Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Řešení stereometrických úloh

Vypracovala: Kamila Křížová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Řešení stereometrických úloh jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne………………… ……………………….

Kamila Křížová

Poděkování

Tímto děkuji vedoucímu mé diplomové práce prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za jeho vstřícnost při konzultacích a za velmi cenné rady, kterými mi při vypracovávání práce pomohl.

Anotace:

Tato diplomová práce tematicky navazuje na bakalářskou práci s názvem *Stereometrické úlohy*, kde autorka řešila soubor příkladů metodou rovnoběžného promítání. V diplomové práci je stěžejní metodou zobrazování Mongeovo promítání. První část práce je věnována standartním úlohám, na něž dále autorka plynuje navazuje metrickými úlohami a úlohami o vzájemných polohách prostorových útvarů řešených v Mongeově projekci. Druhá část práce je jakýmsi didaktickým pohledem na stereometrii na základních školách. Zaměřuje se na prostorové úlohy u přijímacích zkoušek, na schopnost žáků je řešit a na didaktické pomůcky a prostředky, které pomáhají rozvíjet prostorovou představivost žáků.

Annotation:

This diploma thesis follows up the bachelor thesis named *Stereometric tasks*, where the author solved a collection of problems using parallel projection. The main method in this diploma thesis is the Monge projection. The first part of the thesis includes a standard tasks. Thenafter the author continues with metric tasks and tasks on mutual positions of solids which are solved by Monge projection. The second part of the thesis is a something like a didactic view on stereometry at elementary schools. It focuses on spacial tasks in entrance examinations, on the ability of pupils to solve them and on didactic aids and means that help to develop the spatial imagination of pupils.

Obsah

Úvod

Naše bytí se odjakživa nachází v trojrozměrném prostoru. Již naši předci si uvědomovali, že polohu objektů kolem nás nestačí popsat pouze dvojicemi příslovcí *vlevo/vpravo* a *vpředu/vzadu.* Svět není jen tenká deska, a protože ještě navíc můžeme říkat *nahoře/dole*, označujeme jej za „trojdimenzionální“ či *3D* prostor, který popisujeme právě třemi rozměry a předmětům zde přiřazujeme objem.

Touto diplomovou prací volně navazuji na svou bakalářskou práci *Stereometrické úlohy,* ve které jsem řešila množství příkladů z prostorové geometrie, jenž jsem ilustrovala vlastními nákresy vytvořenými metodou rovnoběžného promítání v programu *GeoGebra.* V diplomové práci používám navíc Mongeovo promítání pro názornější zobrazení oblých těles, které je též tradičně spojeno s technické výkresy.

Jako obecný úvod do stereometrie slouží první kapitola, v níž je vysvětlena podstata stereometrie pro člověka a matematiku, dále zde hovořím o základních útvarech prostorové geometrie, pomocí nichž posléze formuluji axiómy stereometrie. Logickou cestou se pak z axiómů odvozují základní věty pro stereometrii.

Druhá kapitola je celá věnována Mongeovu promítání. Popisuji zde využitelnost tohoto promítání a definuji termíny, které jsou s tématikou spjaté, a jenž jsou dále v úlohách používány, načež navazuji základními principy zobrazování v Mongeově projekci. O tuto teoretickou pasáž se poté opírá řešení příkladů, kdy čtenáře nejprve seznamuji se základními úlohami. Dále zde řeším též úlohy metrické a úlohy zabývající se vzájemnou polohu tělesa a roviny či přímky.

V další kapitole jsem se zaměřila na nestandartní úlohy ze stereometrie, jejichž řešení vyžaduje o něco větší zkušenosti v oblasti geometrie. Tematicky se jedná o méně obvyklé útvary v prostoru, kdy povětšinu bývá čtenář nucen k vyřešení úlohy využít vlastní vizualizace, tedy prostorového vidění. Teprve potom přichází na řadu konstrukce úlohy.

Poslední, nejobsáhlejší kapitola, se věnuje prostorové geometrii na základních školách. Mým cílem bylo sestavit soubor úloh i s popisem řešení, kdy jsem čerpala z publikací určených pro žáky základních škol, zejména pak pro žáky 9. tříd, které slouží jako příprava na přijímací zkoušky na střední školy s maturitou. Dále jsem provedla menší průzkum toho, jak jsou žáci schopni vybrané prostorové úlohy řešit a jaký postoj k prostorové geometrii zaujímají. V závěru kapitoly je nastíněna možná podpora pro výuku stereometrie pomocí konkrétních učebních pomůcek.

1. Stereometrie

1.1 Význam geometrie v prostoru

Jak nám již napovídají předměty dochované ze starověku, tak geometrie, významná část matematiky, hrála již tehdy významnou roli a vznikla z potřeb praxe. Nejen Egypťané a Mezopotámci patnáct set let před naším letopočtem ovládali základy měřičství a kreslili plány staveb na hliněné tabulky. O něco později již rýsovali půdorysy a nárysy staveb pomocí pravoúhlého promítání na papyry, které posléze sloužily stavitelům jako předloha pro přesnější práci. Techniky zobrazování začali využívat rovněž malíři při pokusech zachytit co nejvěrněji obraz přírody, kamenolamači opracovávali podle výkresů stavební kameny [6].

Stereometrie není tedy pouze nauka o předmětech, které se nacházejí v trojrozměrném prostoru. Její nedílnou součástí je věda, která popisuje vztah mezi prostorovým objektem a jeho průmětem do roviny. Té říkáme *deskriptivní geometrie* a své využití si nachází všude, kde potřebujeme vytvořit nákresy různých prostorových útvarů, čehož se hojně užívá ve stavitelství, strojním inženýrství, v elektrotechnických, hornických i hutnických oborech [18].

1.2 Úvod do stereometrie

Můžeme nyní na chvíli ponechat stranou zobrazovací metody, protože jejich užití ve stereometrii je zcela samozřejmé, a zaměříme se na teoretický rámec prostorové geometrie, který je opět odvozen bezprostředně ze zkušenosti. Za základ geometrie jsou brány matematické pojmy a axiomy, z axiomů dále odvozujeme geometrické věty. Teorie *stereometrie* vzniká z *planimetrických* (rovinných) axiomů tím, že jsou přidány axiomy další a z nich odvozovány věty [12].

V prostoru pracujeme se třemi základními útvary. Jsou to bod, přímka a rovina. Body bývají označovány velkými písmeny abecedy $A, B, C, \ldots$, přímky malými písmeny $a, b, c, \ldots$ Roviny tradičně označujeme malými řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

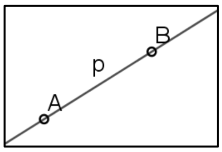
Body mohou být buďto různé $A \neq B$, nebo splývající $A \equiv B$. **Přímka** je určena buďto dvěma body nebo bodem a vektorem. Dvě různé přímky p, q obecně nemají společný bod. Označujeme je jako přímky mimoběžné. Nebo mohou mít dvě přímky společný vlastní bod, ten pak můžeme graficky zobrazit a nazveme ho průsečíkem různoběžek. Dvě přímky mohou mít též společný nevlastní bod, tj. bod v nekonečnu, tehdy se nazývají rovnoběžné [12].

Rovina ρ je určena třemi různými body, které nejsou kolineární, tzn. neleží na jedné přímce. Pokud spojíme dva body A, B roviny ρ, pak bude tato spojnice celá náležet rovině ρ. Dále může být také rovina určena bodem A a přímkou p, ale jen v případě, že A nenáleží p. Rovinu mohou určovat i dvě různoběžky, ev. dvě rovnoběžky. Jsou-li dvě roviny různé, pak se protínají v jediné přímce. Tato přímka může být vlastní či nevlastní. Pokud je nevlastní, tak říkáme, že obě roviny α, β jsou vzájemně rovnoběžné [12].

1.3 Axiómy stereometrie

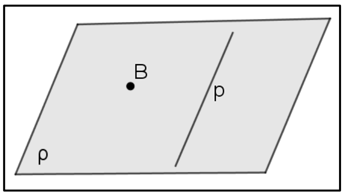
Zprvu si formulujeme několik jednoduchých vět, o které se opírají všechny další věty ve stereometrii. Těmto větám říkáme *axiómy* a přejímáme je bez důkazu. Na následujících řádcích jsou uvedeny základní axiómy, které vyjadřují vztahy o incidenci mezi body, přímkami a rovinami [12]:

<u>Axióm 1:</u> Dva různé body A, B určují právě jednu přímku p. Tedy dvěma různými body prochází *právě jedna* přímka. Tvrzení symbolicky zapisujeme $p \equiv AB$.



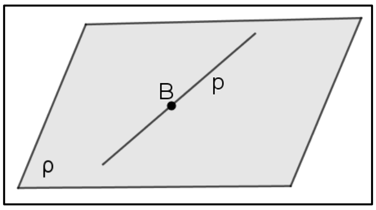
Obr. 1: Axióm 1

<u>Axióm 2:</u> Přímka p a bod B, který neleží na dané přímce, určují *právě jednu* rovinu ρ. Symbolicky $\rho \equiv (Bp)$.



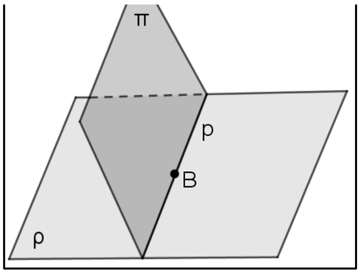
Obr. 2: Axióm 2

Axióm 3: Pokud leží bod B na přímce p a přímka p leží v rovině ρ, pak leží i bod B v rovině ρ. Zapisujeme jako $B \in p, p \in \rho \Rightarrow B \in \rho$.



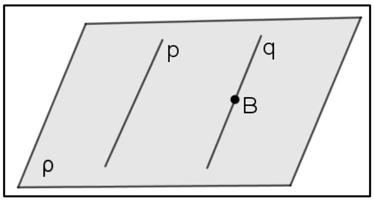
Obr. 3: Axióm 3

Axióm 4: Mají-li dvě různé roviny ρ a π společný bod B, pak mají společnou *právě jednu* přímku p.



Obr. 4: Axióm 4

Axióm 5: Ke každé přímce p lze bodem B, který na ní neleží, vést právě jednu přímku q, která společně s přímkou p leží v jedné rovině a *nemá* s ní společný bod .



Obr. 5: Axióm 5

1.4 Základní věty stereometrie

Základní věty stereometrie odvozujeme logickou cestou z axiómů. Matematická věta se zpravidla skládá ze tří částí:

I) z *předpokladů*, tj. podmínek, za kterých věta platí

II) z vlastního *tvrzení*

III) z *důkazu*

Velmi často bývají součástí matematické věty pouze první dvě části, důkaz tedy bývá někdy vynechán.

Tato kapitola shrnuje elementární věty ze stereometrie, které jsou důsledky axiómů, jenž vychází z *Euklidovy geometrie*. Již před více jak 2 tisíci lety zavedl řecký matematik *Euklides* podobný systém axiomů v prostoru, jaký známe dnes. Odtud si nese trojrozměrný prostor název *euklidovský prostor* a obvykle bývá značen E_3 [12].

Základní důsledky axiómů:

Věta: Mají-li dvě přímky společné dva různé body, pak jsou totožné

Věta: Mají-li dvě roviny společnou přímku a bod, který na této přímce neleží, pak jsou totožné.

Věta: Mají-li přímka a rovina společné dva různé body, pak přímka leží v rovině.

Věty o vzájemné poloze:

Věta: Dvě přímky v prostoru jsou buď totožné, nebo rovnoběžné, nebo různoběžné, a nebo mimoběžné.

Věta: Dvě roviny jsou buď totožné, nebo rovnoběžné, a nebo různoběžné.

Věta: Přímka v rovině buď leží, nebo je s ní rovnoběžná, a nebo je s ní různoběžná.

Věta: Daným bodem prochází právě jedna rovnoběžka s danou přímkou.

Věta: Daným bodem prochází právě jedna rovina rovnoběžná s danou rovinou.

Věty o směru $\vec{s}$ v prostoru:

Věta: Směr $\vec{s}$ je množina všech vzájemně rovnoběžných přímek v prostoru.

Věta: Bod B a směr určují jedinou přímku, kterou lze vést tímto směrem bodem B.

Věta: Přímka p a směr $\vec{s}$ různý od směru přímky p určují jedinou rovinu, která vznikne vedením rovnoběžky s přímkou s libovolným bodem přímky p.

Věta: Právě jedna rovina je určena bodem B a dvěma různými směry $\vec{s}$ a $\vec{s}'$. Rovinu sestrojíme tak, že bodem B vedeme přímky daných směrů.

Věta: Útvar promítáme ve směru $\vec{s}$, jestliže všemi body útvaru vedeme rovnoběžky se směrem $\vec{s}$.

2. Mongeovo promítání

2.1 Gaspard Monge

Panu Gaspardu Mongeovi *[čti gaspáru monžovi]* se říká *„otec deskriptivní geometrie"*. Narodil se 10. května 1746 v Beaune a zemřel 28. července 1818 v Paříži. Byl to francouzský přírodovědec, matematik a politik, a právě jemu vděčíme za Mongeovo promítání, velký přínos do prostorové geometrie [21].

Během svého života se zasloužil o několik významných činů, například se spolupodílel na zavedení metrické soustavy, byl členem skupiny odborníků Napoleona Bonaparta, a právě on je považován za zakladatele deskriptivní geometrie, kterou nazval *geometrie descriptive*. Tato věda musela zůstat vojenským tajemstvím až do Velké francouzské revoluce, do té doby mohl své poznatky předávat ústně jen studentům školy, ve které vyučoval matematiku a fyziku. Je také jedním ze 72 význačných vědců, jejichž příjmení nese ocelová konstrukce Eiffelovy věže v Paříži [26].

2.2 Mongeovo promítání

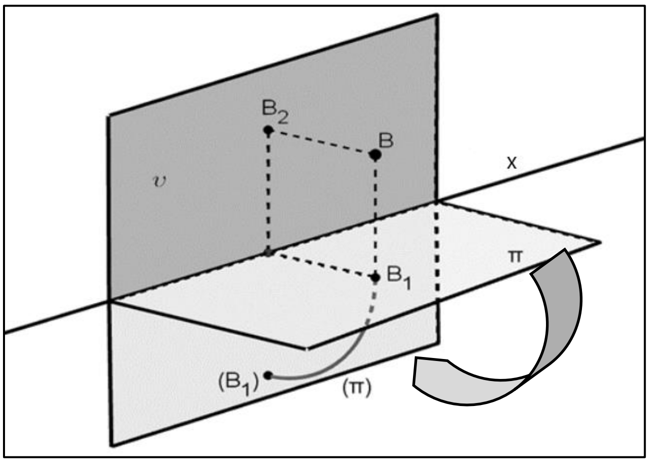
Mongeovo promítání je promítací metoda v technickém kreslení. Jde o nejjednodušší a nejběžnější geometrické zobrazení z trojrozměrného prostoru do roviny. Umožňuje nám pravoúhlé zobrazení prostorového objektu do roviny na dvě k sobě kolmé průmětny. Toto zobrazení není vzájemně jednoznačné. To znamená, že k obrazu (průmětu) nelze určit jednoznačně objekt v prostoru [9].

Srovnáme-li vlastnosti promítání na jednu průmětnu (tj. *kótovaného promítání*) a Mongeova promítání na dvě průmětny, spatříme základní rozdíl v tom, že funkci kóty, která jednoznačně vyjadřuje u průmětu bodu jeho polohu v prostoru, nahrazuje v Mongeově promítání další pravoúhlý průmět bodu tak, aby bylo možné délku udanou kótou odměřit užitím tohoto dalšího průmětu [6].

2.3 Základní pojmy

Mongeovo promítání určujeme dvěma k sobě kolmými průmětnami a to půdorysnou π (ve vodorovné poloze) a nárysnou υ (ve svislé poloze). Průsečnici $x_{1,2} \equiv \pi \cap \upsilon$ nazýváme *základnice*. Zde si demonstrujeme zobrazení bodu B z prostoru na dvě průmětny π a υ:

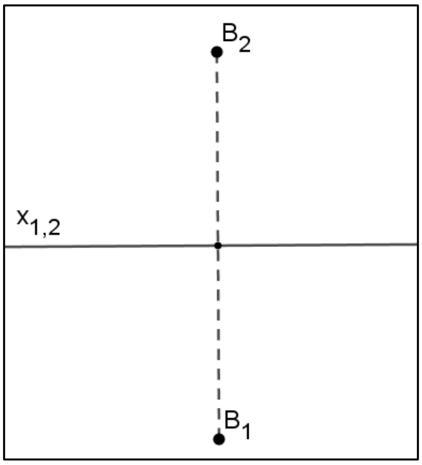
Pokud bod B pravoúhle promítneme do nárysny υ, dostaneme nárys bodu B, který označíme B_2. Dále pravoúhle promítneme bod B do půdorysny π a dostaneme půdorys bodu B, označíme jej B_1. Nakonec otočíme půdorysnu π kolem základnice do nárysny (svislé polohy) a obě průmětny ztotožníme s nákresnou.



Obr. 6: Pravoúhlý průmět bodu B a otočení půdorysny kolem základnice

Tímto v nákresně získáme dvojici bodů (B_1), B_2, kterou nazveme *sdružené průměty bodu B* a dále označíme B_1, B_2 [7].

Dále platí, že pokud je spojnice sdružených průmětů B_1, B_2 kolmá k základnici, pak je přiřazení mezi body v prostoru a sdruženými průměty vzájemně jednoznačné. Spojnici sdružených průmětů B_1, B_2 dále nazýváme *ordinálou* [6].

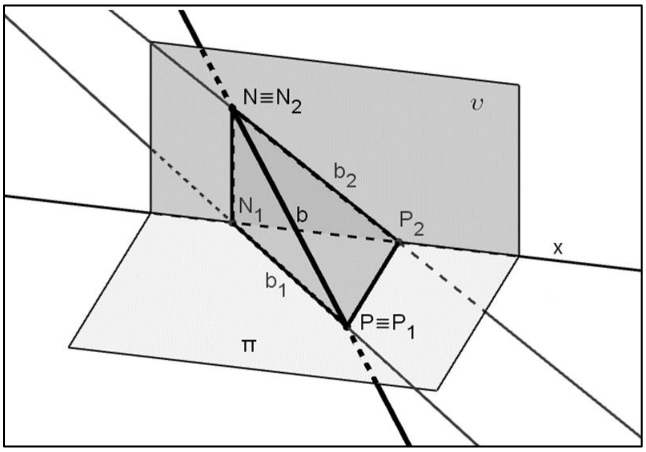


Obr. 7: Ztotožnění obou průměten s nákresnou

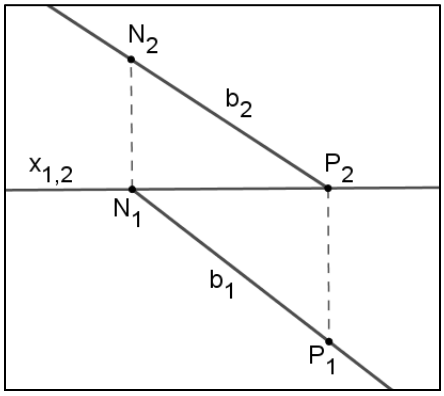
2.4 Průměty základních útvarů

2.4.1 Průmět přímky

Sdružené průměty b_1 a b_2 přímky b určují tuto přímku v prostoru jednoznačně, pokud vyloučíme případ, kdy $b_1 \equiv b_2$ a $b_1 \perp x_{1,2}$. Jestliže se přímka nachází v obecné poloze, jako je tomu na obrázku *(Obr. 8),* protíná obě průmětny. Půdorysnu π protíná v bodě P. Bodu říkáme *půdorysný stopník*. Bod N, který je průnikem přímky a nárysny, nazýváme *nárysný stopník.* Navíc pro upřesnění: dvojice bodů P_1 a P_2, N_1 a N_2 jsou sdružnými průměty půdorysného stopníku a nárysného stopníku přímky [6].



Obr. 8: Obecná poloha přímky



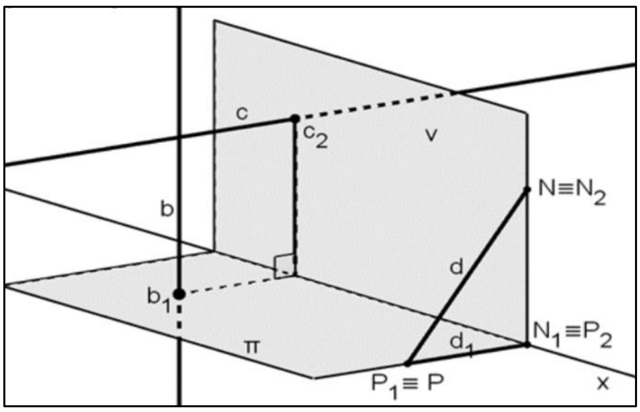
Obr. 9: Obecná poloha přímky v Mongeově projekci

2.4.2 Průmět přímky ve zvláštní poloze

1) Přímka kolmá k základnici

V rovnoběžném promítání může být průmětem přímky buďto opět přímka, nebo je průmětem přímky bod, ale to pouze tehdy, je-li přímka kolmá na průmětnu. Proto rozlišujeme zvláštní polohy přímky, které jsou znázorněny na následujících obrázcích *(Obr. 10, 11)*:

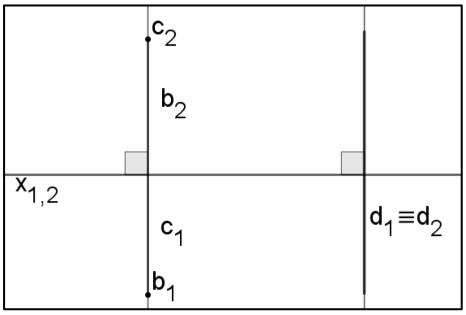
Pokud je jedním obrazem přímky bod, pak druhým obrazem je přímka kolmá k ose $x_{1,2}$ a zároveň sdružené obrazy leží na ordinále.



Obr. 10: Přímka kolmá k základnici

$$b \perp \pi \qquad\qquad c \perp \upsilon$$

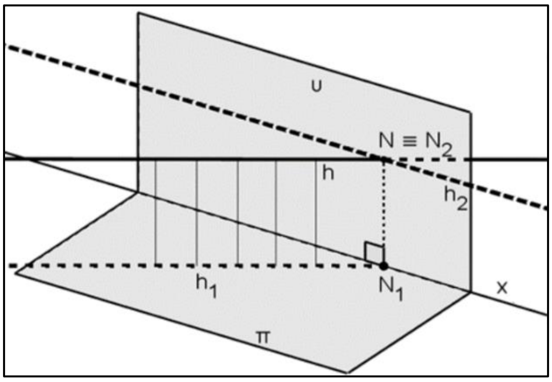
Ve tomtéž obrázku je vidět i případ, kdy je přímka d prostorově kolmá k základnici, ale není kolmá k žádné z průměten. Sdružené obrazy stejně jako u předchozího případu leží na ordinále [6].



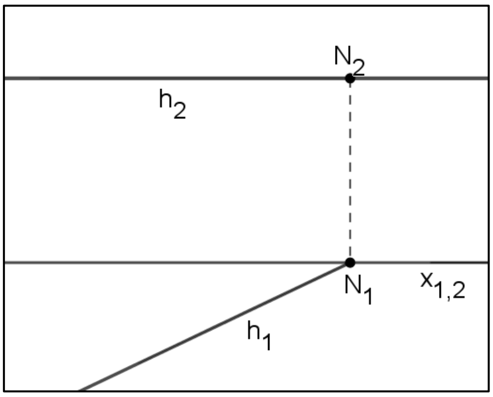
Obr. 11: Přímka kolmá k základnici v Mongeově promítání

2) Přímka rovnoběžná s půdorysnou

Nárysem přímky h je $h_2 \parallel x_{1,2}$. Přímku h také nazýváme horizontální hlavní přímkou [6].



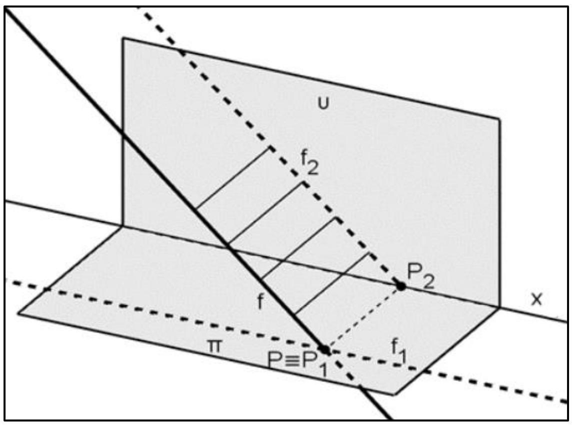
Obr. 12: Horizontální hlavní přímka



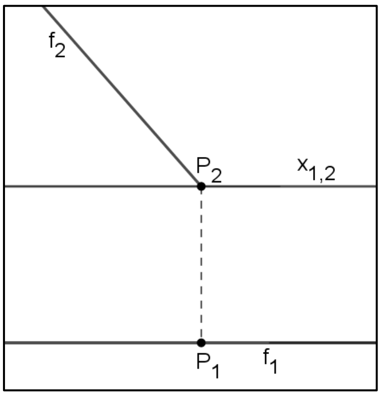
Obr. 13: Horizontální hlavní přímka v Mongeově promítání

3) Přímka rovnoběžná s nárysnou

Půdorysem přímky f je $f_1 \parallel x_{1,2}$. Přímku f nazýváme frontální (průčelnou) hlavní přímkou [6].



Obr. 14: Frontální hlavní přímka

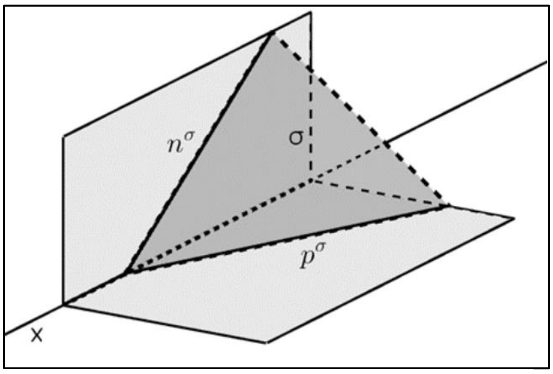


Obr. 15: Frontální hlavní přímka v Mongeově promítání

2.4.3 Průmět roviny

Stereometrie nám říká, že rovina je určena:

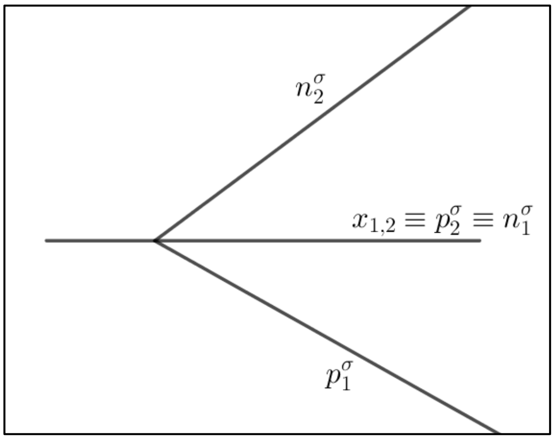
- třemi nekolineárními body
- dvěma různoběžnými přímkami
- dvěma rovnoběžnými, různými přímkami
- přímkou a bodem, který na ní neleží



Obr. 16: Obecná rovina

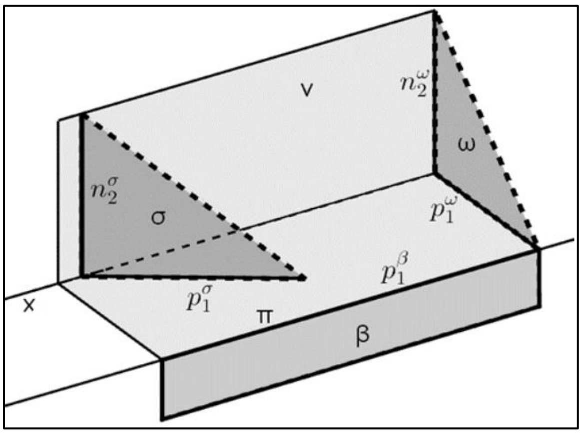
V úlohách v této práci budeme rovinu různoběžnou s průmětnou zadávat pomocí sdružených průmětů určujících prvků:

- dvou trojúhelníků
- dvou různoběžek
- dvou rovnoběžek



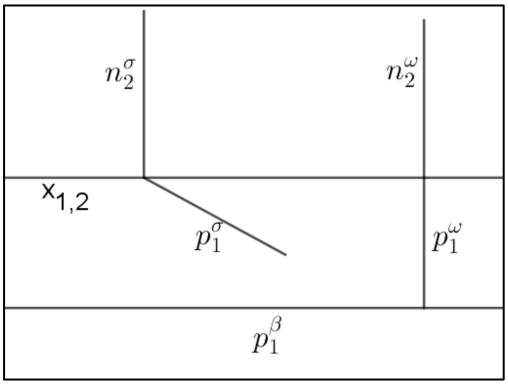
Obr. 17: Obecná rovina v Mongeově promítání

Zadání $\sigma = (p^{\sigma},\ n^{\sigma})$ považujeme za určení roviny σ pomocí dvou různoběžek či rovnoběžek. Následující obrázky (*Obr. 18, 19*) znázorňují 3 zvláštní polohy roviny:



Obr. 18: Zvláštní polohy roviny

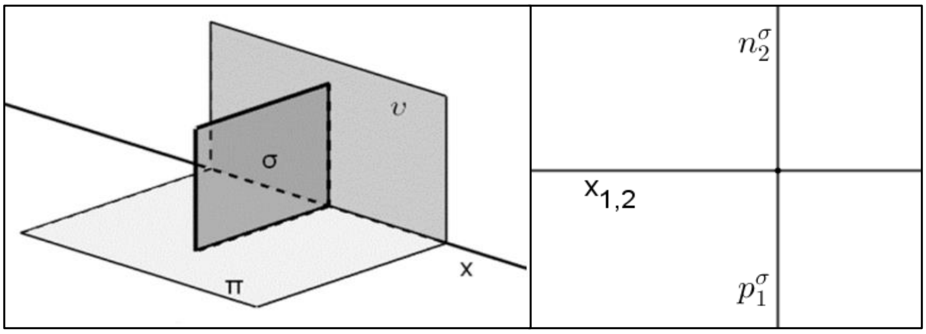
V Monegeově promítání nazýváme přímku p_1 *půdorysnou stopou roviny* a přímku n_2 *nárysnou stopou roviny* a navíc připisujeme do horního indexu řecké písmeno označující rovinu. Stopy roviny se protínají na základnici.



Obr. 19: Zvláštní polohy roviny v Mongeově promítání

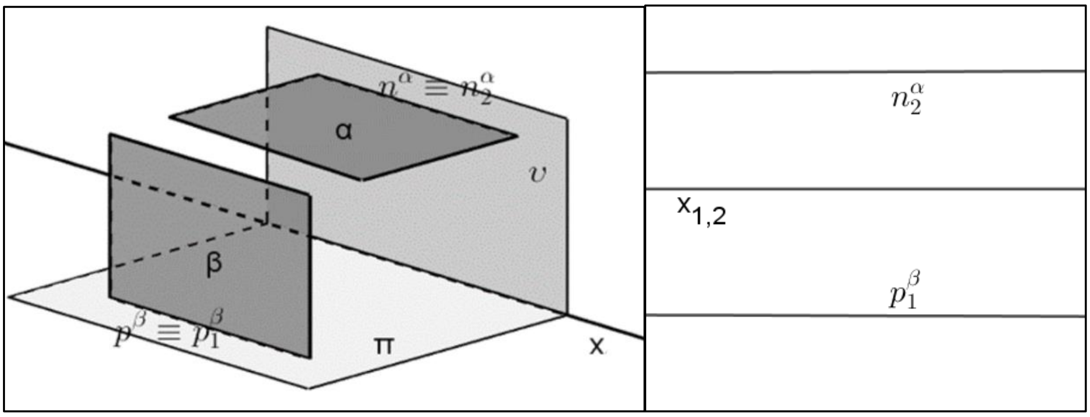
2.4.4 Průmět roviny ve zvláštní poloze

1) Rovina kolmá k průmětně



Obr. 20: Rovina kolmá k průmětně

2) Roviny rovnoběžné s průmětnami

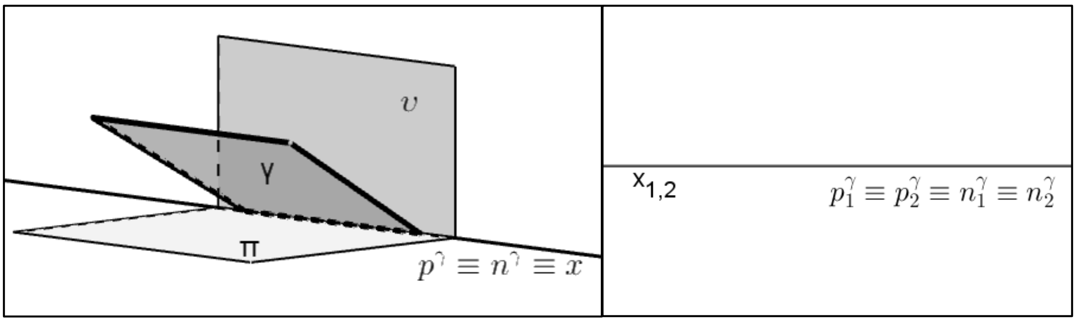


Obr. 21: Roviny rovnoběžné s průmětnami

Roviny hlavní jsou v deskriptivě důležité roviny, které jsou rovnoběžné s průmětnami. Jejich poloha je znázorněna na obrázku (*Obr. 21*). Existuje vždy jen ta stopa, která znázorňuje průnik roviny a průmětny. Druhá stopa neexistuje [6].

3) Rovina procházející osou x

V tomto případě nelze rovinu pomocí stop modelovat.



Obr. 22: Rovina procházející osou x

2.5 Základní úlohy řešené v Mongeově projekci

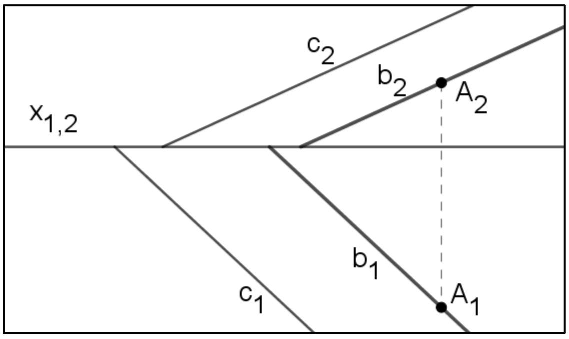
<u>Příklad:</u> Je zadán bod A a přímka c, na níž bod A neleží. Sestrojte přímku b jdoucí bodem A tak, aby byla rovnoběžná s c [7].

Rozbor:

Tato úloha patří mezi nejjednodušší. Je spíše vyžadováno řešitelovo zamyšlení se nad zadáním úlohy, není třeba žádných výjimečných geometrických schopností.

Závěr:

O průmětech b_1, b_2 přímky b platí, že: $A_1 \in b_1$, $A_2 \in b_2$, $b_1 \| c_1$, $b_2 \| c_2$.

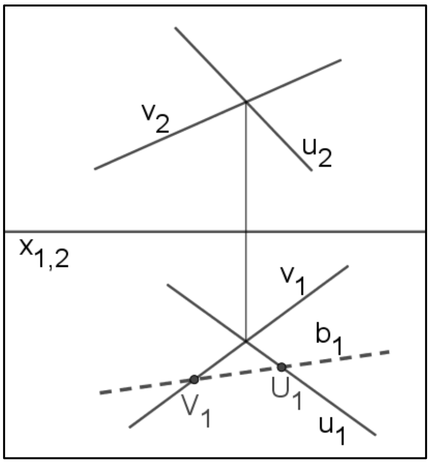


Obr. 23: Rovnoběžka jdoucí daným bodem

<u>Příklad:</u> Rovina ω je dána dvěma různoběžnými přímkami u, v. Určete nárys přímky b, která leží v rovině ω a má daný půdorys b_1.

Rozbor:

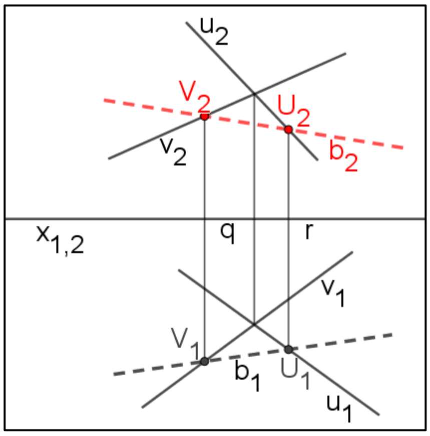
Přímka b leží v rovině ω, to znamená, že protíná její přímky u, v v bodech $U \equiv b \cap u$, $V \equiv b \cap v$. Z nákresu jsou patrné půdorysy bodů U, V, kde $U_1 \equiv b_1 \cap u_1$ a $V_1 \equiv b_1 \cap v_1$.



Obr. 24: Zadání úlohy

Závěr:

Lehce lze odvodit nárysy bodů U, V a tím určíme $b_2 \equiv U_2V_2$.



Obr. 25: Řešení úlohy

<u>Příklad:</u> Sestrojte hlavní přímky v rovině ω , která je dána body A, B, C.

Rozbor:

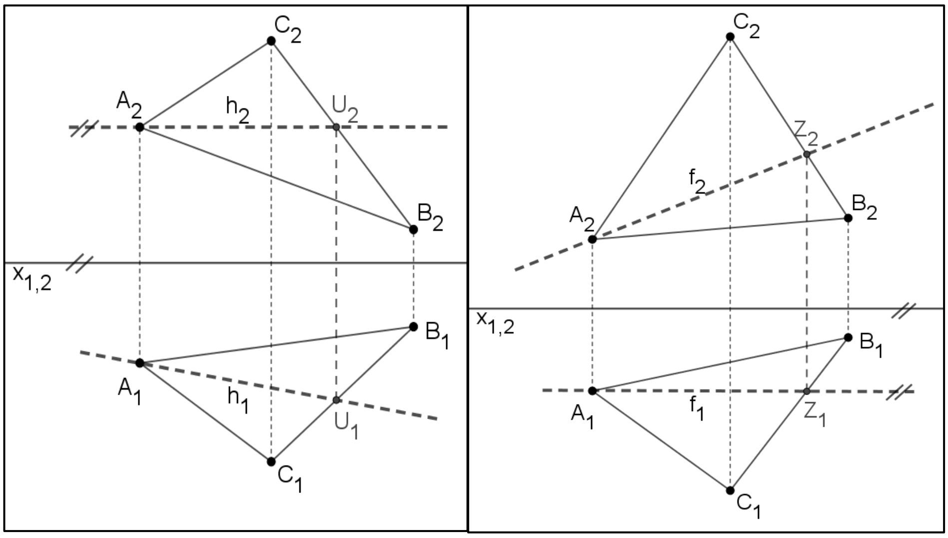
Hledáme hlavní přímku, jejíž zobrazení je v půdorysně π i v nárysně ϑ následující:

$h =$ horizontální, vodorovná hlavní přímka, $h \parallel \pi$, $h \in \omega$

$f =$ frontální, průčelná hlavní přímka, $f \parallel \vartheta$, $f \in \omega$

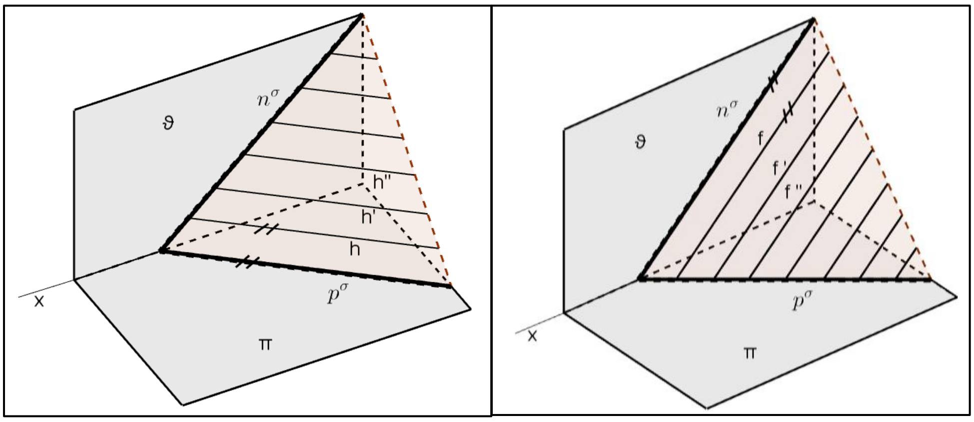
Závěr:

Nejprve zvolíme nárys $h_2 \parallel x_{1,2}$, respektive $f_1 \parallel x_{1,2}$. Přímka h, resp. f leží v rovině ω, a proto protíná přímky této roviny.



Obr. 26: Řešení příkladu

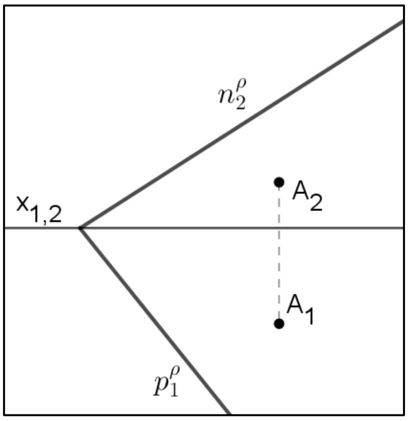
Na následujícím obrázku (*Obr. 27*) je v rovnoběžném promítání zakreslena množina hlavních přímek, nalevo horizontálních a napravo frontálních:



Obr. 27: Zobrazení množiny hlavních přímek

Příklad: Je dán bod A a rovina ρ a platí, že $A \notin \rho$. Určete rovinu σ rovnoběžnou s rovinou ρ procházející bodem A. Řešte oba případy [7].

Případ 1:



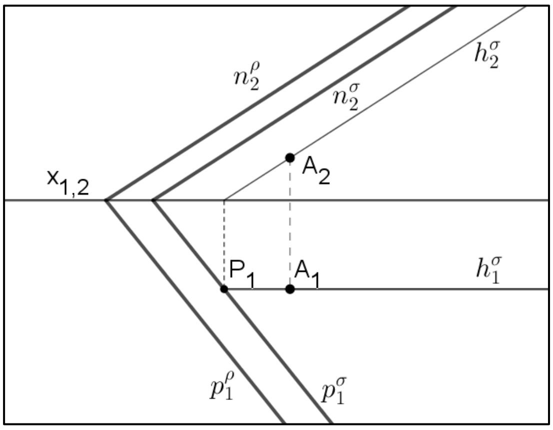
Obr. 28: Zadání Případu 1

Řešení:

1) přímky $h_1{}^\rho$ a $h_2{}^\rho$

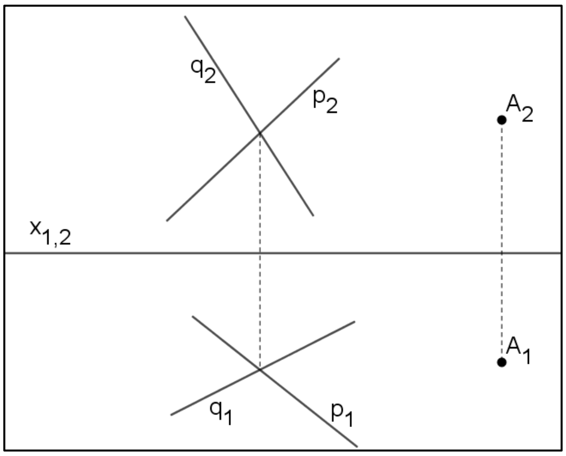
2) stopník P_1 přímky h^ρ

3) stopy roviny σ



Obr. 29: Řešení Případu 1

Případ 2:



Obr. 30: Zadání Případu 2

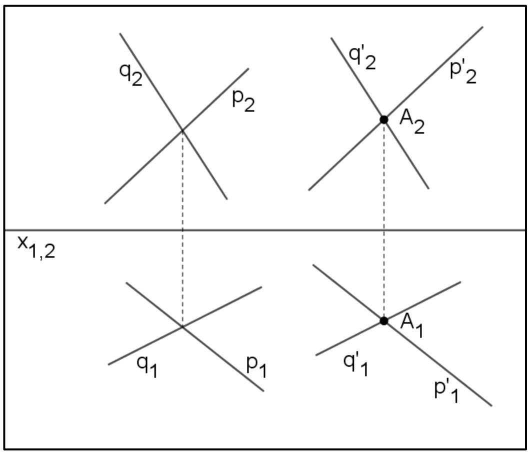
Řešení:

1) q_1'; $q_1' \in A_1 \wedge q_1' \parallel q_1$

2) p_1'; $p_1' \in A_1 \wedge p_1' \parallel p_1$

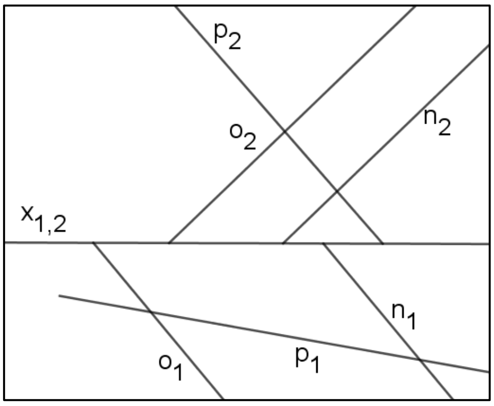
3) q_2'; $q_2' \in A_2 \wedge q_2' \parallel q_2$

4) p_2'; $p_2' \in A_2 \wedge p_2' \parallel p_2$



Obr. 31: Řešení Případu 2

<u>Příklad:</u> Je daná přímka p a rovina ρ určená sdruženými průměty přímek o a n. Rozhodněte, jaká je vzájemná poloha přímky p a roviny. Jsou-li různoběžné, určete jejich průsečík X [7].



Obr. 32: Zadání příkladu graficky

Rozbor:

Z obrázku v zadání je patrné, že přímky n a o určující rovinu ρ jsou rovnoběžné. V nárysu i půdorysu je přímka p protíná, proto bude mít smysl hledat průsečík přímky p a roviny ρ.

Řešení:

1) R_1; $R_1 \in p_1 \cap o_1$

2) ordinála bodu R_1

3) R_2; R_2 je nárys bodu R

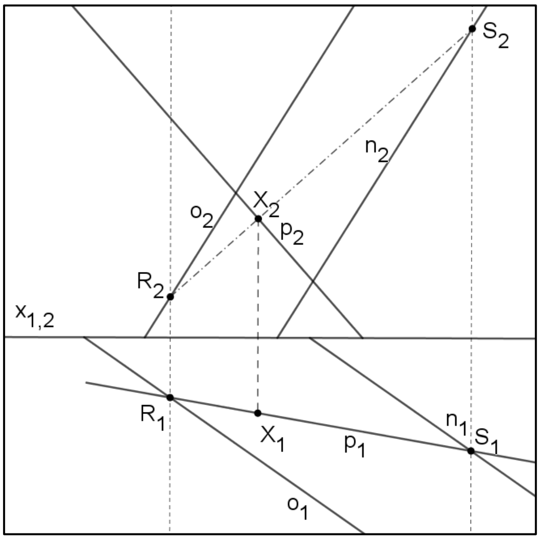
4) S_1; $S_1 \in p_1 \cap n_1$

5) ordinála bodu S_1

6) S_2; S_2 je nárys bodu S

7) X_2; $X_2 \in R_2S_2 \cap p_2$

8) X_1; X_1 je půdorysem bodu X



Obr. 33: Řešení č. 1

Obdobně tuto úlohu můžeme řešit i tak, že nejprve najdeme průsečík X_1 v půdorysně:

1) $U_2;\ U_2 \in p_2 \cap n_2$

2) ordinála bodu U_2

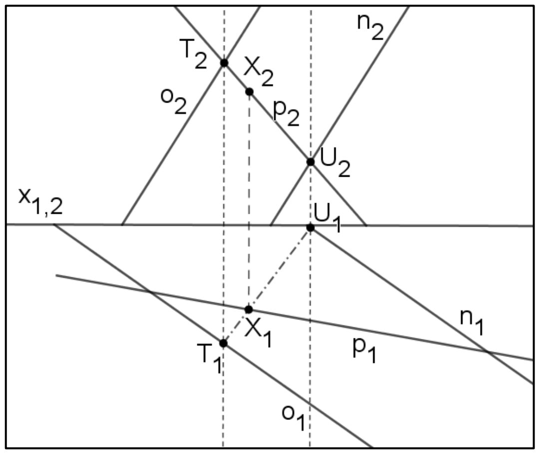
3) $U_1;\ U_1$ je půdorys bodu U

4) $T_2;\ T_2 \in p_2 \cap o_2$

5) $T_1;\ T_1$ je půdorys bodu T

6) $X_1; X_1 \in T_1U_1 \cap p_1$

7) $X_2;\ X_2$ je nárysem bodu X

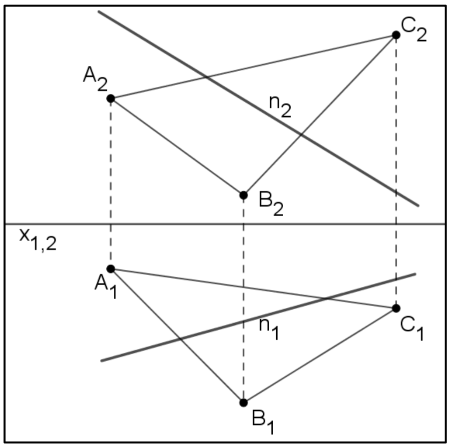


Obr. 34: Řešení č. 2

Závěr:

Nejprve jsme konstatovali, že průsečík přímky p a roviny ρ existuje. Poté jsme graficky nalezli nárys X_2 a půdorys X_1 průsečíku X.

<u>Příklad:</u> Sestrojte průsečík M přímky n s rovinou ω, je-li dána rovina půdorysem i nárysem tří bodů K, L, M a přímka n půdorysem n_1 a nárysem n_2.



Obr. 35: Zadání příkladu graficky

Rozbor:

Přímkou n proložíme půdorysně promítací rovinu α. Průsečnice $q \equiv \alpha \cap \omega$ se nazývá *krycí přímkou* přímky n. Hledaný bod $M \equiv n \cap \omega$ je průsečíkem přímky n s její krycí přímkou q, $M \equiv q \cap n$.

Popis konstrukce:

1) půdorys krycí přímky $q_1 \equiv n_1$

2) $U_1;\ U_1 \in q_1 \cap A_1B_1$

3) V_1; $V_1 \in q_1 \cap A_1C_1$ $(q \equiv UV)$

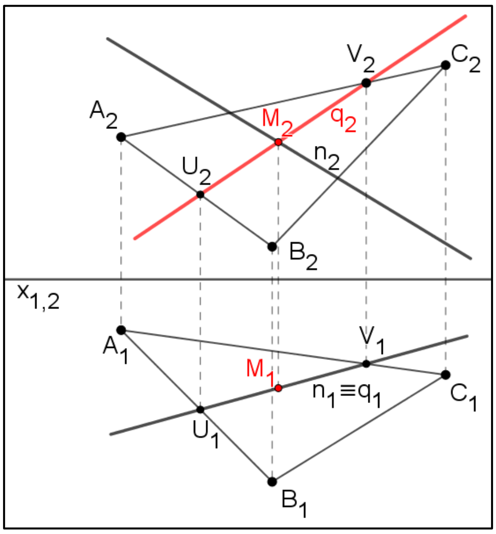
4) q_2; $q_2 \in U_2V_2$ (nárys krycí přímky)

5) $M_2 \in n_2 \cap q_2$ (nárys bodu M)

6) $M_1 \in n_1$ (půdorys bodu M)

Závěr:

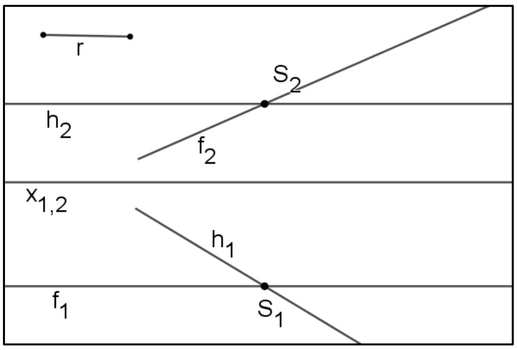
S využitím půdorysně promítací roviny a z ní vzniklé krycí přímky q jsme nalezli průsečík M přímky n a roviny ω.



Obr. 36: Řešení příkladu

<u>Příklad:</u> Zobrazte kružnici $k = (S, r)$, která leží v rovině ρ. Rovina ρ je dána hlavními přímkami h a f, tedy $\rho = (h, f)$ a $S \equiv h \cap f$ [9].

Řešení:



Obr. 37: Zadání příkladu

Půdorys

1) na přímku h_1 naneseme od středu S_1 poloměr r

2) vzniknou body A_1 a B_1

3) další body elipsy jsou U_1 a V_1, jenž jsme vytvořili v nárysu a promítli kolmo

4) vedlejší osa elipsy vznikne proužkovou konstrukcí*

5) elipsa k_1

Nárys

1) konstrukce k_2 je analogická s konstrukcí k_1

2) hlavní osa je určena body U_2 a V_2 tak, že $|U_2V_2| = 2r$ a zároveň leží na f_2

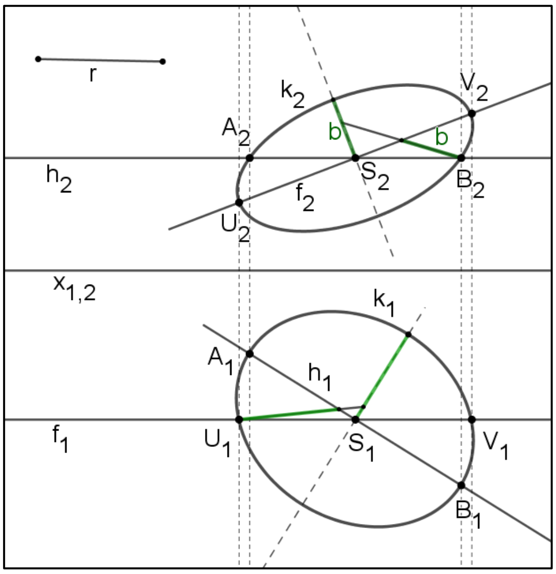
3) dalšími body jsou A_2 a B_2 vzniklé kolmým průmětem bodů A_1 a B_1

4) vedlejší osa elipsy vznikne opět proužkovou konstrukcí*

5) elipsa k_2

Závěr:

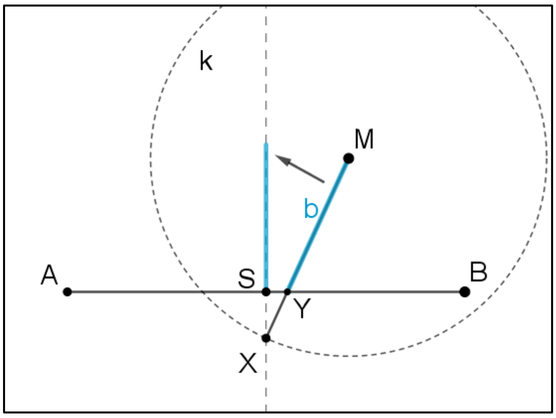
S využitím proužkové konstrukce jsme sestrojili eliptický nárys i půdorys kružnice k.



Obr. 38: Řešení příkladu

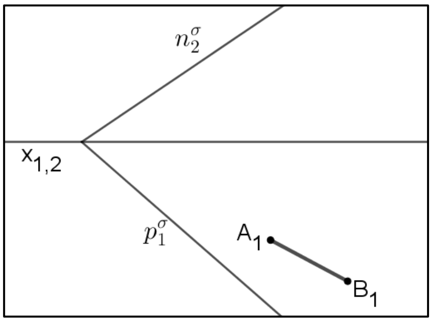
* **Proužková konstrukce**

Této konstrukce využíváme tehdy, potřebujeme-li zjistit délku vedlejší poloosy b u elipsy. Vycházíme z předpokladu, že známe polohu bodů hlavní osy A a B a nějaký bod M, který na elipse leží. Snadno nalezneme střed a určíme délku hlavní poloosy a. Vytvoříme kružnici $k(M, a)$, průsečík s vedlejší osou elipsy označíme X. Vytvoříme úsečku XM, která protíná hlavní osu v bodě Y. V tuto chvíli známe délku vedlejší polosy elipsy, protože platí: $b = |MY|$.



Obr. 39: Znázornění proužkové konstrukce elipsy

Příklad: Nad stranou AB sestrojte čtverec $ABCD$ ležící v rovině σ, máme-li dány první průměty bodů A, B (půdorysné průměty) a stopy roviny σ [7].



Obr. 40: Zadání příkladu

Popis konstrukce:

1) Sestrojíme zbývající průměty A_2 a B_2 tak, že vytvoříme hlavní přímky prvé osnovy (přímky rovnoběžné s ${p_1}^{\sigma}$), které prochází body A_1 a B_1

2) Otočíme rovinu σ do půdorysny π a využijeme afinity, kdy ${p_1}^{\sigma}$ bude osou o

3) Rovinu otáčení označíme α. Platí, že je kolmá k ose otáčení o a zobrazí se v přímku

4) Vzniká střed otáčení S_1; $S_1 \in o \cap \alpha$

5) (A); (A) je otočený bod A_1 a platí: $|(A)A_1| = \boldsymbol{z_A}$ a $(A)A_1 \perp \alpha$

6) Poloměrem otočení r je vzdálenost bodu (A) od S_1

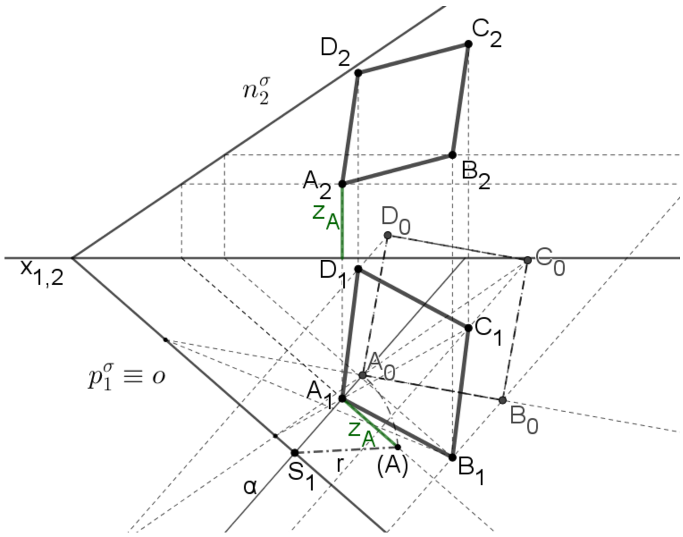
7) Dostaneme A_0 jako průsečík α a kružnice $k(S_1, r)$

8) Sestrojíme skutečnou velikost čtverce a značíme $A_0B_0C_0D_0$

9) Určíme zbývající průměty bodů C, D

Závěr:

Průmětem čtverce vznikl rovnoběžník. Vyobrazené řešení navíc není jediné. U kroku č. 7 totiž nevzniká jediný průsečík A_0, nýbrž dva. V této práci je vykresleno řešení, které se nachází na pracovní ploše výhodněji, tudíž bylo snazší jej sestrojit.



Obr. 41: Řešení příkladu

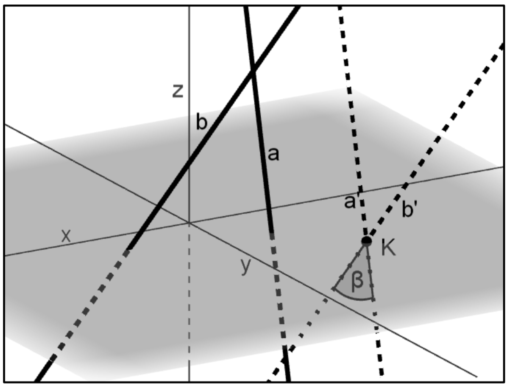
2.6 Metrické úlohy v Mongeově projekci

Takové úlohy v prostoru, při kterých si nevystačíme jen s polohovými úlohami, nýbrž které se týkají délek a velikostí úhlů, se nazývají metrické. V Mongeově promítání jsme rovněž schopni metrické úlohy řešit. V této kapitole budeme řešit různé typy příkladů, ve kterých budeme mít za úkol například:

- sestrojit skutečnou délku úsečky
- zobrazit kružnici ležící v dané rovině
- sestrojit přímky kolmé k dané rovině, atd.

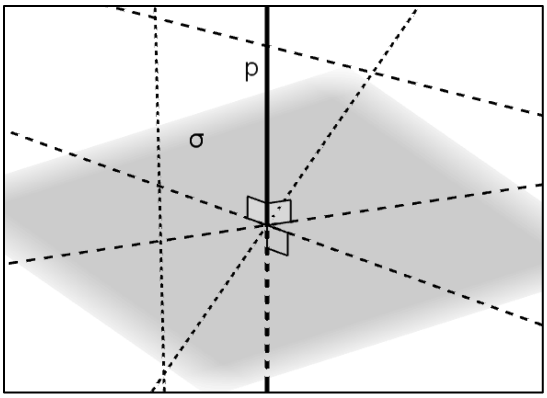
Nejprve bychom si měli říci několik základních definic, od kterých se naše řešení úloh bude odvíjet a poté si ukážeme důležitý nástroj pro určování skutečných délek úseček v Mongeově promítání.

Definice: Úhel dvou mimoběžných přímek a, b definujeme jako úhel dvou přímek a', b', jenž procházejí libovolným bodem K v prostoru a pro něž platí: $a' \parallel a,\ b' \parallel b$ [9].



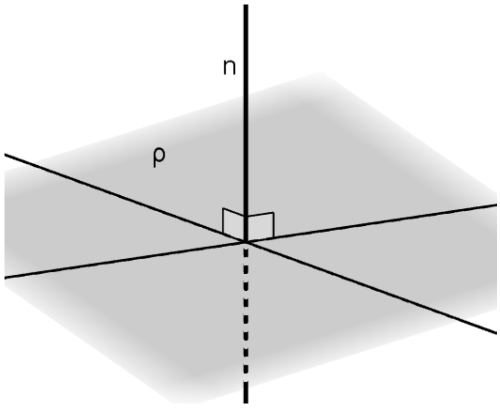
Obr. 42: Definice 1

Definice: Přímka p je kolmá k rovině σ, je-li kolmá ke všem přímkám ležícím v rovině σ [9].



Obr. 43: Definice 2

Věta: Přímka n je kolmá k rovině ρ tehdy a jen tehdy, je-li kolmá alespoň ke dvěma různoběžným přímkám, které leží v rovině ρ [9].

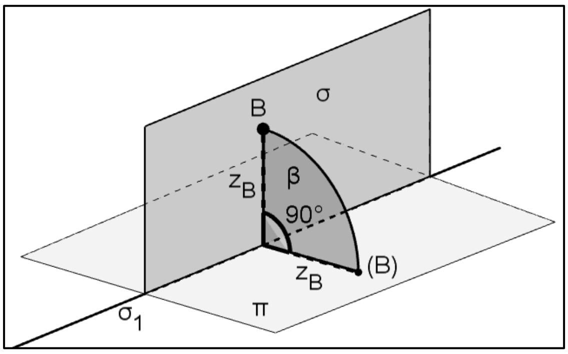


Obr. 44: Věta

2.6.1 Útvary ležící v promítací rovině

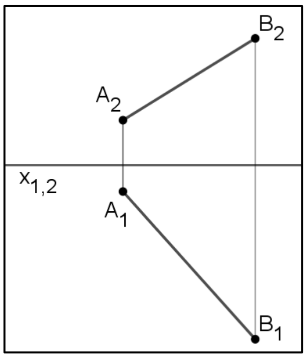
Úlohy v této kapitole spojuje jedna společná vlastnost a to, že sestávají z roviny, která je kolmá na jednu z průměten a v této rovině (můžeme ji říkat *promítací rovina*) navíc leží geometrický útvar, jehož sdružené průměty v Mongeově promítání budeme hledat. Pro úspěšné vyřešení úloh bude vhodné využít **sklopení *promítací roviny* do průmětny**.

Na půdorysnu π provedeme sklopení roviny σ, která je k ní kolmá. Osou sklápění je přímka σ_1. Dráha bodu B je kružnice, která leží v rovině β, jenž je kolmá k ose sklápění σ_1, a jejíž poloměr je $r = z_B$. Sklápění nárysně promítací roviny do nárysny ϑ, která je na ní kolmá, by bylo analogické. Stejný postup, jaký jsme využili v tomto případě při sklápění bodu B, použijeme i při určování skutečné délky libovolné úsečky, která leží v rovině kolmé k jedné z průměten.



Obr. 45: Sklápění promítací roviny do průmětny

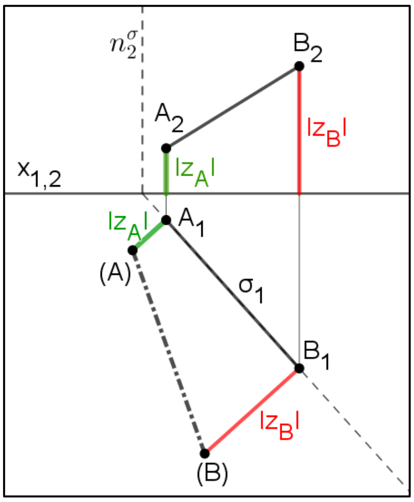
Příklad: Úsečka AB je v Mongeově promítání zadána svým půdorysem a nárysem. Sestrojte skutečnou velikost této úsečky.



Obr. 46: Zadání příkladu

Řešení:

Přímkou AB proložíme půdorysně promítací rovinu σ, která je kolmá na půdorysnu π. Rovinu σ pak sklopíme kolem osy sklápění σ_1 do půdorysny, respektive do roviny α, která je s půdorysnou rovnoběžná.

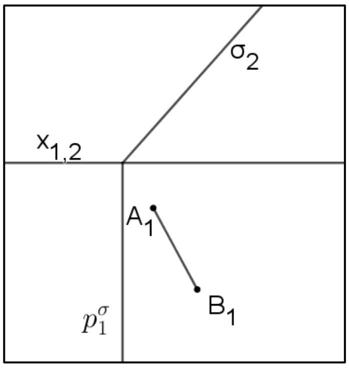


Obr. 47: Řešení příkladu

Závěr:

Skutečnou velikost úsečky AB zobrazuje úsečka $(A)(B)$, která vznikla sklopením roviny σ do půdorysny.

<u>Příklad:</u> Je dána úsečka AB, která leží v rovině σ, $(\sigma \perp \upsilon)$. Zobrazte v Mongeově promítání skutečnou velikost trojúhelníku ABC, který je rovnostranný a vznikne z úsečky AB.



Obr. 48: Zadání příkladu

Řešení:

Nárysně promítací rovinu σ sklopíme do nárysny ϑ. Sestrojíme rovnostranný trojúhelník $(A)(B)(C)$. Následně bod (C) sklopíme zpět.

Popis konstrukce:

1) kolmice k_1 na $x_{1,2}$ bodem B_1

2) kolmice k_2 na $x_{1,2}$ bodem A_1

3) B_2; $B_2 \in k_1 \cap \sigma_2$

4) A_2; $A_2 \in k_2 \cap \sigma_2$

5) sklopení bodů A a B do nárysny → $(A), (B)$

6) (C); (C) je vrcholem rovnostranného $\Delta(A)(B)(C)$

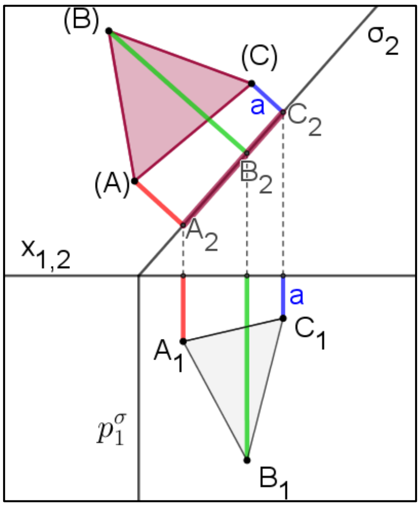
7) a; $a \perp \sigma_2 \wedge (C) \in a$

8) C_2; $C_2 \in \mathrm{a} \cap \sigma_2$

9) kolmice k_3 na $x_{1,2}$ bodem C_2

10) $(C)C_2$; $|(C)C_2| = a$

11) C_1; $C_1 \in k_3$ ve vzdálenosti a od $x_{1,2}$

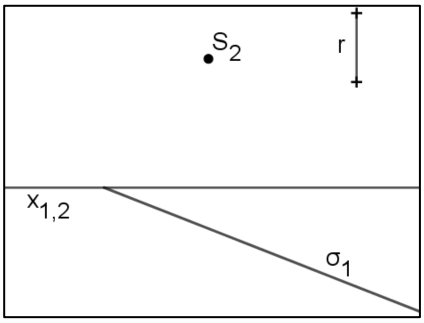


Obr. 49: Řešení příkladu

Závěr:

Nalezli jsme nárys i půdorys rovnostranného trojúhelníka ABC. Pokud bychom u kroku č. 6 zobrazili bod (C) v osové souměrnosti podle $(A)(B)$, vzniklo by nám i druhé řešení této úlohy.

<u>Příklad:</u> Zobrazte kružnici $k = (S, r)$, která leží v rovině σ. Rovina σ je kolmá na půdorysnu π.



Obr. 50: Zadání příkladu

Řešení:

1) sklopíme promítací rovinu σ do půdorysny

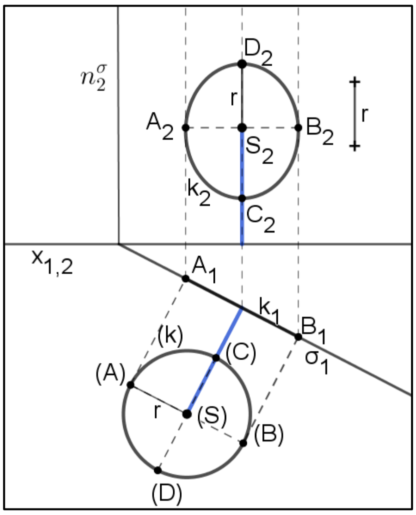
2) sestrojíme sklopenou kružnici $(k) = \big((S), r\big)$

3) vzniklé sdružené průměry $(A)(B)$ a $(C)(D)$ kružnice (k) sklopíme zpět

Závěr:

Půdorysem kružnice k je úsečka A_1B_1 o délce $2r$. Nárysem je elipsa určená osami A_2B_2 a C_2D_2, které jsou na sebe kolmé a prochází bodem S_2. Kolmost os platí, jelikož úsečka AB je rovnoběžná s půdorysnou π.

Také je patrné, že nebylo nutné sklopení kružnice s celou rovinou σ do půdorysny. Sdružené průměty kružnice ležící v promítací rovině lze sestrojit i přímo. Tímto jsme ukázali skutečnou velikost kružnice k.



Obr. 51: Řešení příkladu

2.6.2 Přímka kolmá k rovině s obecnou polohou

Tato kapitola obsahuje úlohy, ve kterých hraje hlavní roli přímka, které já kolmá k nějaké rovině. Právě kolmost dvou prostorových útvarů je hlavním aspektem následujících příkladů.

Příklad: Daným bodem K veďte přímku k kolmou k rovině σ. Řešte následující případy, kdy:

I) rovina σ je dána hlavními přímkami $\sigma = (h, f)$

II) rovina σ je dána nárysem σ_2

III) rovina σ je dána třemi body K, L, M

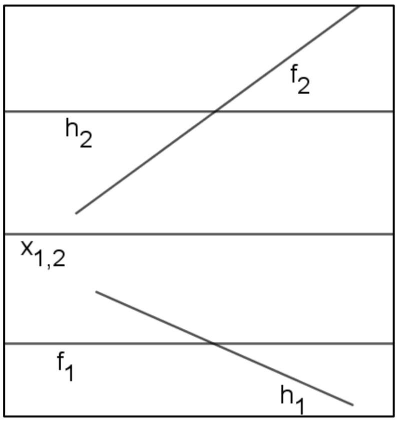
Řešení:

Případ I)

Rovina σ je nárysně promítací, což znamená, že σ ⊥ υ, tedy k ⊥ σ a k ∥ υ. V řešení případu dále postupujeme následujícím způsobem:

1) K_2; $K_2 \in h_2 \cap f_2$

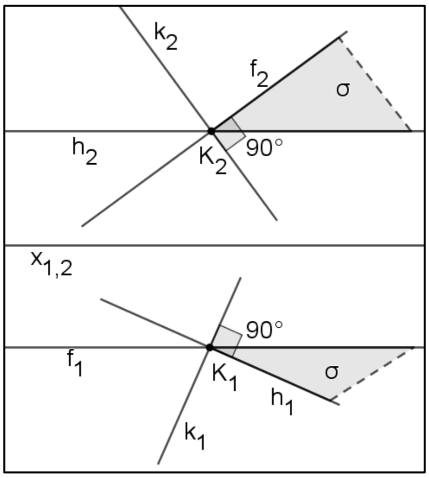
2) K_1; $K_1 \in h_1 \cap f_1$



Obr. 52: Případ I) - zadání

3) $k_2;\ k_2 \in K_2 \wedge k_2 \perp f_2$

4) $k_1;\ k_1 \in K_1 \wedge k_1 \perp h_1$

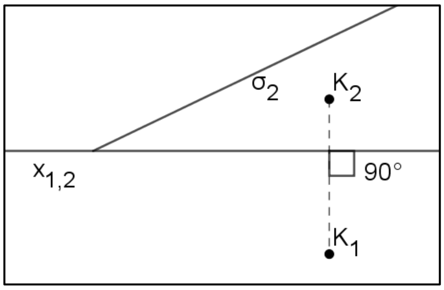


Obr. 53: Případ I) - řešení

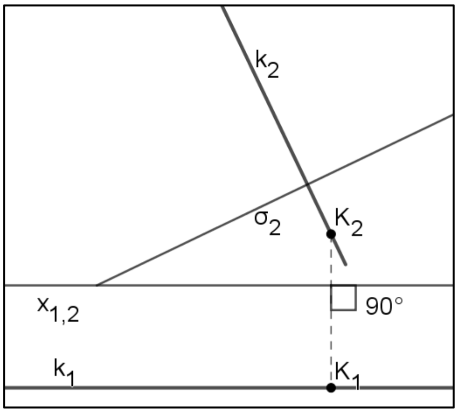
Případ II)

1) $k_2;\ k_2 \in\ K_2 \wedge k_2 \perp \sigma_2$

2) $k_1;\ k_1\ \in\ K_1 \wedge k_1 \parallel x_{1,2}$



Obr. 54: Případ II) - zadání



Obr. 55: Případ II) - řešení

Případ III)

Sestrojíme hlavní přímky h, f roviny σ:

1) $h_2;\ h_2 \in\ K_2 \wedge h_2 \parallel x_{1,2}$

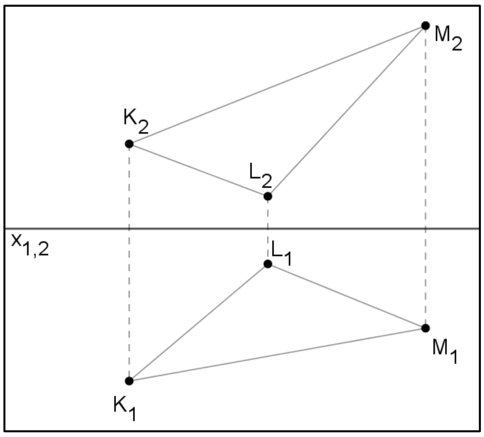
2) $P_2;\ P_2 \in\ M_2L_2 \cap h_2$

3) $l;\ l \perp x_{1,2} \wedge P_2 \in l$

4) $P_1;\ P_1 \in\ M_1L_1 \cap l$

5) $h_1;\ h_1 \in\ K_1P_1$

6) $f_1;\ f_1 \in M_1 \wedge f_1 \parallel x_{1,2}$



Obr. 56: Případ III) - zadání

7) Q_1; $Q_1 \in K_1L_1 \cap f_1$

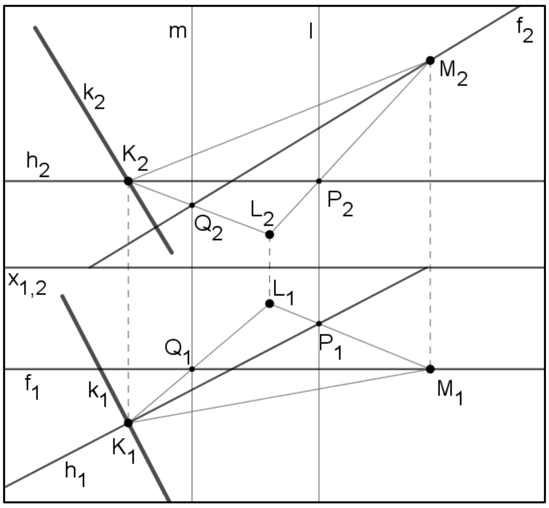
8) $m; m \perp x_{1,2} \wedge Q_1 \in m$

9) Q_2; $Q_2 \in K_2L_2 \cap m$

10) f_2; $f_2 \in M_2Q_2$

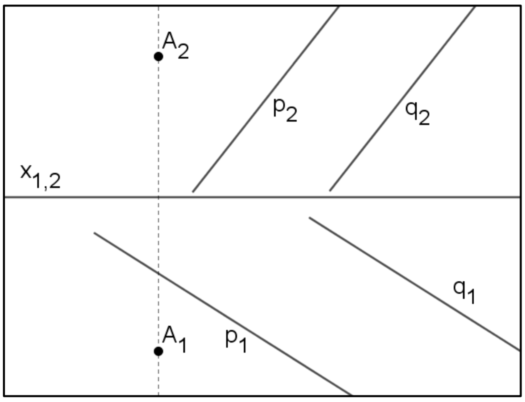
11) $k_2; k_2 \perp f_2 \wedge K_2 \in k_2$

12) k_1; $k_1 \perp h_1 \wedge K_1 \in k_1$



Obr. 57: Případ III) - řešení

<u>Příklad:</u> Je dán bod A a rovina α. Znázorněte graficky přímku k, která prochází bodem A a zároveň je kolmá k rovině α, která je určena dvěma rovnoběžkami p a q.



Obr. 58: Zadání příkladu

Rozbor:

Nárys kolmice je vždy kolmý k nárysu libovolné hlavní přímky osnovy druhé a půdorys kolmice je vždy kolmý k půdorysu libovolné hlavní přímky osnovy prvé.

Postup:

Nárys

1) h_1; h_1 zvolena libovolně $\wedge$ $h_1 \parallel x_{1,2}$

2) B_1; $B_1 \in p_1 \cap h_1$

3) C_1; $C_1 \in q_1 \cap h_1$

4) a; $a \perp x_{1,2} \wedge a \in B_1$

5) b; $b \perp x_{1,2} \wedge a \in C_1$

6) B_2 a C_2

7) $h_2;\ h_2\ \equiv\ \ B_2C_2$

8) $k_2;\ k_2\ je\ nárys\ kolmice\ k$

Půdorys

1) h_2'; h_2' zvolena libovolně Λ $h_2' \parallel x_{1,2}$

2) $D_2;\ D_2 \in p_2 \cap h_2'$

3) $E_2;\ E_2 \in q_2 \cap h_2'$

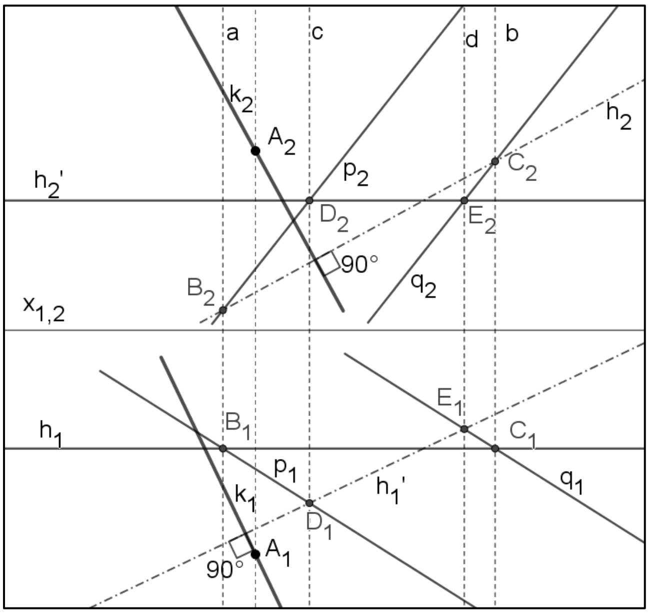
4) $c;\ c \perp x_{1,2} \wedge c\ \in D_2$

5) $d;\ d \perp x_{1,2} \wedge d\ \in E_2$

6) D_1 a E_1

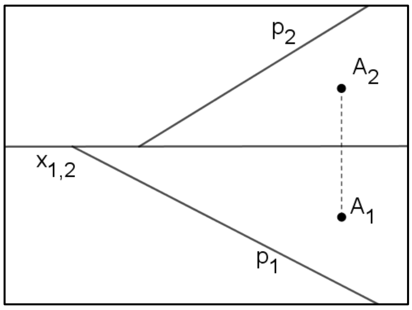
7) $h_1';\ h_1' \equiv\ \ D_1E_1$

8) $k_2;\ k_2$ je nárys kolmice k



Obr. 59: Řešení příkladu

<u>Příklad:</u> Je dán bod A a přímka p. Určete rovinu ρ jdoucí bodem A kolmo k přímce p.



Obr. 60: Zadání příkladu

Rozbor:

Aby byla rovina ρ kolmá k přímce p a procházela bodem A, tak ji v Mongeově promítání určíme hlavními přímkami h a h' obou osnov.

Popis konstrukce:

1) $h_2;\ h_2 \in A_2 \wedge h_2 \parallel x_{1,2}$

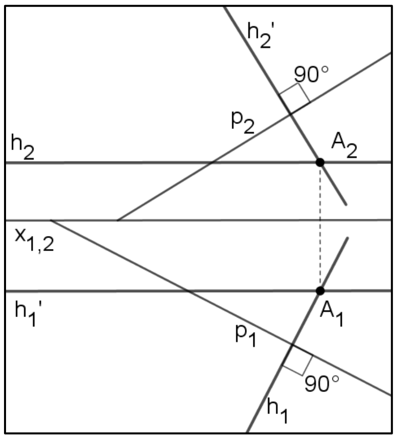
2) $h_1';\ h_1' \in A_1 \wedge h_1' \parallel x_{1,2}$

3) $h_2';\ h_2' \in A_2 \wedge h_2' \perp p_2$

4) $h_1;\ h_1 \in A_1 \wedge h_1 \perp p_1$

Závěr:

Grafickým řešením této úlohy je rovina $\rho = (h, h')$.

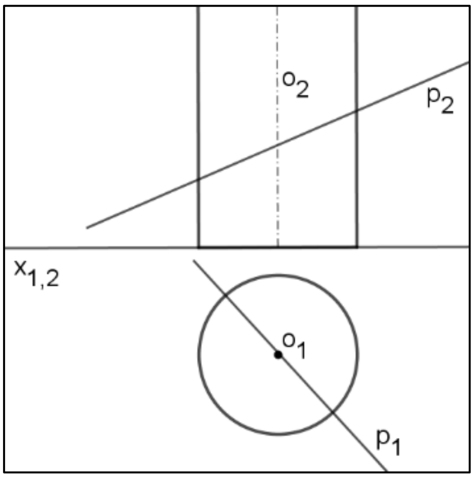


Obr. 61: Řešení příkladu

2.7 Úlohy o průniku oblých těles a přímky či roviny

V prostoru pracujeme nejen s přímkami a rovinami, ale i s tělesy. Zobrazování oblých těles je těžší než zobrazování hranolů, a pokud řešíme úlohy o průniku oblých těles a jiných prostorových útvarů, je vhodné zvolit si pro konstrukci úloh metodu Mongeovy projekce. Pokud by se čtenář zajímal o problematiku vzájemné polohy přímky či roviny a hranolu či jehlanu, odkazuji na svou bakalářskou práci *Stereometrické úlohy [11]*.

Příklad: Je dán rotační válec, jehož základna leží v půdorysně π. Sestrojte průsečíky přímky p s tímto válcem [13].



Obr. 62: Zadání příkladu

Rozbor:

Tento typ příkladu patří mezi nejsnazší, protože pro úspěšné řešení postačí znát základy Mongeova promítání.

Popis konstrukce:

1) $X_1;\ X_1$ je půdorys průsečíku X

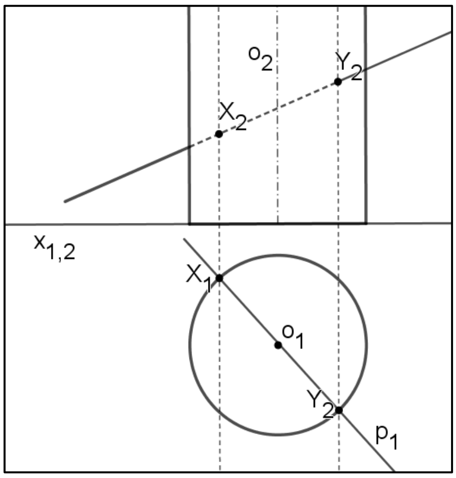
2) Y_1; Y_1 je půdorys průsečíku Y

3) X_2; X_2 je nárys průsečíku X

4) Y_2; Y_2 je nárys průsečíku Y

Závěr:

Průsečíky přímky s rotačním válcem jsou body X a Y.

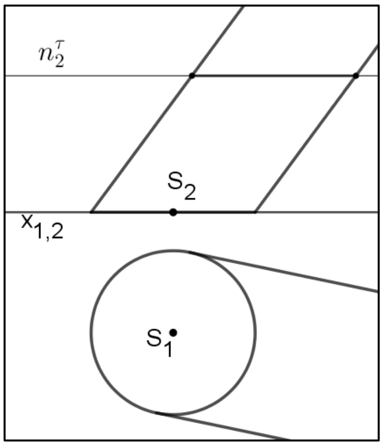


Obr. 63: Řešení příkladu

Příklad: Sestrojte řez válcové plochy rovinou τ, která je rovnoběžná s rovinou základny [13].

Rozbor:

Řezem rovinou τ rovnoběžnou s rovinou základny je křivka, jejíž půdorys je afinní k průmětu základny válcové plochy. Směr afinity je totožný se směrem povrchových přímek válcové plochy. Tato afinita je ve skutečnosti posunutí základny ve směru povrchových přímek válcové plochy.



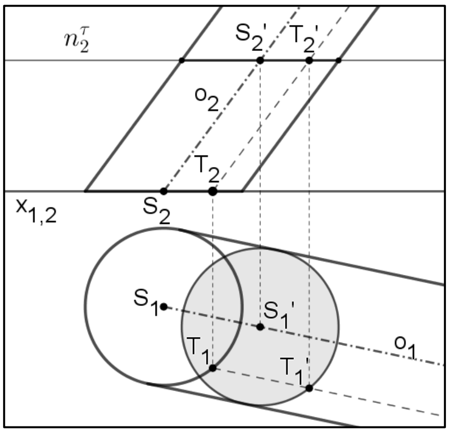
Obr. 64: Zadání příkladu

Popis konstrukce:

1) o_1; o_1 je půdorys osy válcové plochy
2) o_2; o_2 je nárys osy válcové plochy
3) S_2'; $S_2' \in {n_2}^{\tau} \cap o_2$
4) kolmice z S_2' na $x_{1,2}$
5) S_1'; S_1' je půdorys S'
6) T_2; T_2 je libovolný bod na nárysu podstavy
7) T_2'; T_2' je v afinitě s T_2 a leží na křivce řezu

8) T_1'; T_1' je půdorys T'

9) $k(S_1';\ S_1'T_1')$ je půdorysem řezu

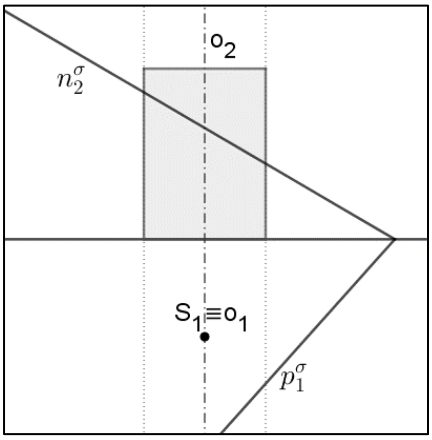


Obr. 65: Řešení příkladu

Závěr:

Řezem válcové plochy rovinou τ rovnoběžnou s půdorysnou vznikla čára, která je shodná se základnou válcové plochy. Tj. v nárysu vznikla úsečka a v půdorysu vznikla kružnice.

<u>Příklad:</u> Zobrazte řez rotačního válce s podstavou v půdorysně rovinou σ [6].



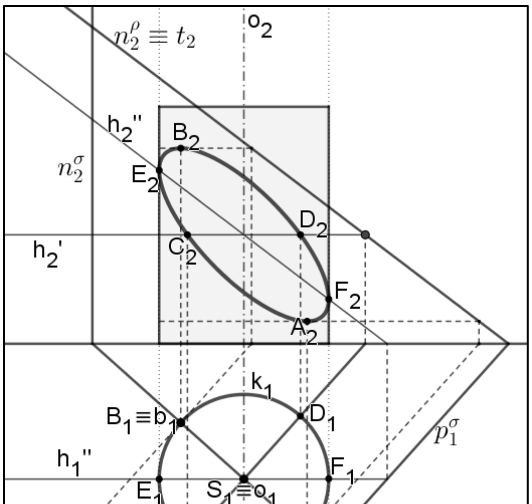
Obr. 66: Zadání příkladu

Rozbor:

Pro zobrazení os eliptického řezu proložíme osou o rovinu $\rho \perp \sigma$. V půdorysu tedy povedeme bodem (půdorysem osy) o_1 kolmici p_1^ρ ke stopě p_1^σ. Rovina ρ nyní protíná rovinu řezu σ v přímce t a válcovou plochu v povrchovým přímkách a a b. Průnikem přímky t a přímek a a b jsou hlavní vrcholy řezu, po řadě A a B.

Popis konstrukce:

1) k_1; k_1 je půdorysem rotačního válce
2) p_1^ρ, n_2^ρ; p_1^ρ, n_2^ρ jsou stopami roviny ρ
3) $B_1 \equiv b_1$; $B_1 \equiv b_1 \in\ k_1 \cap t_1$
4) $A_1 \equiv a_1$; $A_1 \equiv a_1 \in\ k_1 \cap t_1$
5) B_2, A_2
6) h'; h'je hlavní přímka roviny řezu
7) C_1, D_1; $C_1, D_1 \in k_1 \cap h_1'$
8) C_2, D_2
9) E_1, F_1; $E_1, F_1 \in k_1 \cap h_2''$



Obr. 67: Řešení příkladu

10) E_2, F_2

Závěr:

Půdorysem průsečné elipsy je půdorys podstavné hrany, což je vlastně kružnice k_1. Nárys jsme pak sestrojili bodově a využili jsme nástroje *„Kuželosečka daná pěti body"*, čímž nám vznikl nárys řezu – elipsa.

Příklad: Určete rovinný řez rotačního válce obecnou rovinou α. Rotační válec má základnu v rovině π [13].

Rozbor:

Tato úloha byla záměrně vybrána tak, že je téměř totožná s předchozí úlohou. Základní rozdíl je ve způsobu samotné konstrukce řezu rotačního kužele rovinou. V předchozí úloze jsme elipsu sestrojili pomocí grafického programu *GeoGebra* a jeho nástroje pro konstrukci kuželoseček. Nyní si ukážeme, jak bychom elipsu vytvořili bez softwaru užitím *Rytzovy konstrukce.*

Zprvu je nutné vytvořit nákres pomocí údajů v zadání příkladu. Poté již lze sestrojit do půdorysny dva průměry kružnice A_1, B_1, C_1, D_1, které jsou na sebe kolmé. Jejich nárysy snadno nalezneme pomocí hlavních přímek roviny řezu α, protože body A, B, C, D v rovině α leží. V nárysu tedy získáme soubor sdružených průmětů A_2, B_2, C_2, D_2, z nichž pomocí *Rytzovy konstrukce* nalezneme hlavní a vedlejší osu elipsy a následně vytvoříme nárys řezu rovinou.

Popis Rytzovy konstrukce:

1) Průsečík sdružených průměrů označíme O_2 (střed elipsy)

2) V bodě O_2 sestrojíme kolmici k jednomu z průměrů (zde k A_2B_2)

3) Na kolmici naneseme délku O_2B_2 a koncový bod označíme R

4) Spojíme bod R s bodem C_2 a najdeme střed S úsečky RC_2

5) Sestrojíme kružnici se středem v S a poloměrem $r = |SO_2|$

6) Přímka RC_2 protíná kružnici ve dvou bodech – $1, 2$

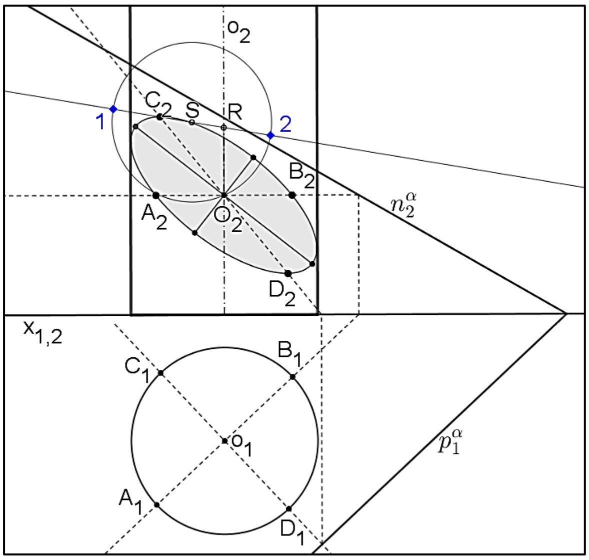
7) Hlavní osa prochází bodem 1, vedlejší osa bodem 2

8) Délka hlavní poloosy je rovna vzdálenosti 1 a R

9) Délka vedlejší poloosy je rovna vzdálenosti 1 a B_2.

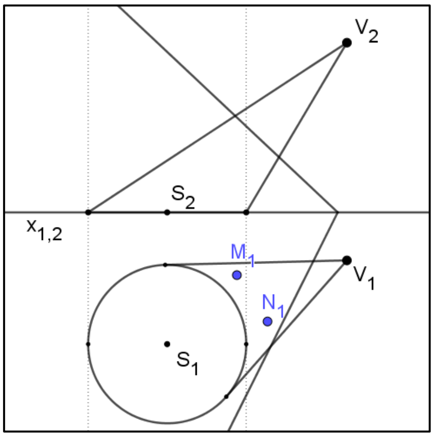
Závěr:

Rovinným řezem rotačním válcem vznikl v půdorysně kruh a v nárysně elipsa, kterou jsme vytvořili s využitím Rytzovy konstrukce.



Obr. 68: Řešení příkladu

<u>Příklad:</u> Je dán kosý kruhový kužel s podstavou v půdorysně. Na plášti kužele jsou zvoleny dva body M, N. Proložte body M, N rovinu tak, aby vznikl libovolný eliptický řez.



Obr. 69: Zadání příkladu

Rozbor:

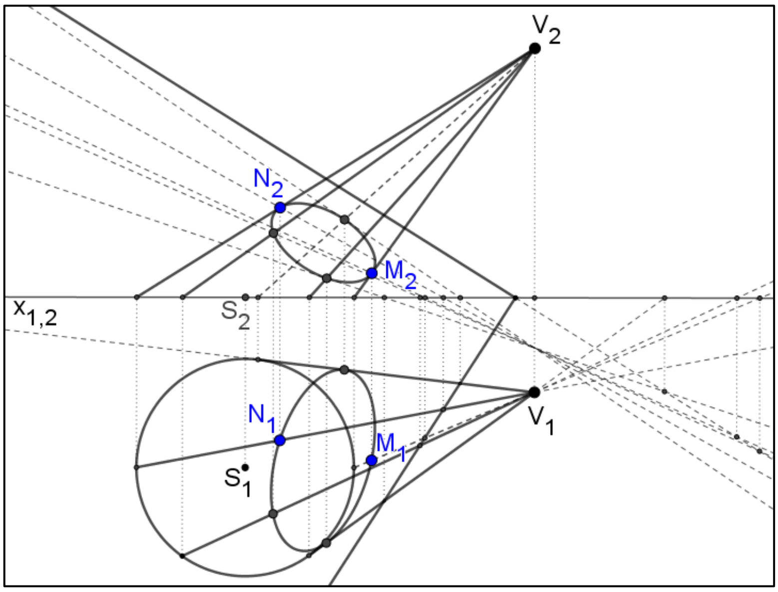
V prvé řadě můžeme sestrojit díky půdorysům bodů M, N i jejich nárysy. Dále zakreslíme půdorys i nárys libovolné roviny ρ.

Popis konstrukce:

Klíčem k řešení úlohy je vytvoření několika libovolných přímek ležících na plášti kužele a procházejících vrcholem V.

Nejprve vytvoříme v půdorysně tři takové přímky procházející bodem V_1. Dále označíme průsečíky přímek pláště kužele s osou $x_{1,2}$ a v těchto bodech na ni vedeme kolmice. Zde nám vzniknou protažením nárysné stopy roviny ρ do půdorysny opět průsečíky s kolmicemi, které označíme.

Stejně tak vytvoříme průsečíky přímek pláště s půdorysnou stopou roviny ρ a jimi také vedeme kolmice k základnici. Nyní vzniknou průsečíky kolmic přímo na základnici. Poté spojíme sobě příslušné průsečíky na základnici a na protažené půdorysné stopě. Přímky nám pak dají za vznik nárysným bodů řezu, jak je patrné z obrázku (*Obr. 70*). Nakonec vytvoříme půdorysné body řezu a zkonstruujeme nárys i půdorys řezu pomocí nástroje programu GeoGebra *„Kuželosečka daná pěti body"*.



Obr. 70: Řešení příkladu

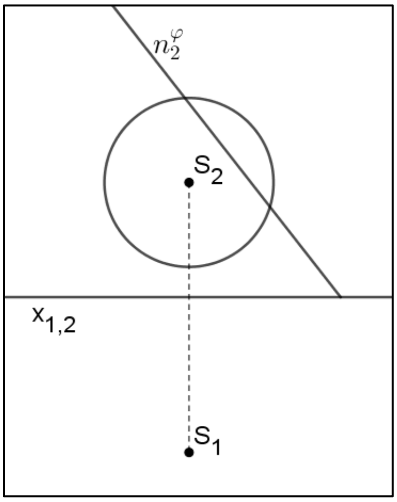
Závěr:

Bodovou konstrukcí v Monegeově promítání jsme získali v půdorysně i nárysně potřebné body pro vytvoření řezu. Proložením roviny body M a N tedy vznikne eliptický řez kužele.

<u>Příklad:</u> Sestrojte řez kulové plochy rovinou φ, která je kolmá k nárysně [6].

Rozbor:

V půdorysně nákresu chybí některé útvary, které však lze pomocí nárysu jednoznačně doplnit. Jedná se o půdorysnou stopu řezné roviny a o půdorysný průmět kulové plochy. Jestliže je rovina řezu kolmá k nárysně, pak nárysem řezu kulové plochy bude zřejmě úsečka. Půdorysna a rovina řezu jsou vzájemně různoběžné, proto půdorysem řezu bude elipsa.



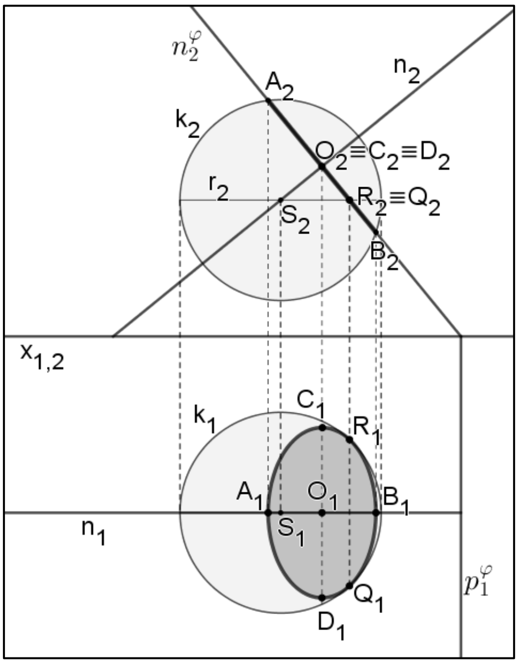
Obr. 71: Zadání příkladu

Popis konstrukce:

1) k_2, p_1^φ
2) A_2; $A_2 \in k_2 \cap n_2^\varphi$
3) B_2; $B_2 \in k_2 \cap n_2^\varphi$
4) $n_2; n_2 \perp n_2^\varphi \wedge S_2 \in n_2$
5) $O_2; O_2 \in n_2 \cap n_2^\varphi$
6) $O_1; O_1 \in n_1$ a O_1 leží na ordinále
7) $C_2, D_2; C_2, D_2 \equiv O_2$
8) C_1, D_1 leží na ordinále a $|O_1C_1| = |O_1D_1| = |O_2A_2|$
9) $R_2, Q_2; R_2, Q_2 \in r_2 \cap n_2^\varphi$
10) $R_1, Q_1; R_1, Q_1$ leží na ordinále a na k_1
11) elipsa se středem v O_1

Závěr:

Řezem kulové plochy rovinou vznikne kružnice, která má střed v bodě O. Obrazem kružnice v nárysně je úsečka A_2B_2. Půdorysem kružnice je elipsa, kterou jsme vytvořili pomocí nástroje *„Kuželosečka daná pěti body"*.



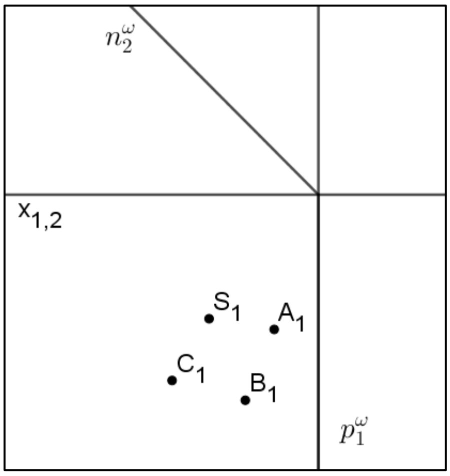
Obr. 72: Řešení příkladu

3. Méně standardní úlohy ze stereometrie

Jak již napovídá název kapitoly, na následujících stránkách se lehce odprostíme od klasických stereometrických úloh, a ukážeme si úlohy lišící se od ostatních příkladů této práce tím, že většina z nich si vyžaduje řešitelovu vizualizaci problému s využitím prostorového vidění, ale i všeobecných znalostí z geometrie, zatímco grafické sestrojení má spíše doplňující ilustrační charakter. Následuje osm podkapitol, které jsou pojmenovány podle úloh, respektive podle objektů, které jsou hlavním předmětem dané úlohy.

3.1 Pravidelný šestiúhelník

Příklad: Sestrojte pomocí údajů zakreslených v obrázku sdružené průměty šestiúhelníku $ABCDEF$, který leží v rovině ω. Dále šestiúhelník zobrazte ve skutečné velikosti [12].



Obr. 73: Zadání úlohy

Rozbor:

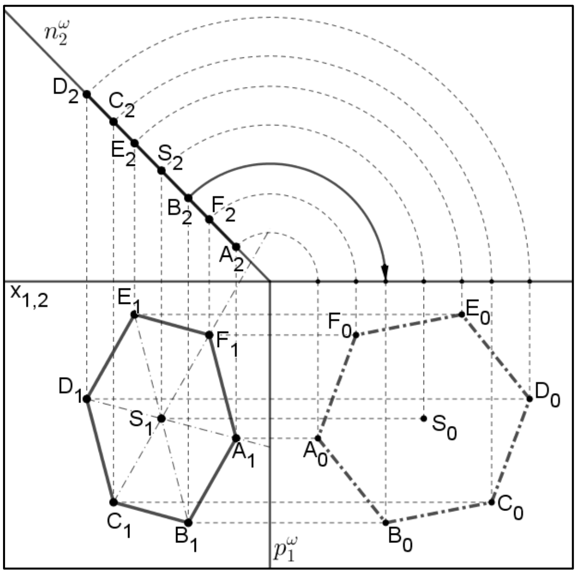
Z údajů v obrázku nejprve vytvoříme půdorysný průmět pravidelného šestiúhelníku. Vycházíme z vlastnosti, že protější strany jsou rovnoběžné, stejně dlouhé a rovnoběžné jsou i s úhlopříčkou spojující zbylé dva vrcholy. K vytvoření pravidelného šestiúhelníku ve skutečné velikosti využijeme sklopení roviny ω do půdorysny a dále základních vlastností Mongeova promítání.

Popis konstrukce:

1) strany C_1B_1 a B_1A_1
2) $D_1; D_1$ ve středové souměrnosti s A_1 podle S_1
3) $E_1; E_1$ ve středové souměrnosti s B_1 podle S_1
4) $F_1; F_1$ ve středové souměrnosti s C_1 podle S_1
5) půdorys $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$
6) nárys $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$

7) sklopení n_2^ω
8) $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$

Závěr:



Obr. 74: Řešení úlohy

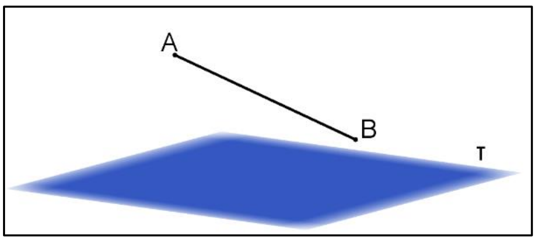
Pomocí vlastností, že pravidelný šestiúhelník má protější vrcholy ve středové souměrnosti podle těžiště S, a že protější strany jsou vždy rovnoběžné, jsme zkonstruovali půdorys šestiúhelníka. Dále jsme snadno pomocí kolmic na základnici nalezli i vrcholy v nárysu, které leží na úsečce. Pro sestrojení skutečné velikosti šestiúhelníku v prostoru jsme užili metrický nástroj prostorové geometrie – sklopení roviny do průmětny.

3.2 Pravidelný čtyřstěn

Tato podkapitola se věnuje tzv. *pravidelnému čtyřstěnu*, který má s krychlí a osmistěnem, se kterými se ještě v práci setkáme, několik podobností. Tato tělesa řadíme mezi konvexní mnohostěny, což znamená, že pokud vezmeme dva libovolné body mnohostěnu a spojíme je úsečkou, pak celá tato úsečka je též součástí mnohostěnu [11].

Jestliže ještě navíc platí, že stěny těchto konvexních mnohostěnů tvoří shodné pravidelné mnohoúhelníky a zároveň se v každém vrcholu tělesa stýká stejný počet hran, pak těmto mnohostěnům říkáme *platónská tělesa*, kterých existuje právě pět [23].

Příklad: Je dána úsečka AB a rovina τ. Sestrojte pravidelný čtyřstěn $ABCD$ s vrcholy A, B tak, aby třetí vrchol C ležel v rovině τ [12].



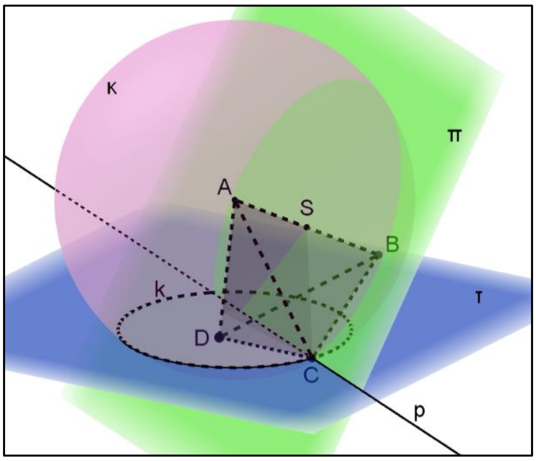
Obr. 75: Zadání úlohy

Rozbor:

Stěna ABC pravidelného čtyřstěnu má tvar rovnostranného trojúhelníka. Vrchol C tedy bude vzdálen od bodu A i bodu B stejně, což nám napovídá, že budeme hledat rovinu souměrnosti úsečky AB. Aby bod C splňoval zadání ($C \in \tau$), bude ležet na průniku těchto dvou rovin. Navíc je jeho poloha omezena vzdáleností od bodu A i B, protože platí $|AC| = |BC| = |AB|$.

Popis konstrukce:

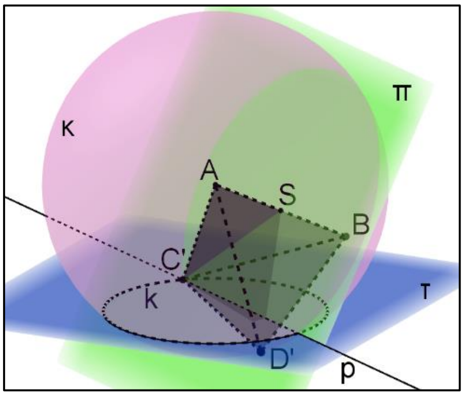
1) S; S je středem AB
2) π; $\pi \perp AB \wedge \pi \in S$
3) $p; p \in \tau \cap \pi$
4) kulová plocha κ; $\kappa(A, AB)$
5) kružnice k; $k \in \kappa \cap \tau$
6) $C; C \in k \cap p$
7) nástroj Geogebry „*Čtyřstěn*“



Obr. 76: První řešení příkladu

Závěr:

Vytvořením kulové plochy se středem v bodě A a poloměrem AB došlo k jejímu průniku s přímkou p ve dvou bodech. Jeden z nich jsme označili C a tímto vznikla stěna pravidelného čtyřstěnu ABC. Pro nejjednodušší nalezení řešení jsme užili nástroje *Čtyřstěn*. Jak již napovídá průnik kulové plochy a přímky ve dvou bodech, tak vznikne rovněž bod C', který pak udává jednoznačně polohu bodu D'. Úloha má tedy dvě řešení.



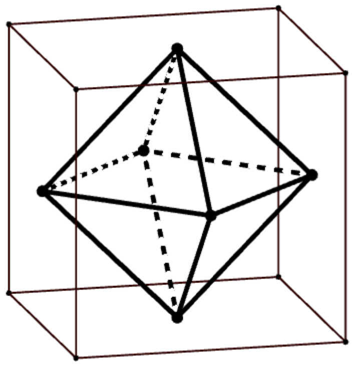
Obr. 77: Druhé řešení příkladu

3.3 Osmistěn

Příklad: Sestrojte pravidelný osmistěn, který má vrchol v daném bodě A a tělesovou úhlopříčku na dané přímce p $(A \notin p)$ [12].

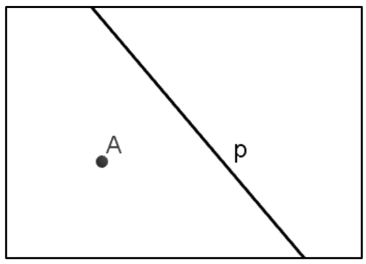
Rozbor:

Pravidelný osmistěn je těleso, jehož plášť tvoří osm shodných rovnostranných trojúhelníků. Pravidelný osmistěn má šest vrcholů, které mají zajímavou vlastnost. Lze jej totiž vepsat do krychle tak, že všechny tyto vrcholy mají s jejím pláštěm bod dotyku vždy ve středu jejích čtvercových stěn tak, jak je rovněž znázorněno na obrázku. Také je třeba zdůraznit, že tělesové úhlopříčky osmistěnu jsou navzájem kolmé. Dvojici krychle a pravidelného osmistěnu nazýváme *duálními mnohostěny* z toho důvodu, že osmistěn má stejný počet vrcholů, jako krychle stěn a naopak. Proto jde jedno těleso vepsat do druhého [23].



Popis konstrukce:

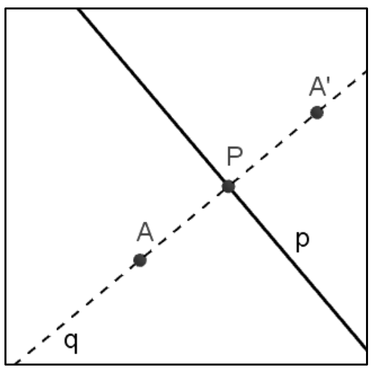
1. Nejprve zakreslíme situaci, která je v zadání úlohy.



Obr. 78: Osmistěn, krok 1

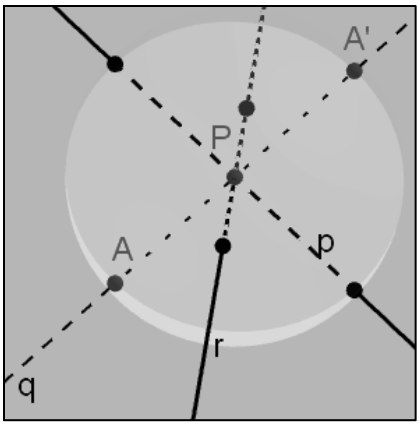
2. Nyní sestrojíme *kolmici* q z bodu A k přímce p. Vznikne bod P, který nazveme patou kolmice a délka úsečky AP je *vzdáleností* bodu A od přímky p. Úsečka AP je zároveň polovinou tělesové úhlopříčky osmistěnu.

3. Dále zobrazíme bod A'. Pro tento bod je charakteristické, že jde o zobrazení vzoru A ve *středové souměrnosti* podle středu P. Bod A' je druhý z vrcholů hledaného osmistěnu.



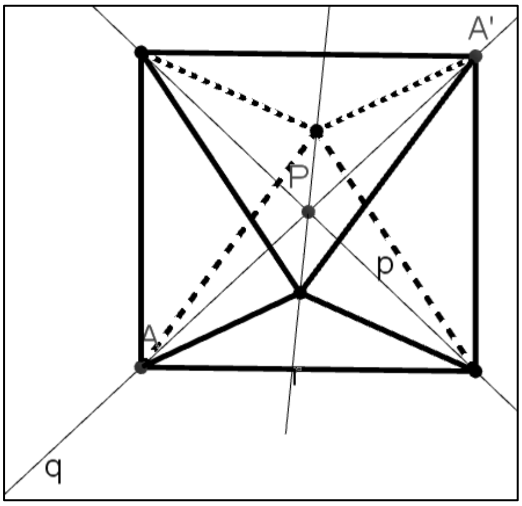
Obr. 79: Osmistěn, krok 2,3

4. Přímky p, q jsou charakteristické tím, že procházejí tělesovými úhlopříčkami osmistěnu. Abychom znázornili třetí úhlopříčku, sestrojíme rovinu určenou přímkami p, q a k ní vytvoříme kolmici r, která bude rovněž náležet bodu P. Dále vytvoříme kulovou plochu, jejíž střed bude v bodě P a poloměr bude roven délce úsečky AP.



Obr. 80: Osmistěn, krok 4

5. Nakonec najdeme všechny průsečíky kulové plochy a přímek p, q, r. Tyto body jsou vrcholy hledaného pravidelného osmistěnu, který vytvoříme pospojováním „sousedních“ bodů.



Obr. 81: Osmistěn, řešení

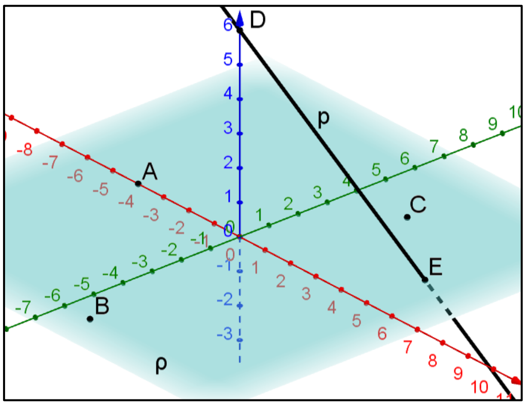
Závěr:

Grafickým řešením úlohy vznikl pravidelný osmistěn. V postupu řešení bylo využito metrických vlastností – kolmosti a vzdálenosti. Též byla použita středová souměrnost.

3.4 Konstrukce kulové plochy

<u>Příklad:</u> Jsou dány tři nekolineární body A, B, C a přímka p různoběžná s rovinou $\rho \equiv (ABC)$. Sestrojte kulovou plochu, jež prochází body A, B, C a zároveň se dotýká přímky p [12].

Rozbor:

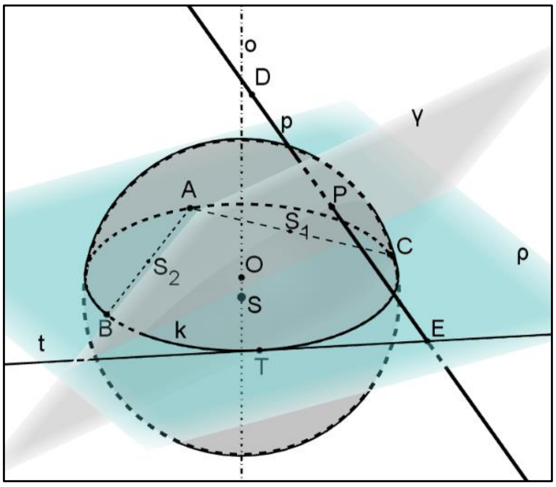


Obr. 82: Výchozí údaje pro konstrukci

Souřadnice bodů si můžeme zvolit sami, v tomto případě $A = (-4{,}0{,}0), B = (1, -6{,}0)$ a $C = (2{,}4{,}0)$. Všechny tři body leží v rovině xy, protože souřadnice z je u všech tří bodů nulová. Polohu přímky p zvolíme tak, aby byla různoběžná s rovinou ρ. Dále můžeme tvrdit, že množina všech středů kulových ploch bude průsečnicí o rovin souměrnosti úseček AB a AC. Také platí, že body ABC tvoří kružnici k v rovině ρ a přímka p protíná rovinu ρ v bodě E. Všechny tečny vedené z tohoto bodu pak mají bod dotyku s kulovou plochou ve stejné vzdálenosti od bodu E.

Popis konstrukce:

1) $S_1; S_1$ je středem úsečky AC
2) $S_2; S_2$ je středem úsečky AB
3) $\alpha;\ \alpha \perp AC\ \wedge S_1 \in \alpha$
4) $\beta; \beta \perp AB\ \wedge S_2 \in \beta$
5) $o; o\ \in \alpha \cap \beta$
6) $O; O \in o \cap \rho$
7) $t; t$ je tečna z bodu E ke kružnici k
8) $T; T \in t \cap k$
9) $P; P \in p \wedge |TE| = |PE|$
10) $\gamma;\ \gamma \perp PE \wedge P \in \gamma$
11) $S; S \in\ \rho \cap \gamma$



Obr. 83: Konstrukce kulové plochy - řešení

Závěr:

Střed kulové plochy jsme nalezli tak, že jsme vedli rovinu γ bodem dotyku P a kolmou k úsečce PE, čímž vznikl průsečík s osou o - střed kulové plochy S.

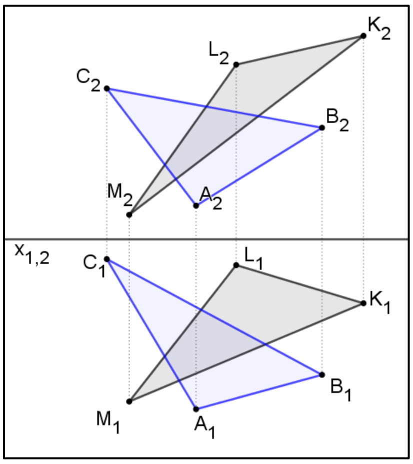
Pokud by ležel bod E na kružnici k, pak by existovalo jediné řešení, protože by splynul střed O kružnice k se středem S kulové plochy. Když by byl bod E vnitřním bodem kružnice k, neexistovalo by žádné řešení. Skutečnost, že z bodu E můžeme vytvořit ke kružnici k tečny dvě, nám napovídá, že tato úloha bude mít dva způsoby řešení, od 7. bodu popisu konstrukce tedy řešíme úlohu analogicky i s druhou tečnou. Střed kulové plochy S však vyjde opět stejný.

3.5 Průsek dvou trojúhelníků

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte průsek dvou trojúhelníků tak, aby trojúhleník KLM měl vnitřní průnik s trojúhelníkem ABC a vyznačte jejich viditelnost [6].

Rozbor:

Nejprve zakreslíme trojúhelníky do obou průměten libovolně až na podmínku, že trojúhelník KLM prochází trojúhelníkem ABC. Dále budeme postupovat tak, že nalezneme průsečíky stran jednoho trojúhelníka s rovinou trojúhelníka druhého, přičemž nebude třeba sestrojovat stopy roviny $\rho \equiv ABC$, ale vystačíme si s konstrukcí krycích přímek.



Obr. 84: Zadání úlohy

Popis konstrukce:

1) $m; m \equiv ML$
2) $n; n \equiv MK$
3) $s_1; s_1 \equiv n_1$ obraz krycí přímky
4) $I_1; I_1 \in s_1 \cap C_1A_1$
5) $II_1; II_1 \in s_1 \cap C_1B_1$
6) $I_2, II_2; I_2, II_2$ leží na ordinále z I_1, II_2
7) $s_2; I_2, II_2 \in s_2$
8) $X_2; X_2 \in s_2 \cap n_2$
9) $X_1; X_1$ leží na ordinále z X_2
10) $r_1; r_1 \equiv L_1M_1$ obraz krycí přímky
11) $III_1; III_1 \in r_1 \cap B_1C_1$
12) $IV_1; IV_1 \in r_1 \cap A_1C_1$

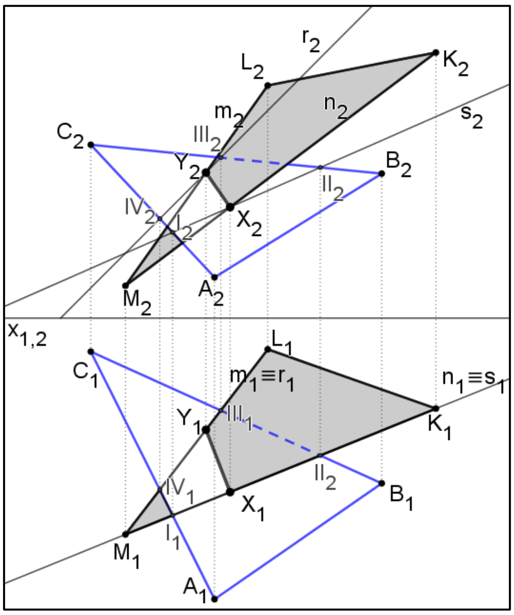
13) $III_2, IV_2; III_2, IV_2$ leží na ordinále z III_1, IV_1

14) $r_2; III_2, IV_2 \in r_2$

15) $Y_2; Y_2 \in r_2 \cap m_2$

16) $Y_1; Y_1$ leží na ordinále z Y_2

17) průsek XY



Obr. 85: Řešení příkladu

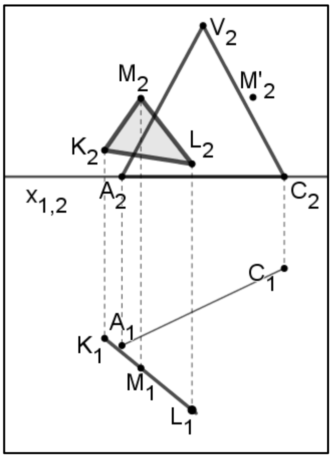
Závěr:

Průsekem trojúhelníků KLM a ABC je úsečka XY.

3.6 Průnik dvou mnohostěnů

Průnikem mnohostěnů je taková množina všech bodů, které jsou daným mnohostěnům společné. Tato množina může mít různé tvary. Může být prázdná, může se jednat o jeden bod, úsečku, mnohoúhelník. Ve skutečnosti je průnikem mnohostěnů myšlen jen průnik jejich povrchů, kterým je ve většině případů lomená průsečná čára. Na této čáře se protínají stěny daných těles [12].

<u>Příklad:</u> Sestrojte průnik dvou mnohostěnů, jestliže víte, že jeden je pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou v půdorysně a druhý je kolmý trojboký hranol s podstavami kolmými k půdorysně a ležícími mimo jehlan [12].



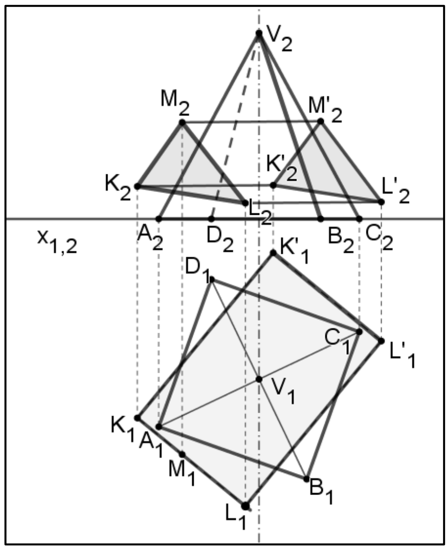
Obr. 86: Zadání příkladu

Rozbor:

Zadání úlohy nám poskytuje při řešení poměrně dost volnosti. Ukážeme si tedy jedno konkrétní řešení, které jednoznačně vychází z obrázku (*Obr. 86*). Na počátku tedy známe nekompletní nárys jehlanu a v půdoryse úhlopříčku podstavy A_1C_1. Hranol je v tomto případě zadaný nárysem jedné jeho podstavy a jedním vrcholem druhé podstavy a v půdorysu hranolu známe tutéž podstavu, která je zobrazena v úsečku K_1L_1.

Popis konstrukce mnohostěnů:

1) nárys podstavy hranolu $K'_2L'_2M'_2$
2) nárys hranolu $K_2L_2M_2K'_2L'_2M'_2$
3) půdorys hranolu $K_1L_1M_1K'_1L'_1M'_1$
4) $S;$ S je středem úsečky A_1C_1
5) kolmice k na A_1C_1 v bodě S
6) $B_1; B_1 \in k \wedge |B_1S| = |A_1S|$
7) $D_1; D_1 \in k \wedge |D_1S| = |A_1S|$
8) půdorys jehlanu
9) nárys jehlanu



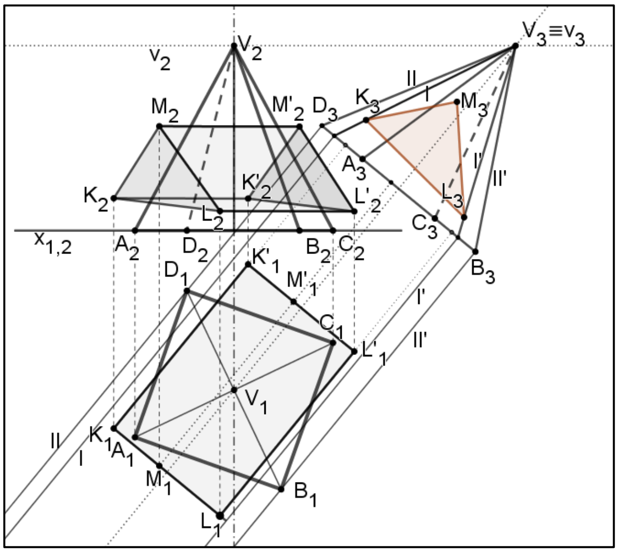
Obr. 87: Popis konstrukce mnohostěnů

V tuto chvíli máme hotový půdorys i nárys obou mnohostěnů. Průměty jsou zatím kresleny souvislými čarami, protože až po sestrojení průniku budeme schopni znázornit přerušovanou čarou části hran, které budou v pozadí.

Popis konstrukce průniku:

K řešení využijeme pomocné průmětny rovnoběžné s podstavami hranolu. Stopy styčných rovin povedou bodem V_3.

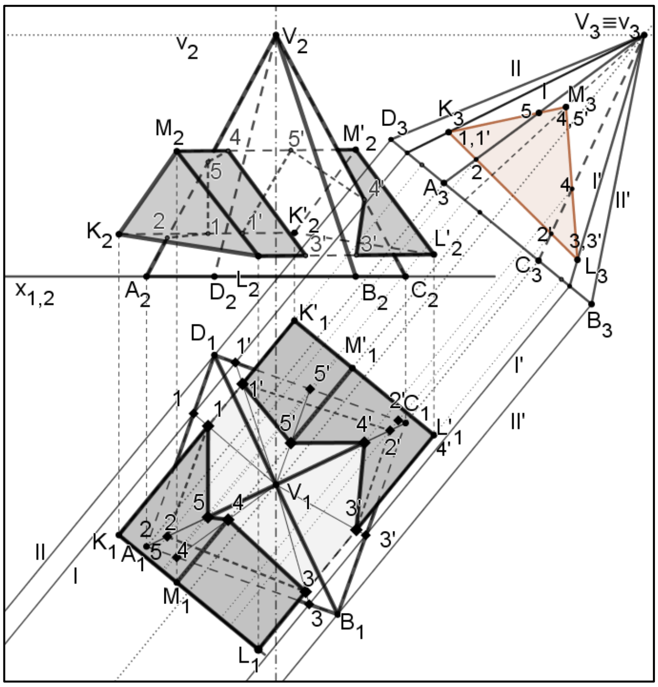
1) $v_2; v_2 || x_{1,2} \wedge V_2 \in v_2$
2) $v_3; v_3 \; || \; M_1M_1' \wedge V_1 \in v_3$
3) $V_3; V_3 \in v_2 \cap v_3$
4) třetí průmět jehlanu
5) styčné roviny hranolové (jehlanové) plochy I, II, I', II'



Obr. 88: Průběh konstrukce průniku

Závěr:

Průnik hranolu a jehlanu je úplný tak, že hranolová plocha celá prochází uvnitř jehlanové plochy, a hraniční roviny průnikového klínu jsou I, I'. Průniku se zúčastnily boční hrany hranolu a hrany VA a VC jehlanu.



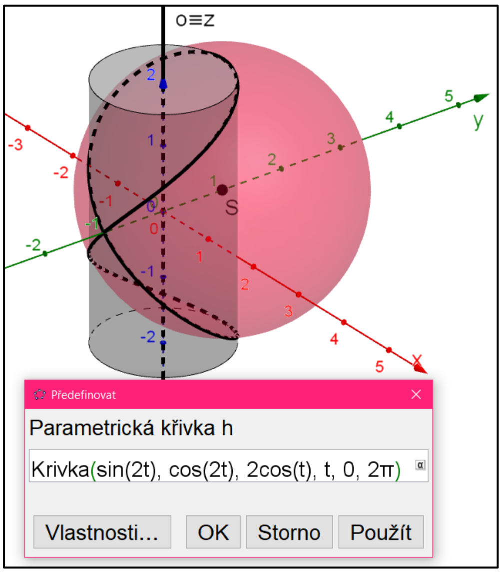
Obr. 89: Řešení příkladu

3.7 Vivianiho křivka

Příklad: Sestrojte graficky průnik válcové a kulové plochy, když víte, že osa válcové plochy o poloměru 1 splývá s osou z kartézské soustavy souřadné, a kulová plocha s poloměrem 2 má svůj střed v bodě $S = [0,1,0]$ [35].

Popis konstrukce:

1) $o; o$ je osa z
2) válcová plocha; $r = 1$
3) $S; S = [0,1,0]$
4) kulová plocha se středem v S, $r = 2$
5) průnik dvou ploch



Obr. 90: Vivianiho křivka

Závěr:

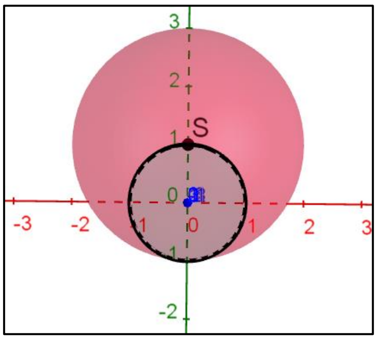
Pomocí funkcí softwaru *GeoGebra* jsme mohli vytvořit průnik dvou ploch (kulové a válcové plochy), čímž vznikla křivka, která je dána bodovou rovnicí $X = [\sin(2t), \cos(2t), 2\cos(t)]$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Tuto křivku nazýváme *Vivianiho křivkou* [22].

Příklad: Vycházejíce z grafického řešení předchozí úlohy určete pravoúhlý průmět *Vivianiho křivky* do souřadnicové roviny xy a yz.

Popis řešení:

I. *Průmět do xy*

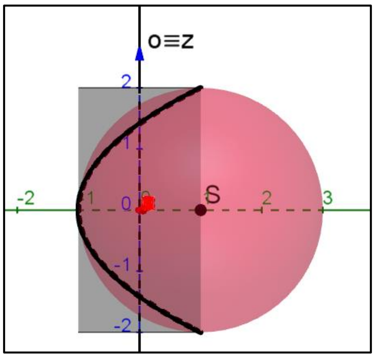
Nejdříve budeme na křivku pohlížet shora, to znamená, že směr pohledu na křivku bude podél osy z a tedy $z = 0$. Na obrázku je tedy křivka v souřadnicové rovině xy, kde osa x je vodorovná a y je svislá. Obrazem křivky je kružnice se středem v bodě [0,0] a jejíž rovnice má tvar $x^2 + y^2 = 1$.



Obr. 91: Průmět do xy

II. *Průmět do yz*

V programu GeoGebra je možné s prostorovým objektem volně otáčet tak, abychom jej dostali do dané pozice, aby průmětnou byla požadovaná souřadnicová rovina. V této části řešení jsme jako průmětnu určili rovinu yz ($x = 0$) a obraz křivky se jeví jako parabola.



Obr. 92: Průmět do yz

Závěr:

Díky možnosti otáčet objekt jsme vytvořili obrazy Vivianiho křivky v průmětnách xy a yz. V rovině xy vznikla pravoúhlým průmětem křivky kružnice a v rovině yz je pravoúhlým průmětem parabola.

3.8 Šroubovice

Šroubovicí nazýváme trajektorii bodu vzniklou při šroubovém pohybu. Je tedy tvořena bodem A a šroubovým pohybem. Dále pro tuto křivku platí, že leží na rotační válcové ploše. Osa o této rotační válcové plochy je zároveň i osa šroubového pohybu. Poloměr r rotační válcové plochy je dán vzdáleností bodu A od osy.

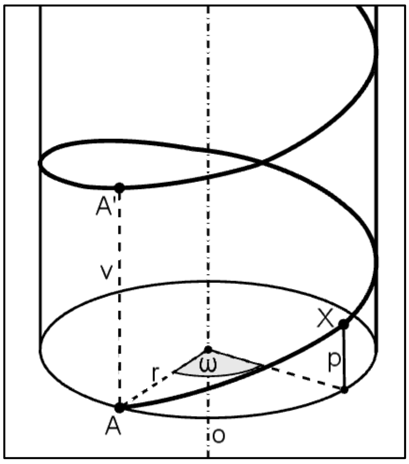
Složením dvou rovnoměrných pohybů – *otáčení* a *posouvání*, vznikne šroubový pohyb. Otáčení provádíme s bodem A o úhel ω, jehož osou otáčení je osa rotační válcové plochy. Zároveň je bod A posouván ve směru osy o [9].

Pokud orientujeme směr posunutí a úhel otáčení, dostaneme dva typy šroubového pohybu. Tato orientace, nebo také smysl šroubového pohybu, mohou být:

a) pravotočivý (pohyb proti směru hodinových ručiček - viz. *Obr. 93*)

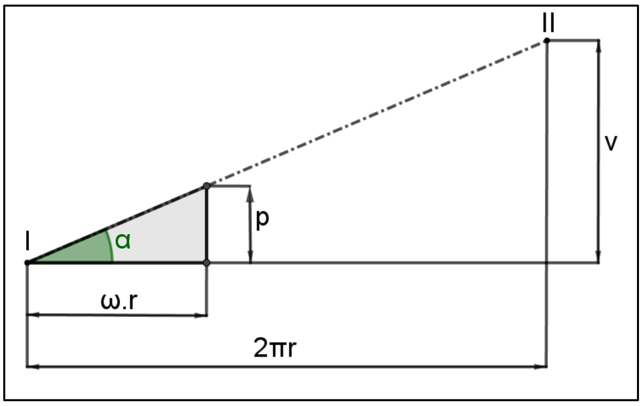
b) levotočivý (pohyb po směru hodinových ručiček)

Otočíme-li bod A o jeden radián (úhel ω v *Obr. 93*), posune se bod o výšku p do bodu (pozice) X. Výšku p označíme v_0 a nazveme ji *redukovanou výškou závitu* [3]. Otočíme-li bod A o úhel 2π, posune se o výšku v do bodu A'. V tomto případě se vytvoří jeden *závit šroubovice*, kde číslo v je výška tohoto závitu [4].



Obr. 93: Jeden závit pravotočivé šroubovice

Rozvineme-li část válcové plochy do roviny, dostaneme skutečnou délku oblouku šroubovice. Pokud je otočení rovno hodnotě 2π, pak se posunutí rovná výšce jednoho závitu šroubovice v. Otočení je měřeno obloukem, jehož hodnota je $\omega.r$. Úsečka s označením I, II je délka rozvinutého jednoho závitu šroubovice [9].



Obr. 94: Rozvinutý závit šroubovice

Úhel α určuje *sklon šroubovice*. Skutečnost, že úsečka I, II je rovná křivka, nám říká, že mezi posunutím a rotací je vztah přímé úměry [3].

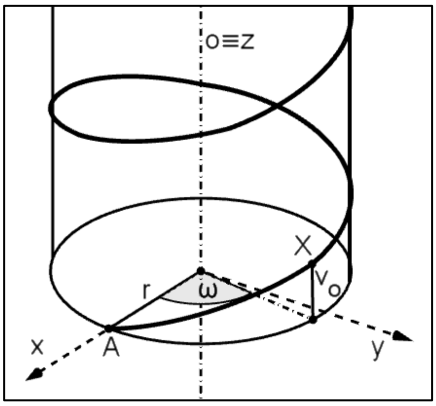
Umístili jsme-li vhodně pravotočivý kartézský systém souřadnic tak, že bod A náleží ose x, pak parametrické rovnice jednoho závitu šroubovice jsou:

$$x = r\cos\omega$$

$$y = r\sin\omega$$

$$z = v_0\omega$$

$\omega \in \ < 0, 2\pi >$; r, v_0 jsou konstanty



Obr. 95: Šroubovice v kartézském systému souřadnic

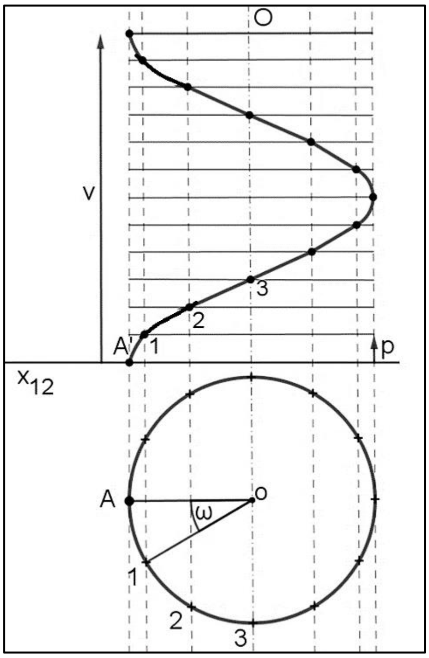
Příklad: Je dán tvořicí bod A a pravotočivý šroubový pohyb osou o a výškou závitu v. K otočení $\omega = \frac{2\pi}{12}$ přísluší posunutí $p = \frac{v}{12}$. Zobrazte šroubovici v Mongeově promítání.

Řešení:

Sestrojujeme jednotlivé polohy bodu A při šroubovitém pohybu. K otočení $\omega = \frac{2\pi}{12}$ přísluší posunutí $p = \frac{v}{12}$. Jestliže je osa šroubového pohybu o kolmá k půdorysně, pak lze snadno usoudit, že půdorysem šroubovice je kružnice. Navíc pro otočení ω bodu A platí:

$$\omega = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$$

Posunutí bodu A je dáno vztahem $p = \frac{v}{12}$, kde v je konstanta. Body nárysu tedy leží na sinusoidě.



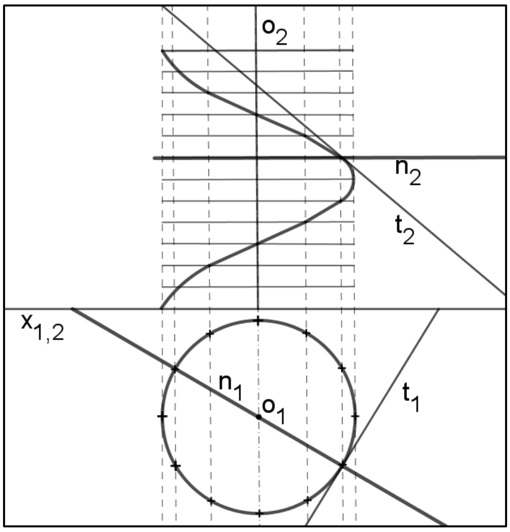
Obr. 96: Řešení příkladu

Závěr:

Jak jsme již zmínili, půdorysem bude kružnice. Jestliže jedno otočení ω je rovno 30°, musíme kružnici rozdělit na 360 : 30 stejných dílů. Bod A tedy dělí jeden závit spirály na 12 dílů. Nárys je vytvořen tak, že výška v je rovněž rozdělena na 12 rovných dílů a dále postupujeme dle zásad Mongeova promítání.

Normála šroubovice

Hlavní normálu šroubovice značíme n. Leží v normálové rovině a je kolmá jak na tečnu šroubovice, tak i na osu šroubového pohybu. Z této charakteristiky vyplývá i její konstrukce. Nárys normály n_2 je rovnoběžný s půdorysnou rovinou šroubovice. Hlavní normála je tedy hlavní přímka každé roviny, ve které normála n leží. Půdorys n_1 je pak kolmý na t_1 (půdorys příslušné tečny) a zároveň $n_1 \cap o_1$ [27].



Obr. 97: Normála a tečna šroubovice

Dvoušroubovice

Tento geometrický útvar, jinak také nazývaný jako dvojitá šroubovice, se nejčastěji v literaturách skloňuje v souvislosti s DNA.

Z geometrického pohledu se jedná o útvar složený ze dvou šroubovic, které mají společnou osu šroubovice, obě jsou vepsány do stejné válcové plochy a výška jednoho závitu je u obou stejná. Rozdíl je v tom, že šroubovice mají opačnou *chiralitu*, což znamená, že jedna musí být pravotočivá a druhá levotočivá [20].

Šroubovice a dvoušroubovice v praxi

V praxi se s těmito trojrozměrnými geometrickými útvary můžeme setkat prakticky každý den. Tvaru šroubovice se využívá u závitů či pružin, ze spirály též vychází stavitelé při konstrukci točitých schodišť. Drátem stočeným do tvaru šroubovice bývají také spojeny stránky kalendářů či tzv. kroužkových bloků. Pružina je mechanismus, u kterého je možná elastická deformace ve směru osy pružiny (šroubovice). To znamená, že působením síly se deformuje, ale když přestane síla působit, vrací se do původního tvaru. Využívá se například jako pružina tlumičů u automobilů tlumící nárazy, v propisovacích tužkách, u pružinových vah apod. Tvar šroubovice má také RNA (ribonukleová kyselina), která je nositelkou genetické informace u virů.

Dvoušroubovice se nachází v těle každého z nás ve formě DNA (deoxyribonukleové kyseliny), která je nositelkou genetické informace nejen člověka, nýbrž všech živých organismů kromě již zmíněných nebuněčných virů. Dalším příkladem jsou dvojitá točitá schodiště nebo kroucená dvojlinka (spojovací kabel) [20].

Točité schodiště

Točitým schodištěm je myšleno schodiště ve tvaru šroubovice. Schody bývají upevněny buďto na středovém sloupu, na vnějších stěnách, nebo jak uprostřed, tak na vnější straně (viz. *Obr. 98*). Tento typ schodiště začali stavitelé využívat již v období klasické antiky (5. st. př. n. l.) [33].

Obr. 98: Točité schodiště na zámku Hluboká

Některé veřejné stavby s velkým provozem vytvářejí větší komfort pro návštěvníky díky schodištím ve tvaru dvoušroubovice. Výhodná vlastnost takového schodiště spočívá v tom, že umožňuje hostům současně se pohybovat nahoru či dolů, aniž by si křižovali cestu a museli se vyhýbat [24].

Točité schodiště může být buď pravotočivé nebo levotočivé. To, že je schodiště pravotočivé, znamená, že při stoupání se otáčíme kolem jeho osy doprava. U novodobých staveb se převážně setkáváme s levotočivými schodišti, ačkoli pravotočivé schodiště není také výjimkou. S pravotočivým schodištěm se setkáváme nejčastěji na hradech a zámcích. Ve své podstatě se jedná o strategický prvek. Pravotočivé schodiště bylo pro obyvatele hradu výhodné v případě napadení nepřítelem. Když se do hradu pokoušel dostat bojovník se zbraní v pravé ruce, nemohl při konfliktu používat zbraň naplno jako ten, kdo útočil shora [16].

4. Stereometrie na základní škole

4.1 Vztah žáků ke geometrii

Často se setkávám s tím, že vyslovím-li před lidmi ve svém okolí slova, jako jsou například *matematika* nebo *geometrie,* vyvolám tím u některých žáků i dospělých emoce značící nelibost, ba i dokonce odpor. Tento negativní přístup mě donutil přemýšlet, proč tomu tak je. V čem jsme my, učitelé pochybili, když u některých žáků vidíme k matematice takovou averzi? Z této úvahy vyvstává další otázka: Pokud žáci mají negativní vztah ke geometrii v rovině, jak je lze vůbec učit stereometrii, když důležitým předpokladem jsou právě znalosti z planimetrie?

Výzkum společnosti *DAP Services* zaměřený na patnáctileté žáky ukázal, že matematika je českým deváťákům lhostejná. Z psychologického hlediska bychom dle výzkumu neměli hledat příčinu v dětech, ale spíš ve způsobu výuky, který vyžaduje změnu. Současné skupinové vyučování matematiky není žáky příjímáno pro svou nevelkou pestrost a atraktivitu. Z důvodu přílišné formálnosti výuky tak nejsou žáci schopni pro sebe vytěžit víc a jak plyne i z výsledků výzkumu PISA 2009, tak právě české děti se ve srovnání s ostatními státy zhoršily nejvíce [25].

Je třeba provést jisté změny již ve výuce planimetrie, kdy si žáci mohou načrtnout či narýsovat objekty na papír ve skutečné podobě. Protože právě jen dostatečné znalosti a dovednosti z rovinné geometrie jsou předpokladem pro úspěšné zvládnutí učiva prostorové geometrie. Zde je důležité v žácích budovat prostorovou představivost úměrně k jejich schopnostem, s čímž nám mohou pomoci dynamické 3D softwary či fyzické pomůcky, ale především je nezbytná snaha žáky zaujmout a v co nejpestřejších formách a nenásilně poskytovat zdroj poznání.

4.2 Prostorové úlohy u přijímacích zkoušek

Listujeme-li různými publikacemi určenými pro žáky 9. tříd základních škol (např. od nakladatelství *Didaktis*), můžeme se seznámit s typovými úlohami, které bývají zadávány u jednotných (popř. školních) přijímacích zkoušek z matematiky na střední školy. Autoři testů provádějí výběr úloh ze tří okruhů matematiky (z aritmetiky, algebry a geometrie) a to tak, aby byla komplexně ověřena úroveň matematických znalostí a dovedností žáků, kteří se na daný maturitní obor hlásí. Seskupením takovýchto úloh pak vznikají jakési příručky, které by měly žáku pomoci se na přijímací zkoušky připravit. Úlohy v těchto publikacích bývají řazeny buďto podle náročnosti, nebo podle již zmíněných jednotlivých okruhů matematiky, nebo podle škol, na kterých se test u přijímací zkoušky objevil. Na konci knihy většinou bývají výsledky příkladů, někdy zřídka i s popisem řešení. Rovněž existují různé internetové stránky s úlohami, které pomáhají žákům s přípravou na přijímací zkoušky. Například na webu www.statniprijimacky.cz je možné najít přímo jednotné testy, které byly zadávány v uplynulých letech, dokonce i s popisy řešení a výsledky.

Žák tedy může díky těmto materiálům intuitivně předpokládat, na jaká témata se má zaměřit, aby úspěšně složil přijímací zkoušky a byl přijat na jím vybranou střední školu, a především může procvičovat. Nicméně je důležité zmínit, že některé školy povolují žákům používat tabulky či kalkulačky, některé jen tabulky a jiné pouze vlastní hlavu.

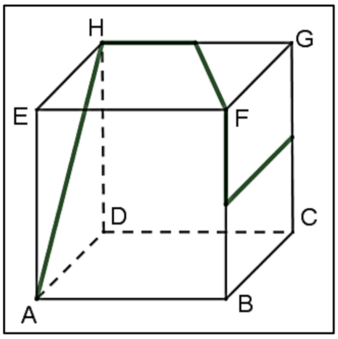
Prostorová představivost je obecně spíše přehlížené téma při tvorbě přijímacích testů na střední školy. O tom svědčí fakt, že zřídka kdy narazíme na úlohu, která by tuto schopnost u žáků prověřovala.

4.3 Soubor úloh s řešením

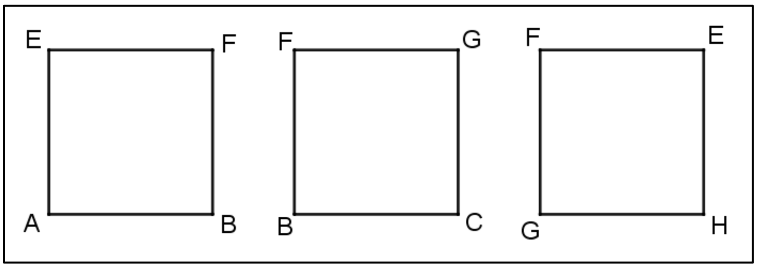
Na základě výše zmiňované skutečnosti jsem se rozhodla prostudovat několik publikací vytvořených pro žáky 9. tříd, které slouží jako soubor testů k přijímacím zkouškám. Z nalezených úloh jsem sestavila soubor příkladů s řešením, který může sloužit jako pomůcka pro učitele základních škol, kteří chtějí u svých žáků rozvíjet prostorovou představivost.

4.3.1 Testy z matematiky 2001

Příklad: Na krychli $ABCDEFGH$ z průhledného skla je tučně nakreslena lomená čára. Do připravených obrázků vyznač, které části čáry uvidíš při pohledu přímo proti dané stěně. Prochází-li čára hranou, přesahuje do obou sousedních stěn [15].



Obr. 99: Zadání příkladu



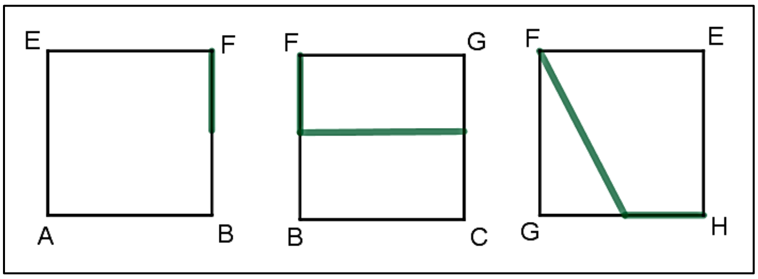
Obr. 100: Stěny krychle

Komentář:

Úloha má za úkol u žáků procvičit schopnost pohledu na těleso z mnoha úhlů. Dále ověřuje pochopení rozdílu mezi rovinným a prostorovým útvarem, žák je též nucen rozumět geometrickým pojmům (sousední stěny, lomená čára).

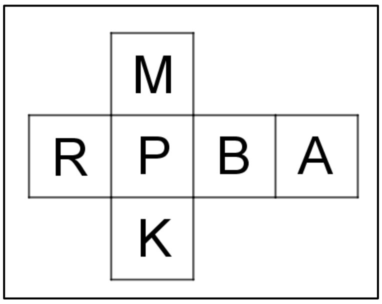
Chyba může nastat při určování požadovaných stěn, kdy je žák určí chybně. Rovněž nemusí být pochopena myšlenka přesahu čáry do sousedních stěn.

Řešení:



Obr. 101: Řešení příkladu

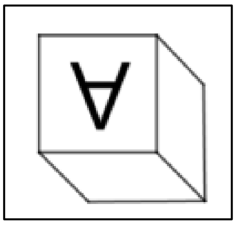
Příklad: Podle sítě napiš na krychli chybějící písmena ve správné poloze [15].



Obr. 102: Síť krychle

Komentář:

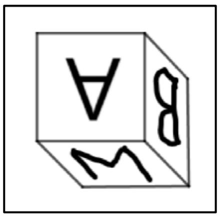
Tato úloha u žáků vyžaduje představit si, jakým způsobem bude krychle ze sítě sestavena, která písmena si zvolí na podstavách, a která na bočních stěnách. Potíže může činit fakt, že krychle je oproti síti „otočena“, usuzujeme tak podle otočeného písmene A. I přesto, že žák dokáže označit stěnu příslušným písmenem, může písmeno zapsat v nesprávné poloze vůči jeho stěně.



Obr. 103: Krychle - výchozí poloha

Řešení:

Ze sítě krychle je dobře viditelné, že písmeno B se nachází v pozici nalevo od písmene A. Dále je třeba zjistit, které písmeno bude na svrchní stěně. Zde bude písmeno M, které však bude vůči A otočené o 180°.



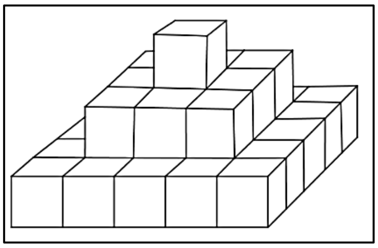
Obr. 104: Řešení příkladu

Mají-li žáci se zakreslením písmen potíže, pak nejilustrativnější pomůckou bude, vyrobí-li si sami síť krychle z papíru, popíší ji písmeny jako je to v této úloze a krychli následně slepí.

Příklad: Na obrázku vidíš tříposchoďovou pyramidu postavenou ze stejných kostek.

a) Kolik kostek musíš přidat, aby z pyramidy vznikla krychle o téže podstavě, jakou má pyramida?

b) Kolik dalších kostek bys potřeboval/a, abys z dané pyramidy vytvořil/a pětiposchoďovou pyramidu [15]?



Obr. 105: Zadání příkladu

Komentář:

Tato geometrická úloha se nabízí řešit aritmetickým způsobem. Je potřeba si uvědomit vztah mezi jednotlivými patry pyramidy. Nahoře bude vždy jedna kostička. Druhé patro shora obsahuje 3^2 kostiček, třetí patro obsahuje 5^2 a tak dále. Je tedy zřejmé, že počet kostiček v patře se řídí posloupností $(2n-1)^2$, kde $n \in \{1,2,3,\dots i\}$.

Řešení:

a) Máme vytvořit krychli o téže podstavě, jakou má pyramida – tzn. o hraně 5 kostiček. Její objem tedy bude $5^3 = 125$ kostiček.

Objem pyramidy na obrázku vypočítáme součtem prvních třech členů posloupnosti:

$(2\,.\,1-1)^2 + (2\,.\,2-1)^2 + (2\,.\,3-1)^2 = 1^2+3^2+5^2 = 1+9+25 = 35$ kostiček

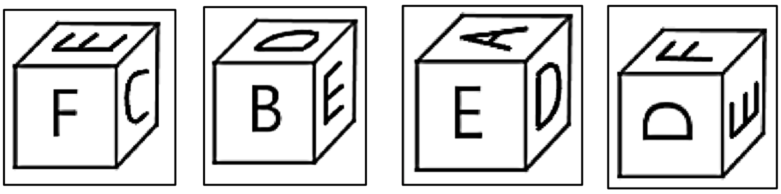
Musíme tedy přidat $125 - 35 =$ **90 kostek**

b) Pokud chceme zjistit, kolik kostek je nutno přidat, aby byla vytvořena pětiposchoďová pyramida, musíme uvažovat, že je třeba přidat dvě poschodí. Výsledkem tedy bude součet čtvrtého a pátého členu posloupnosti:

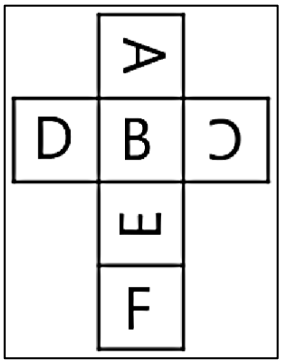
$(2\,.\,4-1)^2 + (2\,.\,5-1)^2 = 7^2 + 9^2 = 49 + 81 =$ **130 kostek**

<u>Příklad:</u> Urči, jakou kostku lze složit z této sítě [15].

a) b) c) d)



Obr. 107: Zadání příkladu



Obr. 106: Síť krychle

Komentář:

Názorné ověření správné kostky je možné tak, že si žáci narýsují a popíší síť stejně tak, jako je to vidět v zadání. Následně síť vystřihnou a mohou dále přehýbat podle potřeby.

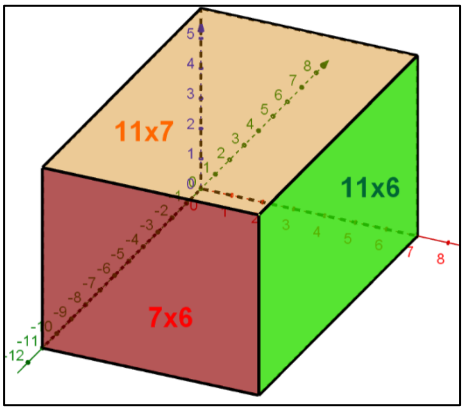
Řešení:

Nejprve vyloučíme všechny chybně sestavené krychličky. Kostku $b)$ ze sítě složit nelze, protože ačkoli se stěny krychle s písmeny B, E, D dělí o společný vrchol jako je to vidět u sítě, tak stěna s písmenem B je špatně umístěna. Kostka $c)$ je též chybně, protože na síti spolu stěny s písmeny E a A nesousedí. Poslední chybná kostka je $d)$, protože zobrazuje stěny s písmeny D, F tak, že sdílejí společnou hranu, ačkoli ze sítě vyplývá, že tyto stěny mají společný vrchol. Lze tedy složit kostku $\boldsymbol{a}$)**.**

Příklad: Maminka koupila krabici kostkového cukru. Radek snědl nejdříve celou horní vrstvu, tj. 77 kostek, potom snědl vrstvu boční, to bylo 55 kostek, a nakonec vrstvu přední. Kolik kostek zbylo v krabici [15]?

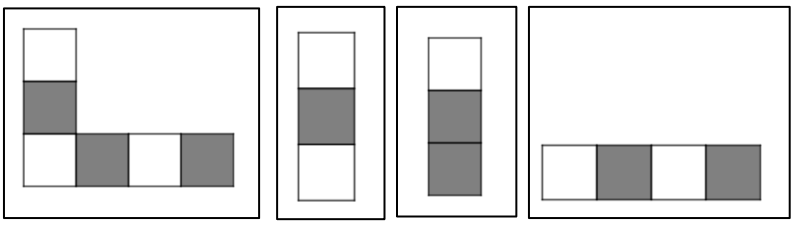
Řešení:

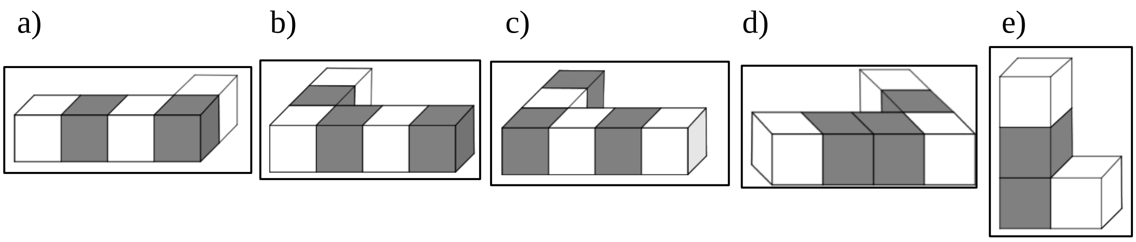
Předpokládáme, že krabice má tvar kvádru. Stěžejní informací je, že horní vrstva tvaru obdélníku obsahovala na začátku 77 kostek. Toto číslo je dělitelné 7 a 11, proto půdorys krabice je 7×11 kostek. Dále Radek snědl boční vrstvu (55 kostek). Číslo 55 dělí z čísel 7 a 11 pouze jedenáctka, proto boční vrstva obsahovala po snědení horní vrstvy 11×5 kostek. Z těchto úvah plyne, že na začátku krabice obsahovala $11 \times 7 \times 6$ kostek, celkem tedy 462. Z tohoto počtu Radek snědl 77 kostek horní vrstvy a poté 55 kostek boční vrstvy. V tuto chvíli zbývá $462 - (77 + 55) = 330$ kostek. A protože na výšku i na šířku krabice zmizela jedna vrstva kostek, tak přední vrstva změnila své rozměry ze 7×6 kostek na $6 \times 5 = 30$. Odečtením této vrstvy od zbytku docházíme k výsledku, že v krabicí zbývá 300 kostek: $330 - 30 = \mathbf{300}$.



Obr. 108: Řešení příkladu

Příklad: Kterou stavbu složenou z bílých a černých krychlí vidíme na všech čtyřech obrázcích (*Obr. 109*) [15]?


Obr. 109: Zadání příkladu - obrázek 1 - 4



Obr. 110: Stavby z krychlí

Komentář:

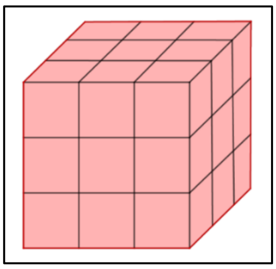
Problém v řešení spatřuji v tom, že žák nemusí ze zadání pochopit, co přesně se po něm žádá. Může mít problém rozeznat, co je myšleno pojmy „stavba“ a „obrázky“. Pojem *obrázky* znamená nárys, půdorys a bokorys. Rovněž není jednoznačné, zda hledáme právě jednu stavbu, která odpovídá zadání či staveb více.

Řešení:

Při pohledu na první obrázek složený ze šesti čtverečků do tvaru písmene L můžeme ihned vyloučit stavby $a), e)$, jejichž půdorysy tyto rozměry nemají. Pokud se dále zaměříme na barvy krychliček, tak pak pouze díky prvnímu obrázku můžeme vyloučit další dvě stavby – $c), d)$. Na všech čtyřech obrázcích tedy můžeme vidět stavbu $b)$. Nakonec bych zmínila, že třetí obrázek je bokorys při pohledu zprava, což nemusí být ihned pro každého zřejmé.

4.3.2 Přijímací zkoušky na střední školy (Roman Charvát)

Příklad: Krychle o objemu $27cm^3$ je červeně natřená. Byla rozřezána na shodné krychličky, každá o objemu $1\,cm^3$. Kolik krychliček bylo se třemi, dvěma, jednou a žádnou červenou stěnou [8]?



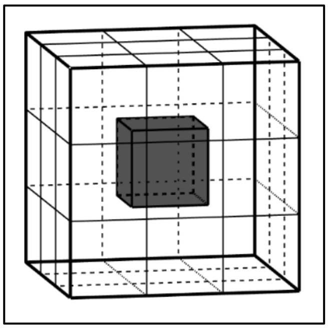
Obr. 111: Natřená krychle

Komentář:

Úkolem žáka je zprvu zaměřit se pouze na důležité informace. Informace o objemu pouze značí fakt, že je krychle rozdělena na 27 shodných krychliček.

Řešení:

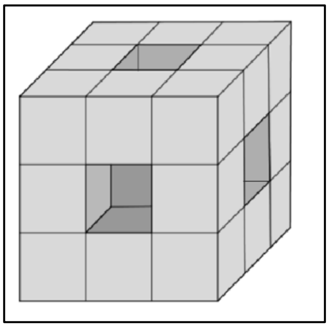
Nejdříve zjistíme počty krychliček s žádnou, jednou a třemi obarvenými stěnami, což je poměrně snadné. Odečtením tohoto součtu od celkového počtu 27 zjistíme počet krychliček se dvěma stěnami červenými.



Obr. 112: Znázornění vnitřní neobarvené krychličky

1 krychlička	žádná červená stěna (uprostřed krychle)
6 krychliček	jedna červená stěna (uprostřed stěn krychle)
12 krychliček	dvě červené stěny
<u>8 krychliček</u>	tři červené stěny (rohové krychličky)
27 krychliček	

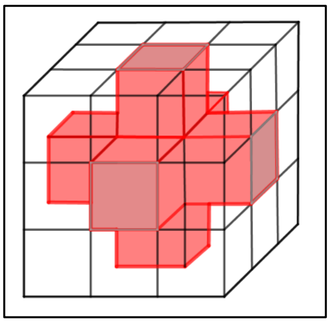
<u>Příklad:</u> Vypočítejte povrch tělesa na obrázku, jemuž jsme vyjmuli 7 krychliček: 6 ze středů stěn tělesa a 1 ze středu tělesa. Délka jedné hrany krychličky je 1 cm [8].



Obr. 114: Zadání příkladu

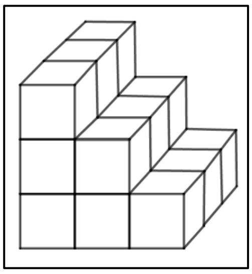
Řešení:

Celkový povrch tělesa je $3\,.\,3\,.\,6\; cm = 54\; cm^2$. Nyní odečteme $6\; cm^2$, které představují „otvory“. Máme $\mathbf{48\; cm^2}$. Dále spočítáme povrch vyobrazeného tělesa, které znázorňuje dutinu krychle (*Obr. 114*), tudíž uvažujeme celkem šest krychlí a u každé čtyři její stěny, což je celkem $6\,.\,4 = \mathbf{24\; cm^2}$. Součet $48 + 24$ nám dává výsledek $\mathbf{72\; cm^2}$.



Obr. 113: Dutina tělesa

<u>Příklad:</u> Zobrazené těleso se skládá z kostek o hraně velikosti 3 dm. Vypočítejte jeho povrch [8].



Obr. 115: Zadání příkladu

Komentář:

Úkolem žáka je nejen zjistit počet čtverečků tvořící povrch tělesa, ale zároveň musí vypočítat jeho povrch v dm^2, protože v zadání se hovoří o tom, že strana čtverečku měří 3 dm.

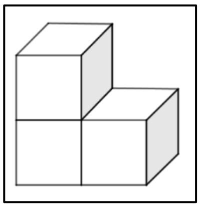
Řešení:

Přední a zadní stěna tělesa mají shodný počet čtverečků – tj. každá 6. Spodní a levá boční stěna mají rovněž shodný počet čtverečků ($3 \cdot 3 = 9$). Stupňovitá část tělesa čítá tři schody po dvou řadách čtverečků, celkem tedy $3 \cdot 2 \cdot 3$ čtverečky. Povrch tělesa se tedy skládá z $2 \cdot 6 + 9 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 = 12 + 18 + 18 =$ <u>48 čtverečků</u>.

Nakonec si vypočítáme obsah jednoho čtverečku v $dm^2 = 3 \cdot 3 = 9$. Obsah vynásobíme celkovým počtem čtverečků a zapíšeme, že povrch tělesa činí $9 \cdot 48$, tedy $\mathbf{432\ dm^2}$.

4.3.3 Testy z matematiky pro 9. ročník ZŠ

<u>Příklad:</u> Ze tří stejných krychlí o hraně délky 1 dm je sestaveno znázorněné těleso. Urči velikost jeho povrchu [14].



Obr. 116: Zadání příkladu

Komentář:

Tato úloha je na pomezí stereometrie a aritmetiky. Nicméně základním předpokladem pro řešení úlohy je schopnost žáka pohlížet na těleso z více úhlů. Je tedy potřeba umět si představit i ty části tělesa, které nejsou z obrázku přímo viditelné.

Řešení:

I. Jeden ze způsobů je spočítat povrch tří krychliček, pokud by nebyly slepeny a od něj odečíst počet stěn, kterými se vzájemně dotýkají: $S = 3 . 6 - 4 = \mathbf{14\ dm^3}$.

II. Nebo na těleso pohlížíme postupně ze všech šesti směrů a kontinuálně sčítáme počet stěn, které jsou z daného směru viditelné: $S =$ 3 (zpředu) + 3 (zezadu) + 2 (zprava) + 2 (zleva) + 2 (shora) + 2 (zdola) = $\mathbf{14\ dm^3}$.

4.3.4 Testy 2021 – 2022 z matematiky

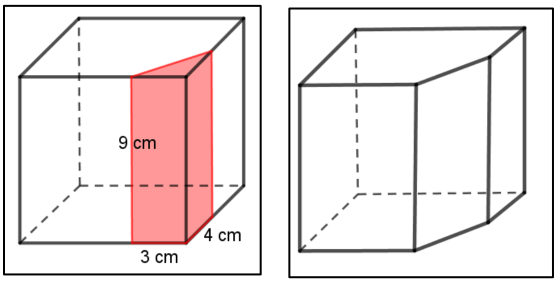
<u>Příklad:</u> Pětiboký hranol vznikl tak, že z dřevěné krychle s hranou délky 9 cm byl odříznut kolmý trojboký hranol. Rozměry kolmého trojbokého hranolu jsou vidět v obrázku (*Obr. 117*) [5].

a) Kolik stěn má vzniklý pětiboký hranol?

b) Kolik vrcholů má vzniklý pětiboký hranol?

c) Kolik hran má vzniklý pětiboký hranol?

d) Vypočítejte povrch pětibokého hranolu.



Obr. 117: Zadání příkladu

Komentář:

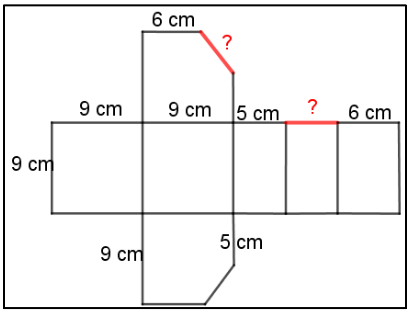
Úloha má u žáků ověřit, zda rozumějí pojmům *stěna, vrchol* a *hrana tělesa* či *hranol*. Dále zjišťuje schopnost žáků vypočítat povrch tělesa, ke kterému neexistuje vzoreček.

Řešení:

a) Počet stěn: 7

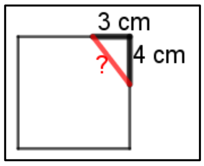
b) Počet vrcholů: 10

c) Počet hran: 15



Obr. 118: Síť hranolu

d) Pro vypočítání povrchu tělesa je vhodné si načrtnout jeho síť a zapsat do obrázku všechny známé rozměry. Nyní zjišťujeme, že neznáme délku hrany, kterou jsme označili otazníkem (*Obr. 119*). Při výpočtu vycházíme z původního obrázku a využijeme Pythagorovu větu, kde je hrana s otazníkem v podstatě přepona pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délku 3 a 4 cm. Délka hrany *„?“* je tedy rovna $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=\mathbf{5\ cm}$.



Obr. 119: Podstava

Dále vypočítáme obsah podstavy, což je pětiúhelník. Nejvhodnější způsob bude vypočítat si obsah jedné stěny původní krychle a od něj odečíst obsah pravoúhlého trojúhelníku, který vznikne v půdorysu odříznuté části tělesa:

S□= $9^2 = 81\ cm^2$

S◺= $\frac{3\ .\ 4}{2} = \frac{12}{2} = 6\ cm^2$

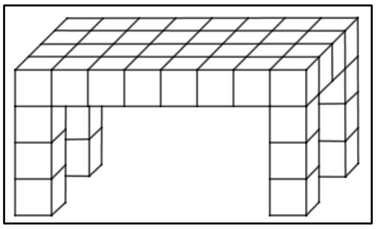
S⬠= S□ - S◺= $81 - 6 = \mathbf{75\ cm^2}$ … dvě pětiúhelníkové podstavy!

Rozvinutím pláště nám z bočních stěn tělesa vznikne obdélník o jedné straně 9 cm, délka druhé strany je vlastně obvod podstavy: $9 + 9 + 5 + 5 + 6 = 34\ cm$**.** Obsah bočních stěn je $9 \cdot 34 = \mathbf{306\ cm^2}$.

Celkový povrch pětibokého hranolu je povrch obou podstav a všech bočních stěn:

$75\ .\ 2 + 306 = \underline{\mathbf{456\ cm^2}}$

<u>Příklad:</u> Na obrázku je stoleček, který byl slepen ze shodných krychliček a objem stolku je 880 cm^3 [5].



Obr. 120: Zadání příkladu

a) Určete počet všech krychliček, ze kterých je stoleček slepen.

b) Vypočítejte v cm^3 nejmenší vnitřní objem krabice, do které se vejde celý stoleček.

Řešení:

a) Deska stolku je slepena ze 4×8 krychliček, což je 32. Dále každá ze čtyř noh obsahuje tři krychličky. Tudíž celkový počet je $32 + 4\ .\ 3 =$ **44 krychliček**

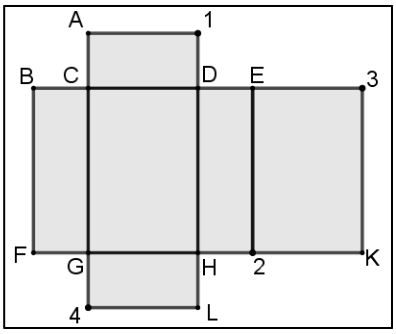
b) Abychom mohli určit rozměry krabice pro stolek, musíme zjistit rozměry jedné krychličky. Víme, že objem stolku je 880 cm^3. Pokud jej vydělíme 44, zjistíme objem jedné krychličky:

$$880 \div 44 = 20\ cm^3$$

A protože má stolek rozměry $4 \times 4 \times 8$ krychliček, bude nejmenší možný objem krabice roven $4 \,.\, 4 \,.\, 8 \,.\, 20 = \mathbf{2560\ cm^3.}$

4.3.5 Státní přijímačky

Rok 2015



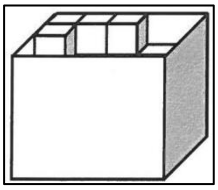
Obr. 121: Zadání příkladu

Příklad: Některé z bodů vyznačených v síti kvádru představují ve složeném kvádru jeden a týž vrchol. Například bod 1 a bod E jsou dva různé body sítě kvádru, avšak ve složeném kvádru představují stejný vrchol. Určete, které body sítě kvádru s uvedenými body 2, 3 a 4 představují ve složeném kvádru stejný vrchol [31].

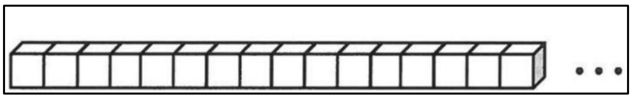
Řešení:

Bod 2 je totožný s bodem L. Bod 3 tvoří společný vrchol společně s body B a A. Bod 4 se po složení sítě setká společně s body F a K.

Rok 2017


Obr. 122: Krabice

Příklad: Krabici tvaru kvádru (*Obr. 122*) lze naplnit až po okraj krychličkami s délkou hrany 2 cm. Na dno krabice se do jedné vrstvy naskládá bez mezer 20 krychliček a takové vrstvy mohou být v krabici nejvýše 4. Ze zcela naplněné krabice vyjmeme všechny krychličky a vyskládáme je do řady za sebou [31].


Obr. 123: Schéma řady

a) Jak dlouhá bude tato řada (v metrech)?

b) Jaký je objem krabice?

Řešení:

a) Zjištění délky řady kostek je v tomto případě záležitost aritmetiky. Víme, že do jedné vrstvy se vejde 20 krychliček, a že krabice pojme 4 vrstvy. To jest celkem 80 krychliček, které naplní krabici. Má-li každá hrana délku 2 cm, pak řada má délku 80 · 2 $= 160\ cm = \mathbf{1{,}6\ m}$.

b) Musíme si uvědomit, jaké rozměry má krabice. Víme, že jedna vrstva čítá 20 krychliček. Číslo 20 získáme součinem celých čísel, a to $1\ a\ 20$, $2\ a\ 10$, $4\ a\ 5$. Z nákresu úlohy přichází v úvahu poslední kombinace: 4×5 krychliček v jedné vrstvě. Jestliže do krabice lze vyskládat čtyři vrstvy, pak rozměry krabice jsou $4 \times 4 \times 5$ krychliček.

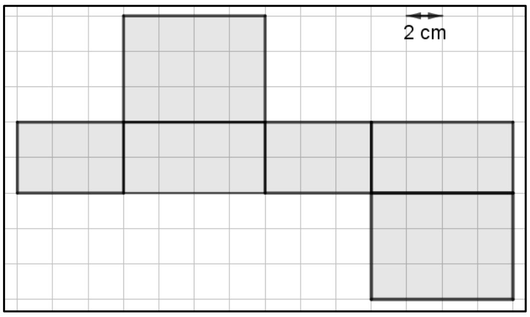
Délka hrany krychličky jsou 2 cm, takže rozměry krabice v cm budou následující:

Š x V x H = 4 · 2 $cm \times 4 \cdot 2\ cm\ \times 5 \cdot 2\ cm = 8 \times 8 \times 10$

Objem krabice: $V = a\ \cdot\ b\ \cdot c = 8\ \cdot\ 8\ \cdot 10 = \mathbf{640\ cm^3}$

Rok 2018

<u>Příklad:</u> Ve čtvercové síti je zobrazena síť papírového kvádru. Do složeného kvádru lze naskládat určitý počet dřevěných krychliček s hranou délky 3,9 cm**.** Jaký největší počet dřevěných krychliček lze naskládat dovnitř papírové krabice [31]?



Obr. 124: Zadání příkladu

Komentář:

Základem pro řešení úlohy je umět vyčíst ze sítě kvádru jeho rozměry. K chybnému závěru může žák dojít, pokud sice správně vypočítá rozměry krabice, ze kterých vypočítá objem a výsledek vydělí objemem jedné krychličky.

Řešení:

Na obrázku vidíme $2 \times 3 \times 4$ čtverečky po 2 cm. Takže rozměry krabice jsou:

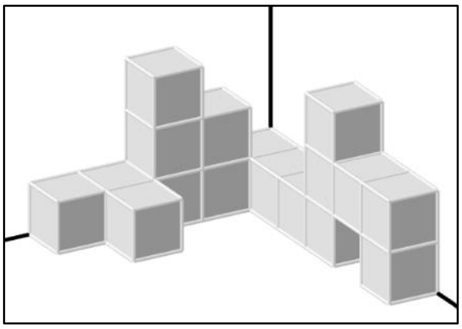
Š x V x H = $4 \times 6 \times 8\ cm$. A protože je délka hrany krychličky $3{,}9\ cm$, vejde se na šířku i na výšku pouze jednou a do hloubky krabice lze umístit vedle sebe dvě. Je tedy možné umístit do kvádru pouze **dvě** krychle.

4.3.6 Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.

Příklad: V rohu místnosti je postavena stavba z krychlí o stejné velikosti. Odpovězte na otázky:

a) Z kolika kostek je stavba postavena?

b) Kolik stěn krychlí se celkem dotýká stěn místnosti?



Obr. 125: Zadání příkladu

Řešení:

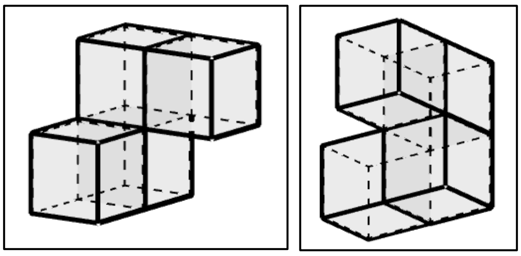
a) Spočítat krychle není těžké, protože jsou všechny viditelné. Výsledek je **17 krychlí**.

b) Je třeba si dát pozor na to, že rohová krychle se dotýká stěn dvěma stěnami. Žáci též mohou chybovat v tom, že jako stěnu uvažují i podlahu místnosti. Počet dotýkajících se stěn je **17**.

Příklad: Kolik různých těles (staveb) lze složit ze 4 jednotkových krychlí?

Komentář:

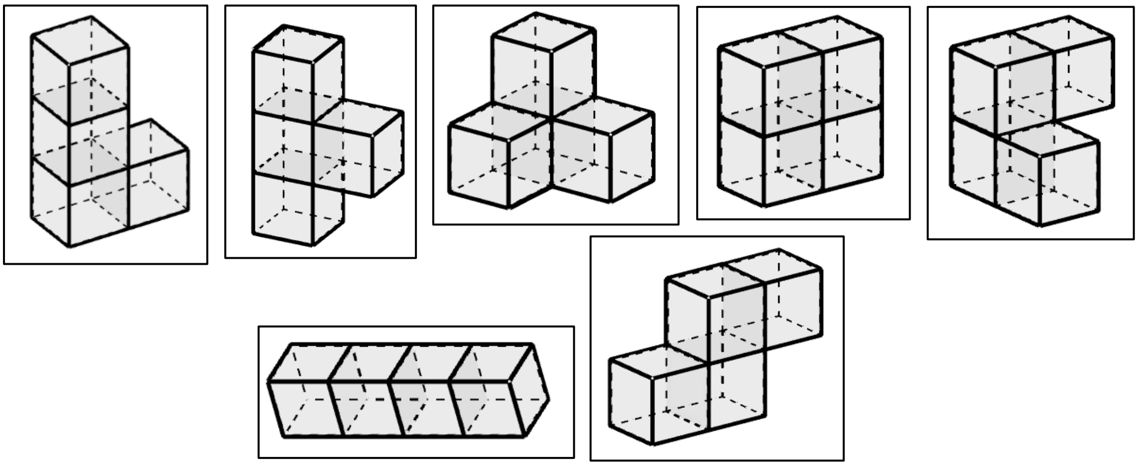
Pomůckou pro demonstrování řešení této úlohy mohou být 4 kostičky (například ze dřeva), z nichž si žáci všechna tělesa mohou sestavit. Případné úskalí této úlohy může spočívat v tom, že žáci si označí jako dvě různé stavby takové, u kterých dojde k otočení nebo jsou v rovinové či středové souměrnosti. Ačkoli hovoříme o prostorových shodnostech, žák může nabýt dojmu, že našel dvě různá tělesa (*Obr. 126*).



Obr. 126: Znázornění dvou shodných těles

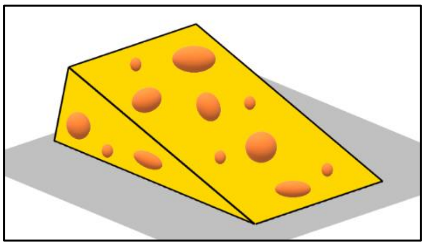
Řešení:

Hledáme taková tělesa, kde se krychle dotýkají stěnami. Tímto způsobem lze celkem vytvořit 7 různých staveb. Pokud bychom uvažovali tělesa, kde by se krychle dotýkaly hranami či rohy, jednalo by se o velké množství možností.



Obr. 127: Řešení příkladu - 7 různých staveb

<u>Příklad:</u> Co vznikne rovným řezem kouskem sýra, jenž je trojbokým hranolem s podstavou tvaru rovnoramenného trojúhelníka? Jmenujte konkrétní tělesa.



Obr. 128: Sýr tvaru trojbokého hranolu

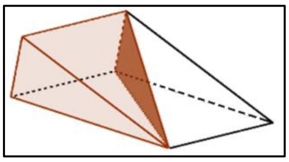
Komentář:

Pokud si žáci neuvědomí, že mají jmenovat tělesa, pak mohou uvažovat tak, že např. „odkrojí" hranu (vznikne úsečka), vrchol (vznikne bod) nebo nějakou ze stěn (vznikne trojúhelník či obdélník). Tím se však přesouvají do dvojrozměrné geometrie.

Řešení:

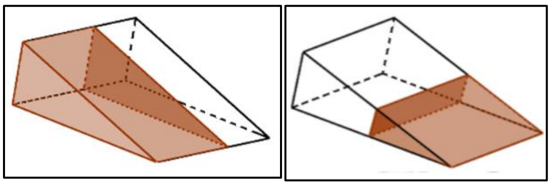
Příklady těles, která mohou vzniknout:

1) jehlan (čtyřboký)



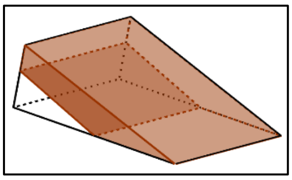
Obr. 129: Čtyřboký jehlan

2) hranol (trojboký)



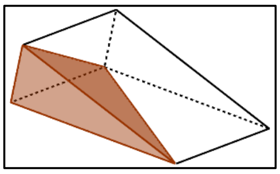
Obr. 130: Dvě možné varianty trojbokého hranolu

3) hranol (čtyřboký)



Obr. 131: Čtyřboký hranol

4) obecný čtyřstěn



Obr. 132: Obecný čtyřstěn

4.4 Průzkum schopnosti žáků řešit prostorové úlohy

Obecně bývá při výuce prostorové geometrie opomíjeno systematické rozvíjení prostorové představivosti u žáků, o čemž pak hovoří výsledky testů studijních předpokladů. Po přechodu do prostoru dimenze 3 žáci často úlohy buď úplně přeskočí nebo je nedovedou vyřešit do konce. Kdežto v geometrii v rovině (planimetrii) je procento úspěšnosti vyšší, což má i celkem logické vysvětlení, protože české školy se věnují planimetrii mnohem intenzivněji, jelikož pro učitele matematiky jsou vlastnosti objektů v rovině mnohem snadněji demonstrovatelné [11].

4.4.1 Popis průzkumu

Záměrem tohoto průzkumu je pokusit se alespoň částečně nastínit úroveň dovedností a znalostí žáků 9. třídy základní školy v oblasti stereometrie. Ze souboru úloh v této práci jsem vybrala 4 úlohy tak, abych pomocí nich prověřila co nejvíce okruhů stereometrie. Vytvořila jsem pracovní list, jehož součástí je hlavička, zadání 4 úloh a doplňující otázky.

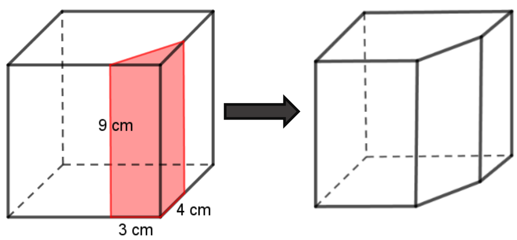
Průzkum probíhal na základě toho, že pracovní list (viz. *Příloha 1*) vyplňovali tři žáci ze třech různých základních škol nezávisle na sobě. Pro vypracování jim bylo poskytnuto dostatek času. Kvůli zachování anonymity jsou žáci v textu označování jako *Ž1, Ž2, Ž3*. Od průzkumu je očekáván výstup kvalitativního charakteru [30].

Parametry průzkumu	
Předmět průzkumu	Pracovní list vypracovaný třemi žáky 9. třídy
Základní školy, odkud byli žáci vybráni	ZŠ Chyšky (okr. Písek) ZŠ Kovářov (okr. Písek) ZŠ Votice (okr. Benešov)
Témata v pracovním listu v kontextu vzdělávacího obsahu geometrie	Krychle a kvádr; povrch a objem krychle a kvádru (6. třída). Hranoly; povrch hranolu (7. třída) [1], [2].
Zkoumané okruhy stereometrie	Řez tělesem, stavba z krychlí, pojmy prostorové geometrie, povrch a objem tělesa
Čas pro řešení úloh	neomezený

4.4.2 Analýza žákovských řešení

V této kapitole si rozebereme všechny čtyři úlohy, které byly žákům v pracovním listě předloženy a ukážeme si, jakým způsobem je žáci řešili či zda si vůbec s řešením věděli rady. V příloze naleznete naskenovaná jejich originální řešení.

<u>Příklad 1:</u> Pětiboký hranol vznikl tak, že z dřevěné krychle s hranou délky 9 cm byl odříznut kolmý trojboký hranol. Rozměry kolmého trojbokého hranolu jsou vidět v obrázku.



a) Kolik stěn má vzniklý pětiboký hranol?

b) Kolik vrcholů má vzniklý pětiboký hranol?

c) Kolik hran má vzniklý pětiboký hranol?

d) Vypočítejte povrch pětibokého hranolu.

Ž1:

a) pravděpodobná záměna pojmů *stěna* a *boční stěna; „pětiboký hranol má 5 stěn“*
b) správně
c) *„pětiboký hranol má 10 hran“;* nejspíš nebyly brány v potaz i boční hrany
d) žák správně vycházel z rozdílů povrchů stěn krychle a trojbokého hranolu, jako výsledek zapsal povrch bočních stěn bez podstav

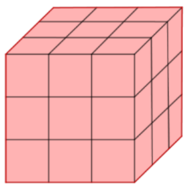
Ž2:

a) žákova odpověď: *5*; pravděpodobně za stěnu tělesa považuje pouze boční stěny
b) žákova odpověď: *5*; nejspíš si představuje jen vrcholy při horní podstavě
c) žákova odpověď: *5;* opět bral asi v potaz jen boční hrany
d) správně vypočítány povrch krychle a délka neznámé hrany trojbokého hranolu; chybná úvaha pro výpočet výšky trojúhelníku; vymyšlený vzorec pro výpočet pětiúhelníku

Ž3:

a) správně
b) správně
c) odpověděl *14*
d) pouze dopočítána neznámá hrana trojbokého hranolu

Příklad 2: Krychle o objemu $27cm^3$ je červeně natřená. Byla rozřezána na shodné krychličky, každá o objemu $1\,cm^3$. Kolik krychliček bylo se třemi, dvěma, jednou a žádnou červenou stěnou?



Ž1:

- počet zjistil správně; zaměňuje pojmy *stěna* a *strana*

Ž2:

- nejspíš ani nepochopil zadání úlohy; napsal *„nelze vypočítat“*

Ž3:

- počty krychliček určil správně krom krychliček se dvěma stěnami obarvenými, kterých zjistil 16 místo 12; kdyby provedl zkoušku, nevyšel by mu součet 27

Příklad 3: Maminka koupila krabici kostkového cukru. Radek snědl nejdříve celou horní vrstvu, tj. 77 kostek, potom snědl vrstvu boční, to bylo 55 kostek, a nakonec vrstvu přední. Kolik kostek zbylo v krabici?

Ž1:

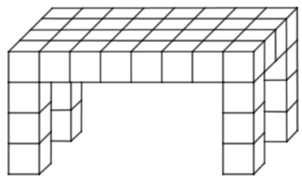
- slovní úlohu vyřešil správně; k jednotlivým situacím si dělal náčrtky; rychlý postup řešení

Ž2:

- úlohu neřešil; napsal *„nelze vypočítat"*

Ž3:

- úlohu vyřešil jednoduše a správně; vytvořil model z kostek demonstrující situaci (foto viz. *Příloha 2*)



Příklad 4: Na obrázku je stoleček, který byl slepen ze shodných krychliček a objem stolku je 880 cm^3.

a) Určete počet všech krychliček, ze kterých je stoleček slepen.

b) Vypočítejte v cm^3 nejmenší vnitřní objem krabice, do které se vejde celý stoleček.

Ž1:

- žák určil správné řešení; k úloze udělal zápis, výpočet i odpověď

Ž2:

- dle žáka nelze vypočítat

Ž3:

- stejně jako Ž1 si stolek rozdělil na dvě části – nohy a desku; výpočet dovedl do konce

4.4.3 Vyhodnocení průzkumu

Z důvodu malého vzorku žáků nelze výsledek tohoto průzkumu generalizovat v rámci všech žáků devátých ročníků. Nicméně nejsměrodatnější je pro nás skutečnost, že žáci byli vybráni z různých škol. Průzkum navíc zahrnuje látku, která bývá vyučována v 6. a 7. třídě, a žáci vyplňovali list bez předchozího opakování, aniž by jim bylo řečeno, o jaké téma se jedná. Tyto okolnosti nám mohou alespoň nastínit efektivnost výuky stereometrie na českých školách a s tím související schopnost žáků si znalosti a dovednosti z této oblasti geometrie vybavit z dlouhodobé paměti.

Zde již narážíme na první problém, že pro žáky může být řešení těchto úloh obtížné, protože to, co se naučili, už zkrátka zapomněli, jelikož se to vůbec do dlouhodobé paměti neuložilo, o čemž napovídají odpovědi na otázky u *Ž2*. Dále je možné vidět, že žáci nerozumí některým pojmům nebo je zaměňují (např. *stěna* a *strana*). U *Ž2* nejspíš panuje jistá antipatie ke geometrii, protože po prvním příkladu. který se ještě snažil vypočítat, už žádnou úlohu nevyřešil a jeho závěrem bylo „nelze vypočítat“.

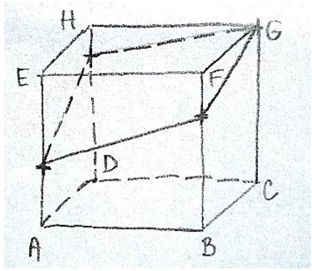
Na druhou stranu ale musím ocenit jisté prvky, kterými si žáci usnadnili řešení úlohy, jelikož se jim díky nim podařilo lépe dosáhnout správného výsledku. Konkrétně se jedná u *Příkladu 3* o řešení pomocí náčrtků u *Ž1* a o vymodelování situace z kostek *Lego* u *Ž3.*

4.5 Didaktické pomůcky pro podporu výuky stereometrie

Každý učitel by se měl snažit o používání didaktických pomůcek během svých vyučovacích hodin. Nejinak by tomu mělo být ve výuce matematiky. Troufám si tvrdit, že ve výuce prostorové geometrie na základní škole je to přímo nutné. Žáci si potřebují daný předmět osahat nebo si ho sami vytvořit, aby pochopili vzájemné vztahy mezi částmi objektu [29]. Protože právě takové pomůcky nejenže slouží učiteli k dosažení vytyčených cílů, ale zároveň podmiňují a zefektivňují poznávací proces u žáka. Dochází tak k mnohem intenzivnějšímu kognitivnímu procesu, který zároveň umožňuje lépe uchovávat vjemy a poznatky do dlouhodobé paměti [19].

4.5.1 Náčrt

Základním vyjadřovacím prostředkem v geometrii je náčrt. Jedná se o kresbu od ruky, při které by měla být používána výhradně tužka, aby bylo možné kresby ještě dále upravovat, což v případě kreslení perem nebo fixem již nelze. Je tedy velice důležité seznamovat žáky v hodinách geometrie se základními pravidly kreslení od ruky, jako je např. správné držení tužky, dělání čar od ruky, kreslení přerušovaných a čerchovaných čar, dodržování zásad volného rovnoběžného promítání, apod [10].



Obr. 133: Náčrt řezu krychle

Někdy mají žáci tendenci kombinovat u nákresů črtání a rýsování, čemuž bychom měli zabránit. Avšak u geometrických úloh bychom měli vyžadovat, aby si žáci náčrt úlohy vytvořili. Protože kvalitní náčrtek je klíčovou dovedností pevně spojenou s pochopením prostorových vztahů a většinou žáka navede k úspěšnému vyřešení příkladu [34].

4.5.2 Dynamické počítačové softwary

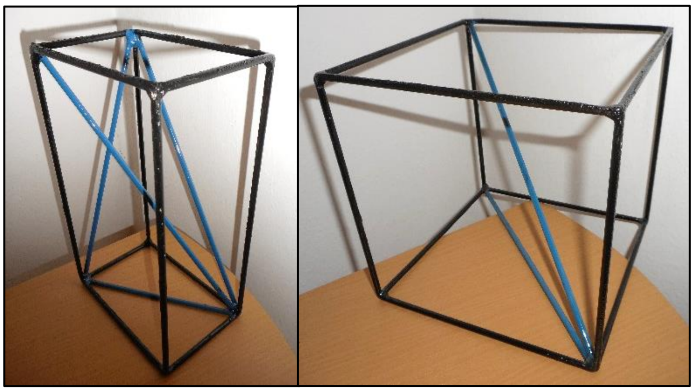
Existuje celá řada programů pro podporu výuky stereometrie, vybírat lze z více či méně profesionálních programů. Měli bychom si však určit požadavky, co bychom od takového programu používaného ve vlastní výuce očekávali. Je třeba vybrat takový program, který nabízí intuitivní ovládání pro snazší spolupráci s žáky ve výuce, přiměřenou nabídku nástrojů, snadnou manipulaci s tělesy, atd.

Já osobně preferuji dynamický program *GeoGebra*, v němž jsou mimojiné vytvářeny veškeré ilustrace k příkladům v mé bakalářské a diplomové práci. Tento software je alternativním programem ke staršímu *Cabri*, což je ovšem komerční program, zatímco GeoGebra je volně ke stažení na internetu. Vzásadě není ani nutné program stahovat, v základním režimu pracuje i přes internetový prohlížeč a navíc na internetu existuje velké množství appletů, které lze využívat jako pomůcku do hodin geometrie [32].

4.5.3 Drátěné modely těles

Drátěné modely jsou spíše takovým archaismem v českém školství. Desítky let byly běžně používány v hodinách prostorové geometrie. Lze ale říci, že takovým modelům už téměř odzvonilo, protože na scénu učebních pomůcek do výuky před několika lety nastoupily technologie, které umožňují i žákům ve výuce rozmanitou manipulaci s tělesy či změnu rozměrů objektů [17]. Nicméně i přesto, že technologie nabízí více dynamiky než drátěné modely, měly by drátěné modely těles náchazet při výuce své uplatnění, a to nejen při výpadku elektrického proudu, ale i zkrátka proto, že to je předmět, který si žáci mohou osahat.

V dnešení době je spíše raritou sehnat ke koupi podobnou pomůcku, ovšem alespoň trochu zručný svářeč si s vytvořením tělesa poradí. Na obrázku (*Obr. 134*) můžete vidět modely krychle a kvádru, které byly vytvořeny ve svářečské dílně a za jejichž zhotovení dle mých požadavků děkuji svému příteli Radku Kopkovi. U těles jsou hrany natřeny černým nátěrem, zatímco tělesové a stěnové úhlopříčky jsou natřeny modře. Modely je vhodné využít při počítání délky stěnových a tělesových úhlopříček, což bývá pro žáky pouze s použitím nákresu velmi obtížné. Zde je můžeme nechat změřit délky hran těles a pomocí nich dopočítat délky úhlopříček. Reálnost výsledku pak mohou srovnat se skutečnými délkami úhlopříček, které opět zjistí měřidlem.



Obr. 134: Drátěné modely kvádru (vlevo) a krychle (vpravo)

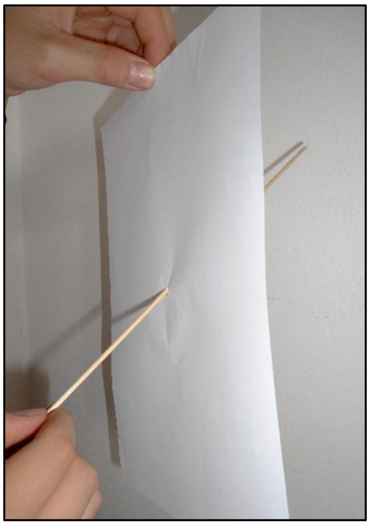
4.5.4 Stavby z krychlí

Toto didaktické prostředí navazuje na zkušenosti dětí s kostkami, které získávají již v předškolním věku a silně formuje jejich prostorovou představivost [28]. U těchto „matematických“ staveb z kostek se z různorodých staveb dětí omezíme na takové stavby, jenž vznikají přikládáním stejně velkých krychlí (kostek) k sobě celými stěnami. Žáci si nevědomky všímají hlubších detailů, například jak je stavba vysoká, z kolika kostek je tvořena a podobně, čímž se rodí pojmy jako výška, objem, povrch…

Obr. 135: Příklad stavby z kostek

4.5.5 Modelování vzájemných poloh z papíru a špejlí

Vzájemné polohy objektů v prostoru se stěží vysvětlují jen za pomoci nákresů. Je nezbytné využít fyzické modely tak, aby měl žák šanci pochopit situace v trojrozměrném prostředí, a aby je poté uměl též vyjádřit na papír. Zde volíme model papír – špejle, nicméně špejle může být nahrazena čímkoli podobného tvaru. Myšlenka je prostá: papír reprezentuje rovinu v prostoru a špejle přímku v prostoru. Dále je vše jen na nás a naši fantazii. Šikovný pedagog si nejenže poradí se znázorněním vzájemné polohy přímky a roviny, dvou přímek, dvou rovin, ale zároveň zapojí do činnosti všechny žáky ve třídě, čímž se mu dostane cenné zpětné vazby.



Obr. 136: Ukázka demonstrace vzájemné polohy objektů pomocí špejle a papíru

Závěr

Původním záměrem této práce bylo tematicky navázat na bakalářskou práci a o něco hlouběji nahlédnout do problematiky prostorové geometrie. Dále jsem chtěla pokračovat s vytvářením nákresů v grafickém programu GeoGebra, který jsem si oblíbila pro jeho snadnou ovladatelnost a dostačující množství nástrojů, a v němž vznikly veškeré ilustrace k úlohám.

Práce je strukturována jakožto soubor úloh ze stereometrie, jemuž předchází teoretický základ stereometrie společně s pojmy a pravidly spojenými s Mongeovým promítáním. Protože právě tato projekce je v diplomové práci stěžejní zobrazovací metodou vedle tradičního rovnoběžného promítání. Mé vlastní obrázky tedy doplňují nejen praktickou část práce, jež sestává z příkladů základních, vysvětlujících techniku Mongeova promítání, ale i z příkladů metrických a polohových, a konečně i úloh složitějších.

Značná část této práce je věnována didaktickému aspektu prostorové geometrie, kdy jsem s využitím publikací určených žákům základních škol vytvořila sbírku příkladů s komentáři a řešením, která může posloužit pedagogům k rozvíjení prostorové představivosti žáků, jež je, jak jsem si sama ověřila, na nepříliš dobré úrovni. V závěru práce proto zmiňuji několik didaktických pomůcek a způsob jejich využití, které mohou žákům proces poznání v oblasti stereometrie usnadnit.

Zdroje

Literatura

[1] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-656-7.

[2] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 7 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-681-9.

[3] BORECKÁ, Květoslava, Ludmila CHVALINOVÁ, Mája LOVEČKOVÁ a Veronika ŠMÍDOVÁ-ROUŠAROVÁ. *Konstruktivní geometrie* [online]. Brno, 2006 [cit. 2021-6-23]. Učební text vysokých škol. Vysoké učení technické v Brně.

[4] ČERNÝ, Jaroslav a Milada KOČANDRLOVÁ. *Konstruktivní geometrie*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1998. ISBN 80-01-01815-6.

[5] GAZÁRKOVÁ, Dana, Hana HEDBÁVNÁ, Hana LIŠKOVÁ a Ivana ONDRÁČKOVÁ. *Testy 2021 - 2022 z matematiky: pro žáky 9. tříd ZŠ*. Brno: DIDAKTIS, 2020. ISBN 978-80-7358-339-2.

[6] HARANT, Michal, Oldřich LANTA, Miroslav MENŠÍK a Alois URBAN. *Deskriptivní geometrie: pro II. a III. ročník SVVŠ*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, 284 s.

[7] HOLÁŇ, Štěpán a Libuše HOLÁŇOVÁ. *Cvičení z deskriptivní geometrie II: Promítací metody*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 1998. Učební text. Vysoké učení technické v Brně. 113 s.

[8] CHARVÁT, Roman. *Přijímací zkoušky na střední školy - matematika: 43 variant, 4-leté střední školy, víceletá gymnázia*. Plzeň: MAT.

[9] KARGEROVÁ, Marie. *Inženýrská geometrie: [urč. pro posl. fak. stroj.]*. Praha: České vysoké učení technické, 1994. ISBN 80-01-01147-x.

[10] KLETEČKA, Jaroslav a Petr FOŘT. *Technické kreslení*. 2., opr. vyd. Brno: Computer Press, 2007. Učebnice (Computer Press). ISBN 978-80-251-1887-0.

[11] KŘÍŽOVÁ, Kamila. *Stereometrické úlohy*. České Budějovice, 2019. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

[12] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965, 365 s.

[13] VALA, Josef. *Deskriptivní geometrie*. Brno: CERM, 1998. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-0647-x.

[14] *TESTY z matematiky pro 9. ročník základní školy: Originální zadání přijímacích zkoušek ze středních škol, doplněno úlohami k opakování*. Educo, 2000. ISBN 80-86162-05-2.

[15] *Testy z matematiky 2001: příprava k přijímacím zkouškám na čtyřleté střední školy*. didaktis, 2002. ISBN 80-86285-15-4.

Internetové zdroje

[16] ANGELO. Proč mají hrady schodiště pravotočivé. *Svetovafakta.cz* [online]. 1.2.2018 [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: https://www.svetovafakta.cz/proc-maji-hrady-schodiste-pravotocive/

[17] BENDL, Václav. Drátěným modelům pomalu odzvonilo aneb digitální technollogie pomáhají. *Podpora práce učitelů* [online]. [cit. 2021-6-24]. Dostupné z: https://gramotnosti.pro/blog/show?blogArticleId=765

[18] Deskriptivní geometrie. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Deskriptivn%C3%AD_geometrie

[19] DOBIÁŠOVÁ, Hana. *Didaktické pomůcky a hry ve výuce ČDJ na ZŠ*. Praha, 2016. Ročníková práce. Ústav jazykové a odborné přípravy Univerzity Karlovy v Praze. Vedoucí práce Mgr. Zuzana Janoušková.

[20] Dvoušroubovice. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2021-6-25]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Dvou%C5%A1roubovice

[21] Gaspard Monge. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Gaspard_Monge

[22] HAŠEK, Roman. *Geometrie pro navazující studium: Křivky v E_3* [online]. 2019 [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/opory/Geometrie_nav_2.pdf. Studijní text.

[23] HAŠEK, Roman. *Úvod do geometrie* [online]. České Budějovice, 2019 [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/opory/Uvod_do_geometrie.pdf. Studijní text.

[24] Historie schodišť: Od fascinující architektury až po přístupové bariéry. *Stannah* [online]. 24.9.2018 [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: https://blog.stannah.cz/spolecnost/historie-schodist/

[25] KOTEK, Petr. Čeští deváťáci nesnášejí matematiku a polovina se jich ve škole nudí. *Pravo.cz* [online]. 1.2.2011 [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: https://www.novinky.cz/veda-skoly/clanek/cesti-devataci-nesnaseji-matematiku-a-polovina-se-jich-ve-skole-nudi-76892

[26] KRÁLOVÁ, Magda. Gaspard Monge: francouzský matematik. *Techmania Science Center: Eduportál* [online]. [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: https://edu.techmania.cz/encyklopedie/vedec/1259/monge

[27] *Kruhová šroubovice* [online]. [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: https://kag.upol.cz/data/upload/16/plochy2/sroubovice.pdf. Opory studia.

[28] Krychlové stavby. In: *Hejného metoda* [online]. [cit. 2021-6-24]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/krychlove-stavby

[29] NOVÁKOVÁ, Kristýna. *Úlohy pro rozvoj prostorové představivosti*. České Budějovice, 2021. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

[30] SEBERA, Martin. *Vybrané kapitoly z metodologie* [online]. In: . Brno: Masarykova univerzita, 2012, 2012 [cit. 2021-6-24]. ISBN 978-80-210-5963-4. Dostupné z: https://www.fsps.muni.cz/emuni/data/reader/book-8/04.html

[31] Státní přijímačky: Přijímačky z matematiky. *StatniPrijimacky.cz* [online]. [cit. 2021-6-24]. Dostupné z: https://www.statniprijimacky.cz/

[32] TAUŠOVÁ, Jana. *Nástroje pro 3D modelování ve výuce stereometrie* [online]. Praha, 2012 [cit. 2021-6-24]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/42261/DPTX_2010_1__0_319775_0_97452.pdf?sequence=1. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce PhDr. Josef Procházka, Ph.D.

[33] Točité schodiště. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/To%C4%8Dit%C3%A9_schodi%C5%A1t%C4%9B

[34] VONDROVÁ, Naďa, Radka HAVLÍČKOVÁ, Miroslav RENDL a Jana ŽALSKÁ. *Kritická místa matematiky základní školy: materiál pro učitele* [online]. Praha, 2015 [cit. 2021-6-24]. Dostupné z: http://mdisk.pedf.cuni.cz/Nada/Manu%C3%A1l%20Kritick%C3%A1%20m%C3%ADsta%20matematiky%20na%20z%C3%A1kladn%C3%AD%20%C5%A1kole%20final.pdf. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[35] VORÁČOVÁ, Šárka. *Vivianiho křivka* [online]. In: . 2016, 7.1.2016 [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/PnXJmY

Seznam obrázků

Seznam příloh

Přílohy a obrázky

Šroubovice

Obrázek 1

Obrázek 2

Obrázek 3

Obrázek 4

Obrázek 5

Obrázek 6

Obrázek 7

Obrázek 8

Příloha 1

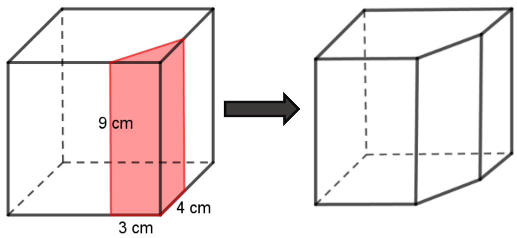
Jméno: Datum:

Název ZŠ: Třída:

Povolené pomůcky: *tužka, kalkulačka* Čas na vypracování: *neomezený*

Pokyny: *Vyřeš tento pracovní list obsahující čtyři úlohy a odpověz na otázky. Svá řešení včetně postupů napiš na následující prázdné listy. Pokus se okomentovat, jak jsi na dané výsledky přišel/přišla. Nakonec odpověz na tři otázky v dolní části listu.*

Příklad 1: Pětiboký hranol vznikl tak, že z dřevěné krychle s hranou délky 9 cm byl odříznut kolmý trojboký hranol. Rozměry kolmého trojbokého hranolu jsou vidět v obrázku.



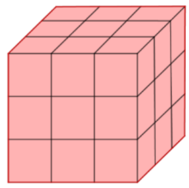
a) Kolik stěn má vzniklý pětiboký hranol?

b) Kolik vrcholů má vzniklý pětiboký hranol?

c) Kolik hran má vzniklý pětiboký hranol?

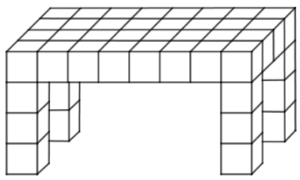
d) Vypočítejte povrch pětibokého hranolu.

Příklad 2: Krychle o objemu $27 cm^3$ je červeně natřená. Byla rozřezána na shodné krychličky, každá o objemu $1\ cm^3$. Kolik krychliček bylo se třemi, dvěma, jednou a žádnou červenou stěnou?



Příklad 3: Maminka koupila krabici kostkového cukru. Radek snědl nejdříve celou horní vrstvu, tj. 77 kostek, potom snědl vrstvu boční, to bylo 55 kostek, a nakonec vrstvu přední. Kolik kostek zbylo v krabici?

Příklad 4: Na obrázku je stoleček, který byl slepen ze shodných krychliček a objem stolku je $880\ cm^3$.



a) Určete počet všech krychliček, ze kterých je stoleček slepen.

b) Vypočítejte v cm^3 nejmenší vnitřní objem krabice, do které se vejde celý stoleček.

Otázky:

Co mají všechny úlohy společné?

Jak se ti úlohy řešily?

Objevilo se zde něco, co pro tebe bylo nové?

Příloha 2

<u>Ž1:</u>

1/3

Pracovní list

Jméno: [redacted] Datum: 26. 2. 2021

Název ZŠ: ZŠ [redacted] Třída: 9.

Povolené pomůcky: *tužka, kalkulačka* Čas na vypracování: *neomezený*

Pokyny: *Vyřeš tento pracovní list obsahující čtyři úlohy a odpověz na otázky. Svá řešení včetně postupů napiš na následující prázdné listy. Pokus se okomentovat, jak jsi na dané výsledky přišel/přišla. Nakonec odpověz na tři otázky v dolní části listu.*

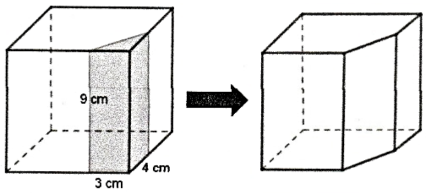
<u>Příklad 1:</u> Pětiboký hranol vznikl tak, že z dřevěné krychle s hranou délky 9 cm byl odříznut kolmý trojboký hranol. Rozměry kolmého trojbokého hranolu jsou vidět v obrázku.

a) Kolik stěn má vzniklý pětiboký hranol?

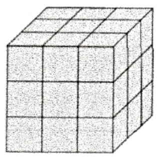
b) Kolik vrcholů má vzniklý pětiboký hranol?

c) Kolik hran má vzniklý pětiboký hranol?

d) Vypočítejte povrch pětibokého hranolu.



<u>Příklad 2:</u> Krychle o objemu $27 cm^3$ je červeně natřená. Byla rozřezána na shodné krychličky, každá o objemu $1\ cm^3$. Kolik krychliček bylo se třemi, dvěma, jednou a žádnou červenou stěnou?

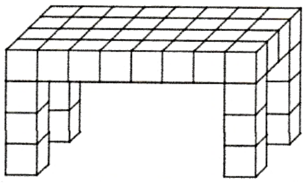


<u>Příklad 3:</u> Maminka koupila krabici kostkového cukru. Radek snědl nejdříve celou horní vrstvu, tj. 77 kostek, potom snědl vrstvu boční, to bylo 55 kostek, a nakonec vrstvu přední. Kolik kostek zbylo v krabici?

<u>Příklad 4:</u> Na obrázku je stoleček, který byl slepen ze shodných krychliček a objem stolku je $880\ cm^3$.

a) Určete počet všech krychliček, ze kterých je stoleček slepen.

b) Vypočítejte v cm^3 nejmenší vnitřní objem krabice, do které se vejde celý stoleček.



Co mají všechny úlohy společné?

Jsou o nějakých tělesech

Jak se ti úlohy řešily?

celkem dobře

Objevilo se zde něco, co pro tebe bylo nové?

Co je vrchol pětibokého hranolu.

1) a) pětiboký hranol má 5 stěn

b) pěti boký hranol má 10 vrcholů

c) pětiboký hranol má 10 hran

d) - dvě čtvercové stěny — $9 \cdot 9 \cdot 2 = 162\ cm^2$

zmenšená stěna $9 \cdot 6 = 54\ cm^2$

2 · zmenšená stěna $9 \cdot 5 = 45\ cm^2$

~~typné plochy:~~

~~1) $3 \cdot 9 = 27\ cm^2$~~

~~2) $4 \cdot 9 = 36\ cm^2$~~

$$\begin{array}{r} 162 \\ 54 \\ 45 \\ 45 \\ \hline 306 \end{array}$$

nová stěna

pythagorova věta ~~A~~ $= a^2 + b^2 = c^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 3^2 + 4^2$

$c^2 = 9 + 16$

$c^2 = \sqrt{25}$

$c = 5$

$S = a \cdot b$

$S = \cancel{B}\ 5 \cdot 9$

$S = 45\ cm^2$

Pětiboký hranol má $306\ cm^2$

2) 8 krychliček mělo červené 3 strany (jsou na hraně krychle)

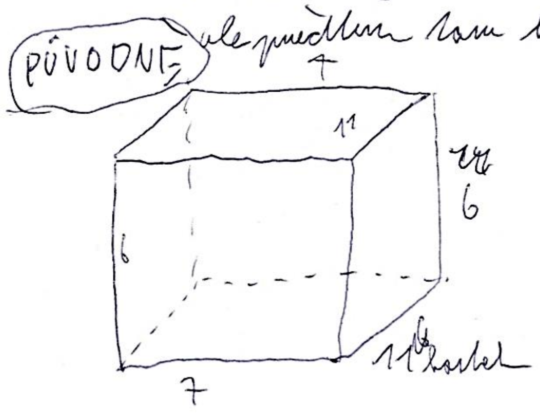
~~a 2)~~ 12 krychliček má červenou hranu ze dvou stran

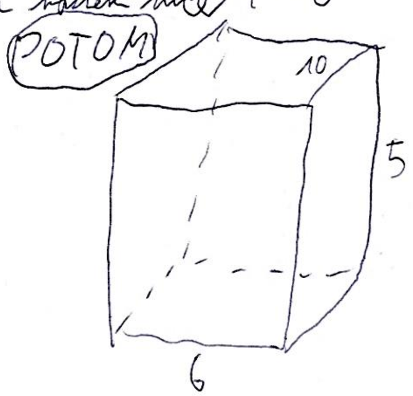
~~6~~ 6 krychličky mají jednu stěnu červenou

1 krychlička ~~nemá~~ není zabarvená vůbec

3) horní stran 77 kostek
stačí 11 · 7

druhá stěna 55 kostek stačí 11 · 5
ale předtím tam byla kostek více 11 · 6





4) a) rohy bez desky 12 kostek
deska stolu – 8 · 4 = 32
dohromady je z 44 kostek
880 : 44 = 20 (KAŽDÁ kostka
KOSTIČKA MÁ 20 cm³)

b) $V = a \cdot b \cdot c$
$V = 8 \cdot 4 \cdot 4$
$V = 32 \cdot 4 = 128$ kostek

Krabice pro stolek by měla
být velká pro 128 kostek
$128 \cdot 20 = 2560$
Krabice bude muset mít objem 2560 cm³

$V = a \cdot b \cdot c$
$V = 6 \cdot 5 \cdot 10$
$V = 300$
V krabici zbyla 300

Ž2:

1/2

príklad 1

a) 5

b) 5

c) 5

d) 512,54

$S_{\square} = 6 \cdot a \cdot a$

$S_{\square} = 6 \cdot 9 \cdot 9$

$S_{\square} = 486 \text{ cm}^2$

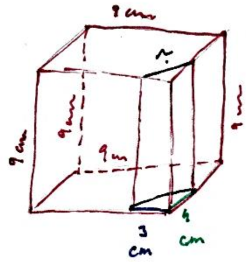
$S_{\triangle} = 2 \cdot \frac{v_a}{2} + v$

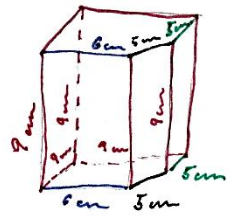
$S = \cancel{2} \cdot \frac{4,27}{\cancel{2}} + 9$

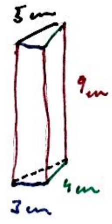
$S = 4,27 + 9$

$S = 13,27 \text{ cm}^2$

d)







$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$

$S = 2 \cdot 13,27 + 486$

$S = 512,54$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 3^2 + 4^2$

$c^2 = 9 + 16$

$c^2 \sqrt{25}$

$c = 5$

$v_a^2 = 4^2 + 1,5^2$

$v_a^2 = 16^2 + 2,25^2$

$v_a^2 = \sqrt{18,25}$

$v_a = 4,27$

príklad 2

$V = a \cdot a \cdot a$

$27 = a^3$

$\sqrt{27} = a$

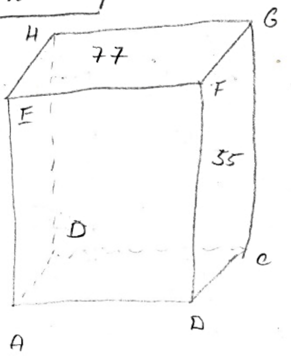
$2,28 = a$

NEJDE

VYPOČÍTAT

2/2

|příklad 3|



NELZE
VYPOČÍTAT

|příklad 4|

V=
880=

NELZE
VYPOČÍTAT

Co mají všechny úlohy společné?
- jsou vyšovací

Jak se ti úlohy řešily?
- obtížně

Objevilo se zde něco, co pro tebe bylo nové?
- ne, jenom už jsem to zapomněla

Ž3:

1/3

Pracovní list

Jméno: [redacted]

Název ZŠ: ZŠ [redacted]

Datum:

Třída: 9 D

Povolené pomůcky: *tužka, kalkulačka*

Čas na vypracování: *neomezený*

Pokyny: *Vyřeš tento pracovní list obsahující čtyři úlohy a odpověz na otázky. Svá řešení včetně postupů napiš na následující prázdné listy. Pokus se okomentovat, jak jsi na dané výsledky přišel/přišla. Nakonec odpověz na tři otázky v dolní části listu.*

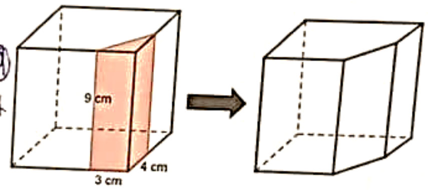
Příklad 1: Pětiboký hranol vznikl tak, že z dřevěné krychle s hranou délky 9 cm byl odříznut kolmý trojboký hranol. Rozměry kolmého trojbokého hranolu jsou vidět v obrázku.

a) Kolik stěn má vzniklý pětiboký hranol? 7

b) Kolik vrcholů má vzniklý pětiboký hranol? 10

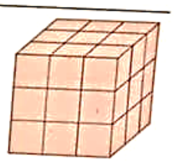
c) Kolik hran má vzniklý pětiboký hranol? 14

d) Vypočítejte povrch pětibokého hranolu.



Příklad 2: Krychle o objemu $27 cm^3$ je červeně natřená. Byla rozřezána na shodné krychličky, každá o objemu $1\ cm^3$. Kolik krychliček bylo se třemi, dvěma, jednou a žádnou červenou stěnou?

ŽÁDNÁ BARVA 1
jedna strana 6
obě strany 16
3 strany - 8

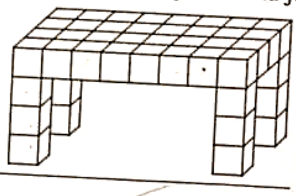


Příklad 3: Maminka koupila krabici kostkového cukru. Radek snědl nejdříve celou horní vrstvu, tj. 77 kostek, potom snědl vrstvu boční, to bylo 55 kostek, a nakonec vrstvu přední. Kolik kostek zbylo v krabici?

Příklad 4: Na obrázku je stoleček, který byl slepen ze shodných krychliček a objem stolku je $880\ cm^3$. 88

a) Určete počet všech krychliček, ze kterých je stoleček slepen.

b) Vypočítejte v cm^3 nejmenší vnitřní objem krabice, do které se vejde celý stoleček. $18\ cm^3$



Co mají všechny úlohy společné?

KRYCHLE

Jak se ti úlohy řešily?

Objevilo se zde něco, co pro tebe bylo nové?

NE

2/3

① a 7

b 10

c 14

D $c^2 = 3^2 + 4^2 = 5$

② ŽÁDNÁ BARVA = 1 kostička

jedna strana = 6 kostiček

dvě strany = 16 kostiček

77x

$77 = 11 \times 7$

$55 = 11 \times 5$

$77 \times 6 = 462$

$462 - 77 = 385$

$385 - 55 = 330$

$330 - 30 = 300$

Zbylo 300 □.

OBJEM KRYCHLE –

$V = 880\,cm^3$

~~V = a · a · a~~

DESKA STOLU = 32 □

NOHY = 12 □

$32 + 12 = 44$ □ · ZE KTERÝCH JE STOLEČEK

$880 : 44 = 20\,cm^3 = 1$ □

$20\,cm^3 \cdot 16 = 320\,cm^3 \cdot 8 = \underline{2560\,cm^3}$

3/3