tedy $0 \leq u(x) \leq \frac{m}{1-m}$ a $u'(x) \geq 0$. Pak s přihlédnutím ke vztahu (19) platí

$$\begin{aligned}\int_1^\infty xF(x, u(x), u'(x))\mathrm{d}x &= m\int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}\left(u(x) + |\sin u'(x)|\right) \leq \\ &\leq m\int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}\left(\frac{m}{1-m} + 1\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{m}{1-m}\int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x \leq \frac{m}{1-m}.\end{aligned}$$

Funkce F splňuje předpoklady věty 3.1, a tedy rovnice (20) má jediné kladné řešení $y \in \mathcal{X}_{m/(1-m)}$ na $\mathcal{I}$ takové, že $\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{m}{1-m}$. Navíc platí $0 \leq y'(x) \leq \frac{y(x)}{x}$ pro $x \in \mathcal{I}$.

4 Systémy diferenciálních rovnic se zpožděním

4.1 Úvod

Mějme $\mathbb{R}^n$ reálný n-dimenzionální eukleidovský prostor s příslušnou eukleidovskou normou $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. V případě, že $n = 1$, je $|x|$ absolutní hodnota čísla x.

Nechť $\phi : [0, 1) \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce, pro kterou existuje $\lim\limits_{x \to 1^-} \phi(x) =: y_0$. Podotkněme, že funkce $\widetilde{\phi} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ definovaná předpisem

$$\widetilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{pro } x \in [0, 1) \\ y_0 & \text{pro } x = 1 \end{cases}$$

je spojitá na $[0, 1]$.

Uvažujme systém diferenciálních rovnic s odkloněným argumentem

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x-1)) \tag{21}$$

pro $x \in \mathbb{R}_+$ a počáteční podmínky

$$y(x-1) = \phi(x) \quad (0 \le x < 1), \quad y(0) = y_0, \tag{22}$$

kde $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Řekneme, že funkce $y \in C([-1, \infty), \mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ je řešením úlohy (21), (22), jestliže y splňuje počáteční podmínky (22) a rovnost (21) platí pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$. Připomeňme, že $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

V kapitole 4.2, která je zpracovaná podle článku [2], uvedeme postačující podmínky kladené na funkci f, které zajišťují existenci právě jednoho řešení úlohy (21), (22) v jisté podmnožině prostoru $C([-1, \infty), \mathbb{R}^n)$.

Užitečný bude následující výsledek, který ukazuje, že řešení úlohy (21), (22) je ekvivalentní s řešením systému integrálních rovnic.

Lemma 4.1. *Funkce $y : [-1, \infty) \to \mathbb{R}^n$ je řešením úlohy* (21), (22) *právě když $y(x-1) = \phi(x)$ pro $x \in [0, 1)$ a y je spojitým řešením systému integrálních rovnic*

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t), \phi(t))\mathrm{d}t \quad \textit{pro} \quad 0 \le x < 1, \tag{23}$$

$$y(x) = y_0 + \int_0^1 f(t, y(t), \phi(t))\mathrm{d}t + \int_1^x f(t, y(t), y(t-1))\mathrm{d}t \quad pro \quad 1 \le x < \infty. \tag{24}$$

Důkaz: ($\Rightarrow$) Nechť $y : [-1, \infty) \to \mathbb{R}^n$ je řešením úlohy (21), (22). Potom $y \in C([-1, \infty), \mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, y splňuje (22) a

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x-1)) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}_+.$$

Odtud plyne, že

$$y'(x) = f(x, y(x), \phi(x)) \quad \text{pro } x \in [0, 1) \tag{25}$$

a

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x-1)) \quad \text{pro } x \in [1, \infty). \tag{26}$$

Je-li $0 \le x < 1$, pak integrací (25) v mezích od 0 do x dostáváme

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t), \phi(t))\mathrm{d}t.$$

Je-li $1 \le x < \infty$, pak integrací (25) a (26) dostáváme

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \int_0^1 y'(t)\mathrm{d}t + \int_1^x y'(t)\mathrm{d}t = \\ &= y_0 + \int_0^1 f(t, y(t), \phi(t))\mathrm{d}t + \int_1^x f(t, y(t), y(t-1))\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že řešení y úlohy (21), (22) je spojitým řešením systému integrálních rovnic (23), (24) a navíc $y(x-1) = \phi(x)$ pro $x \in [0, 1)$.

($\Leftarrow$) Nechť $y(x-1) = \phi(x)$ pro $x \in [0, 1)$ a nechť y je spojitým řešením rovnic (23) a (24). Pak $y(0) = y_0$ a jelikož podle předpokladu je f spojitá na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, je funkce $f(x, y(x), \phi(x))$ spojitá na $[0, 1]$ a funkce $f(x, y(x), y(x-1))$ spojitá na $[1, \infty)$. Tudíž y splňuje podmínku (22) a z (23), (24) plyne, že y má spojitou derivaci na $\mathbb{R}_+$ a platí rovnosti

$$y'(x) = f(x, y(x), \phi(x)) = f(x, y(x), y(x-1)) \quad \text{pro } x \in [0, 1),$$

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x-1)) \quad \text{pro } x \in [1, \infty).$$

Odtud soudíme, že y je řešením úlohy (21), (22).

$\square$

4.2 Ohraničené řešení úlohy (21), (22) na $\mathbb{R}_+$

Nechť $z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ a $\lambda > 0$. Jestliže $\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{|z(x)|}{\exp(\lambda x)} < \infty$, pak píšeme $|z(x)| = O(\exp(\lambda x))$. Jestliže $z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a $|z(x)| = O(\exp(\lambda x))$, pak

$$|z(x)| \le N \exp(\lambda x) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}_+,$$

kde N je nezáporná konstanta.

Označme $\mathcal{S}$ prostor spojitých funkcí $z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, které splňují podmínku

$$|z(x)| = O(\exp(\lambda x)). \tag{27}$$

Pak pro každé $z \in \mathcal{S}$ existuje nezáporná konstanta N_z taková, že

$$|z(x)| \le N_z \exp(\lambda x) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}_+. \tag{28}$$

V $\mathcal{S}$ definujme normu $|.|_{\mathcal{S}}$ takto:

$$|z|_{\mathcal{S}} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left(|z(x)| \exp(-\lambda x)\right). \tag{29}$$

Pak

$$|z(x)| \le |z|_{\mathcal{S}} \exp(\lambda x) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}_+. \tag{30}$$

Ukážeme nyní, že funkcionál $|z|_{\mathcal{S}}$ splňuje axiomy normy:

(i) $|z|_{\mathcal{S}} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} [|z(x)| \exp(-\lambda x)] \ge 0,\ \forall z \in \mathcal{S}, \quad |z|_{\mathcal{S}} = 0 \Leftrightarrow z = 0,$

(ii)
$$|kz|_{\mathcal{S}} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} [|kz(x)| \exp(-\lambda x)] =$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}_+} [|k|\, |z(x)| \exp(-\lambda x)] =$$
$$= |k| \sup_{x\in\mathbb{R}_+} [|z(x)| \exp(-\lambda x)] = |k|\, |z|_{\mathcal{S}},\ \forall z \in \mathcal{S},\ \forall k \in \mathbb{R},$$

(iii)
$$|z+v|_{\mathcal{S}} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} [|z(x)+v(x)| \exp(-\lambda x)] \le$$
$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}_+} [|z(x)| \exp(-\lambda x)] + \sup_{x\in\mathbb{R}_+} [|v(x)| \exp(-\lambda x)] = |z|_{\mathcal{S}} + |v|_{\mathcal{S}},\ \forall z, v \in \mathcal{S}.$$

Lemma 4.2. $(\mathcal{S}, |.|_{\mathcal{S}})$ *je Banachův prostor.*

Důkaz: Nechť $\{z_n\} \subset \mathcal{S}$ je cauchyovská posloupnost. Nechť $\epsilon > 0$ je libovolné, ale pevné číslo. Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |z_n - z_m|_{\mathcal{S}} \leq \epsilon$, což znamená, že

$$|z_n(x) - z_m(x)| \exp(-\lambda x) \leq \epsilon \;\text{ pro }\; m, n \geq n_0 \text{ a } x \in \mathbb{R}_+. \tag{31}$$

Zvolme $T > 0$. Pak z (31) plyne, že $|z_n(x) - z_m(x)| \leq \epsilon \exp(\lambda T)$ pro $n, m \geq n_0$ a $x \in [0, T]$, což je ekvivalentní s tím, že posloupnost funkcí $\{z_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[0, T]$. Jelikož $T > 0$ je libovolné, $\{z_n(x)\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $[0, \infty)$, tj. stejnoměrně na každém kompaktním intervalu $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}_+$. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(x) = z(x)$ pro $x \in [0, \infty)$.
Ze spojitosti funkcí z_n a lokálně stejnoměrné konvergence $\{z_n(x)\}$ na $\mathbb{R}_+$ vyvozujeme, že z je spojitá funkce na $\mathbb{R}_+$. Limitním přechodem pro $m \to \infty$ v (31) dostáváme

$$|z_n(x) - z(x)| \exp(-\lambda x) \leq \epsilon \;\text{ pro }\; n \geq n_0,\, x \in \mathbb{R}_+,$$

což je ekvivalentní se zápisem

$$|z_n - z|_{\mathcal{S}} \leq \epsilon \;\text{ pro } n \geq n_0. \tag{32}$$

Podle předpokladu je $\{z_n\}$ cauchyovská posloupnost, tedy $\{z_n\}$ je také ohraničená posloupnost a nechť $|z_n|_{\mathcal{S}} \leq K$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$|z_n(x)| \exp(-\lambda x) \leq K \;\text{ pro } n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}_+$$

a přechodem k limitě pro $n \to \infty$ je

$$|z(x)| \exp(-\lambda x) \leq K \;\text{ pro } x \in \mathbb{R}_+.$$

Poslední nerovnost říká, že $z(x) \in O(\lambda x)$. Tudíž $z \in \mathcal{S}$ a z (32) také plyne: $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z|_{\mathcal{S}} = 0$. Tím je dokázáno, že $\{z_n\}$ je konvergentní v $\mathcal{S}$ a z je její limita.

$\square$

Lemma 4.3. (Gronwallovo lemma) *Nechť u a h jsou spojité skalární funkce definované na $\mathbb{R}_+$ a c je nezáporná konstanta. Jestliže platí*

$$u(x) \leq c + \int_0^x h(t)u(t)\mathrm{d}t$$

pro $x \in \mathbb{R}_+$, potom

$$u(x) \leq c \exp\left(\int_0^x h(t)\mathrm{d}t\right)$$

pro $x \in \mathbb{R}_+$.

Důkaz: viz [6], str. 52.

Následující věta uvádí postačující podmínky pro existenci jediného řešení úlohy (21), (22) v prostoru $\mathcal{S}$.

Věta 4.1. *Nechť jsou splněny předpoklady:*

(*i*) *funkce f v* (21) *splňuje podmínku*

$$|f(x,y,z) - f(x,\overline{y},\overline{z})| \leq h(x)\left(|y-\overline{y}| + |z-\overline{z}|\right) \tag{33}$$

pro $(x,y,z),(x,\overline{y},\overline{z}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, kde $h \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$,

(*ii*) *pro λ ze vztahu* (27)*:*

(*a*) *existuje nezáporná konstanta α taková, že $\alpha < 1$ a*

$$\int_0^x (h(t) + h(t+1))\exp(\lambda t)\mathrm{d}t \leq \alpha \exp(\lambda x) \tag{34}$$

pro $x \in \mathbb{R}_+$,

(*b*) *existuje nezáporná konstanta β taková, že*

$$|y_0| + \int_0^1 h(t)\,|\phi(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^x |f(t,0,0)|\,\mathrm{d}t \leq \beta \exp(\lambda x) \tag{35}$$

pro $x \in \mathbb{R}_+$.

Potom (21), (22) *má jediné řešení na $\mathbb{R}_+$ v $\mathcal{S}$.*

Důkaz: Mějme $y \in \mathcal{S}$ a definujme operátor T takto:

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t), \phi(t))\mathrm{d}t \tag{36}$$

pro $0 \leq x < 1$ a

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_0^1 f(t, y(t), \phi(t))\mathrm{d}t + \int_1^x f(t, y(t), y(t-1))\mathrm{d}t \tag{37}$$

pro $1 \leq x < \infty$.

Nejprve ukážeme, že T zobrazuje $\mathcal{S}$ do sebe. Evidentně $Ty \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ pro všechna $y \in \mathcal{S}$.

Pro ověření, že je splněna podmínka (27) rozlišíme následující dva případy:

1) $0 \leq x < 1$

   Z (36), užitím předpokladů a (30) dostáváme

$$\begin{aligned}
|(Ty)(x)| &\leq |y_0| + \int_0^x |f(t, y(t), \phi(t)) - f(t, 0, 0)|\, \mathrm{d}t + \int_0^x |f(t, 0, 0)|\, \mathrm{d}t \leq \\
&\leq |y_0| + \int_0^x h(t)\left(|y(t)| + |\phi(t)|\right) \mathrm{d}t + \int_0^x |f(t, 0, 0)|\, \mathrm{d}t \leq \\
&\leq |y_0| + \int_0^1 h(t)\, |\phi(t)|\, \mathrm{d}t + \int_0^x |f(t, 0, 0)|\, \mathrm{d}t + \\
&\quad + |y|_{\mathcal{S}} \int_0^x h(t) \exp(\lambda t) \mathrm{d}t \leq \\
&\leq (\beta + |y|_{\mathcal{S}}\, \alpha) \exp(\lambda x). \qquad (38)
\end{aligned}$$

2) $1 \leq x < \infty$

   Z (37), užitím předpokladů a (30) dostáváme

$$\begin{aligned}
|(Ty)(x)| &\leq |y_0| + \int_0^1 |f(t, y(t), \phi(t)) - f(t, 0, 0)|\, \mathrm{d}t + \int_0^1 |f(t, 0, 0)|\, \mathrm{d}t + \\
&\quad + \int_1^x |f(t, y(t), y(t-1)) - f(t, 0, 0)|\, \mathrm{d}t + \int_1^x |f(t, 0, 0)|\, \mathrm{d}t \leq
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq \quad & |y_0| + \int_0^1 h(t)\left(|y(t)| + |\phi(t)|\right) \mathrm{d}t + \int_0^x |f(t,0,0)| \,\mathrm{d}t + \\
& + \int_1^x h(t)\left(|y(t)| + |y(t-1)|\right) \mathrm{d}t = \\
= \quad & |y_0| + \int_0^1 h(t)\,|\phi(t)| \,\mathrm{d}t + \int_0^x |f(t,0,0)| \,\mathrm{d}t + \\
& + \int_0^1 h(t)\,|y(t)| \,\mathrm{d}t + \int_1^x h(t)\,|y(t)| \,\mathrm{d}t + \int_1^x h(t)\,|y(t-1)| \,\mathrm{d}t \leq \\
\leq \quad & \beta \exp(\lambda x) + \int_0^x h(t)\,|y(t)| \,\mathrm{d}t + I_1, \qquad (39)
\end{aligned}
$$

kde

$$
I_1 = \int_1^x h(t)\,|y(t-1)| \,\mathrm{d}t. \qquad (40)
$$

Platí

$$
I_1 = \int_0^{x-1} h(\sigma+1)\,|y(\sigma)| \,\mathrm{d}\sigma \leq \int_0^x h(\sigma+1)\,|y(\sigma)| \,\mathrm{d}\sigma. \qquad (41)
$$

Užitím (41) v (39) dostáváme

$$
\begin{aligned}
|(Ty)(x)| &\leq \beta \exp(\lambda x) + |y|_{\mathcal{S}} \int_0^x (h(t) + h(t+1)) \exp(\lambda t) \mathrm{d}t \leq \\
&\leq (\beta + |y|_{\mathcal{S}}\, \alpha) \exp(\lambda x). \qquad (42)
\end{aligned}
$$

Z této nerovnosti a z (38) vidíme, že $(Tx) \in \mathcal{S}$, čímž je dokázáno, že T zobrazuje $\mathcal{S}$ do sebe.

Dále ověříme, že operátor T je kontraktivní zobrazení. Mějme $y, z \in \mathcal{S}$. Uvažujme následující dva případy:

1) $0 \leq x < 1$

Z (36) a užitím předpokladů máme

$$
\begin{aligned}
|(Ty)(x) - (Tz)(x)| &\leq \int_0^x |f(t, y(t), \phi(t)) - f(t, z(t), \phi(t))| \,\mathrm{d}t \leq \\
&\leq \int_0^x h(t)\,|y(t) - z(t)| \,\mathrm{d}t \leq
\end{aligned}
$$

$$\leq |y-z|_{\mathcal{S}} \int_0^x h(t)\exp(\lambda t)\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq |y-z|_{\mathcal{S}}\, \alpha \exp(\lambda x). \qquad (43)$$

2) $1 \leq x < \infty$

Z (37) a užitím předpokladů máme

$$\begin{aligned} |(Ty)(x)-(Tz)(x)| &\leq \int_0^1 |f(t,y(t),\phi(t)) - f(t,z(t),\phi(t))|\, \mathrm{d}t + \\ &+ \int_1^x |f(t,y(t),y(t-1)) - f(t,z(t),z(t-1))|\, \mathrm{d}t \leq \\ &\leq \int_0^x h(t)\,|y(t)-z(t)|\, \mathrm{d}t + \\ &+ \int_1^x h(t)\,(|y(t)-z(t)| + |y(t-1)-z(t-1)|)\, \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^x h(t)\,|y(t)-z(t)|\, \mathrm{d}t + I_2, \end{aligned} \qquad (44)$$

kde

$$I_2 = \int_1^x h(t)\,|y(t-1)-z(t-1)|\, \mathrm{d}t. \qquad (45)$$

Platí

$$I_2 = \int_0^{x-1} h(t+1)\,|y(t)-z(t)|\, \mathrm{d}t \leq \int_0^x h(t+1)\,|y(t)-z(t)|\, \mathrm{d}t. \qquad (46)$$

Užitím této nerovnosti a (44) dostáváme

$$\begin{aligned} |(Ty)(x)-(Tz)(x)| &\leq |y-z|_{\mathcal{S}} \int_0^x (h(t)+h(t+1))\exp(\lambda t)\mathrm{d}t \leq \\ &\leq |y-z|_{\mathcal{S}}\, \alpha \exp(\lambda x) \end{aligned} \qquad (47)$$

pro všechna $y, z \in S$.

Z (43) a (47) vidíme, že

$$|Ty - Tz|_{\mathcal{S}} \leq \alpha\, |y-z|_{\mathcal{S}}\,.$$

Neboť $\alpha < 1$, z Banachovy věty o pevném bodě plyne, že T má jediný pevný bod v $\mathcal{S}$. Pevný bod zobrazení T je navíc řešením (21), (22).

$\square$

Následující věta ukazuje jednoznačnost řešení (21), (22) bez existenční části.

Věta 4.2. *Předpokládejme, že funkce f ve vztahu* (21) *splňuje podmínku* (33). *Potom* (21), (22) *má nejvýše jedno řešení na* $\mathbb{R}_+$.

Důkaz: Nechť $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou řešení (21), (22) a $u(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$, $x \in \mathbb{R}_+$. Uvažujeme následující dva případy:

1) Nechť $0 \leq x < 1$. Z předpokladů plyne, že

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \int_0^x |f(t, y_1(t), \phi(t)) - f(t, y_2(t), \phi(t))| \mathrm{d}t \leq \\ &\leq \int_0^x h(t)\, |y_1(t) - y_2(t)| \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^x h(t) u(t) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{48}$$

Nyní aplikace Gronwallova lemmatu nám dává (pro $c = 0$)

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq 0. \tag{49}$$

2) Nechť $1 \leq x < \infty$. Z předpokladů máme, že

$$\begin{aligned} u(x) \quad &\leq \quad \int_0^1 |f(t, y_1(t), \phi(t)) - f(t, y_2(t), \phi(t))| \mathrm{d}t + \\ &\quad + \int_1^x |f(t, y_1(t), y_1(t-1)) - f(t, y_2(t), y_2(t-1))| \mathrm{d}t \leq \\ &\leq \quad \int_0^1 h(t)\, |y_1(t) - y_2(t)| \mathrm{d}t + \\ &\quad + \int_1^x h(t)\, (|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1(t-1) - y_2(t-1)|) \mathrm{d}t = \\ &= \quad \int_0^x h(t)\, |y_1(t) - y_2(t)| \mathrm{d}t + I_3, \end{aligned} \tag{50}$$

kde

$$I_3 = \int_1^x h(t)\,|y_1(t-1) - y_2(t-1)|\mathrm{d}t.$$

Platí

$$I_3 \le \int_0^x h(t+1)\,|y_1(t) - y_2(t)|\mathrm{d}t.$$

Z nerovnosti (50) nyní plyne

$$u(x) \le \int_0^x (h(t) + h(t+1))\,u(t)\mathrm{d}t.$$

Nyní z Gronwallova lemmatu (pro $c = 0$) máme

$$|y_1(x) - y_2(x)| \le 0.$$

Z (49) a této nerovnosti dostáváme $y_1(x) = y_2(x)$ pro $x \in \mathbb{R}_+$. Tedy existuje nejvýše jedno řešení (21), (22) na $\mathbb{R}_+$.

□

4.3 Příklad

Příklad 4.1. Uvažujme úlohu

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^3}(y(x) + y(x-1)) \tag{51}$$

pro $x \in \mathbb{R}_+$ a počáteční podmínky

$$y(x-1) = \phi(x) \quad (0 \le x < 1), \quad y(0) = y_0, \tag{52}$$

kde $\phi : [0,1) \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a platí $\lim\limits_{x \to 1^-} \phi(x) = y_0$.

Funkce $f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^3}(y+z)$ je spojitá vektorová funkce z $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$.

Pro $(x,y,z), (x,\overline{y},\overline{z}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ platí

$$\left|\frac{1}{1+x^3}(y+z) - \frac{1}{1+x^3}(\overline{y}+\overline{z})\right| = h(x)\,|y + z - \overline{y} - \overline{z}| \le$$
$$\le h(x)\left(|y - \overline{y}| + |z - \overline{z}|\right),$$

kde $h(x) = \frac{1}{1+x^3}$ je spojitá z $\mathbb{R}_+$ do $\mathbb{R}_+$.

Dále nechť $\lambda > \frac{3}{2}$. Pak

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1+t^3} + \frac{1}{1+(1+t)^3} \right) \exp(\lambda t) \mathrm{d}t \leq \int_0^x (1 + \frac{1}{2}) \exp(\lambda t) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^x \exp(\lambda t) \mathrm{d}t = \frac{3}{2\lambda} [\exp(\lambda x) - 1] \leq$$

$$\leq \frac{3}{2\lambda} \exp(\lambda x)$$

pro $x \in \mathbb{R}_+$. Tedy je splněna podmínka (34) uvedená ve větě 4.1 pro $\alpha = \frac{3}{2\lambda}$.

A dále platí

$$|y_0| + \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} |\phi(t)| \, \mathrm{d}t + \int_0^x |\underbrace{f(t,0,0)}_{=0}| \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq |y_0| + \int_0^1 |\phi(t)| \, \mathrm{d}t =: C$$

pro $x \in \mathbb{R}_+$. Předpoklad (35) věty 4.1 je splněn pro $\beta \geq C$.

Úloha (51), (52) splňuje všechny předpoklady věty 4.1 a má tedy jediné řešení na $\mathbb{R}_+$ v prostoru $\mathcal{S} = \left\{ z \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) : |z(x)| = O(\exp(\lambda x)), \ \lambda > \frac{3}{2} \right\}$.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo podrobnější nastudování teorie diferenciálních rovnic druhého řádu a seznámení se s existencí systémů diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem.

V práci jsme se pokusili čtenáři naznačit, že studium diferenciálních rovnic je důležité pro mnohá odvětví přírodních věd, jelikož pomocí nich lze vytvořit matematické modely popisující reálný svět. Protože ale diferenciální rovnice nejsou vždy řešitelné elementárními integračními metodami a řešení vypočítané pomocí softwaru může být z důvodu používání zaokrouhlování a aproximací dosti zkreslené, zkoumá se, za jakých podmínek řešení vůbec existuje, případně jaké vlastnosti to řešení má. V této práci jsme zkoumali, za jakých podmínek existuje řešení dvou speciálních typů diferenciálních rovnic, a to diferenciální rovnice druhého řádu a systému diferenciálních rovnic s odkloněným argumentem definovaných na polopřímce, a také kdy je toto řešení jediné. Teoretické výsledky jsme aplikovali na příkladech.

Bakalářská práce přispěla k prohloubení mých znalostí z teorie diferenciálních rovnic a doufám, že úsilí věnované vypracování této práce bude přínosem pro mé další studium. Také jsem si osvojila používání typografického programu TEX, kterým je tato práce vysázena.

Literatura

[1] M. Ehrnström: *Positive solutions for second-order nonlinear differential equations*, Nonlin. Anal. 64(2006), 1608-1620.

[2] B.G. Pachpatte: *Some basic theorems on difference-differential equations*, Electron. J. Differential Equations 2008(2008), No. 75, 1-11.

[3] L. A. Lusternik, V. J. Sobolev: *Elements of functional analysis*, Hindustan Publishing Corpn.; New York, 1974.

[4] G. Bachman, L. Narici: *Functional analysis*, Academic Press, New York, 1966.

[5] D. R. Smart: *Fixed point theorems*, Cambridge University Press, 1974.

[6] M. Greguš, M. Švec, V. Šeda: *Obyčajné diferenciálne rovnice*, Alfa, Bratislava, 1985.

[7] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 2001.

[8] V. Novák: *Integrální počet v R*, Masarykova univerzita, Brno, 2001.