UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Lucie Kabelková

3. ročník – prezenční studium

Obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání maior,

Speciální pedagogika pro 2. stupeň základních škol a střední školy minor

Metrické a polohové úlohy v kótovaném promítání

Bakalářská práce

Vedoucí práce Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.

Olomouc 2022

Prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem práci vypracovala samostatně a uvedla jsem všechny použité zdroje a literaturu.

V Olomouci, 20. 4. 2022 ________________________

Kabelková Lucie

Poděkování

Chtěla bych poděkovat paní Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce.

Obsah

Úvod

Má bakalářská práce se věnuje popisu kótovaného promítání, snaží se objasnit a přiblížit řešení různých metrických a polohových úloh v tomto promítání.

Práce se skládá ze čtyř částí. V první části jsou vysvětleny základy promítání. Seznámíme se se středovým, rovnoběžným, pravoúhlým a kosoúhlým promítáním.

V druhé části je zmíněno využití kótovaného promítání v praxi a popsán princip tohoto promítání – tedy z čeho se skládá, jak se zobrazuje bod, přímka a rovina. Vysvětlíme si metodu sklápění promítací roviny do průmětny, posunutí průmětny, stupňování přímky a otočení roviny v obecné poloze. Přiblížíme si vzájemnou polohu dvou přímek, rovin, přímky a roviny, určování odchylky a velikosti. Ukážeme si zobrazení vybraných těles a určování viditelnosti.

Ve třetí části jsou řešeny příklady v kótovaném promítání. Jsou složeny z úloh polohových a metrických. V polohových úlohách určujeme vzájemnou polohu dvou prvků. Mezi metrické úlohy patří určování vzdálenosti a odchylky mezi dvěma útvary. Každý příklad se skládá ze zadání, postupu řešení a z vyrýsovaného nákresu v programu GeoGebra.

V poslední části si přiblížíme program Geogebra a ukážeme si, jak se v něm pracuje. V programu Geogebra jsou vytvořeny všechny obrázky v této práci.

Cílem bakalářské práce je představit kótované promítání a jeho základní typy úloh. Bakalářská práce může sloužit jako studijní materiál pro zájemce, kteří chtějí poznat, případně se naučit jednu základní zobrazovací metodu. Získané poznatky si mohou ověřit řešením připravených příkladů.

Teoretická část

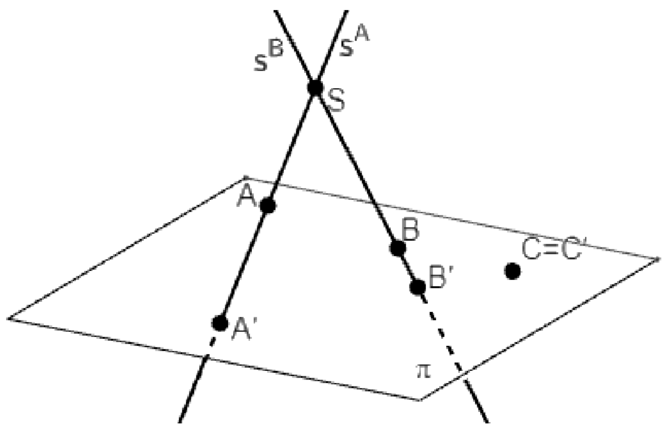
1 Úvod do promítání

V deskriptivní geometrii se zabýváme zobrazovacími metodami, které nám umožňují znázornit prostorové útvary do roviny (na plochu). V praxi to vypadá tak, že trojrozměrný předmět zobrazíme na papír jako dvojrozměrný. Znamená to tedy, že prostorovou úlohu budeme řešit jako rovinnou. Při zobrazení musí být zachována velikost, tvar, vzájemná poloha jednotlivých částí a další základní vlastnosti. Pomocí prostorové představivosti si podle nákresu představíme, jak daný předmět vypadá.

Zobrazovací metody jsou konstruktivní metody, které zachovávají základní vlastnosti zobrazeného útvaru. Mezi zobrazovací metody patří například:

- Středové promítání – dáno středem S a průmětnou π
- Rovnoběžné promítání – dáno směrem promítání s a průmětnou π
    - Pravoúhlé promítání – směr promítání s je kolmý k průmětně π
    - Kosoúhlé promítání – směr promítání s svírá s průmětnou π ostrý úhel

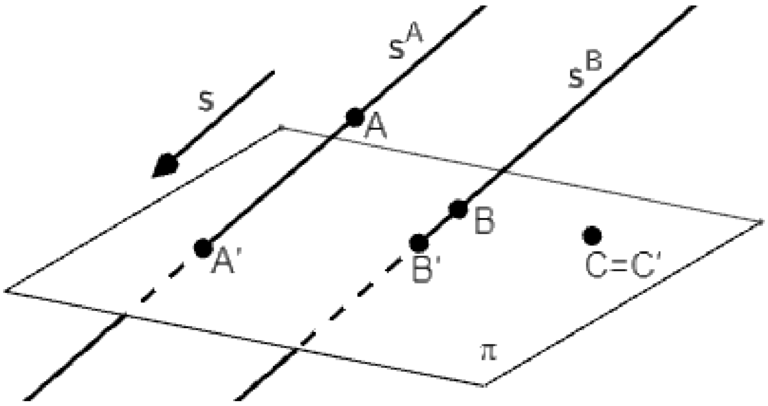
Ke každému vzoru v prostoru jsme schopni zobrazit jeho obraz v rovině. Způsobů zobrazení je několik a těm, které zachovávají základní vlastnosti, říkáme **promítání**. Principem **středového promítání** je, že rovinu π nazýváme průmětna a bod S, který neleží v rovině π ($S \notin \pi$), je středem promítání. Potom bod A v prostoru zobrazíme na průmětnu pomocí přímky AS (promítací přímky s^A) a roviny π, jejich průsečík A' je obraz bodu A (průmět bodu A).



Obrázek 1.1: Středové promítání, zobrazení bodů

Při promítání na jednu průmětnu ztotožníme průmětnu s nákresnou. Nákresna je rovina, na kterou zobrazujeme průměty bodů (obrazy bodů), například rovina listu papíru nebo tabule.

Rovnoběžné promítání nastane, jestliže střed S bude v nekonečnu (nevlastní bod). Budeme používat směr promítání s a promítací přímky jednotlivých bodů budou rovnoběžné se směrem promítání s ($s^A \parallel s$). Toto promítání je dáno průmětnou π a směrem promítání s. Podle úhlu, který svírají promítací přímky s průmětnou, rozlišujeme **pravoúhlé** a **kosoúhlé promítání**.



Obrázek 1.2: Rovnoběžné promítání, zobrazení bodů

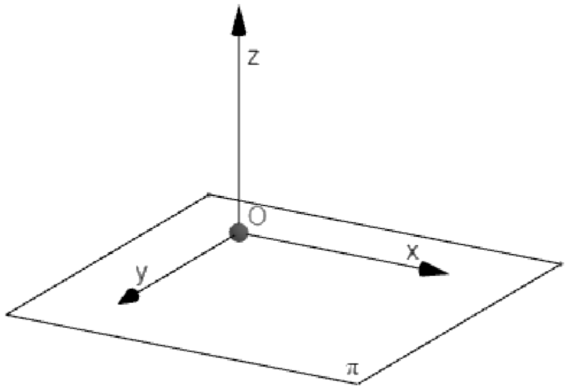
V rovnoběžném promítání platí následující věty: [1]

- Rovnoběžným průmětem bodu je bod.
- Bod ležící v průmětně je totožný s jeho průmětem.
- Průmětem přímky je přímka, pokud není rovnoběžná se směrem promítání.
- Průmětem přímky rovnoběžné se směrem promítání je bod.
- Promítací rovina je rovnoběžná se směrem promítání, leží v ní promítací přímky útvaru, který zobrazujeme.
- Průmětem promítacích rovin, je přímka, v ostatních případech je průmětem roviny celá průmětna.
- Rovnoběžné promítání zachovává incidenci.
- V rovnoběžném promítání se zachovává rovnoběžnost.
- Rovnoběžným průmětem dvou rovnoběžek, které nepatří směru promítání, jsou opět rovnoběžky (různé nebo splývající), jestliže rovnoběžky patří směru promítání, pak jejich průmětem je dvojice bodů (různých anebo splývajících).

[1] HARANT, Michal a Oldřich LANTA. *Deskriptivní geometrie pro II. a III. ročník SVVŠ*. 1. vyd. Praha: SPN, 1965. Strana 16 – 22.

- Rovnoběžným průmětem přímek různoběžných, z nich žádná nepatří směru promítání s, jsou buď přímky různoběžné, anebo totožné. Jestliže jedna z různoběžek patří směru promítání s, je jejím průmětem bod incidentní s průmětem druhé rovnoběžky.
- Průmětem rovnoběžných a shodných úseček ležících na přímkách, které nepatří směru promítání, jsou rovnoběžné a shodné úsečky.
- Rovina hlavní je rovnoběžná s průmětnou π.
- Rovnoběžným průmětem obrazce, který leží v rovině hlavní, tj. rovině rovnoběžné s průmětnou, je obrazec s ním shodný.
- V momentě kdy jsou A, B, C tři různé body přímky p, která nepatří směru promítání, potom rovnoběžným průmětem přímky p je přímka p′, na které leží průměty A′, B′, C′ bodů A, B, C, tak že platí $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$. Přitom uspořádání bodů A′, B′, C′ přímky p′ je stejné jako uspořádání bodů A, B, C přímky p.
- Délka pravoúhlého průmětu úsečky AB je menší než délka úsečky AB, nebo je rovna délce úsečky AB.
- Jestliže jedno rameno pravého úhlu je rovnoběžné s průmětnou a druhé rameno je k průmětně kolmé, je pravoúhlým průmětem tohoto úhlu pravý úhel.

Kartézský souřadnicový systém O_{xyz} používáme, když každému předmětu můžeme vytvořit jeho obraz. Abychom byli schopni podle obrazu vytvořit vzor tak, aby byl totožný s původním předmětem, zavádíme soustavu souřadnic a jednotku. Počátek soustavy značíme velkým písmenem *O* a souřadnicové osy malými písmeny *x, y, z*. Každý bod *A* v prostoru lze zapsat jako uspořádanou trojici reálných čísel $A\ [x_A, y_A, z_A]$, Čísla x_A, y_A a z_A jsou souřadnice na ose *x, y* a *z*.



Obrázek 1.3: Souřadnicový systém

2 Kótované promítání – pravoúhlé promítání na jednu průmětnu

Kótované promítání je zobrazovací metoda, která se skládá z rovnoběžného a pravoúhlého promítání na jednu průmětnu.

S kótovaným promítáním se seznamujeme ve výuce deskriptivní geometrie. V praxi se používá ve stavebnictví, strojírenství, topografii, geografii, astronomii a v dalších technických oborech.

Nejznámějším příkladem kótovaného promítání je turistická mapa. Když si například přestavíme, jak vypadá hora, všimneme si, že je na mapě znázorněna pomocí tzv. vrstevnic. Vrstevnice vznikly jako průsečnice hory s vodorovnými rovinami.

Dále se kótované promítání využívá v oblasti stavebnictví, kde se řeší například tvar střechy. Střecha musí mít určitý spád, aby z ní voda odtékala do okapů. Architekti vytváří výkresy například nových budov.

V odvětví techniky se používají různé náčrty přístrojů, zobrazují se různé stroje, jejich součástky a plánky.

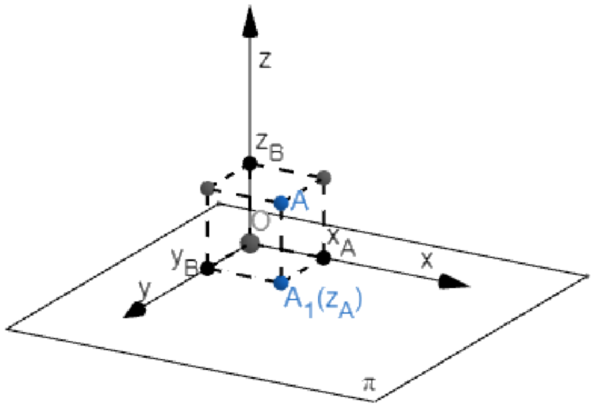
2.1 Popis zobrazovací metody. Zobrazení bodu

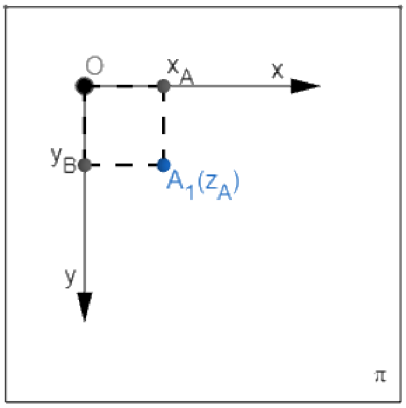
„Jednu z rovin trojrozměrného prostoru si zvolme za průmětnu π. Rovina rozděluje prostor na dva poloprostory. Jeden považujeme za kladný, druhý za záporný." (Harant, Lanta, 1965, s. 31)

Nejčastěji si jako průmětnu π vybereme vodorovnou nebo svislou rovinu, například rovinu lavice nebo tabule. Poloprostor nad nebo před průmětnou π bude kladný a poloprostor pod nebo za průmětnou π bude záporný.

Rovnoběžné pravoúhlé (kolmé) promítání je zobrazení se směrem s, který je kolmý na rovinu promítání (na průmětnu π).

Bod v prostoru zobrazíme na průmětnu pomocí promítací přímky. Bodem A proložíme promítací přímku s^A, která je kolmá na průmětnu π, a protne průmětnu π v bodě A_1 (pravoúhlý průmět bodu A). Na přímce s^A leží další body a jejich pravoúhlé průměty leží ve stejném bodě jeho pravoúhlý průmět bodu A. Abychom mohli zpětně zobrazit bod A do prostoru, musíme vědět, jak byl původně vzdálen od průmětny. Proto budeme používat kóty a budeme je psát za průmět bodu do kulatých závorek. **Kóta** je reálné číslo, jehož absolutní hodnota je rovna zmíněné vzdálenosti bodu od průmětny. Podle znaménka kóty zjistíme, kde se bod nachází, jestli v kladné (+) nebo záporné (-) polorovině. Každý bod má souřadnice x, y a kóta představuje souřadnici z, poté bod A se souřadnicemi x_A, y_A a kótou z_A zapisujeme jako $\boldsymbol{A\ [x_A, y_A, z_A]}$. Kótovaný průmět bodu $A_1(z_A)$ je pravoúhlý průmět bodu s připsanou kótou. Rovnoběžné pravoúhlé promítání na jednu průmětnu, ve kterém zavádíme kóty, pojmenováváme kótované promítání.



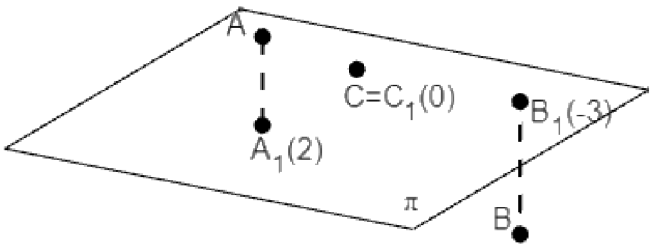


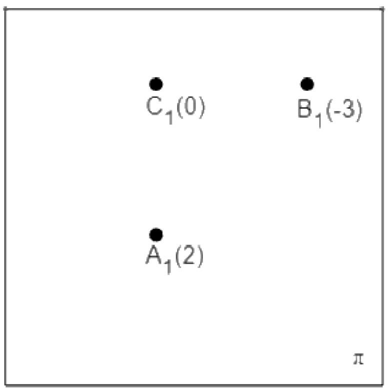
Obrázek 2.1.1: Zobrazení bodu

Bod A ležící nad průmětnou π v kladné polorovině, má z-ovou souřadnici kladnou, jeho kóta bude také kladné číslo $A_1(+z_A)$.

Bod B ležící pod průmětnou π v záporné polorovině, má zápornou z-ovou souřadnici, jeho kóta bude také záporné číslo $B_1(-z_B)$.

Bod C ležící v průmětně π je totožný se svým pravoúhlým průmětem C_1 $(C = C_1)$ a jeho kóta je rovna nule $(C_1(0))$.





Obrázek 2.1.2: Pravoúhlé průměty bodů

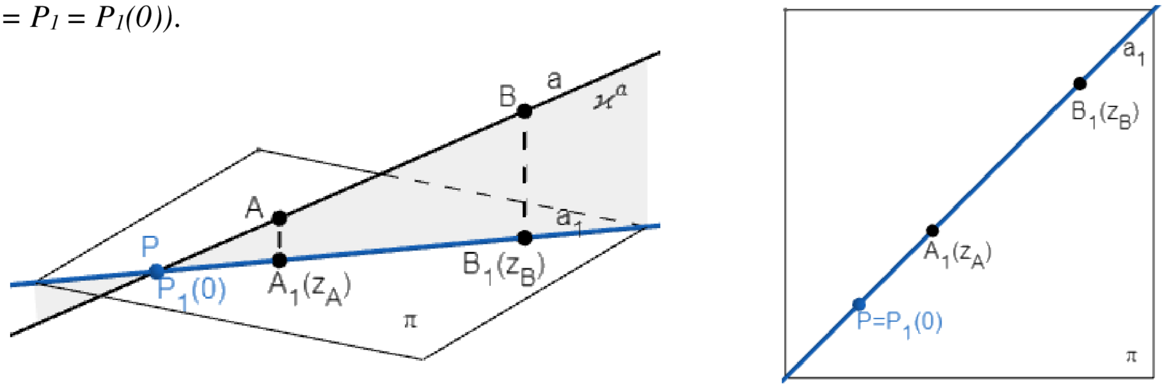
Při promítání na jednu průmětnu π budeme používat osy x a y, které jsou navzájem kolmé a jejich rovina xy leží v průmětně π. Z matematiky jsme zvyklí, že osa y je kladná ve směru nahoru a záporná ve směru dolů, ale v deskriptivní geometrii osu y orientujeme opačně, takže směrem dolů bude osa kladná a nahoru záporná. Úlohy budeme řešit v nákresně v rovině papíru, kterou ztotožníme s průmětnou π. Při konstrukci úloh budeme rýsovat osu x a značit počátek O.

Promítáme-li na svislou rovinu ν, například rovinu tabule, promítáme na nárysnu, která představuje rovinu xz.

2.2 Zobrazení přímky a úsečky. Zobrazení dvojice přímek

„Pravoúhlým průmětem přímky a, *která není kolmá na průmětnu* π, *je tedy přímka* a_1; *jestliže je* a *kolmá na* π, *pak jejím průmětem je bod.“* (Harant, Lanta, 1965, s. 34)

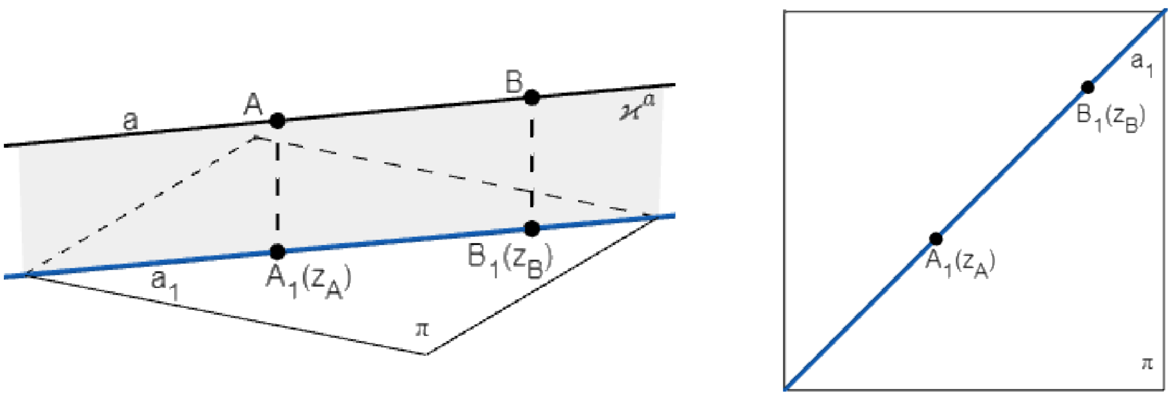
Přímka a je dána body A, B, …, její průmět a_1 je dán průměty bodů A_1, B_1, … Všechny promítací přímky bodů ležící na přímce a tvoří promítací rovinu $\varkappa^a$, která je kolmá na průmětnu π. Průsečnice roviny $\varkappa^a$ a průmětny π je pravoúhlým průmětem přímky a, značíme a_1. Průsečík přímky a_1 s průmětnou π je **stopník přímky**, bod ***P***, který má kótu nula ($P = P_1 = P_1(0)$).



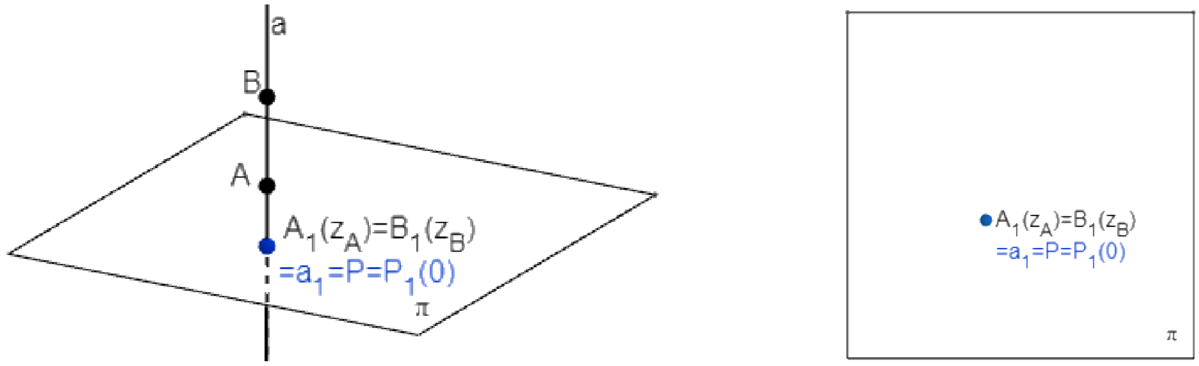
Obrázek 2.2.1: Průmět přímky

„Polohu přímky a *vzhledem k průmětně* π *můžeme určit podle polohy kótovaných průmětů bodů* $A_1(z_A)$, $B_1(z_B)$.*“* (Švercl, 1971, s. 19)

Pokud průměty bodů A_1, B_1 a jejich kóty z_A, z_B jsou různé, poté přímka a protíná průmětnu v bodě P a má obecnou polohu k průmětně π. Jsou-li průměty bodů A_1, B_1 různé a jejich kóty z_A, z_B se rovnají, poté přímka a je rovnoběžná s průmětnou π, kóty všech bodů přímky budou totožné. Rovnají-li se průměty bodů A_1, B_1 a jejich kóty z_A, z_B jsou různé, potom přímka p je kolmá k průmětně π a protíná průmětnu v bodě P.



Obrázek 2.2.2: Průmět přímky rovnoběžné s průmětnou π



Obrázek 2.2.3: Průmět přímky kolmé k průmětně π

Přímky rovnoběžné s průmětnou, které neprotínají průmětnu v konečném bodě, jsou přímky hlavní.

„Polohu přímky a vzhledem k průmětně π *lze určit též podle velikosti úhlu, který svírá přímka* a *s průmětnou.“* (Harant, Lanta, 1965, s. 34)

Přímka a svírá s průmětnou π úhel ω, jehož velikost je rovna úhlu, který svírá přímka a se svým pravoúhlým průmětem a_1. Je-li úhel ω ostrý (0° > ω > 90°), přímka a má obecnou polohu k průmětně π. Jestliže je úhel ω pravý (ω = 90°), přímka a je kolmá k průmětně π. Když se úhel ω = 0°, přímka je rovnoběžná s průmětnou π.

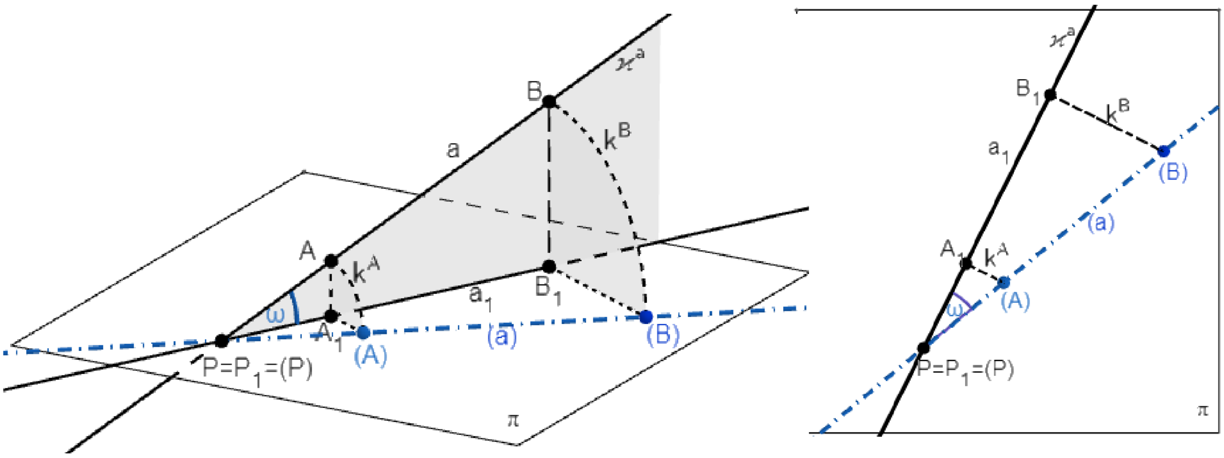
Při určování délky úsečky záleží na poloze úsečky vzhledem k průmětně. V případě, že je úsečka AB rovnoběžná s průmětnou π, pak je její délka totožná s délkou úsečky A_1B_1. Jestliže úsečka AB není rovnoběžná s průmětnou π, průmět úsečky je v nákresně zkreslený. Abychom určili skutečnou délku úsečky AB, použijeme metodu **sklápění promítací roviny do průmětny.**

„Sklopit promítací rovinu přímky a *znamená otočit každý její bod kolem průmětu přímky* a*, tj. kolem přímky* a_1*, o 90°.“* (Pomykalová, 2010, s. 73)

Přímka leží v promítací rovině, která je kolmá k průmětně, a má průsečnici s průmětnou. Okolo průsečnice promítací roviny a průmětny otočíme promítací rovinu o úhel 90° a sklopíme promítací rovinu přímky do průmětny.

Ke sklápění úsečky AB do průmětny π, potřebujeme průměty bodů A_1, B_1 a jejich kóty z_A, z_B. Přímku a, na které leží body A, B, proložíme promítací rovinou $\varkappa^a$. Tato rovina je rovina otáčení, kterou celou otočíme kolem průmětu přímky a_1 o 90°. Přímka a_1 představuje osu otáčení. Bod A se otáčí po kružnici otáčení k^A o 90° do průmětny π. Kružnice otáčení k^A má střed otáčení v bodě A_1 a poloměr otáčení $|z_A| = |AA_1|$. Sklopený bod A značíme (A). Jednotlivé body přímky a opisují čtvrtkružnice, které se jeví jako kolmice k přímce a_1. Délka sklopené úsečky $(A)(B)$ je rovna skutečné délce úsečky AB v prostoru ($|(A)(B)| = |AB|$). Body ležící v průmětně při sklápění roviny $\varkappa^a$ nemění svoji polohu. Stopník přímky P_1 po sklopení roviny $\varkappa^a$ se nemění, $P_1 = (P)$.

Pro sklopení přímky a nám stačí znát dva body A, B ležící na přímce a jejich kóty z_A, z_B. Poté sestrojíme v obou bodech úsečky $A_1(A)$, $B_1(B)$, které jsou kolmé na přímku a_1 a mají délku podle kóty daného bodu, koncový bod úsečky je hledaný sklopený bod (A), (B). Úsečky $A_1(A)$, $B_1(B)$ konstruujeme v jedné polorovině, která je daná přímkou a_1. Jestliže je jedna kóta bodu kladná a druhá záporná, pak bude každá úsečka ležet v jiné polorovině. Sklopenou přímku rýsujeme čerchovanou čárou.

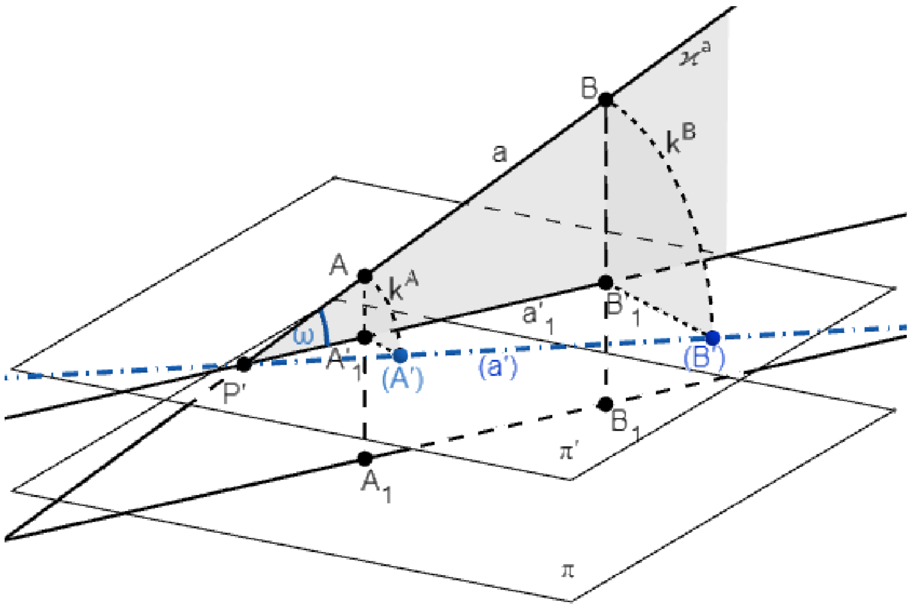


Obrázek 2.2.4: Sklopení promítací roviny přímky do průmětny

Úhel, který svírá přímka a s průmětnou π, nazýváme **odchylka přímky od průmětny** a značíme ho ω. Když sklopíme přímky a do průmětny π, můžeme určit velikost odchylky, která je rovna úhlu, který svírá průmět přímky a_1 se sklopenou přímkou (a). Tento úhel je ostrý nebo pravý.

Může nastat situace, kdy máme určit skutečnou délku úsečky, jejíž krajní body mají vysoké kóty. Kdybychom úsečku sklápěli do průmětny, nevešla by se nám do našeho ohraničeného prostoru, jako je list papíru nebo tabule. Proto budeme úsečku sklápět do nové průmětny π', která vznikla posunutím původní průmětny π a je rovnoběžná s průmětnou π.

V nové průmětně π' leží všechny body s kótou z', body sklopené do této průmětny budeme značit *(A')*. Délka úsečky $A_1(A')$ je rovna rozdílu kóty z_A a z'. V deskriptivní geometrii se často používá pojem **transformace průmětny**, tím je myšlen zmíněný princip.



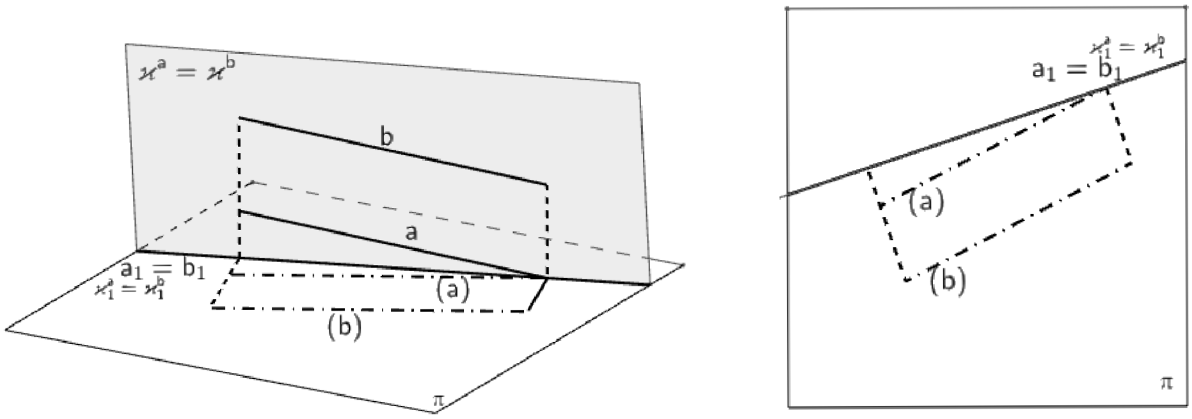
Obrázek 2.2.5: Sklopení promítací roviny přímky do posunuté průmětny π'

V případě, že máme určit kótu bodu a známe průmět bodu, nebo naopak známe kótu bodu a máme určit jeho přesnou polohu, můžeme příklad vyřešit sklopením přímky do průmětny.

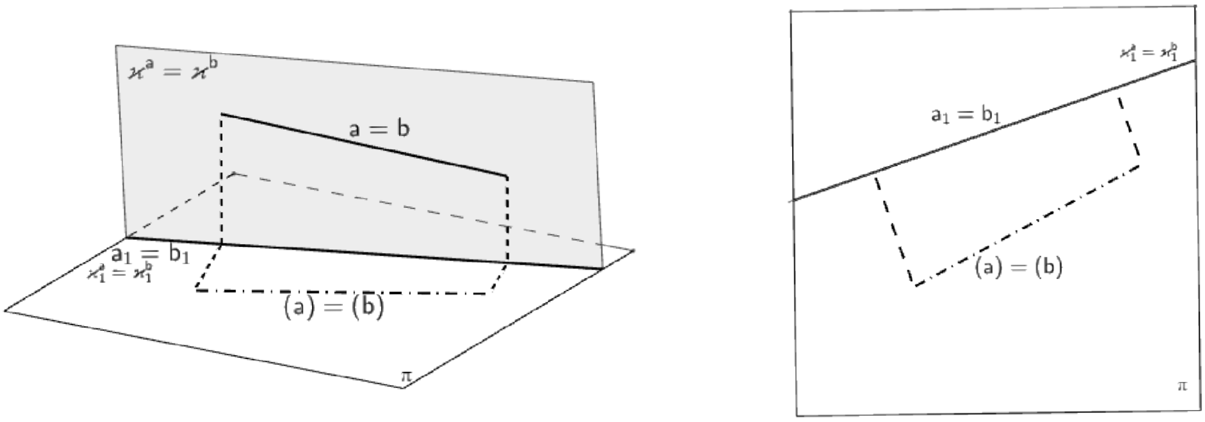
V některých úlohách bude vhodnější použít princip **stupňování přímky**. Máme-li zadanou přímku dvěma body, můžeme na ní určit další body, pokud všechny body mají celočíselné kóty. Vzdálenost mezi body A_1 a B_1 rozdělíme na z_A - z_B rovných úseků, jeden úsek označíme i tedy interval přímky. Interval přímky je vzdálenost mezi dvěma body, které mají rozdíl kót roven jedné. Můžeme určit spád přímky, jenž je roven tangentě spádového úhlu α, kde spádový úhel je odchylka přímky od průmětny, $tg\alpha = \frac{1}{i}$. Převrácená hodnota spádu přímky je rovna intervalu přímky, $i = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$.

Každé dvě přímky jsou navzájem rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné. Jejich **vzájemnou polohu** určíme sklopením promítací roviny přímek do průmětny.

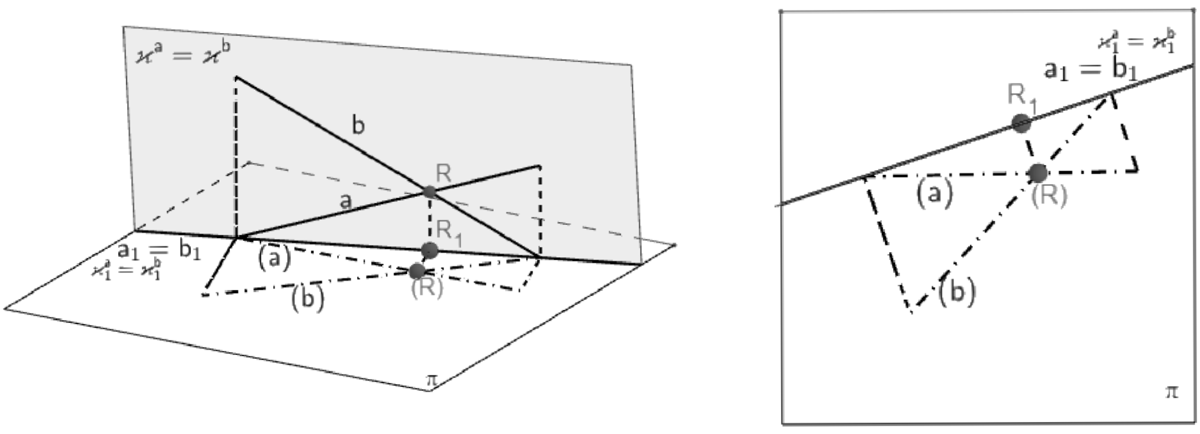
Leží-li přímky v jedné promítací rovině, rovinu sklopíme a zjistíme, zda jsou přímky rovnoběžné nebo různoběžné. Přímky rovnoběžné mohou být různé nebo totožné, pokud mají všechny body společné.



Obrázek 2.2.6: Přímky rovnoběžné různé v jedné promítací rovině

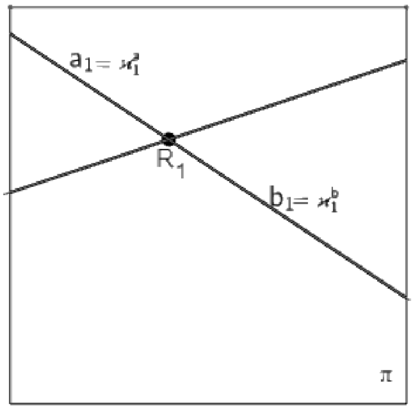


Obrázek 2.2.7: Přímky rovnoběžné totožné v jedné promítací rovině

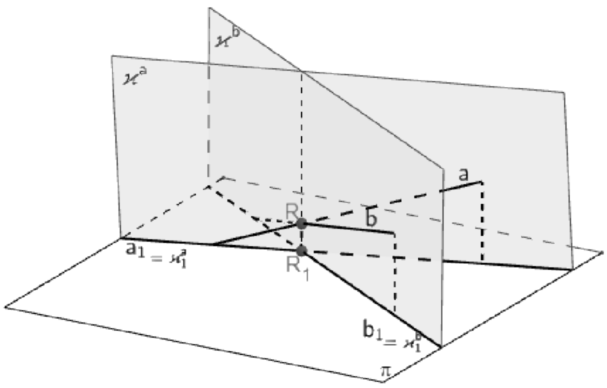


Obrázek 2.2.8: Přímky různoběžné v jedné promítací rovině

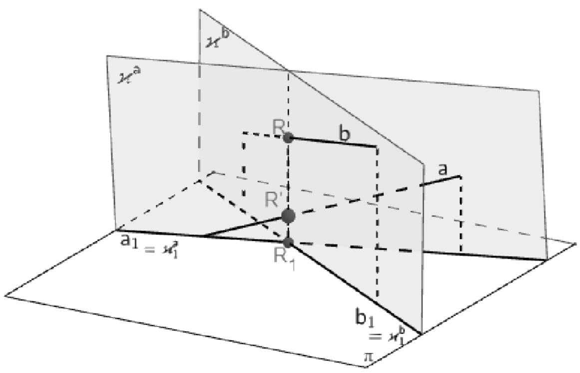
Jsou-li kótované průměty dvou přímek různé, přímky sklopíme a určíme kótu průsečíku přímek, kterému říkáme krycí bod, značíme jej *R*. Když je kóta krycího bodu pro obě přímky shodná, poté jsou přímky různoběžné. Kdyby krycí bod měl různé kóty, přímky by byly mimoběžné.



Obrázek 2.2.9: Průmět dvou přímek – různoběžné

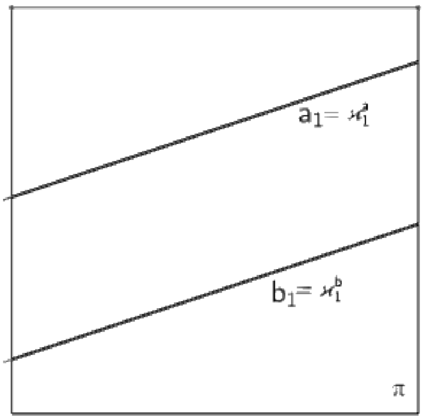


Obrázek 2.2.10: Přímky různoběžné

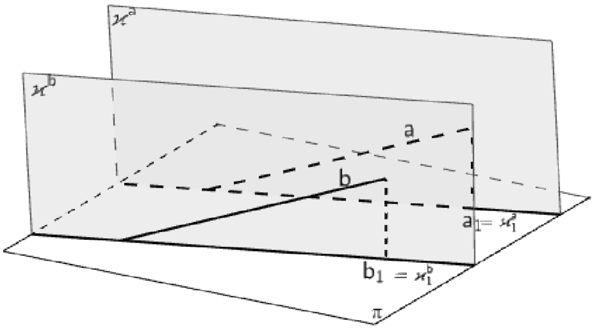


Obrázek 2.2.11: Přímky mimoběžné

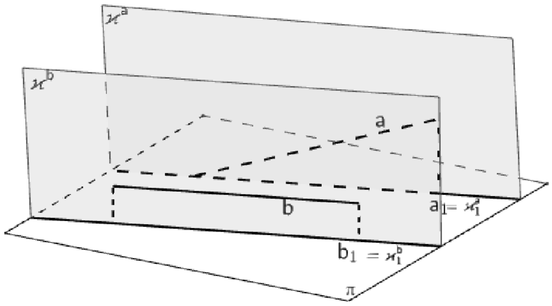
Kótované průměty přímek mohou být rovnoběžné, poté jsou přímky buď rovnoběžné, nebo mimoběžné. Opět promítací roviny přímek sklopíme stejným směrem, rovnoběžné přímky budou i po sklopení rovnoběžné, mimoběžné přímky budou po sklopení různoběžné.



Obrázek 2.2.12: Průmět dvou přímek – rovnoběžné



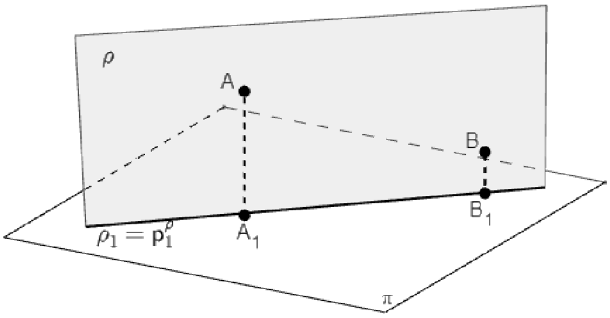
Obrázek 2.2.13: Přímky rovnoběžné



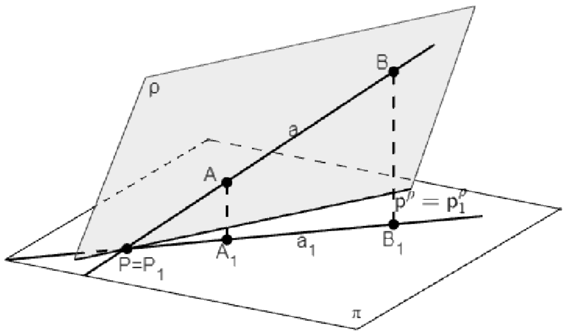
Obrázek 2.2.14: Přímky mimoběžné

2.3 Zobrazení roviny. Hlavní přímka roviny. Spádová přímka roviny

„V kótovaném promítání je průmětem roviny, která je kolmá k průmětně, přímka. Průmětem roviny, která není k průmětně kolmá, je celá průmětnu.“ (Pomykalová, 2010, s. 83)



Obrázek 2.3.1: Průmět roviny kolmé k průmětně



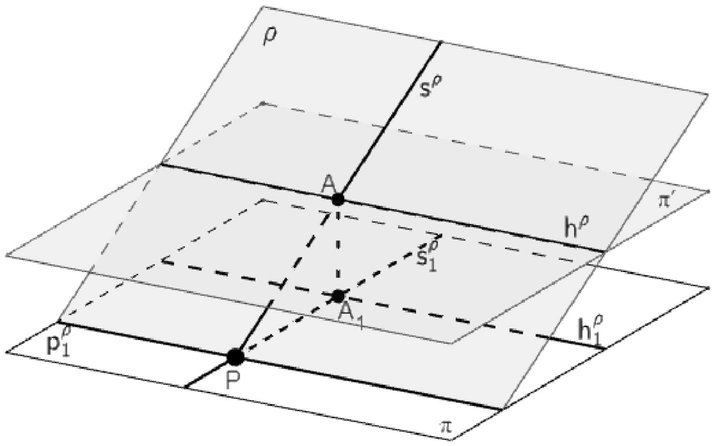
Obrázek 2.3.2: Průmět obecné roviny

Rovina kolmá k průmětně je **promítací rovina**, pro její přesné určení potřebujeme znát dva její body, které neleží na jedné promítací přímce. **Rovina v obecké poloze** k průmětně je daná třemi body, které neleží na jedné přímce, přímkou a bodem, který neleží na přímce, nebo dvěma různýma přímkami. Rovina rovnoběžná s průmětnou je **hlavní rovina** a může být zadaná jedním bodem. V hlavní rovině mají všechny body stejnou kótu a útvary jsou shodné s jejich průměty, protože rovina vznikla posunutím průmětny. Průmětna π je také hlavní rovina.

Obecná rovina ϱ protíná hlavní roviny v přímkách, které nazýváme **hlavní přímky roviny h^ϱ**. Ty jsou navzájem rovnoběžné. Hlavní přímky nejčastěji konstruujeme v celistvých kótách a popisujeme je $h^\varrho (z_h)$, všechny body hlavní přímky $h^\varrho (z_h)$ mají kótu z. V průmětně π máme hlavní přímku $h^\varrho (0)$, která je **stopou roviny p^ϱ** $= h^\varrho (0)$. Každá přímka ležící v rovině ϱ má stopník P, který leží na stopě roviny p^ϱ.

„Hlavní přímky roviny, která není rovnoběžná s průmětnou, jsou navzájem rovnoběžné. Jejich průměty jsou přímky rovnoběžné s průmětem stopy roviny.“ (Harant, Lanta, 1965, s. 41)

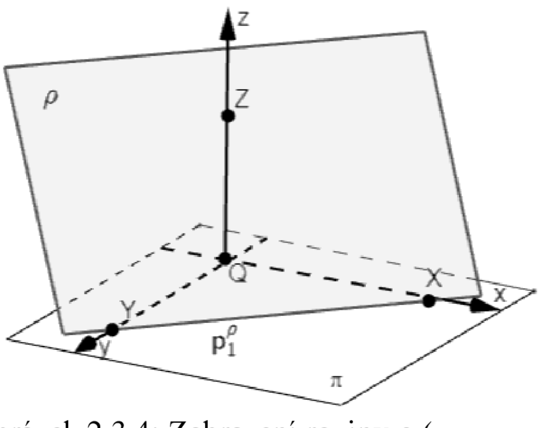
V rovině ϱ máme přímky, které jsou kolmé na stopu roviny p^{ϱ} a na hlavní přímky roviny h^{ϱ}, nazýváme je **spádové přímky** s^{ϱ}. Všechny spádové přímky roviny s^{ϱ} jsou rovnoběžné. Spádové přímky s^{ϱ} jsou kolmé na hlavní přímky, to platí i pro jejich průměty. Vystupňujeme-li spádovou přímku, říkáme jí spádové měřítko roviny.



Obrázek 2.3.3: Rovina, hlavní a spádová přímka roviny

Odchylka roviny od průmětny je úhel, který svírá rovina s průmětnou, odchylku určíme sklopením promítací roviny spádové přímky do průmětny. Hlavní rovina má odchylku 0°, promítací rovina 90°. Spád spádové přímky je roven spádu roviny, tangentě odchylky roviny od průmětny.

„*V soustavě souřadnic zadáváme rovinu pomocí souřadnic průsečíků roviny s osami souřadnic. Jsou-li průsečíky roviny* ϱ *s osami* x, y, z *po řadě body* X [x_{ϱ}, 0, 0], Y [0, y_{ϱ}, 0], Z [0, 0, z_{ϱ}], *je rovina určena souřadnicemi* x_{ϱ}, y_{ϱ}, z_{ϱ}*; píšeme* ϱ (x_{ϱ}, y_{ϱ}, z_{ϱ}). *Body* X, Y *určují stopu* p^{ϱ} *roviny* ϱ. “ (Pomykalová, 2010, s. 85)



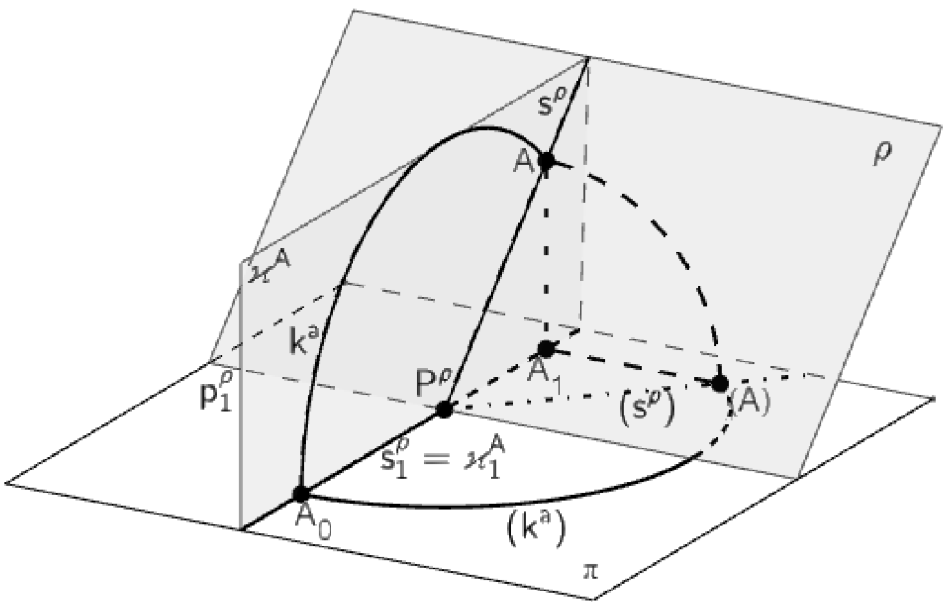
Obrázek 2.3.4: Zobrazení roviny ϱ *(x_{ϱ}, y_{ϱ}, z_{ϱ})*

2.4 Otáčení roviny

Průmět rovinného úvaru, který leží v hlavní rovině, je totožný s jeho vzorem. Rovinný útvar v promítací rovině získáme sklopením promítací roviny, abychom znali jeho skutečný tvar a velikost. Chceme-li zjistit, jak vypadá rovinný útvar ležící v obecné rovině, otočíme rovinu do průmětny.

„Otočit rovinu, která není hlavní ani promítací, znamená najít osu otáčení a otočit její libovolný bod, který neleží na ose otáčení.“ (Restl, Doležal, 2004, s. 13)

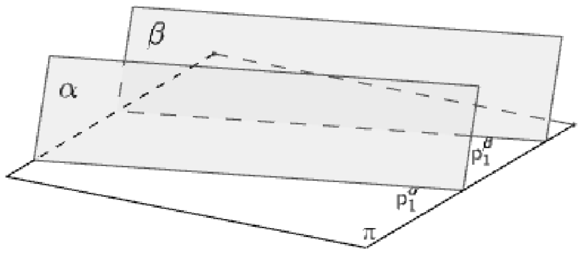
Osou otáčení je průsečnice roviny ϱ s průmětnou π, a to je stopa roviny p^{ϱ}. **Rovinu otáčení ϱ**, v níž leží bod A, otočíme kolem osy otáčení. Bod A, který budeme otáčet, proložíme promítací rovinou $\varkappa^A$ kolmo k ose otáčení Po **kružnici otáčení k^A** ležící v promítací rovině $\varkappa^A$ posouváme bod A do průmětny π. **Středem otáčení** a středem kružnice k^A je stopník P^{ϱ} spádové přímky s^{ϱ} roviny procházející bodem A. **Poloměr otáčení** a poloměr kružnice r^A je vzdálenost sklopeného bodu (A) od stopníku P^{ϱ} ($r^A = |(A)P^{\varrho}|$). Otočený bod A_0 leží na průsečíku kružnice otáčení k^A s průmětnou π. Na průmětu promítací roviny $\varkappa^A$, spádové přímky s^{ϱ}, přímky A_1P vzniknou po otočení dva body A_0 a A'_0, druhý bod A'_0 vznikl otočením bodu A_0 o úhel 180°.



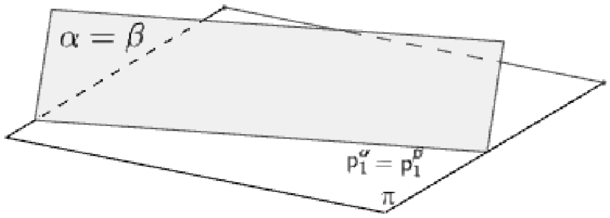
Obrázek 2.4.1: Otáčení roviny

2.5 Dvě roviny

O každých dvou rovinách můžeme říci, že jsou rovnoběžné nebo různoběžné. Roviny, jejichž spádové přímky jsou navzájem rovnoběžné a odchylky od průmětny si jsou rovny, jsou **rovnoběžné**. Rovnoběžné roviny různé nemají žádný společný bod. Splývající roviny mají všechny body stejné, jedná se o totožnou rovinu.

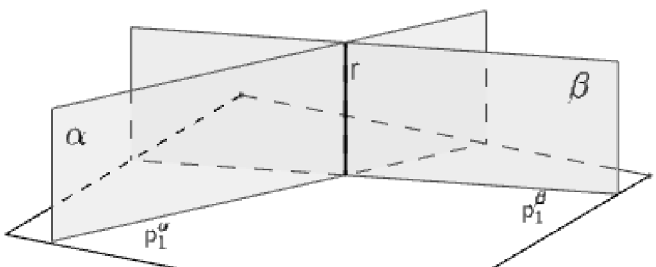


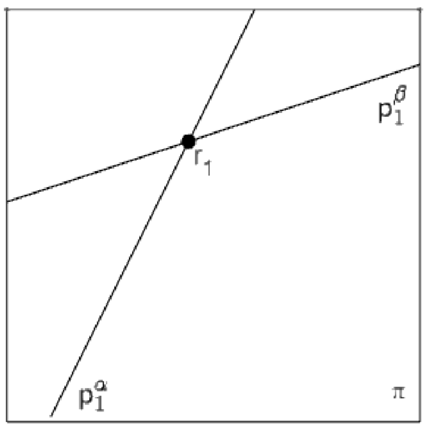
Obrázek 2.5.1: Dvě roviny rovnoběžné



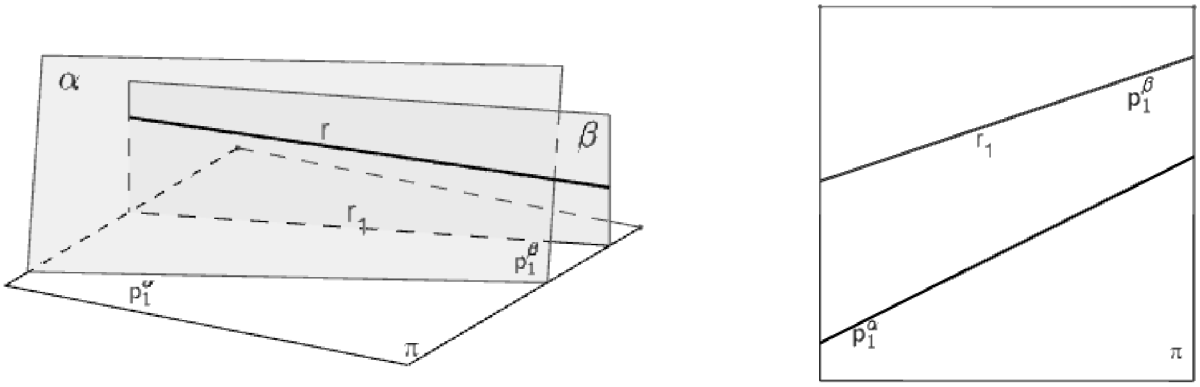
Obrázek 2.5.2: Dvě roviny rovnoběžné totožné

Roviny **různoběžné** mají společnou průsečnici. Jestliže se jedná o dvě promítací roviny, jejich průsečnice je kolmá k průmětně a jejím průmětem je bod, kterým prochází průměty obou rovin. Je-li jen jedna rovina promítací a druhá obecná, průmět průsečnice je shodný s průmětem promítací roviny. Rovina hlavní má průsečnici s obecnou rovinou v hlavní přímce obecné roviny o stejné kótě jako má hlavní rovina. Průsečnice dvou obecných rovin prochází průsečíkem stop obou rovin a průsečíky hlavních přímek obou rovin o stejných kótách. Stopy rovin mohou být rovnoběžné, poté je s nimi rovnoběžná i jejich průsečnice. Roviny proložíme pomocnou rovinou kolmou ke stopám rovin a průmětně. Při hledání průsečnice obecných rovin můžeme využít spádová měřítka rovin a spádové přímky.

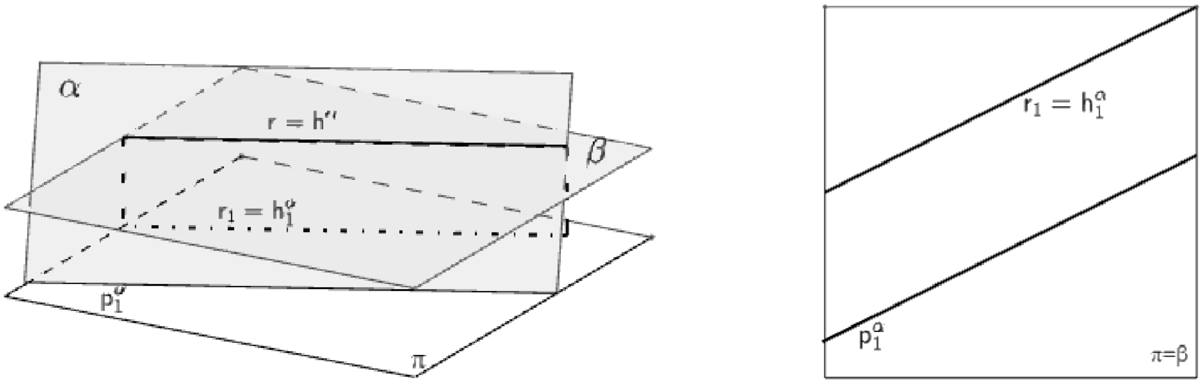




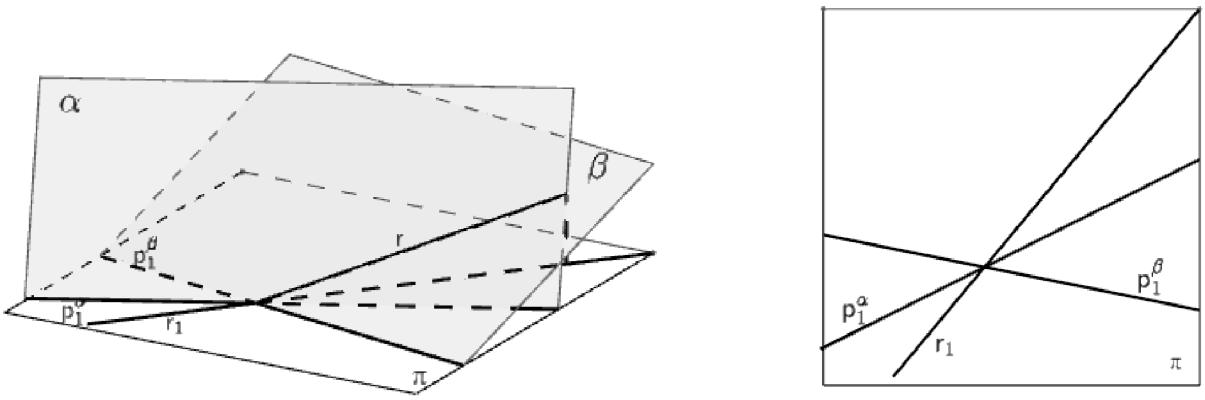
Obrázek 2.5.3: Dvě promítací roviny různoběžné



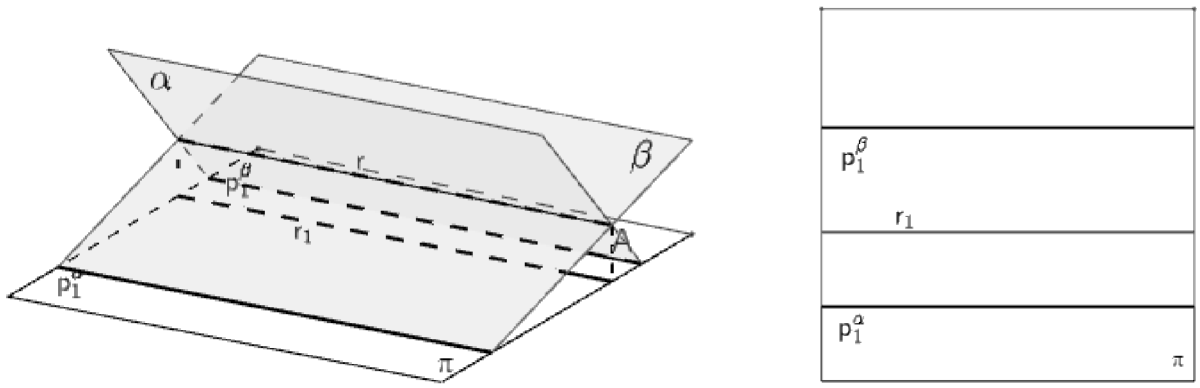
Obrázek 2.5.4: Dvě roviny různoběžné, obecná rovina a promítací rovina



Obrázek 2.5.5: Dvě roviny různoběžné, obecná rovina a hlavní rovina



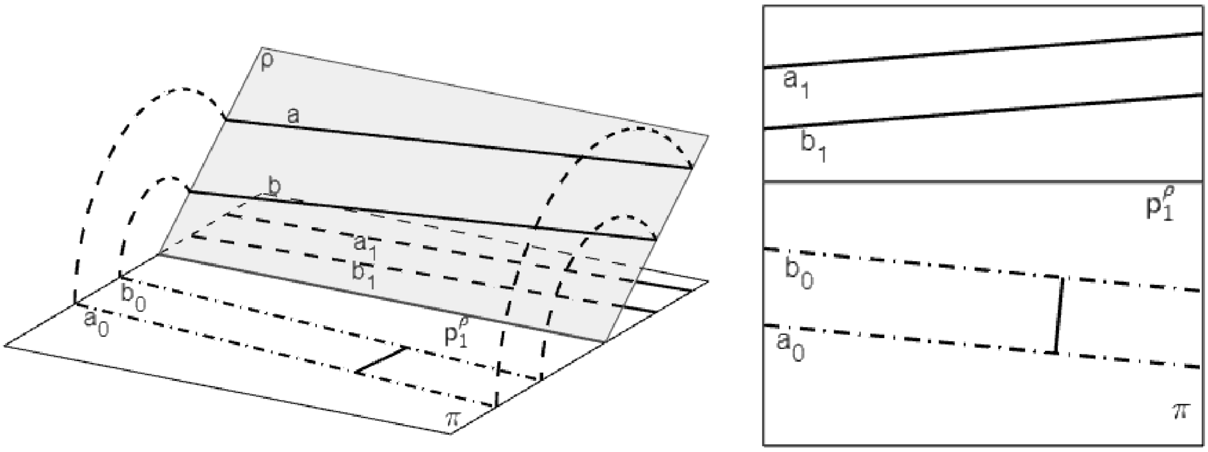
Obrázek 2.5.6: Dvě obecné roviny různoběžné



Obrázek 2.5.7: Dvě obecné roviny různoběžné, rovnoběžné stopy rovin

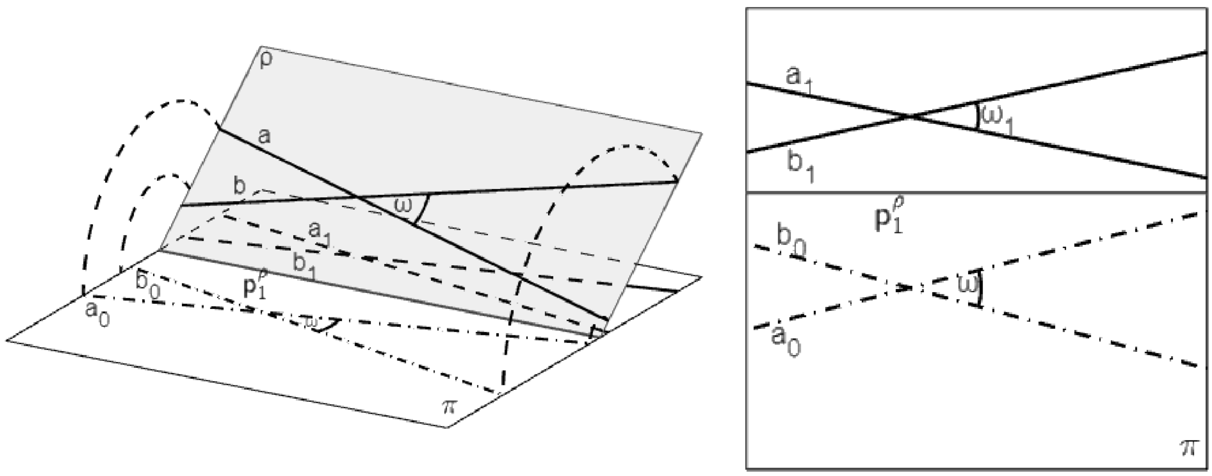
2.6 Další úlohy o rovině

Máme-li určit **vzdálenost mezi dvěma rovnoběžnými přímkami**, proložíme je rovinou ϱ, kterou následně otočíme do průmětny π. Vzdálenost dvou rovnoběžek je rovna velikosti kolmice spojující obě otočené přímky.



Obrázek 2.6.1: Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek

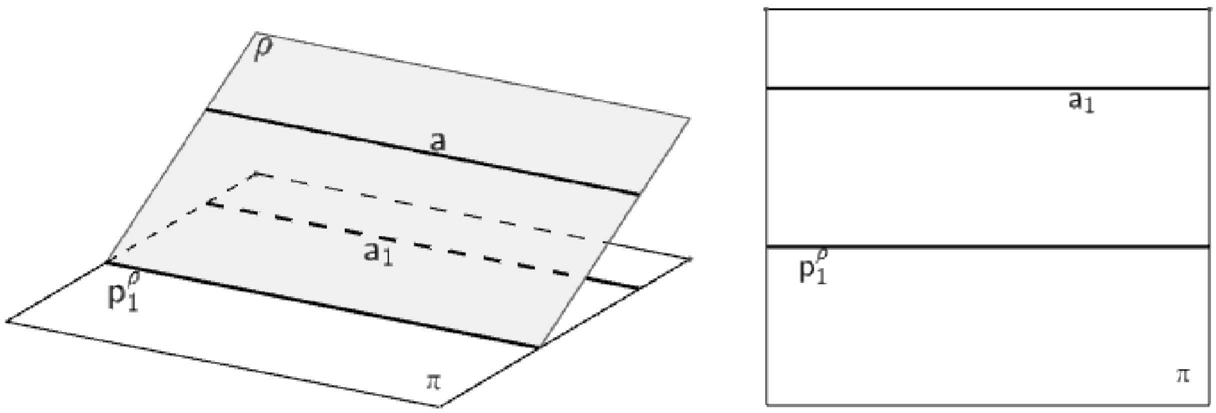
Máme-li určit **odchylku různoběžných přímek**, musíme odchylku určovat v rovině, která je dána různoběžkami. Sklopením přímek určíme stopu roviny, kolem které otočíme rovinu danou různoběžkami do průmětny. V otočené rovině mají přímky skutečnou velikost a také odchylku, která je rovna skutečné odchylce přímek v rovině.



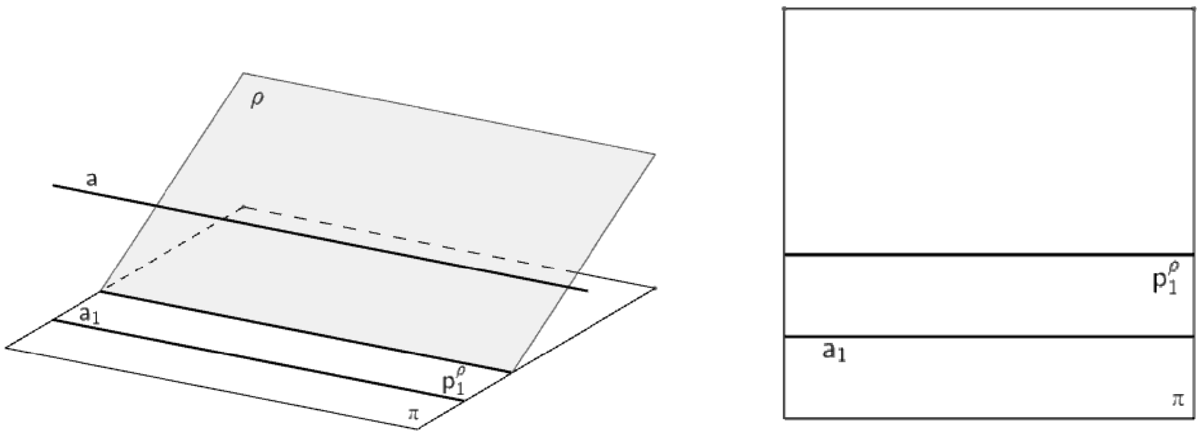
Obrázek 2.6.2: Odchylka různoběžných přímek

2.7 Přímka a rovina

Přímka může v rovině ležet a bude mít všechny body v rovině. Přímka s rovinou může být různoběžná, potom budou mít jenom jeden společný bod, průsečík. Pokud přímka nemá žádný společný bod s rovinou, přímka je s rovinou **rovnoběžná**.

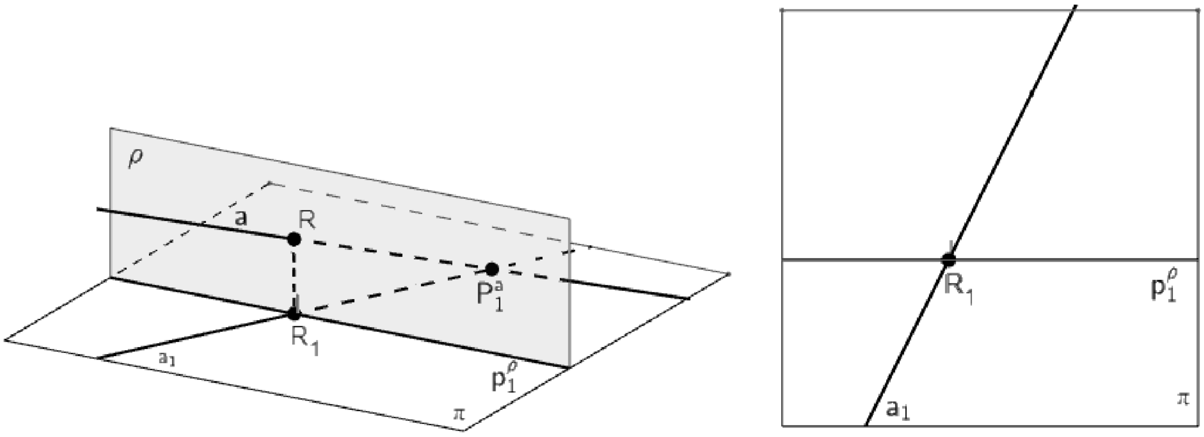


Obrázek 2.7.1: Přímka rovnoběžná s rovinou

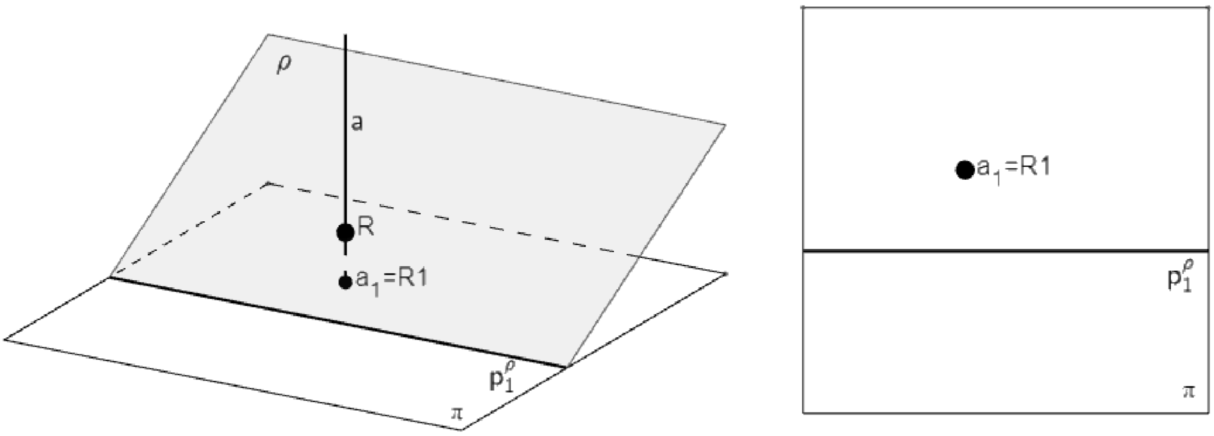


Obrázek 2.7.2: Přímka rovnoběžná s rovinou

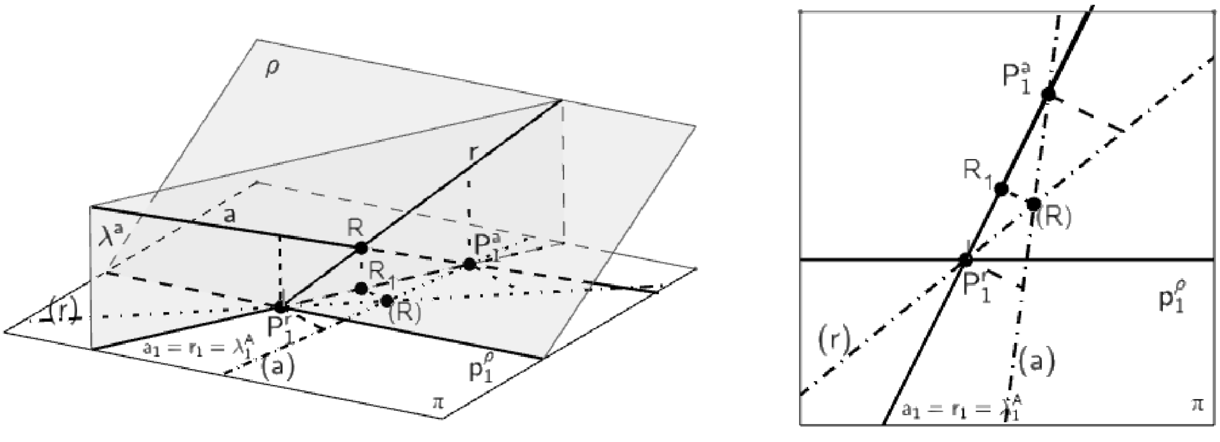
Je-li rovina s přímkou **různoběžná,** jejich průsečík, jediný společný bod, značíme *R*. Jestliže máme rovinu kolmou k průmětně, její průsečík s přímkou je v kótovaném promítaní jasně viditelný, protože průsečík průmětu přímky a roviny je s ním shodný. Přímka kolmá k průmětně protíná rovinu ve stejném bodě jako je její průmět. Máme-li obecně položenou přímku a rovinu, jejich průsečík hledáme pomocí krycí roviny. Zvolíme si libovolnou rovinu, ve které leží přímka a je různoběžná s danou rovinou, nejčastěji volíme rovinu kolmou k průmětně, promítací rovinu přímky. Poté průsečíkem přímky s rovinou je průsečík přímky s průsečnicí námi zvolené roviny a zadané roviny.



Obrázek 2.7.3: Přímka různoběžná s rovinou kolmou k průmětně



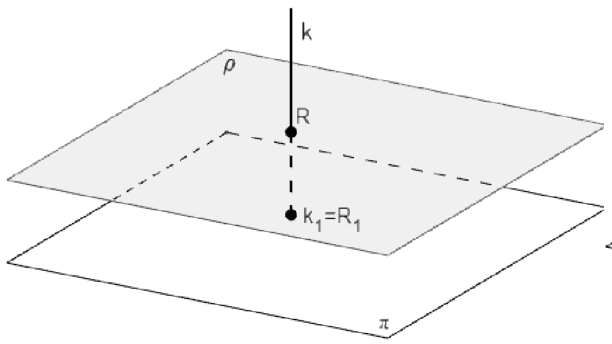
Obrázek 2.7.4: Přímka různoběžná s rovinou, přímka kolmá k průmětně



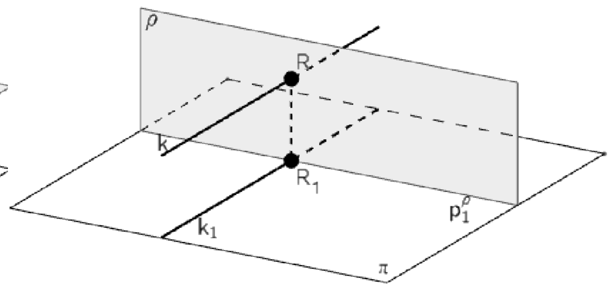
Obrázek 2.7.5: Přímka různoběžná s rovinou

2.8 Kolmost přímek a rovin

„Jestliže je rovina ϱ *rovnoběžná s průmětnou, je přímka* k *kolmá k této rovině současně kolmá i k průmětně; jejím průmětem je proto bod* k_1*.“* (Pomykalová, 2010, s. 102)

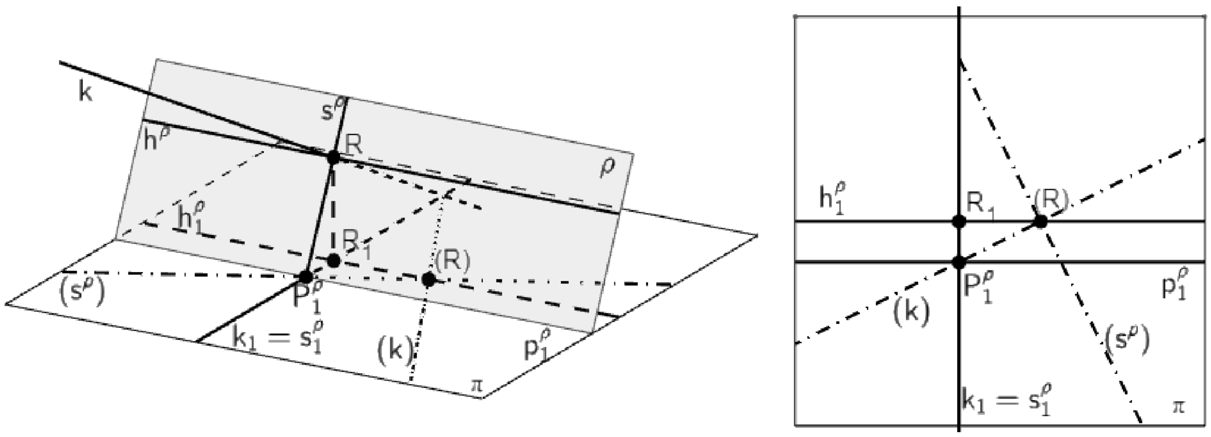


Obrázek 2.8.1: Přímka kolmá k rovině hlavní



Obrázek 2.8.2: Přímka kolmá k rovině promítací

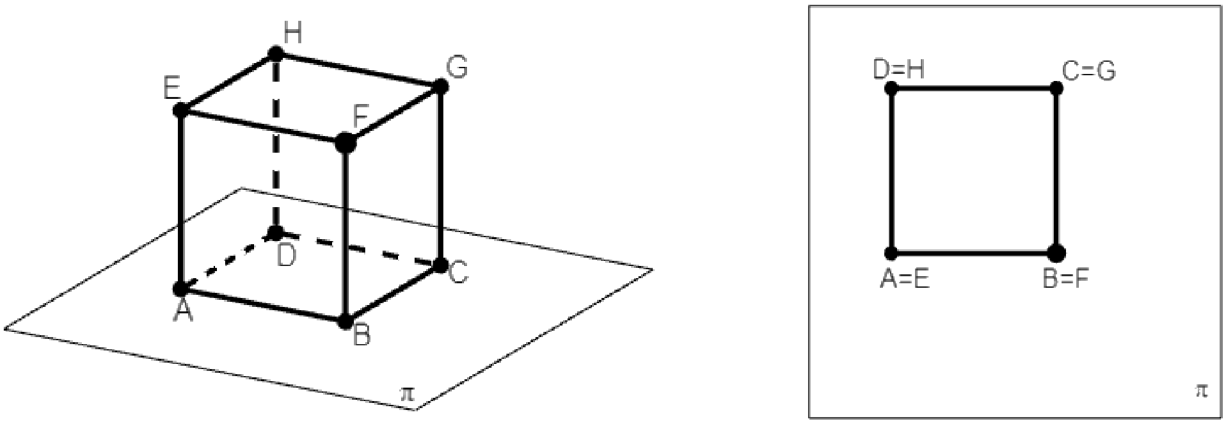
Ve stereometrii platí, že je-li přímka kolmá k rovině, je kolmá k alespoň dvěma přímkám v rovině. Takže přímka kolmá k rovině, je kolmá ke všem přímkám v rovině. V kótovaném promítání **přímka *k* kolmá k rovině ϱ** je kolmá k hlavním přímkám h^ϱ a spádovým přímkám s^ϱ roviny. Protože hlavní přímky h^ϱ jsou rovnoběžné s průmětnou π, tak průmět přímky k_1 svírá se všemi průměty hlavních přímek h^ϱ_1 pravý úhel. Průměty spádových přímek s^ϱ_1, které jsou kolmé k přímce k, budou shodné s průmětem přímky k_1. Když přímky k_1 a s^ϱ_1 proložíme promítací rovinou, kterou sklopíme, budou přímky navzájem kolmé.



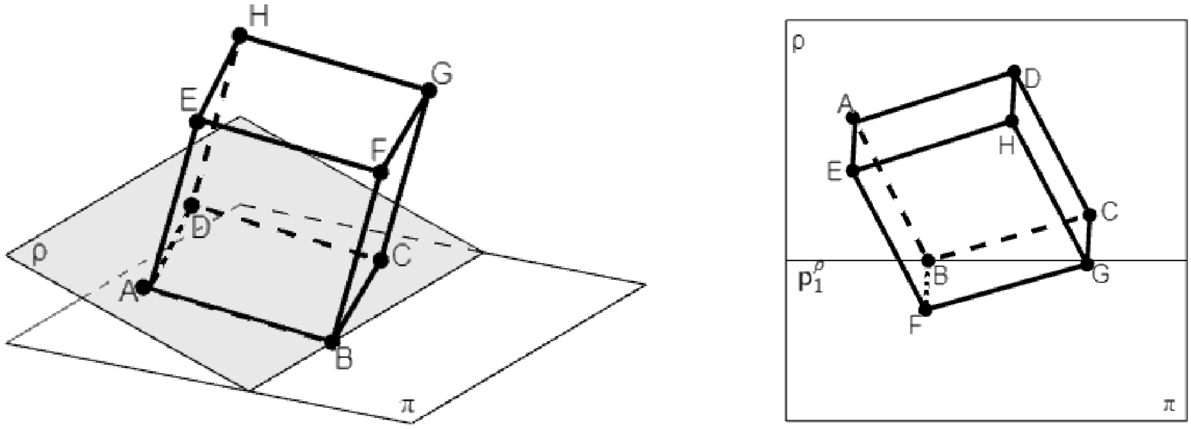
Obrázek 2.8.3: Přímka kolmá k rovině

2.9 Zobrazení tělesa

Při **zobrazení tělesa** na průmětnu π zobrazíme vnější obrys tělesa pomocí jeho vrcholů a hran. Leží-li podstava tělesa v průmětně π nebo v rovině s ní rovnoběžnou, obrys tělesa je totožný s podstavou. Máme-li těleso s podstavou v obecné rovině, musíme rovinu otočit do průmětny π, abychom získali skutečnou velikost podstavy. Potom hledáme přímky kolmé k rovině, ve které leží podstava tělesa. Boční hrany hranolu leží na kolmých přímkách procházející vrcholy podstavy. U jehlanu konstruujeme přímku kolmou ze středu podstavy, přímka představuje výšku jehlanu. Pravoúhlým průmětem koule bude opět koule.



Obrázek 2.9.1: Zobrazení krychle s podstavou v průmětně



Obrázek 2.9.2: Zobrazení krychle s podstavou v obecné rovině

Když zkonstruujeme kótovaný průmět tělesa, musíme určit **viditelnost** jednotlivých vrcholů a hran. Z dvou bodů, které leží na jedné promítací přímce, bude viditelný ten bod s vyšší kótou.

Podstavu, kterou jsme sestrojili po otočení v průmětně π, zobrazíme na rovinu ϱ s použitím **osové afinity**.

„Afinita se směrem afinity s *a osou afinity* o *je zobrazení, které přiřazuje:*

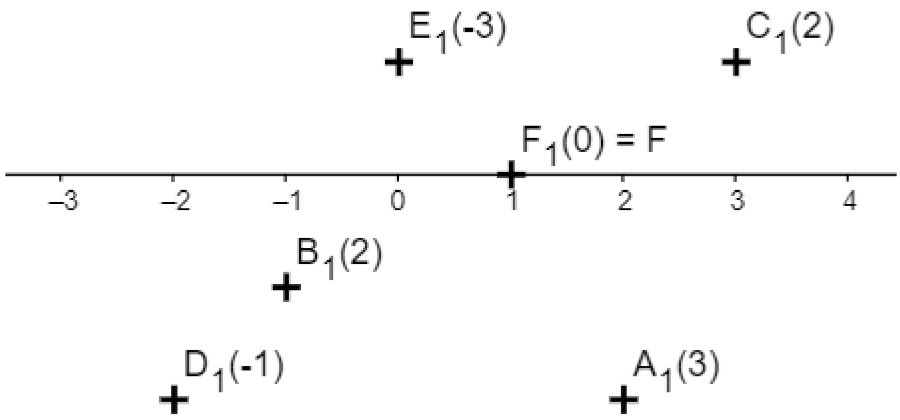
1. *každému bodu* A *roviny* ϱ *bod* Ā *roviny* σ *tak, že přímka* AĀ *je rovnoběžná s přímkou* s.
2. *každé přímce* a *různoběžné s osou afinity* o *roviny* ϱ *přímku* ā *roviny* σ *tak, že přímky* a, ā *se protínají na přímce* o, *každé přímce* b *rovnoběžné s osou afinity* o *přímku* $\bar{b}$ *rovnoběžnou s osou afinity* o *roviny* σ.*"* (Pomykalová, 2010, s. 31)

Body *A, Ā* nebo přímky *a, ā* jsou afinně sdružené. Body ležící na ose afinity jsou body samodružné. Osou afinity je nejčastěji stopa roviny p^{ϱ}_1 a směr afinity je směr přímek *AĀ*.

Praktická část

3 Užití kótovaného promítání při řešení úloh

Příklad 1: Zobrazte body: *A* [2, 2, 3], *B* [-1, 1, 2], *C* [3, -1, 2], *D* [-2, 2, -1], *E* [0, -1, -3], *F* [1, 0, 0]

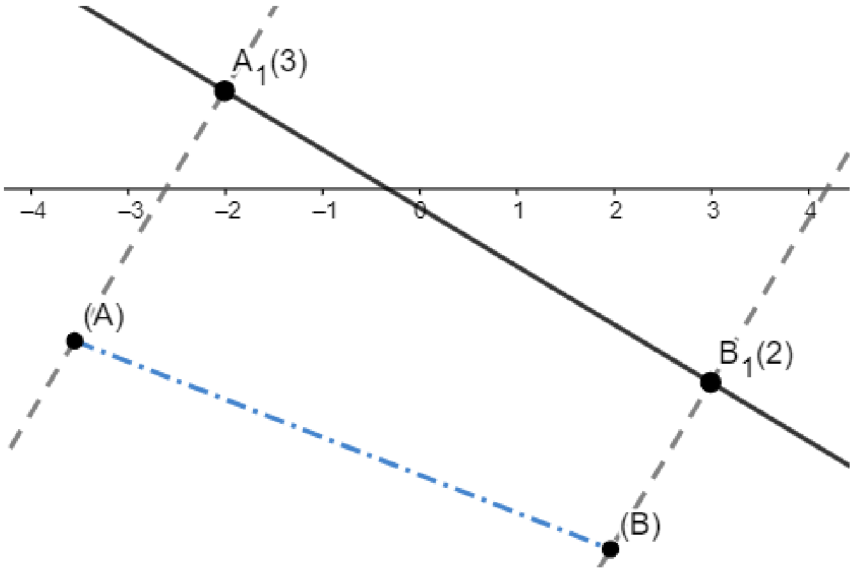


Obrázek 3.1: Kótované průměty bodů

Řešení: Při zobrazování kótovaných průmětů zadaných bodů je důležité sledovat znaménka souřadnic. Body s kladnými *x*-ovými souřadnicemi zobrazujeme od nuly směrem napravo, s kladnými *y*-ovými souřadnicemi pod osu *x* a *z*-ová souřadnice představuje kótu bodu, píšeme ji do závorky za bod.

Příklad 2: Zobrazte úsečku *AB* a určete její skutečnou velikost.

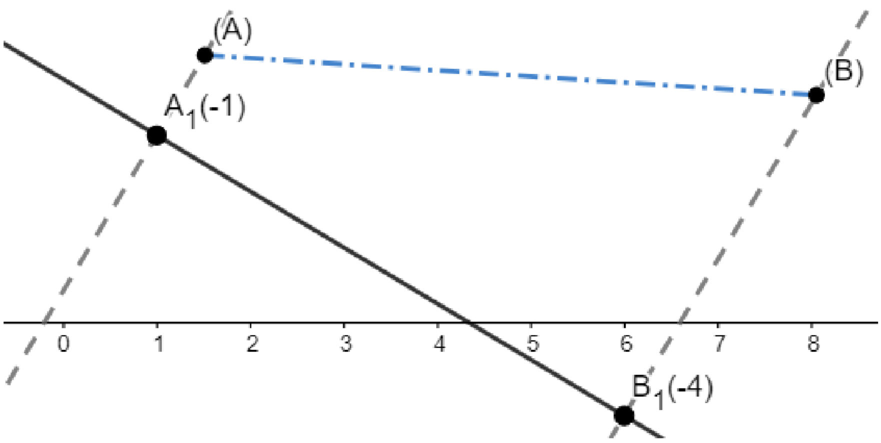
a) *A* [-2, -1, 3], *B* [3, 2, 2]



Obrázek 3.2: Sklopení promítací roviny úsečky *AB*

Řešení: Úsečku *AB* proložíme rovinou kolmou k průmětně, kterou sklopíme do průmětny. Sklopením úsečky nám vznikne pravoúhlý lichoběžník $A_1(A)(B)B_1$, první rameno lichoběžníku představuje úsečka A_1B_1 (průmět úsečky *AB*) a druhé rameno lichoběžníku je sklopená úsečka *(A)(B),* jejíž délka je skutečná velikost úsečky *AB*.

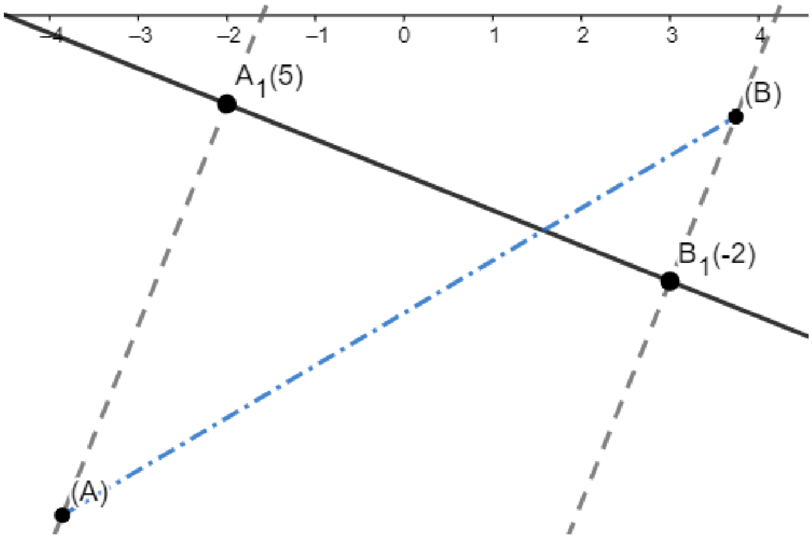
b) *A* [1, -2, -1], *B* [6, 1, -4]



Obrázek 3.3: Sklopení promítací roviny úsečky *AB*

Řešení: Sklopením promítací roviny úsečky nám vznikne pravoúhlý lichoběžník. Jsou-li kóty krajních bodů úsečky shodně orientovány, sklopením nám vznikne pravoúhlý lichoběžník.

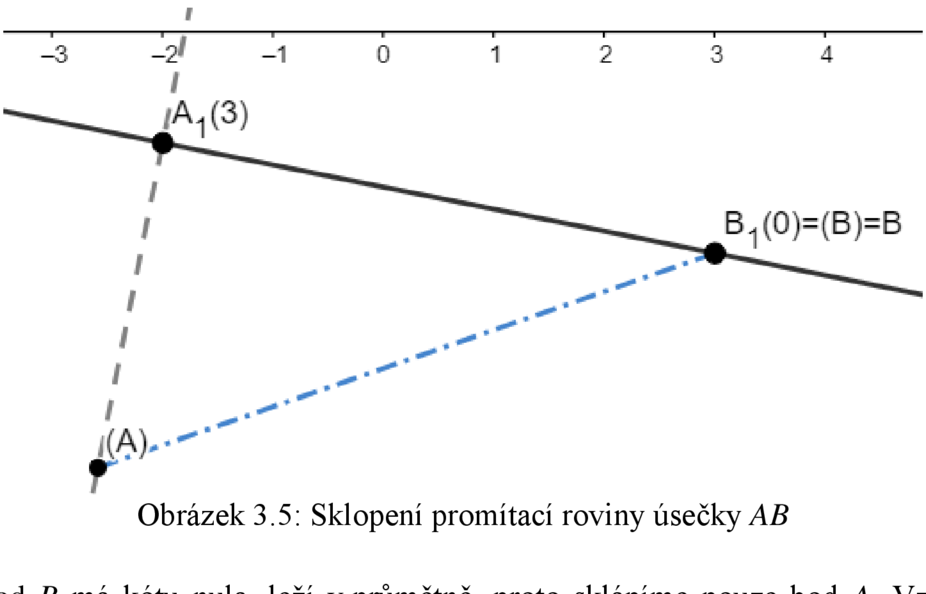
c) *A* [-2, 1, 5], *B* [3, 3, -2]



Obrázek 3.4: Sklopení promítací roviny úsečky *AB*

Řešení: Sklopením promítací roviny úsečky, která má krajní body s opačně orientovanými kóty, nám nevznikne pravoúhlý lichoběžník, protože jeden bod sklopíme do kladné poloroviny a druhý bod do záporné poloroviny. Výsledkem bude zkřížený lichoběžník, jehož ramena se protínají.

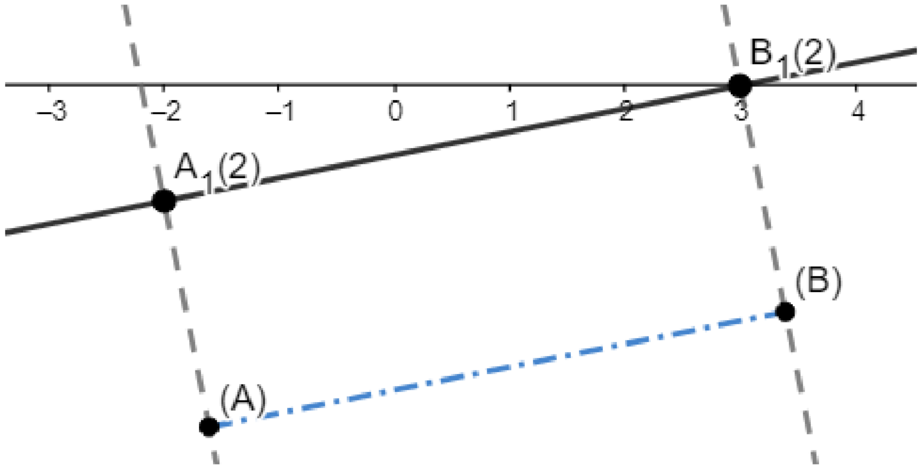
d) *A* [-2, 1, 3], *B* [3, 2, 0]



Obrázek 3.5: Sklopení promítací roviny úsečky *AB*

Řešení: Bod *B* má kótu nula, leží v průmětně, proto sklápíme pouze bod *A*. Vznikne nám pravoúhlý trojúhelník $(A)BA_1$ s odvěsnou *(A)B*, která má délku jako skutečná úsečka *AB*.

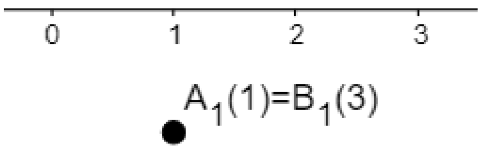
e) *A* [-2, 1, 2], *B* [3, 0, 2]



Obrázek 3.6: Sklopení promítací roviny úsečky *AB*

Řešení: Sklopením promítací roviny úsečky *AB*, jejíž body mají shodné kóty, nám vznikne obdélník. Skutečná velikost úsečky *AB* je vzdálenost mezi sklopenými body, která je rovna vzdálenosti mezi průměty bodů. To znamená, že úsečka se zobrazuje ve skutečné velikosti, protože je rovnoběžná s průmětnou.

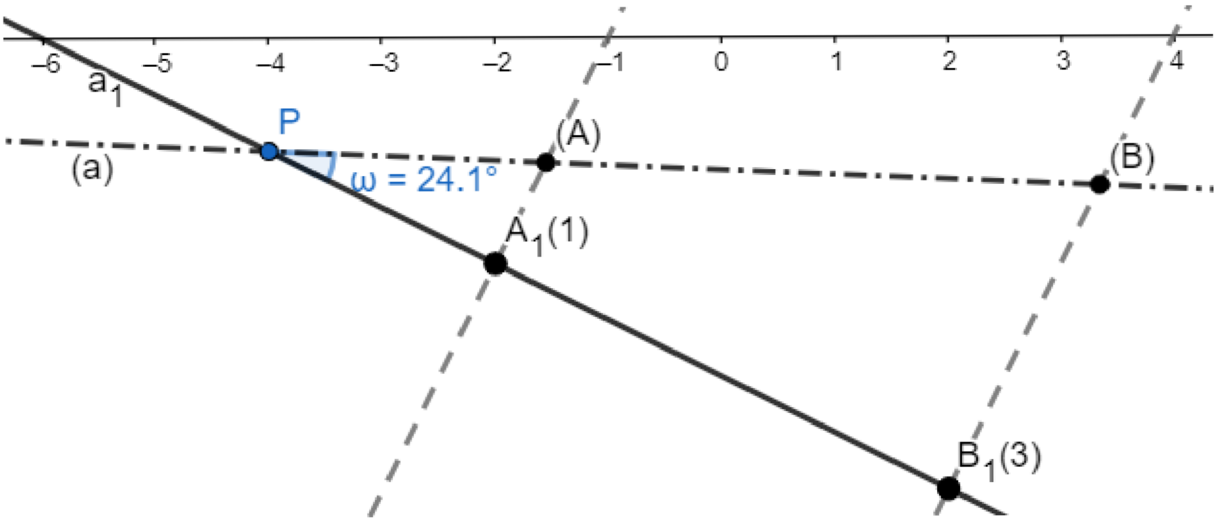
f) *A* [1, 1, 1], *B* [1, 1, 3]



Obrázek 3.7: Úsečka *AB*

Řešení: Úsečka *AB* je kolmá k průmětně, zobrazíme ji jako jeden bod. Skutečná velikost úsečky *AB* je rovna rozdílu kót krajních bodů.

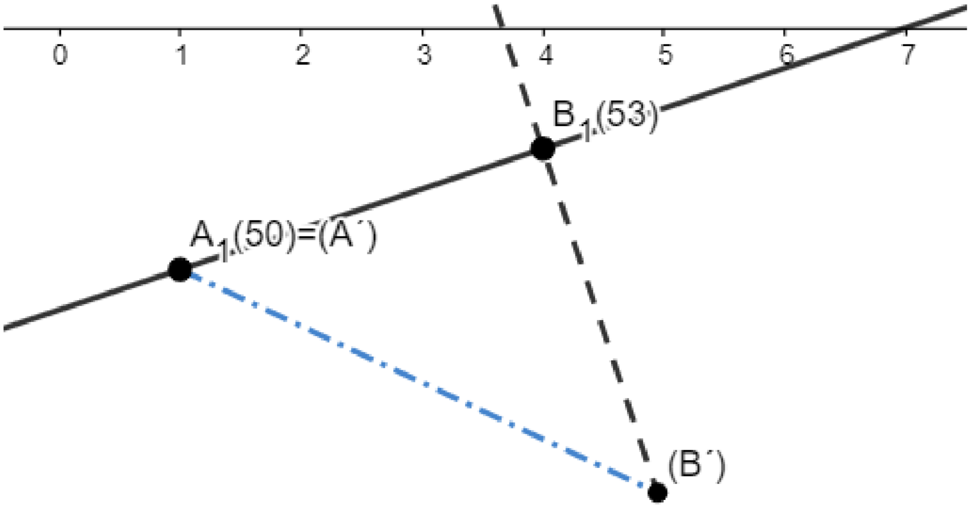
Příklad 3: Určete odchylku a stopník přímky $a = AB$ od průmětny. A [-2, 2, 1], B [2, 4, 3]



Obrázek 3.8: Odchylka přímky a od průmětny π

Řešení: Odchylku určíme sklopením promítací rovinu přímky a do průmětny. Úhel, který svírá průmět přímky a_1 se sklopenou přímkou (a), je hledaná odchylka ω, průsečík přímek a_1 a (a) je stopník přímek P.

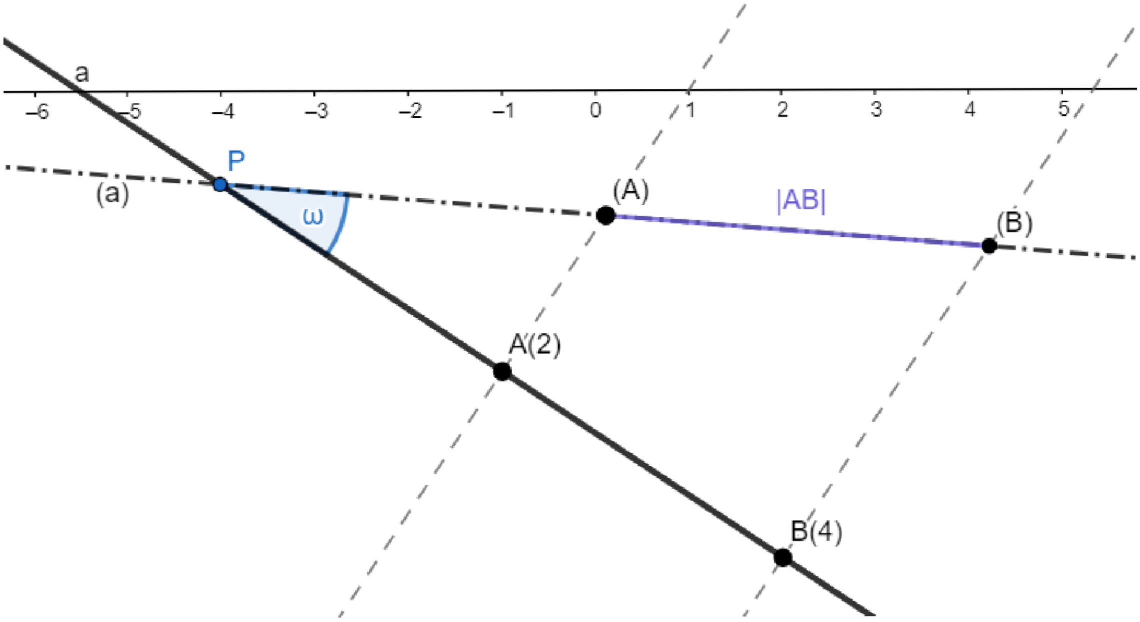
Příklad 4: Určete skutečnou délku úsečky *AB*. *A* [1, 2, 50], *B* [4, 1, 53]



Obrázek 3.9: Transformace průmětny π

Řešení: Úlohu budeme řešit posunutím průmětny π. Průmětnu π posuneme do polohy $\pi'(50)$ a vznikne nám nová průmětna $\pi'(50)$ rovnoběžná s průmětnou π. Úsečku *AB* proložíme rovinou kolmou k průmětně a sklopíme ji do roviny $\pi'(50)$.

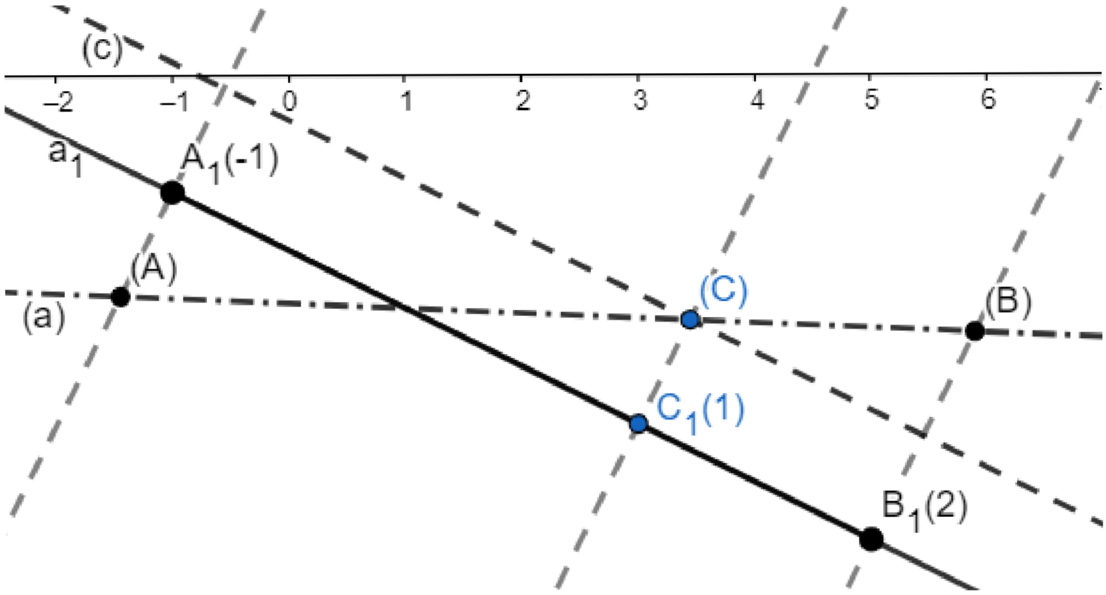
Příklad 5: Zobrazte přímku $a = AB$. A [-1, 3, 2], B [2, 5, 4], určete skutečnou velikost úsečky AB, odchylku přímky od průmětny a stopník přímky a.



Obrázek 3.10: Přímka a

Řešení: Přímku a proložíme promítací rovinou $\varkappa^a$, kterou sklopíme do průmětny π. Na sklopené přímce *(a)* máme sklopené body *(A)* a *(B)*, jejich vzdálenost je velikost úsečky AB. Průsečík úsečky a se sklopenou úsečkou *(a)* je stopník přímky P, odchylka je úhel, který svírají tyto dvě přímky.

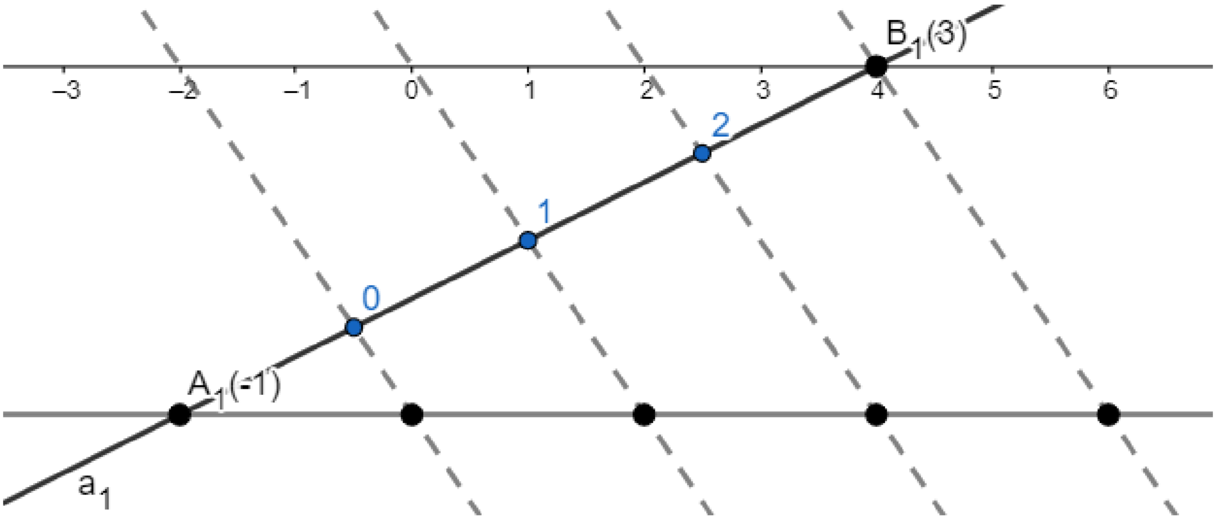
Příklad 6: Určete polohu bodu C, když leží na přímce $a = AB$ a $z_C = 1$. A [-1, 1, -1], B [5, 4, 2]



Obrázek 3:11: Stupňování přímky *a*

Řešení: Promítací rovinu $\varkappa^a$, ve které leží přímka a, sklopíme do průmětny π. V kladné polorovině $\varkappa^a$ leží přímka c, jejíž vzdálenost od přímky a je z_C. Sklopený bod (C) hledaného bodu C leží na průsečíku přímek (a) a (c). Hledaným průmět bodu C_1 je pata kolmice procházející sklopeným bodem (C) k přímce a_1.

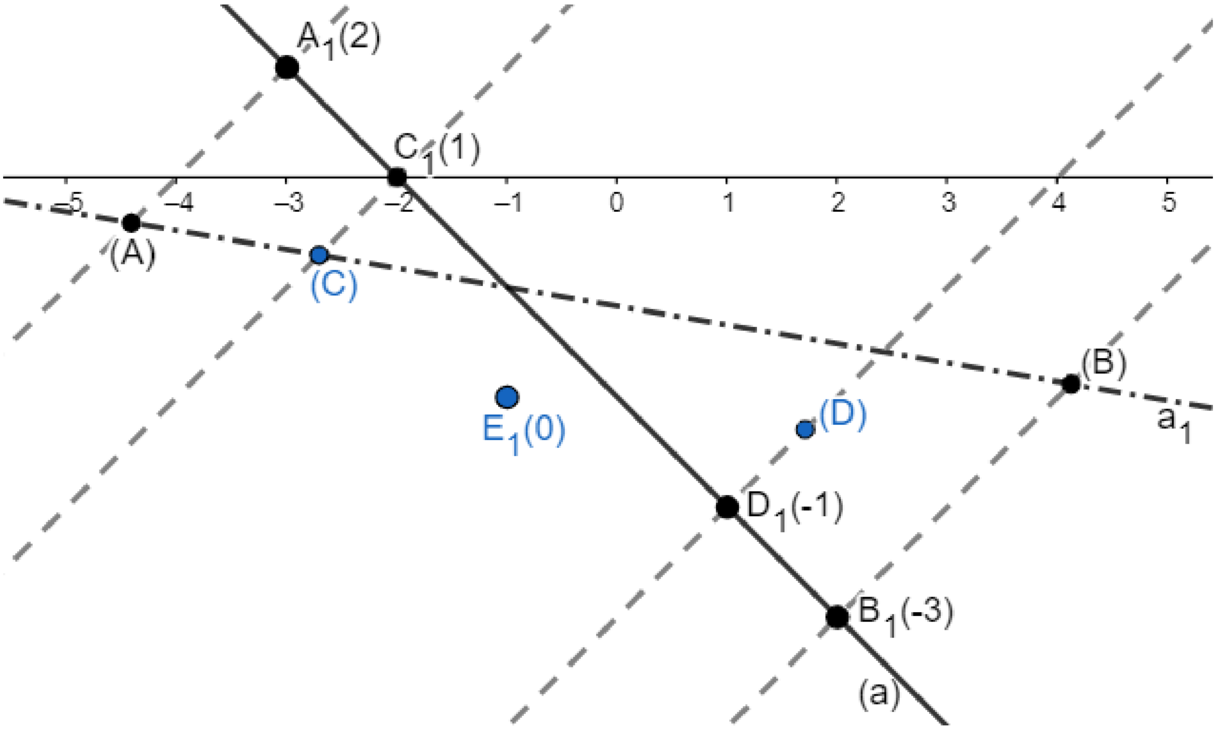
Příklad 7: Na přímce $a = AB$ určete body s celočíselnými kótami. A [-2, 3, -1], B [4, 0, 3]



Obrázek 3.12: Stupňování přímky a

Řešení: Přímku a vystupňujeme. Rozdíl kót bodů A a B je 4, proto úsečku AB rozdělíme na 4 stejné díly a vzniklé body značíme celými čísly podle jejich kóty.

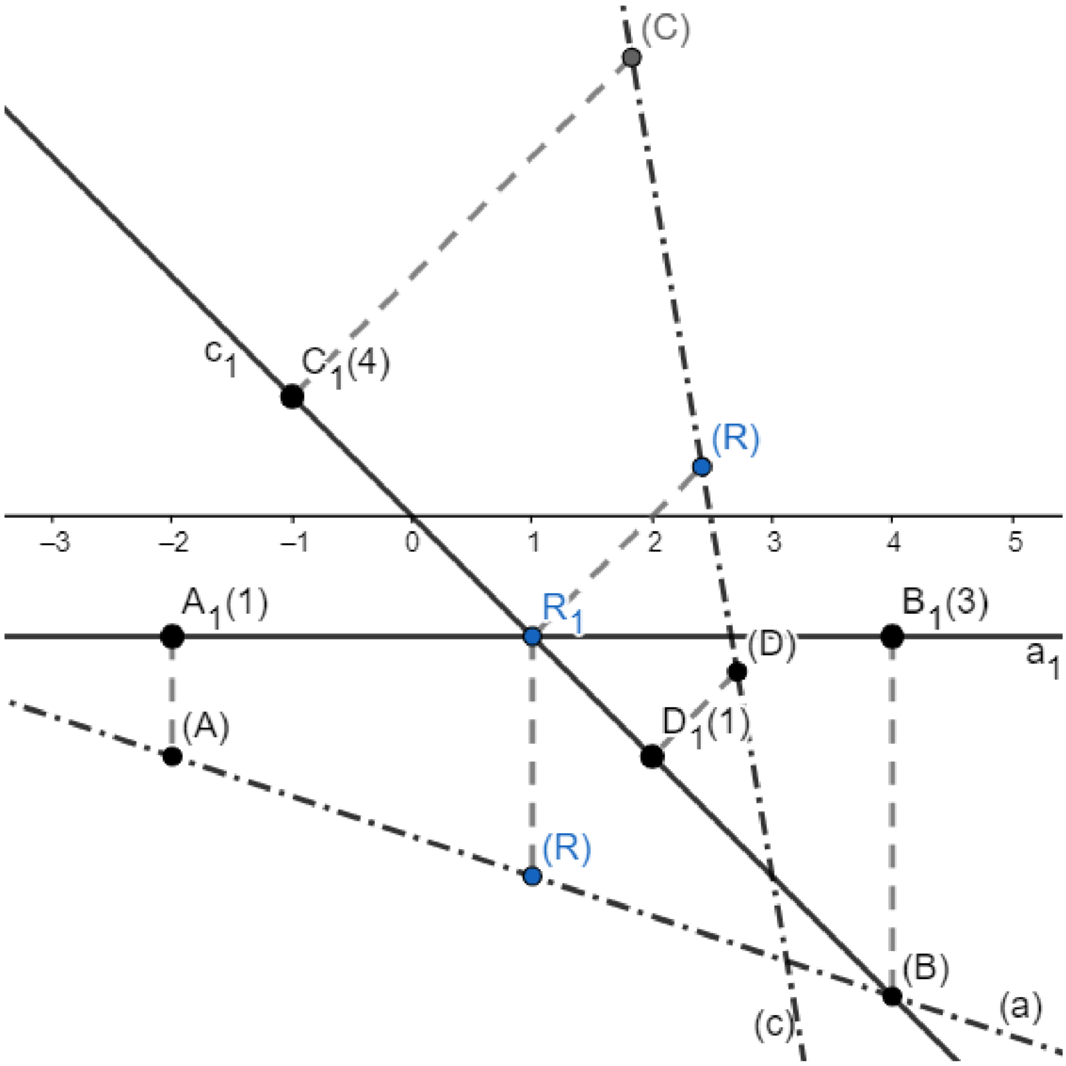
Příklad 8: Rozhodněte, zda body *C*, *D* a *E* leží na přímce *a* = *AB*. *A* [-3, -1, 2], *B* [2, 4, -3], *C* [-2, 0, 1], *D* [1, 3, -1], *E* [-1, 2, 0]



Obrázek 3:13: Vzájemná poloha přímky a bodů

Řešení: Z kótovaných průmětů bodů a přímky vidíme, že bod E_1 na přímce a_1 neleží. Body C_1, D_1 leží na průmětu přímky a_1. Přímku *a* proložíme rovinou kolmou k průmětně a sklopíme ji. Na sklopené přímce *(a)* leží pouze bod *(C)*, takže na přímce *a* leží jen bod *C*.

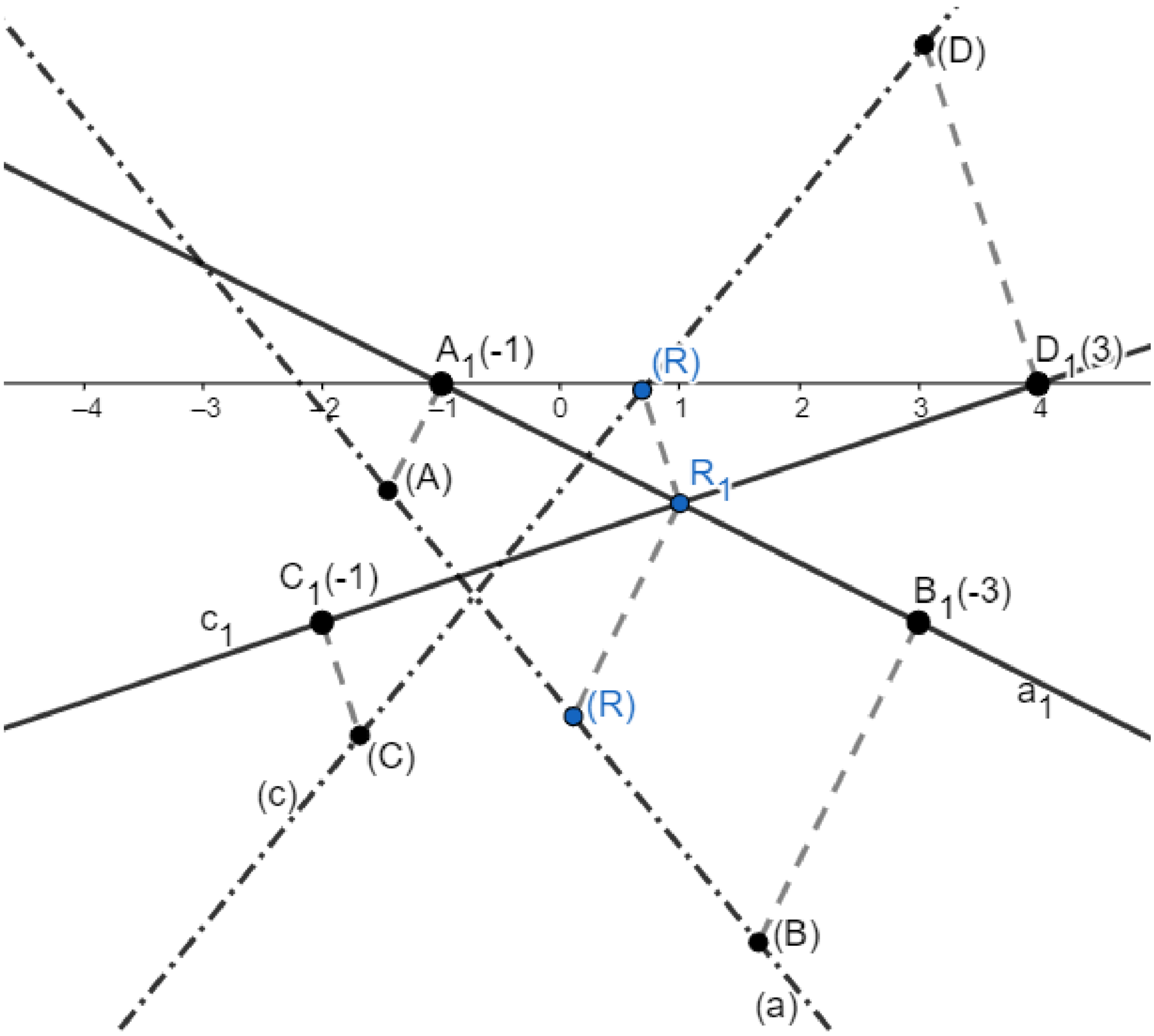
Příklad 9: Určete vzájemnou polohu přímky $a = AB$ s přímkou $c = CD$. A [-2, 1, 1], B [4, 1, 3], C [-1, -1, 4], D [2, 2, 1]



Obrázek 3.14: Vzájemná poloha dvou přímek

Řešení: Průměty přímek a_1 a c_1 se protínají, jejich průsečík, krycí bod označíme R_1. Přímky sklopíme a určíme kótu bodu R na přímce a a na přímce c. Kóta bodu R je *2* na obou přímkách. To znamená, že bod R je průsečík přímek a a c, přímky jsou různoběžné.

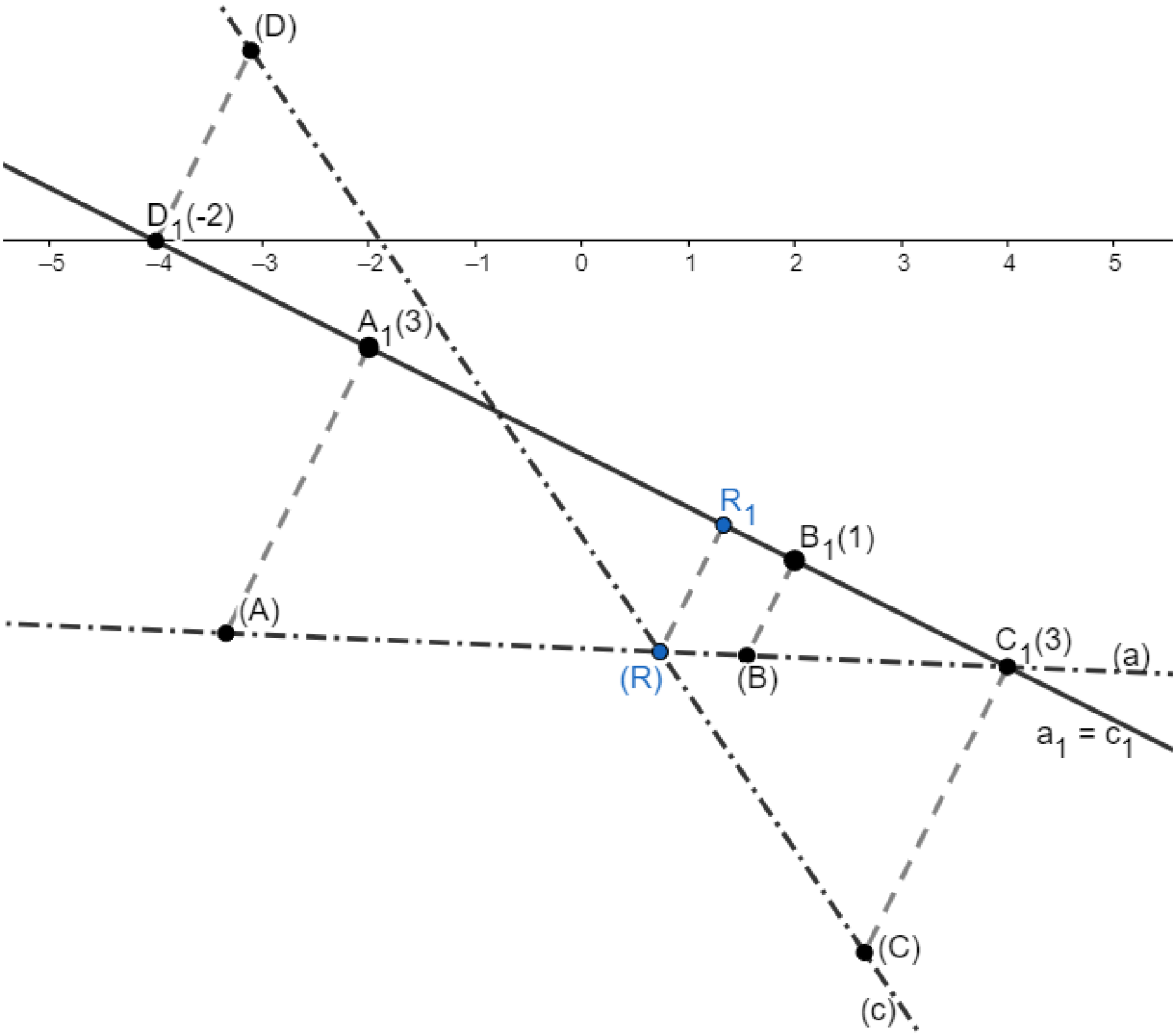
Příklad 10: Určete vzájemnou polohu přímky $a = AB$ s přímkou $c = CD$. A [-1, 0, -1], B [3, 2, -3], C [-2, 2, -1], D [4, 0, 3]



Obrázek 3.15: Vzájemná poloha dvou přímek

Řešení: Průsečík kótovaných průmětů přímek a_1 a c_1 si označíme R jako krycí bod. Přímky a_1 a c_1 sklopíme, bod R má na přímce a_1 kótu 1 a na přímce c_1 kótu -2. Průměty přímek byly různoběžné a kóty krycího bodu různé, proto jsou přímky a a c mimoběžné.

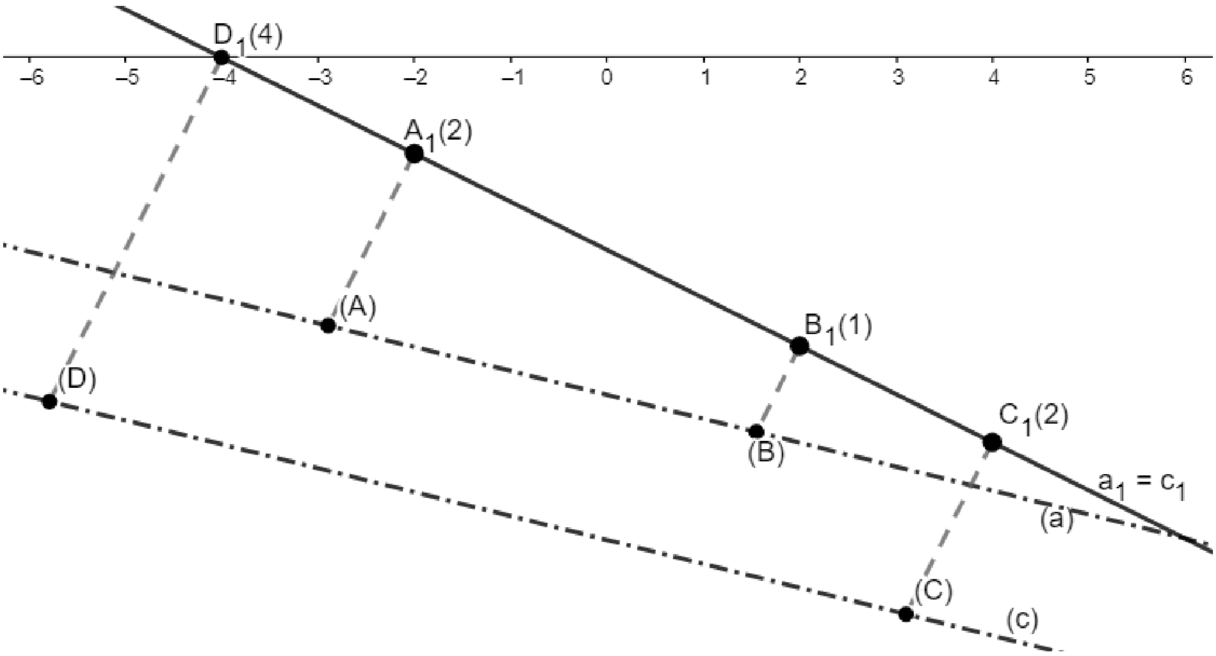
Příklad 11: Určete vzájemnou polohu přímky $a = AB$ s přímkou $c = CD$. A [-2, 1,3], B [2, 3, 1], C [4, 4, 3], D [-4, 0, -2]



Obrázek 3.16: Vzájemná poloha dvou přímek

Řešení: Protože průměty přímek splývají, proložíme přímky kolmou rovinou k průmětně, kterou sklopíme. Přímky po sklopení mají průsečík R, z toho vyplívá, že přímky a a c jsou navzájem různoběžné.

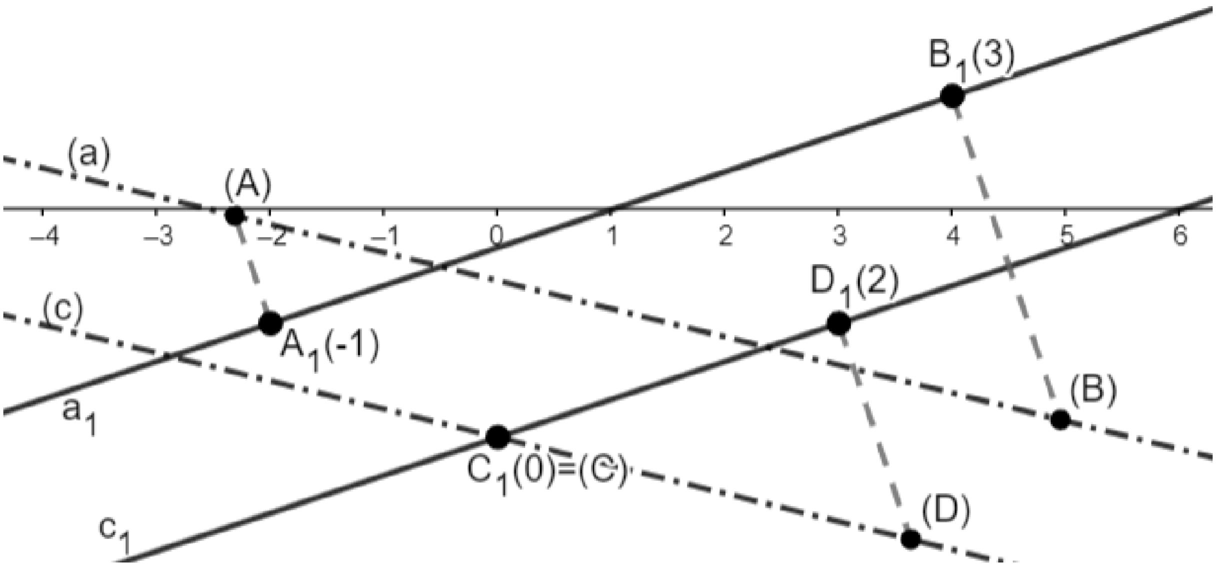
Příklad 12: Určete vzájemnou polohu přímky $a = AB$ s přímkou $c = CD$. A [-2, 1, 2], B [2, 3, 1], C [4, 4, 2], D [-4, 0, 4]



Obrázek 3.17: Vzájemná poloha dvou přímek

Řešení: Průměty přímek opět proložíme rovinou kolmou k průmětně a sklopíme ji. Sklopené přímky *(a)* a *(c)* jsou rovnoběžné, proto můžeme říci, že i přímky *a* a *c* jsou rovnoběžné.

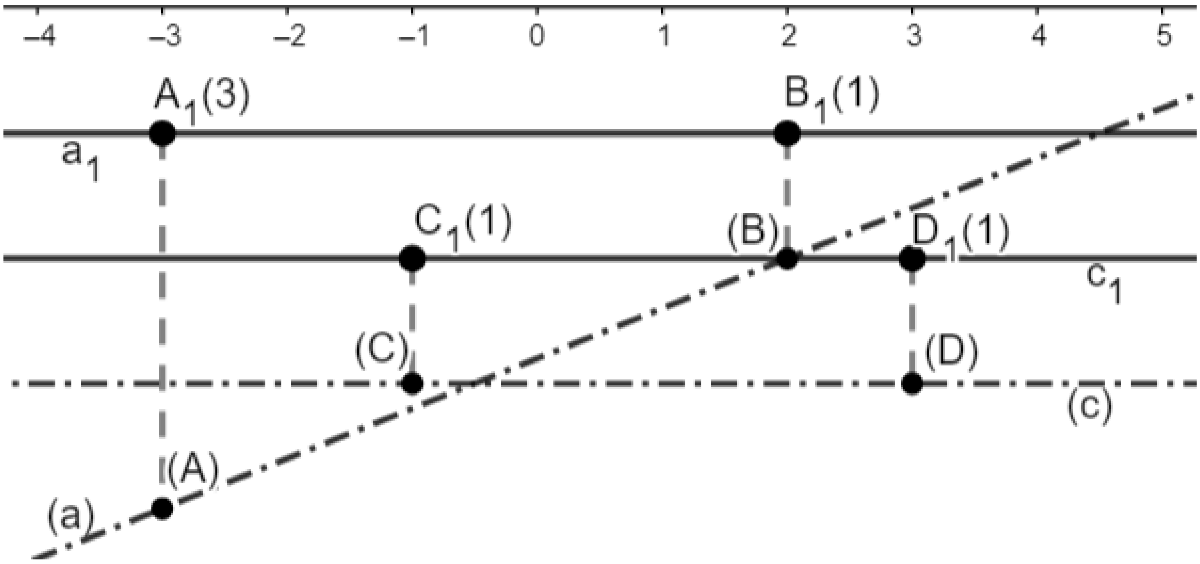
Příklad 13: Určete vzájemnou polohu přímky $a = AB$ s přímkou $c = CD$. A [-2, 1, -1], B [4, -1, 3], C [0, 2, 0], D [3, 1, 2]



Obrázek 3.18: Vzájemná poloha dvou přímek

Řešení: Průměty přímek a_1 a c_1 jsou navzájem rovnoběžné. Když přímky sklopíme, zjistíme, že i sklopené přímky *(a), (c)* jsou navzájem rovnoběžné. Takže přímky *a* a *c* jsou přímky rovnoběžné.

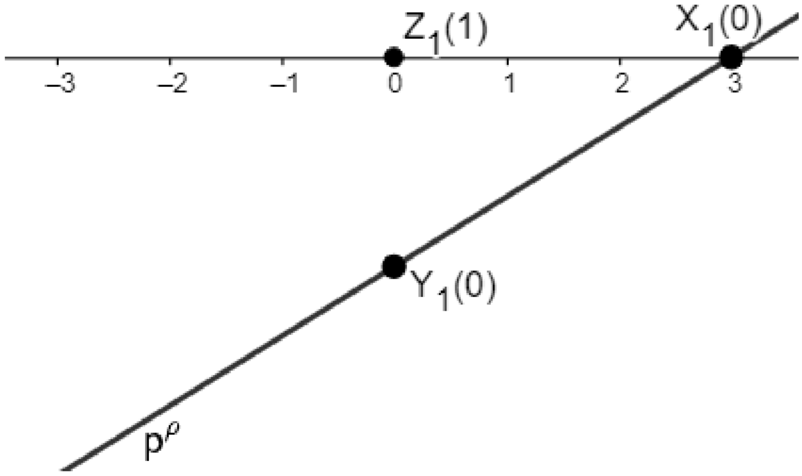
Příklad 14: Určete vzájemnou polohu přímky $a = AB$ s přímkou $c = CD$. A [-3, 1, 3], B [2, 1, 1], C [-1, 2, 1] D [3, 2, 1]



Obrázek 3.19: Vzájemná poloha dvou přímek

Řešení: Vidíme, že průměty přímek a_1 a c_1 jsou navzájem rovnoběžné, když přímky sklopíme, vzniknou nám přímky *(a)* a *(c),* které jsou navzájem různoběžné. Průsečík přímek *(a)* a *(c)* je pouze krycím bodem, ve skutečnosti se přímky neprotínají, a proto se jedná o mimoběžné přímky.

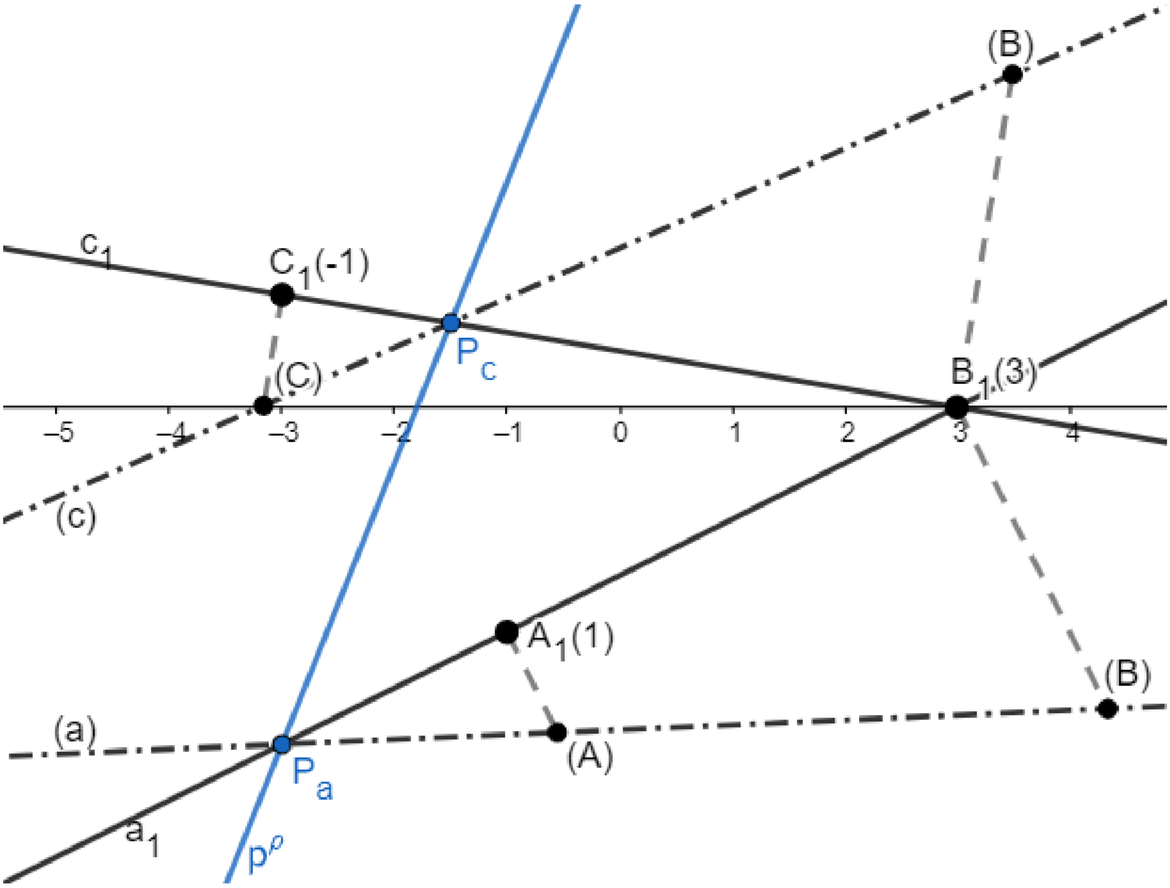
Příklad 15: Zobrazte rovinu ϱ (3, 2, 1).



Obrázek 3.20: Stopa roviny ϱ

Řešení: Nejprve zobrazíme průsečíky roviny ϱ s osami x a y. Rovina ϱ má průsečík s osou x v bodě X (3, 0, 0) a s osou y v bodě Y (0, 2, 0), protože body X a Y leží v průmětně π, prochází jimi stopa roviny p^{ϱ}. Rovina ϱ protíná osou z v bodě Z (0, 0, 1).

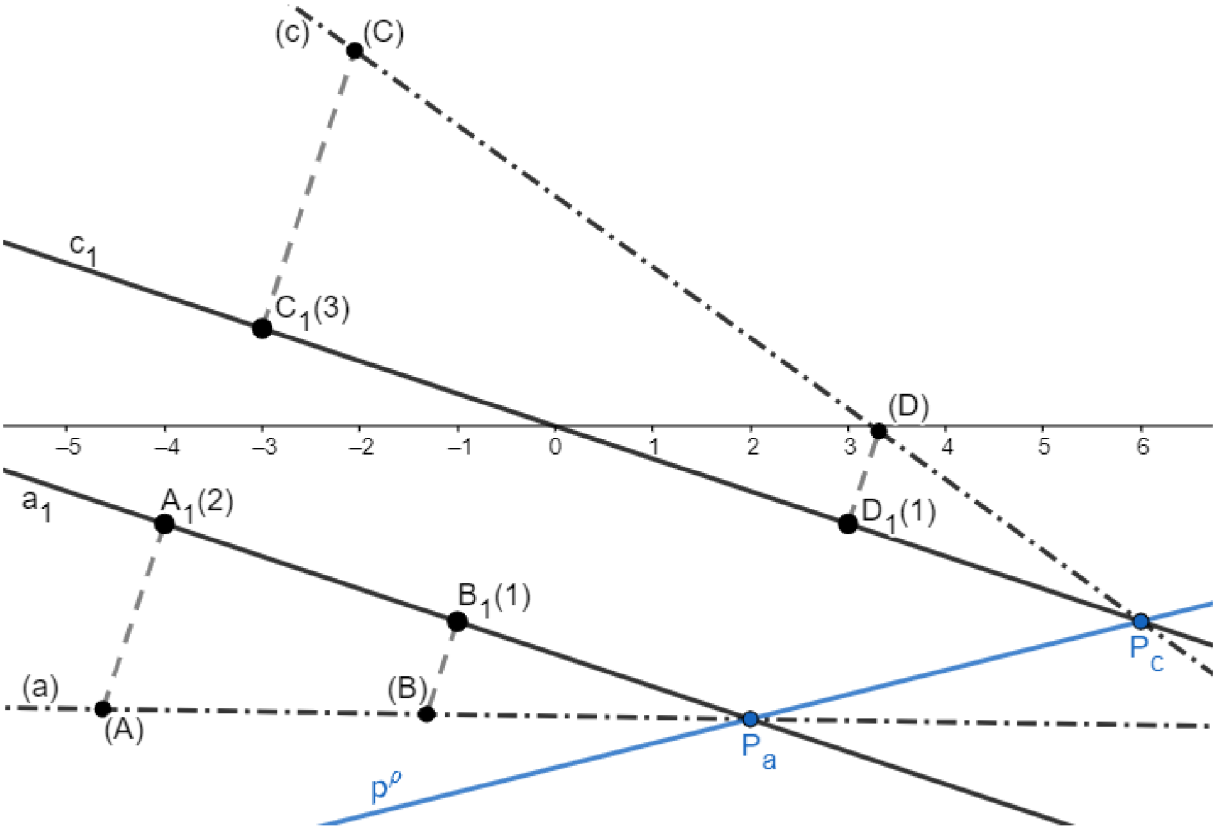
Příklad 16: Zobrazte stopu roviny ϱ, která já dána přímkami $a = AB$, $c = BC$. A [-1, 2, 1], B [3, 0, 3], C [-3, -1, -1]



Obrázek 3.21: Stopa roviny ϱ

Řešení: Stopa roviny je přímka, kde se protíná rovina ϱ s průmětnou π. Přímky a a c sklopíme, určíme jejich stopníky (průsečík průmětu přímky se sklopenou přímkou) a označíme je P. Na stopě roviny p^ϱ leží body s kótou nula, tedy i stopníky P. Stopa roviny p^ϱ prochází stopníky P_a a P_c.

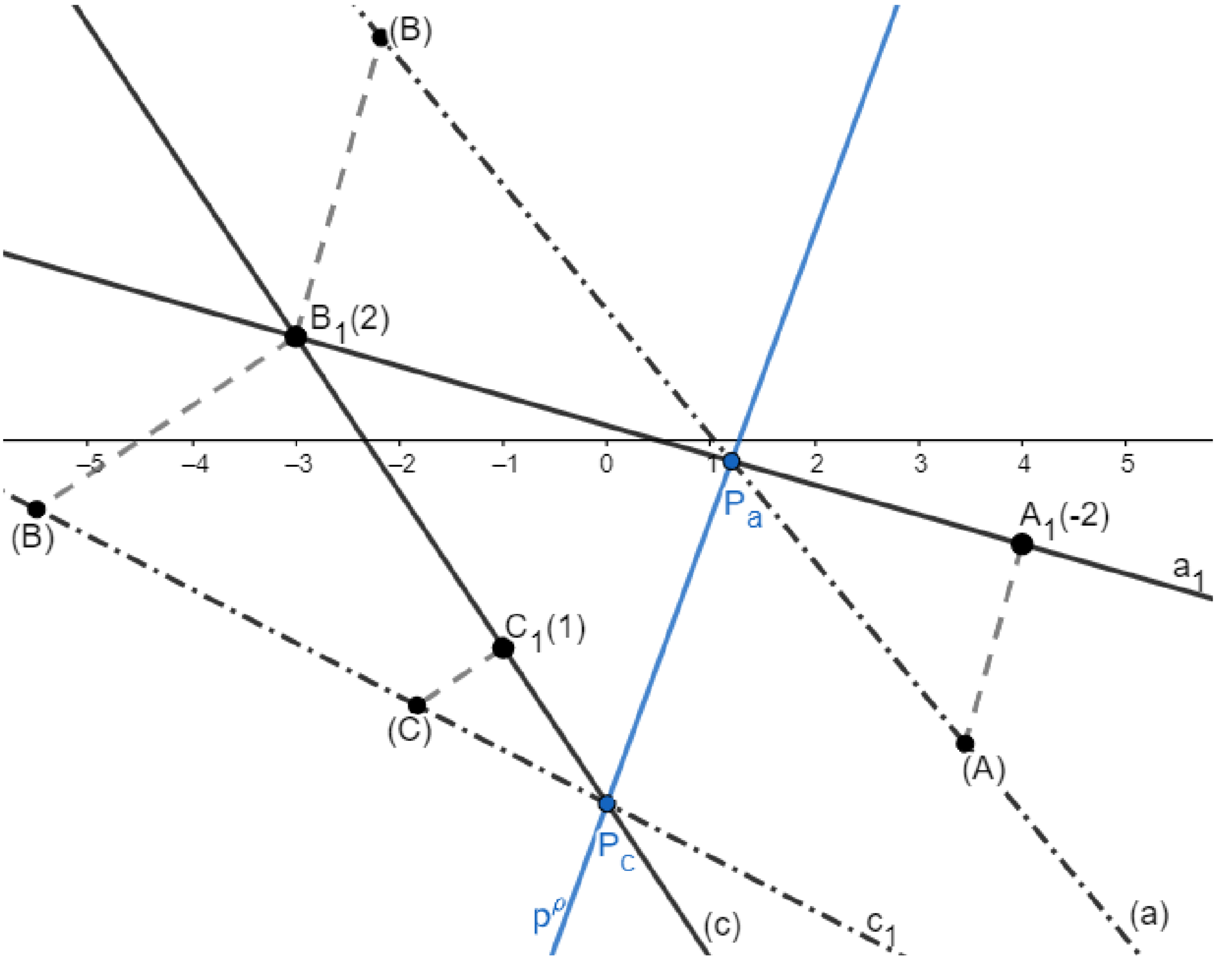
Příklad 17: Zobrazte stopu roviny ϱ, která já dána přímkami $a = AB$, $c = BC$. A [-4, 1, 2], B [-1, 2, 1], C [-3, -1, 3], D [3, 1, 1]



Obrázek 3.22: Stopa roviny ϱ

Řešení: Přímky opět sklopíme, určíme stopníky a stopu roviny, na níž leží stopníky.

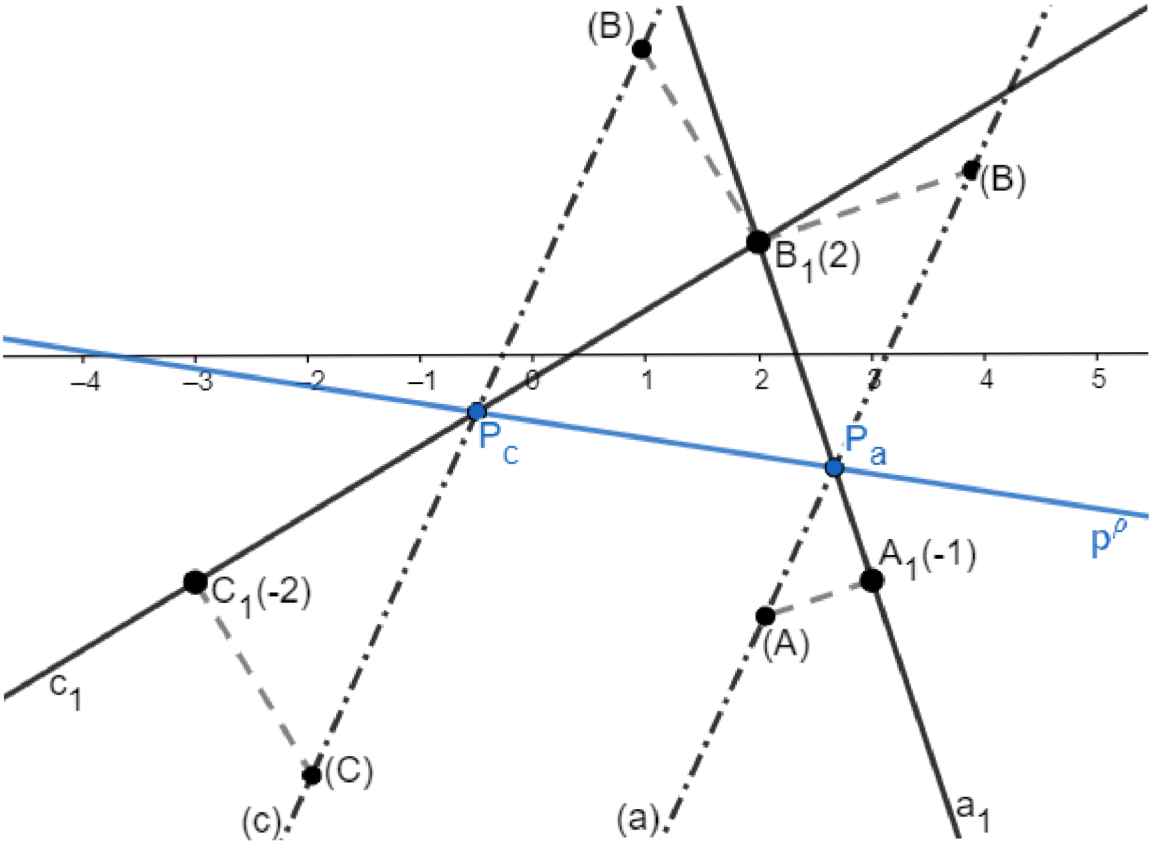
Příklad 18: Zobrazte stopu roviny ϱ, která já dána přímkou $a = AB$ a bodem C. A [4, 1, -2], B [-3, -1, 2], C [-1, 2, 1]



Obrázek 3.23: Stopa roviny ϱ

Řešení: Sklopíme přímku a_1 a určíme stopník přímky P_a. Bodem C vedeme přímku c, která prochází dalším bodem z roviny, v našem příkladu bodem B. Přímku c_1 sklopíme, určíme stopník P_c a stopu roviny p^{ϱ} procházející zmíněnými stopníky.

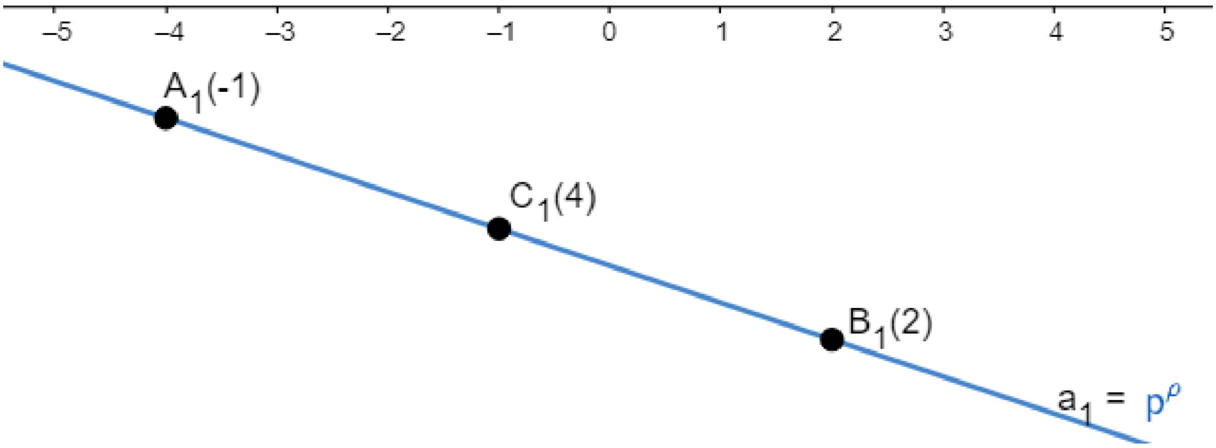
Příklad 19: Zobrazte stopu roviny ϱ, která já dána body A, B, C. A [3, 2, -1], B [2, -1, 2], C [-3, 2, -2]



Obrázek 3.24: Stopa roviny ϱ

Řešení: Zobrazíme průměty bodů, kterými vedeme alespoň dvě různé přímky. Příklad převedeme na předchozí situaci, kdy máme dvě přímky, které sklopíme a můžeme určit jejich stopníky a poté stopu roviny.

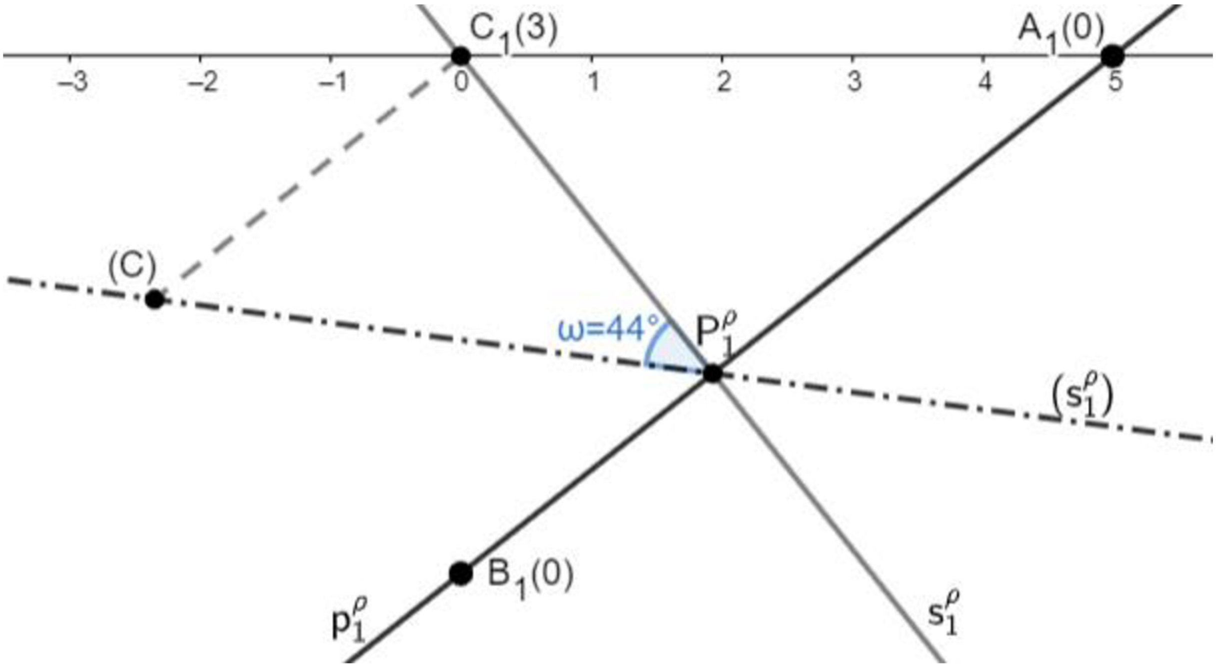
Příklad 20: Zobrazte stopu roviny ϱ, která já dána přímkou $a = AB$ bodem C. A [-4, 1, -1], B [2, 3, 2], C [-1, 2, 4]



Obrázek 3.25: Stopa roviny ϱ

Řešení: Průmět bod C_1 leží na průmětu přímky a_1, rovina ϱ je kolmá k průmětně π, všechny její body se zobrazují na jednu přímku, proto i stopa roviny se zobrazí na přímku a_1.

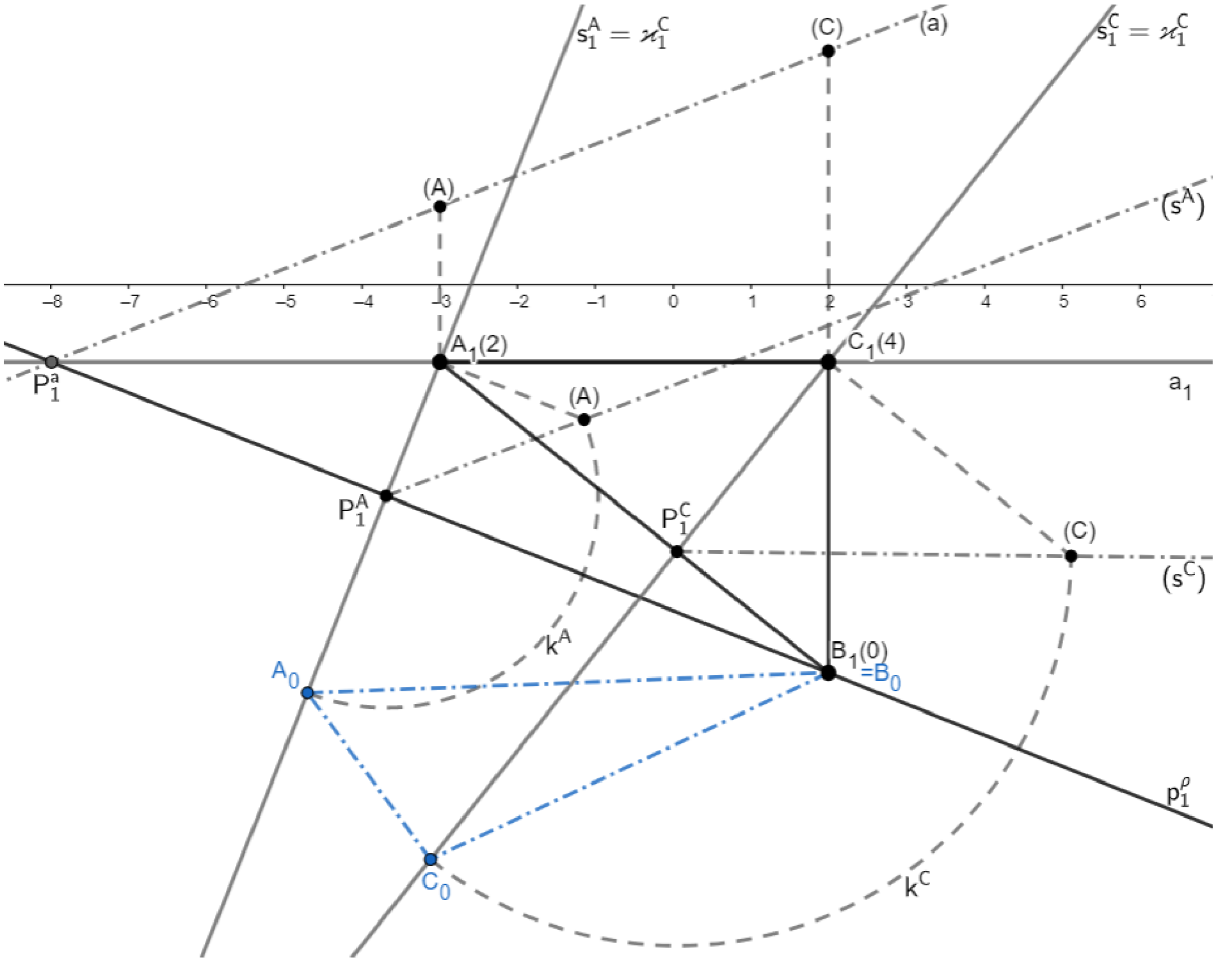
Příklad 21: Určete odchylku roviny $\varrho = ABC$ od průmětny π. $A = [5, 0, 0]$, $B = [0, 4, 0]$, $C = [0, 0, 3]$



Obrázek 3.26: Odchylka roviny ϱ a průmětny π

Řešení: Odchylku roviny od průmětny určíme sklopením spádové přímky roviny. Určíme stopu roviny $p^\varrho{}_1$, která prochází body A_1, B_1. Bodem C vedeme spádovou přímku roviny s^ϱ, její průmět je kolmý na stopu roviny $p^\varrho{}_1$. Spádovou přímku $s^\varrho{}_1$ $(P^\varrho{}_1C_1)$ sklopíme do průmětny π. Úhel, který svírá sklopená spádová přímka $(s^\varrho{}_1)$ s průmětem spádové přímky $s^\varrho{}_1$, je odchylka spádové přímky od roviny a současně odchylka roviny od průmětny π.

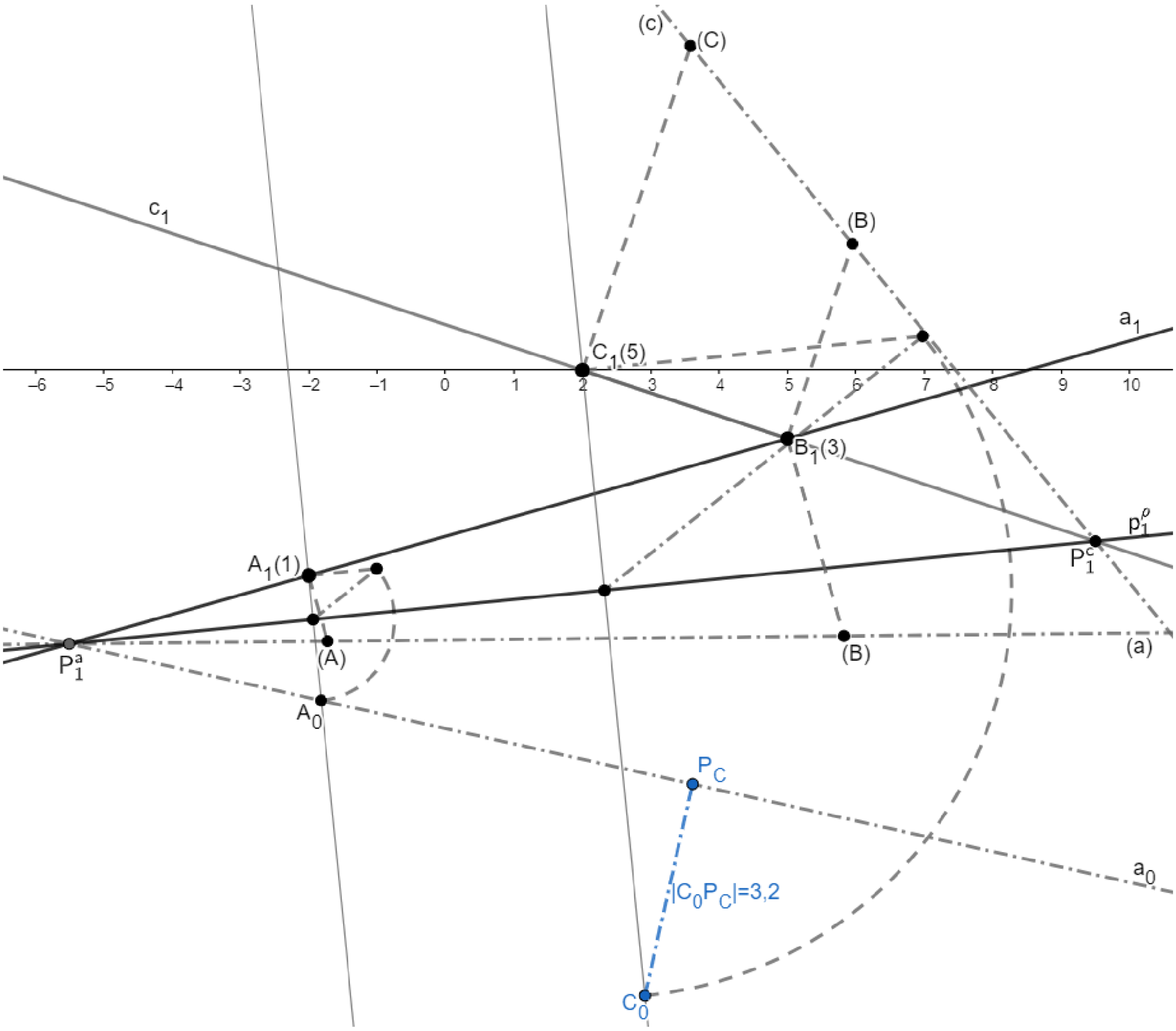
Příklad 22: Určete skutečný tvar trojúhelník ABC. $A = [-3, 1, 2]$, $B = [2, 5, 0]$, $C = [2, 1, 4]$



Obrázek 3.27: Zobrazení trojúhelníku ABC

Řešení: Trojúhelník ABC leží v rovině ϱ, určíme stopu roviny $p^\varrho{}_1$. Přímku $a_1 = A_1C_1$ sklopíme a získáme stopník $P^a{}_1$, bod B je druhým stopníkem, protože má kótu nula. Bod A proložíme pomocnou rovinou $\varkappa^A$ kolmou k průmětně π a stopě roviny $p^\varrho{}_1$. V rovině $\varkappa^A$ leží spádová přímka $s^A{}_1$, která prochází bodem A_1, a sklopíme ji. Středem otáčení kružnice k^A bude bod $P^A{}_1$, průsečík stopy roviny $p^\varrho{}_1$ se spádovou přímkou $s^A{}_1$. Poloměr otáčení je vzdálenost bodu $P^A{}_1$ a sklopeného bodu (A). Otočený bod A_0 leží na průsečíku kružnice otáčení k^A a spádové přímce $s^A{}_1$. Bod C otočíme stejným způsobem jako bod A. Proložíme bodem C pomocnou rovinou $\varkappa^C$. Spádovou přímku $s^C{}_1$ v rovině $\varkappa^C$ procházející bodem C sklopíme. Kružnice otáčení k^C se středem v bodě $P^C{}_1$ a poloměrem otáčení $|P^C{}_1(C)|$ protne spádovou přímku $s^C{}_1$ v bodě C_0. Bod B_1 po otočení nemění svoji polohu, protože leží na ose otáčení, stopníku $p^\varrho{}_1$.

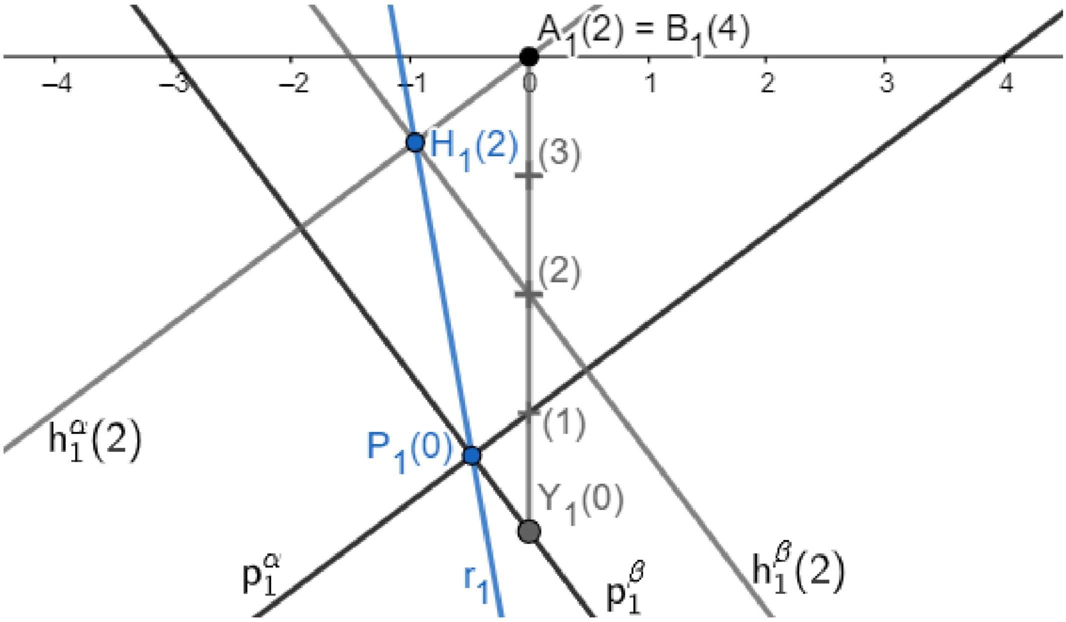
Příklad 23: Určete vzdálenost bodu C od přímky $a = AB$. $A = [-2, 3, 1]$, $B = [5, 1, 3]$, $C = [2, 0, 5]$



Obrázek 3.28: Vzdálenost bodu C od přímky a

Řešení: Vzdálenost bodu C od přímky a určíme pomocí principu otočení. Bod C a přímku a proložíme rovinou ϱ a určíme stopu roviny $p^\varrho{}_1$, která prochází stopníky roviny $P^a{}_1$ a $P^c{}_1$ (přímka c je dána body BC). Nyní otočíme přímku a_1 ($a_1 = P^a{}_1A_1(1)$) a bod C_1 kolem stopy roviny $p^\varrho{}_1$ do průmětny π. Na závěr sestrojíme kolmici procházející otočeným bodem C_0 na otočenou přímku a_0. Vzdálenost od paty kolmice P_C k bodu C_0 je hledaná vzdálenost.

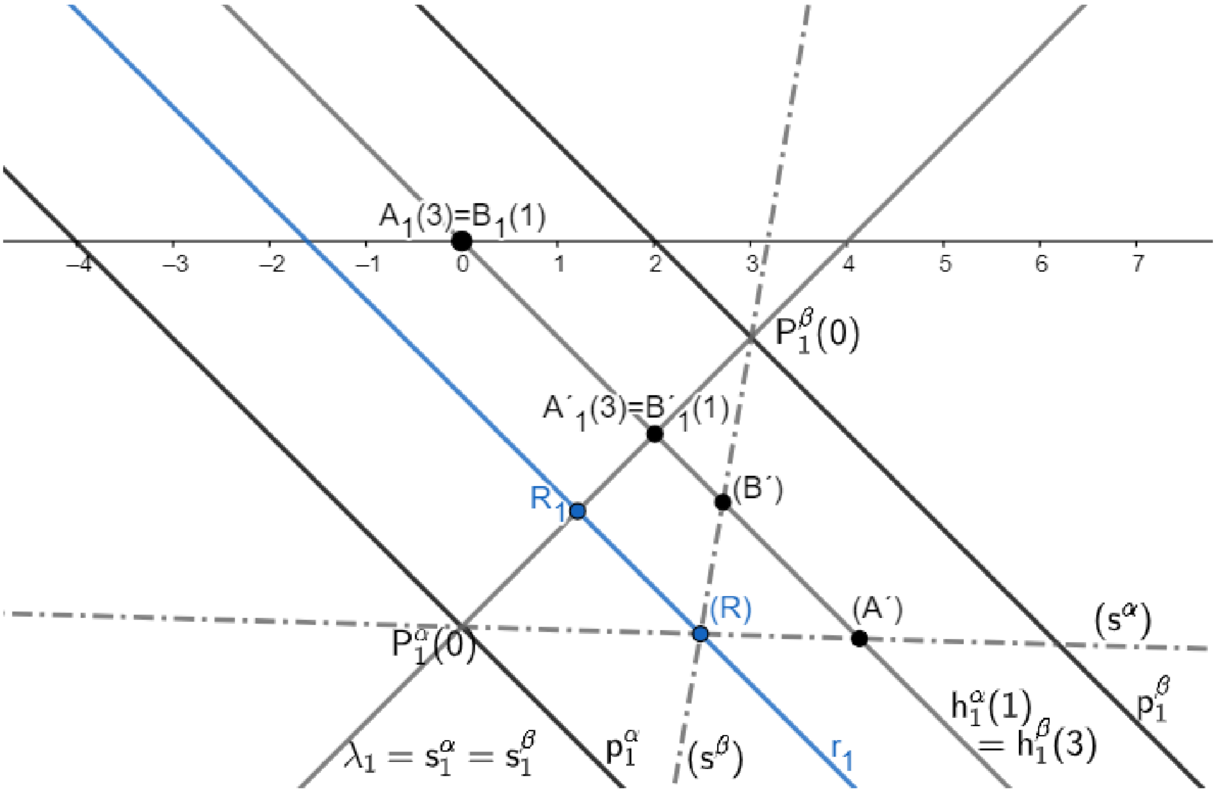
Příklad 24: Zobrazte průsečnici dvou rovin. $\alpha = (4, 3, 2)$, $\beta = (-3, 4, 4)$



Obrázek 3.29: Průsečnice rovin α a β

Řešení: Zobrazíme si roviny a jejich stopy. Průsečík P stop rovin p^α a p^β je první bod, který známe z hledané průsečnice r. Dalšími body průsečnice r jsou průsečíky hlavních přímek o stejné kótě. Najdeme průsečík hlavních přímek v kótě *2*, hlavní rovina h^α roviny α prochází bodem A a je rovnoběžná se stopou p^α. Stopou rovin p^β vystupňujeme z kóty 0 do kóty *2* pomocí úsečky YB, kterou rozdělíme na 4 stejné díly. Vznikne nám hlavní rovina h^β o kótě *2*, jenž je rovnoběžná se stopou roviny p^β. Průsečík hlavních přímek v kótě *2* označíme H a máme druhý bod, kterým prochází průsečnice r, tak ji zobrazíme.

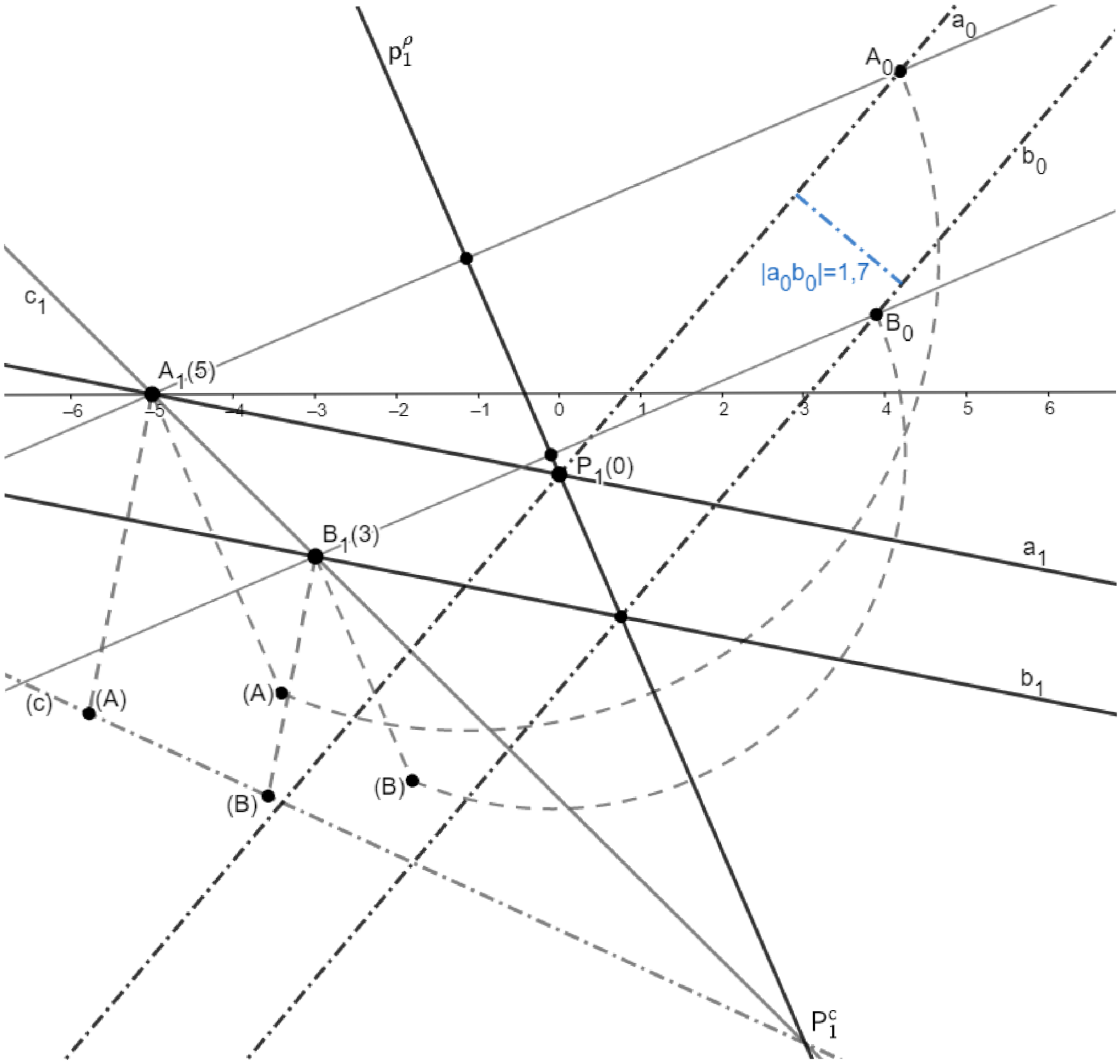
Příklad 25: Zobrazte průsečnici dvou rovin. $\alpha = (-4, 4, 3)$, $\beta = (2, -2, 1)$



Obrázek 3.30: Průsečnice rovin α a β

Řešení: Stopy rovin p^α a p^β jsou navzájem rovnoběžné. Roviny proložíme pomocnou rovinou λ kolmou ke stopám rovin p^α a p^β a k průmětně π. V rovině λ leží spádové přímky s^α a s^β, které jsou dány stopníkem P^α a bodem $A'_1(3)$ pro rovinu α a pro rovinu β stopníkem P^β a bodem $B'_1(1)$. Sklopením roviny λ do průmětny π zjistíme průsečík R spádových přímek s^α a s^β. Hledaná průsečnice r prochází bodem R a je rovnoběžná ke stopám roviny p^α a p^β.

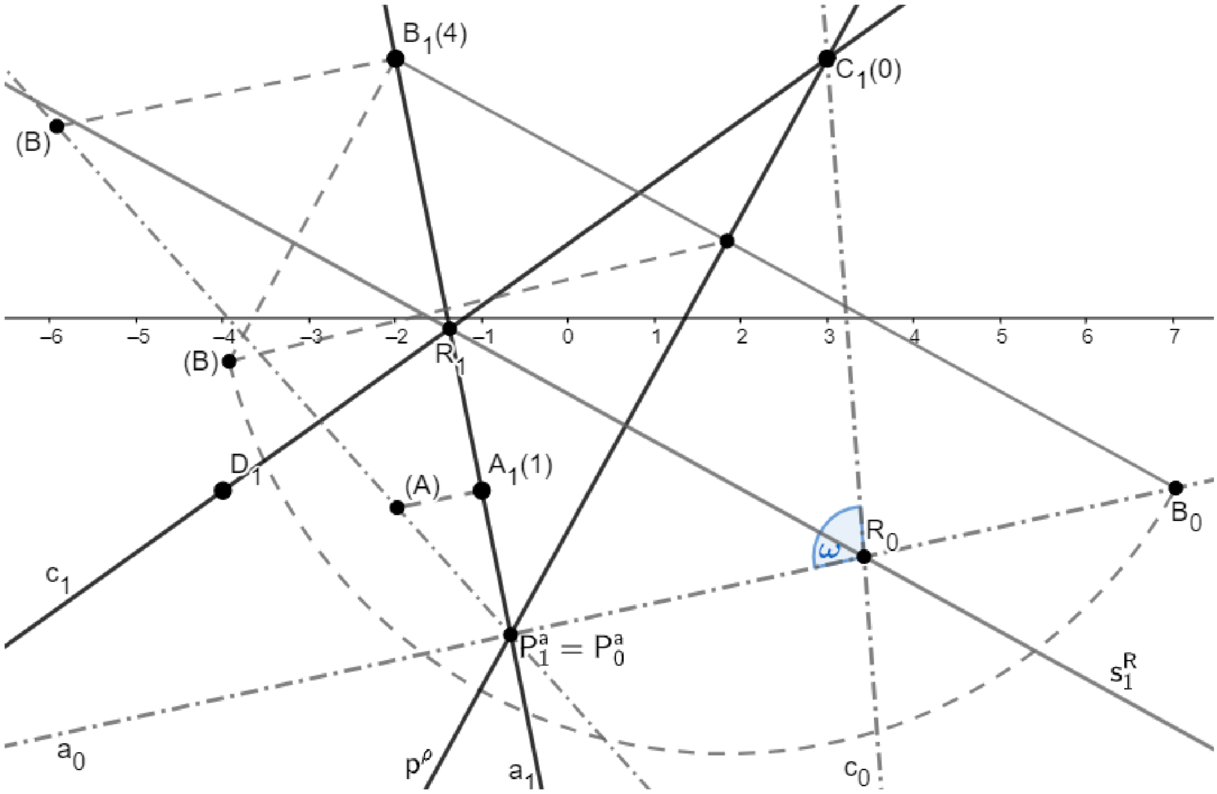
Příklad 26: Určete vzdálenost dvou rovnoběžných přímek $a = AP$ a b (B ∈ b). $A = [-5, 0, 5]$, $P = [0, 1, 0]$, $B = [-3, 2, 3]$



Obrázek 3.31: Vzdálenost dvou přímek

Řešení: Přímky a a b proložíme rovinou ϱ, určíme stopníky roviny $P_1(0)$ (zadaný bod), $P^C{}_1$ (stopník přímky $c = AB$) a stopu roviny $p^{\varrho}{}_1$. Rovinu ϱ otočíme do průmětny π, kolem stopy roviny $p^{\varrho}{}_1$. Otočíme přímky a_1 a b_1 do průmětny π, kde pomocí kolmice určíme vzdálenost otočených přímek a_0 a b_0.

Příklad 27: Určete odchylku různoběžných přímek $a = AB$, $c = CD$. $A = [-1, 2, 1]$, $B = [-2, -3, 4]$, $C = [3, -3, 0]$, $D = [-4 , 2, -]$

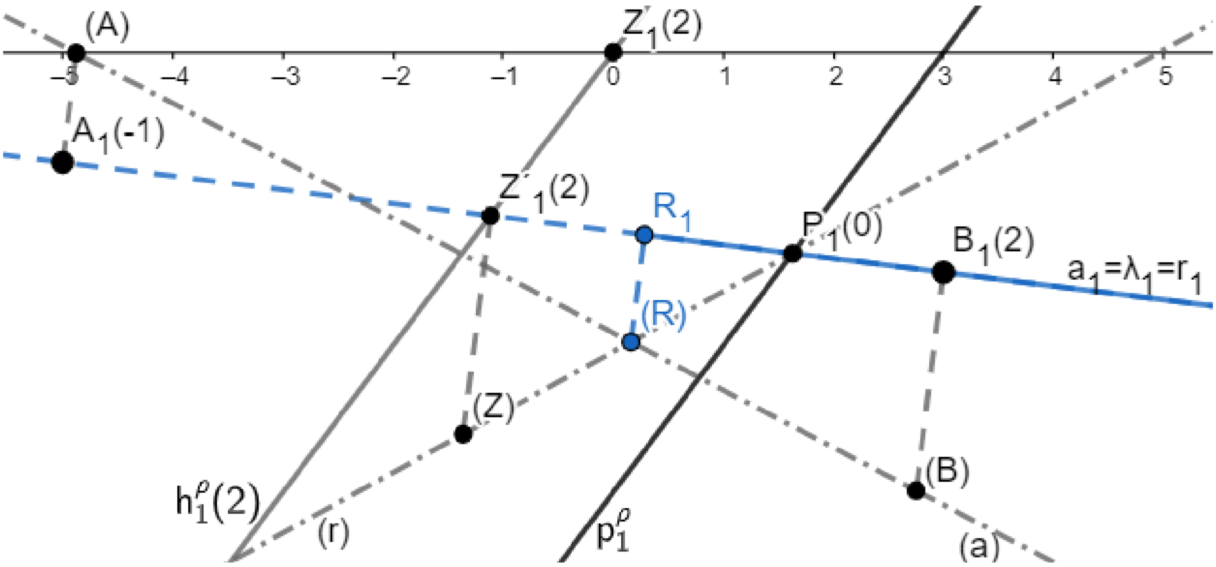


Obrázek 3.32: Odchylka přímek *a* a *b*

Řešení: Přímky *a* a *c* proložíme rovinou ϱ a určíme stopu roviny p^{ϱ} sklopením přímky a_1 a bodem C_1 s kótou nula. Rovinu ϱ otočíme kolem stopy roviny p^{ϱ} do průmětny π. Otočíme bod B_1, protože přímka a_1 prochází body B_1 a $P^{a}{}_{1}$, otočená přímka a_0 bude procházet otočenými body B_0 a $P^{a}{}_{0}$,stopník po otočení leží opět na stopě roviny. Nyní otočíme přímku c_1, ale protože neznáme kótu bodu D_1, přímku otočíme pomocí průsečíku R_1 přímek a_1 a c_1. Průsečík přímek R_1 leží na spádové přímce $s^{R}{}_{1}$, která je kolmá na stopu roviny p^{ϱ}. Otočený průsečík R_0 leží na průsečíku spádové přímky *a* a otočené přímky a_0. Otočená přímka c_0 prochází bodem C_1, který po otočení nemění polohu, a otočeným průsečík R_0. Hledaná odchylka přímek *a* a *c* je velikost odchylky otočených přímek a_0 a c_0.

Příklad 28: Zobrazte průsečík přímky $a = AB$ s rovinou ϱ. $A = [-5, 1, -1]$, $B = [3, 2, 2]$,

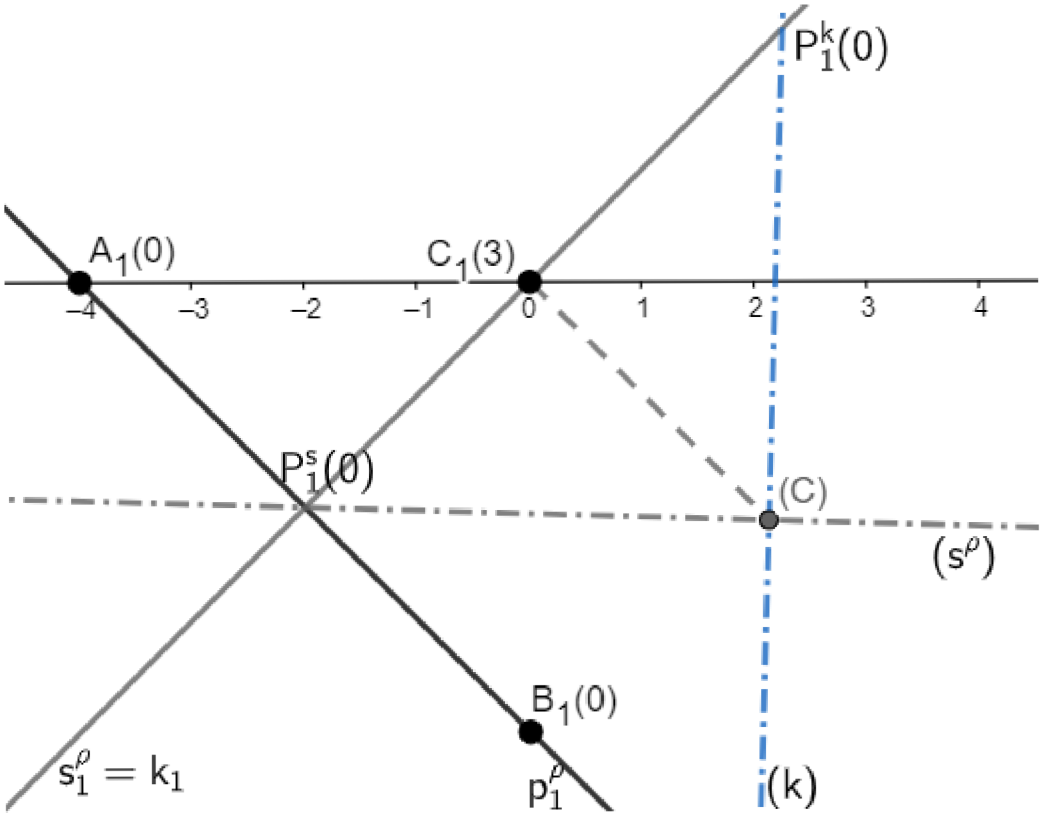
$\varrho = (3, 4, 2)$



Obrázek 3.33: Průsečík přímky a s rovinou ϱ

Řešení: Přímku a_1 proložíme pomocnou rovinou λ kolmou k průmětně π. V rovině λ leží přímka r, která je průsečnicí roviny ϱ s rovinou λ a je dána stopníkem přímky $P_1(0)$ a bodem $Z'_1(2)$ ležícím na hlavní přímce $h^\varrho(2)$. Rovinu λ sklopíme, abychom mohli určit průsečík R přímky a s přímkou r. Průsečík R je bod, kde přímka a protíná rovinu ϱ a rozděluje přímku na část nad rovinou ϱ a pod rovinou ϱ.

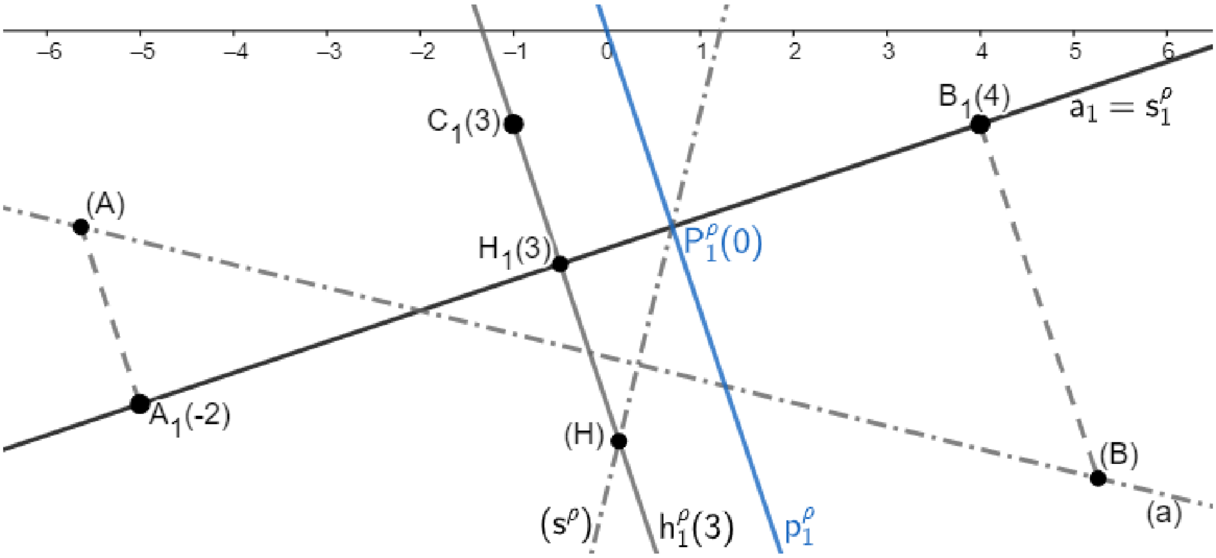
Příklad 29: Určete přímku, která je kolmá na rovinu $\varrho = ABC$ a prochází bodem C.
$A = [-4, 0, 0]$, $B = [0, 4, 0]$, $C = [0, 0, 3]$



Obrázek 3.34: Přímka kolmá na rovinu ϱ

Řešení: Body A a B prochází stopa roviny $p^\varrho{}_1$, bodem C povedeme spádovou přímku $s^\varrho{}_1$ a zároveň přímku k_1, která je kolmá na stopu roviny $p^\varrho{}_1$. Přímku $s^\varrho{}_1 = k_1$ sklopíme do průmětny π a vznikne nám sklopený bod *(C)*, což bude průsečík sklopené spádové přímky (s^ϱ) s přímkou *(k)*. Sklopená přímka *(k)* je kolmá na spádovou přímku a má stopník v $P^k{}_1(0)$.

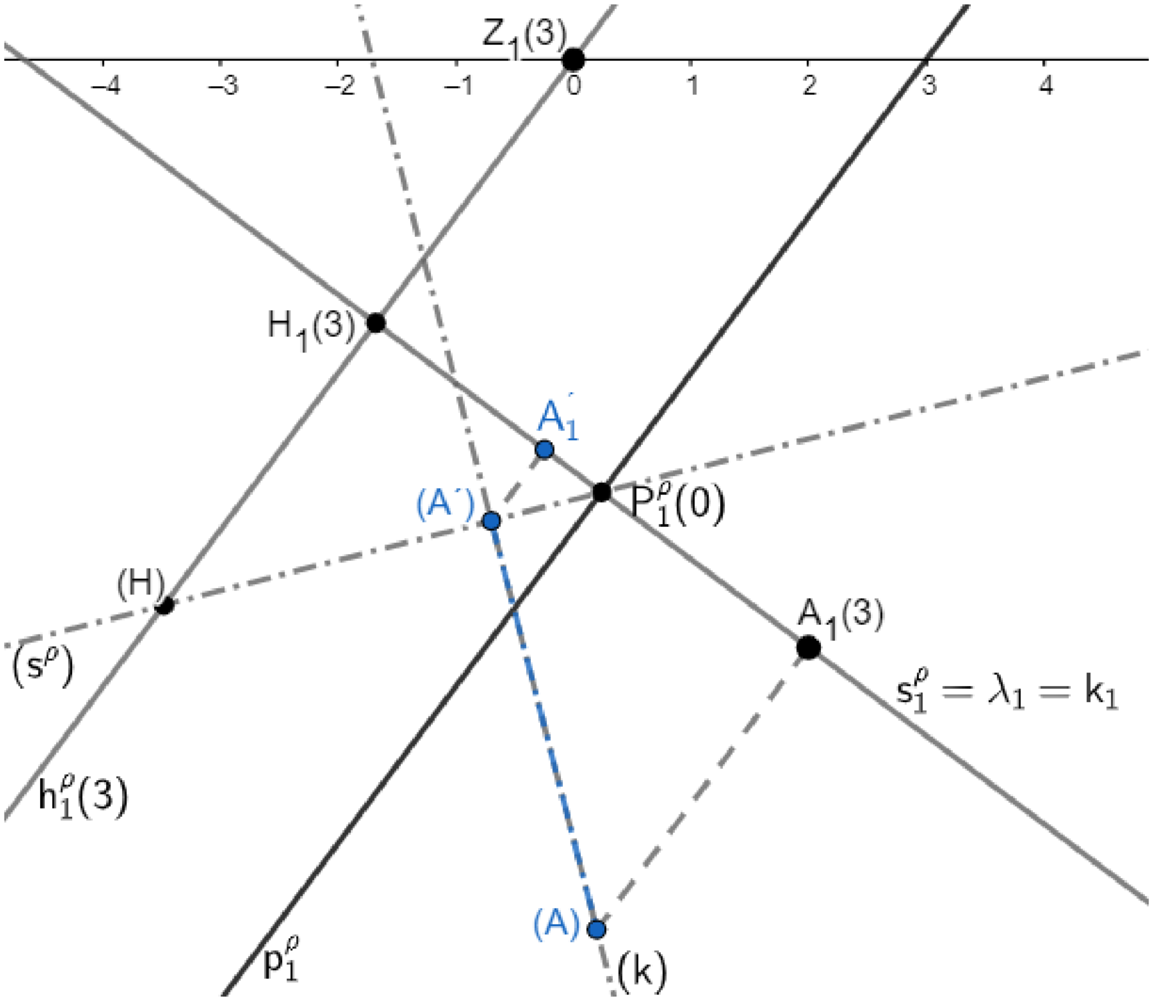
Příklad 30: Určete stopu roviny ϱ, která prochází bodem C a je kolmá na přímku $a = AB$.
$A = [-5, 4, -2]$, $B = [4, 1, 4]$, $C = [-1, 1, 3]$



Obrázek 3.35: Stopa roviny ϱ procházející bodem C

Řešení: Bod C má ležet v rovině ϱ, takže bodem C bude procházet hlavní přímka $h^{\varrho}{}_{1}(3)$, která je kolmá na přímku a_1, jejich průsečík je bod H. Spádová přímka $s^{\varrho}{}_{1}$ roviny ϱ splývá s přímkou a_1. Sklopíme přímku $a_1 = s^{\varrho}{}_{1}$ a sklopeným bodem (H) povede sklopená spádová přímka (s^{ϱ}) kolmá na sklopenou přímku (a). Vzniklý průsečík sklopené spádové přímky (s^{ϱ}) s průmětem spádové přímky $s^{\varrho}{}_{1}$ je stopník $P^{\varrho}{}_{1}$, kterým prochází stopa roviny $p^{\varrho}{}_{1}$.

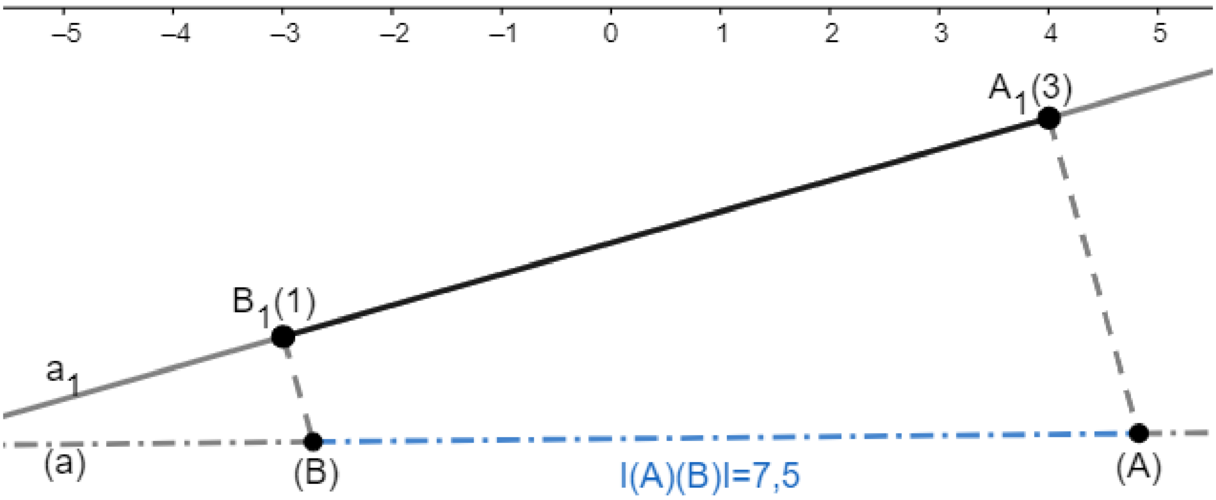
Příklad 31: Určete vzdálenost bodu A od roviny ϱ. $A = [2, 5, 3]$, $\varrho = (3, 4, 3)$



Obrázek 3.36: Vzdálenost bodu A od roviny ϱ

Řešení: Abychom mohli určit vzdálenost bodu A od roviny ϱ, musíme najít kolmici z bodu A na rovinu ϱ. Nejdříve si zobrazíme spádovou přímku $s^{\varrho}{}_{1}$ procházející bodem A_1 a hlavní přímku $h^{\varrho}{}_{1}(3)$ procházející bodem Z_1. Spádovou přímku proložíme pomocnou rovinou λ, ve které leží i přímka k kolmá k rovině ϱ. Sklopíme rovinu λ, tedy spádovou přímku $s^{\varrho}{}_{1}$ pomocí bodů $P^{\varrho}{}_{1}$ a H_1, k jejímu sklopenému obrazu (s^{ϱ}), určíme sklopenou kolmou přímku (k) procházející sklopeným bodem (A). Průsečík (A') sklopených přímek (s^{ϱ}) a (k) je bod, kdy kolmice protíná rovinu. Hledaná vzdálenost bodu A od roviny ϱ je vzdálenost bodů (A') a (A) na sklopené kolmici (k).

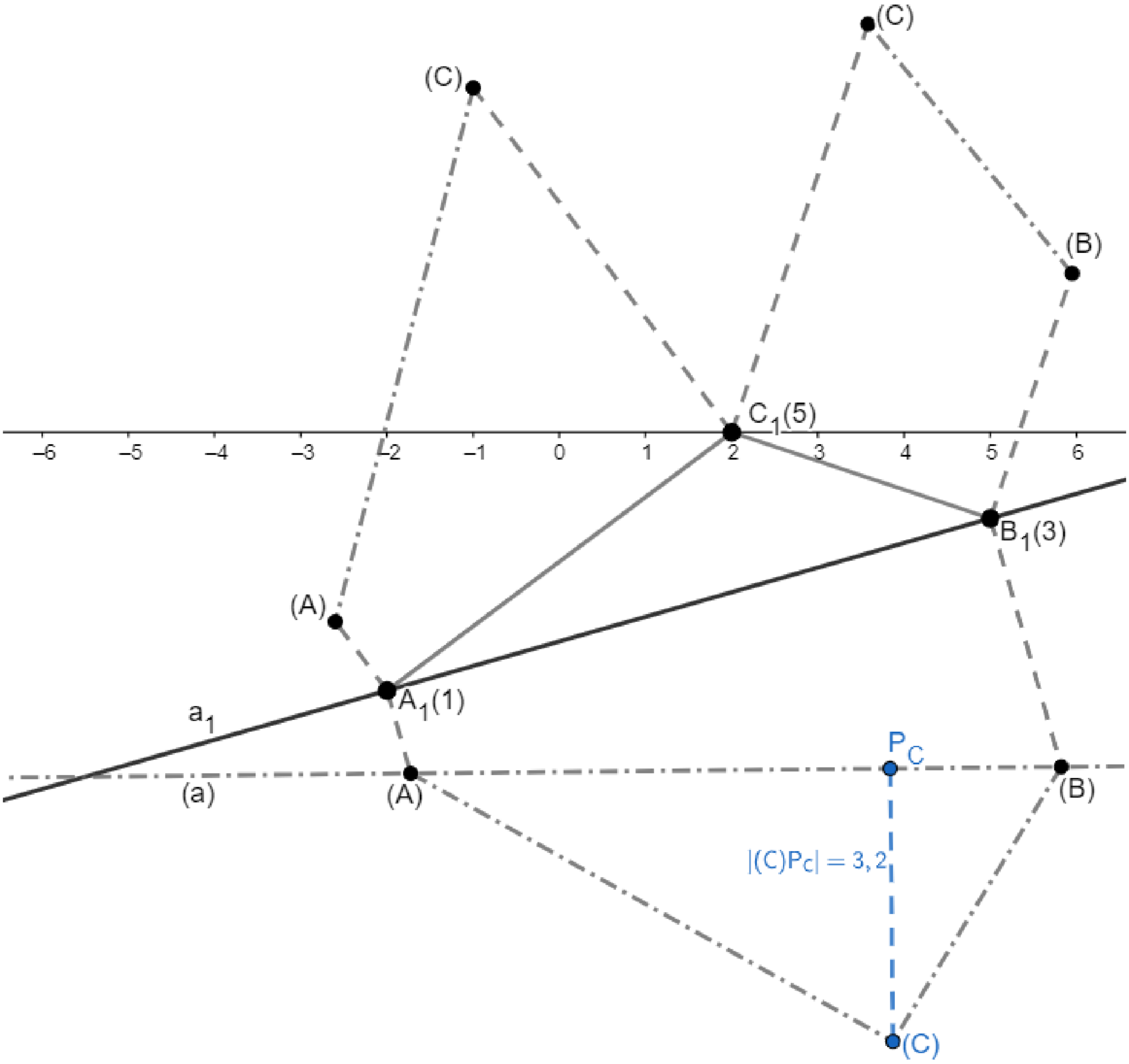
Příklad 32: Určete vzdálenost bodu A od bodu B. $A = [4, 1, 3]$, $B = [-3, 3, 1]$



Obrázek 3.37: Vzdálenost bodu A od bodu B

Řešení: Body A_1 a B_1 vedeme přímku a_1, kterou sklopíme do průmětny π. Velikost sklopené úsečky $(A)(B)$ je skutečná vzdálenost bodu A od bodu B.

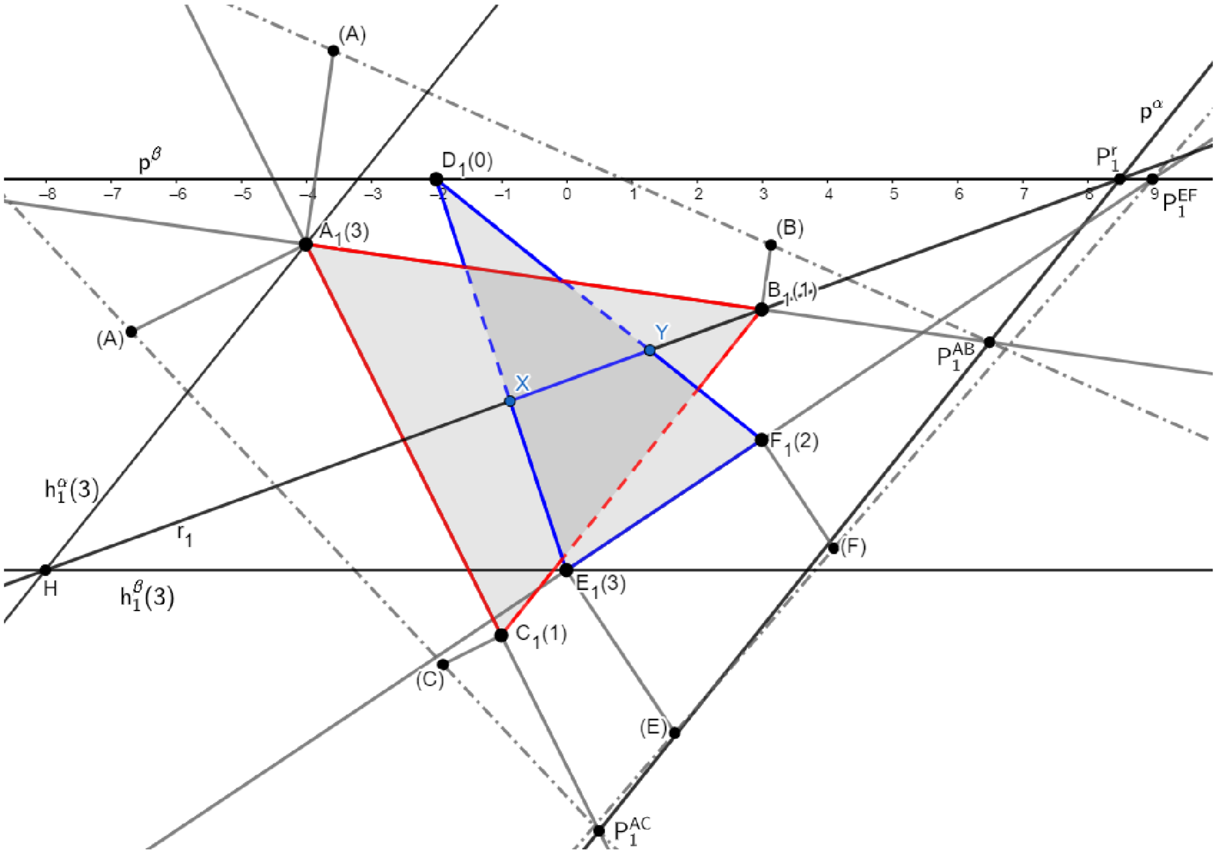
Příklad 33: Určete vzdálenost bodu C od přímky $a = AB$. $A = [-2, 3, 1]$, $B = [5, 1, 3]$, $C = [2, 0, 5]$



Obrázek 3.38: Vzdálenost bodu C od přímky a

Řešení: Vytvoříme si trojúhelník ABC a sklopíme každou stranu trojúhelníku, abychom získali skutečnou velikost úsečky AB, BC, CA. Poté ze skutečných velikostí sestrojíme trojúhelník ABC. Vzdálenost bodu C od přímky a zjistíme sestrojením výšky v trojúhelníku ABC z bodu C.

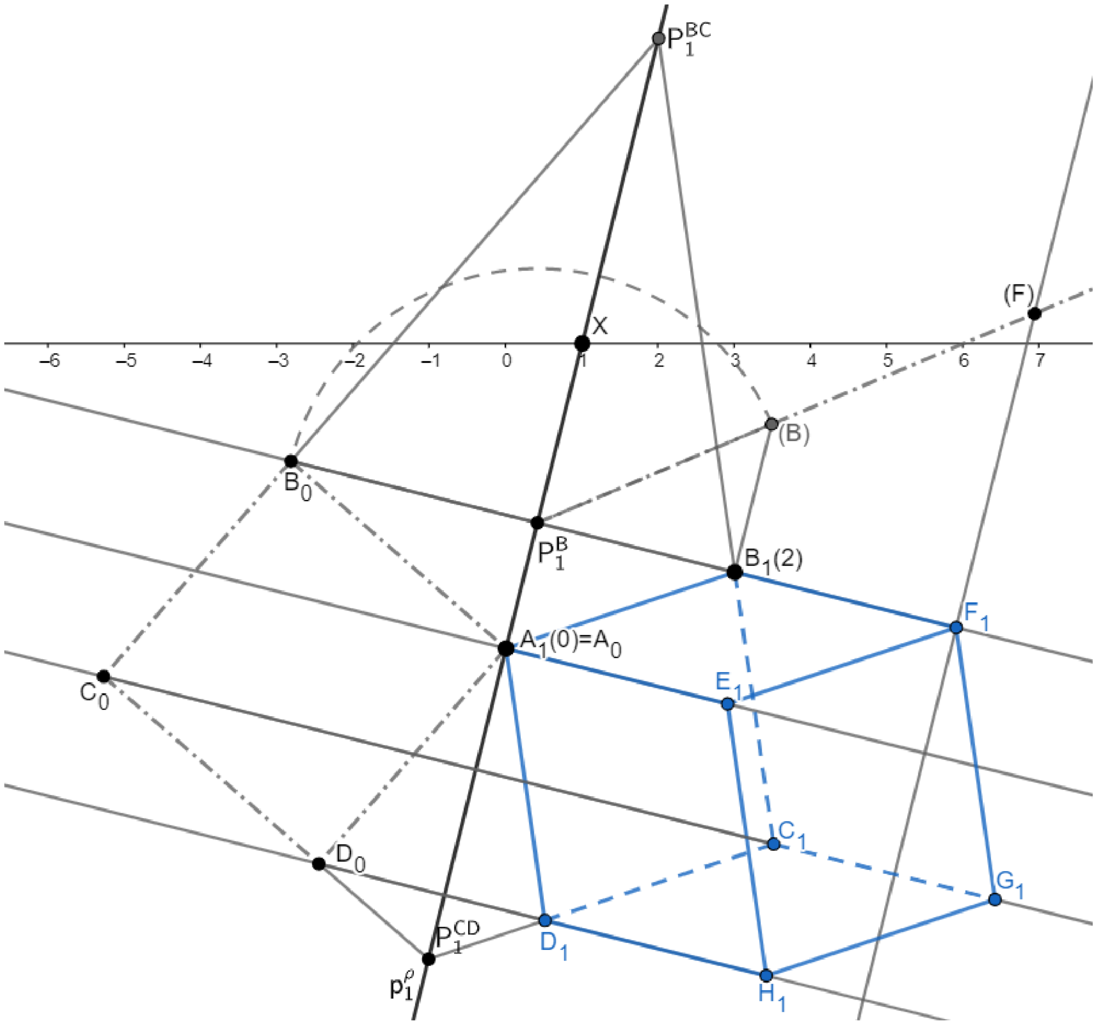
Příklad 34: Zobrazte průnik trojúhelníku ABC s trojúhelníkem DEF. A = [-4, 1, 3], B = [3, 2, 1], C = [-1, 7, 1], D = [-2, 0, 0], E = [0, 6, 3], F = [3, 4, 2].



Obrázek 3.39: Průnik dvou trojúhelníků

Řešení: Zobrazíme trojúhelníky *ABC* a *DEF*. Trojúhelník *ABC* leží v rovině *α*, sklopením stran *AB* a *AC* určíme stopníky $P^{AB}{}_1$, $P^{AC}{}_1$ a stopu roviny $p^{\alpha}{}_1$. Trojúhelník *DEF* leží v rovině *β*, sklopením strany *EF* určíme stopník $P^{EF}{}_1$. Stopa roviny $p^{\beta}{}_1$ prochází stopníkem $P^{EF}{}_1$ a bodem *D*, který leží v průmětně *π*. Průsečnice rovin *α* a *β* je přímka *r* procházející průsečíkem stop obou rovin a průsečíkem hlavních přímek v kótě *3*. Průsečnice *r* protíná stranu *DE* trojúhelníku *DEF* v bodě *X* a stranu *DF* trojúhelníku *DEF* v bodě *Y*. Průnik trojúhelníků je průsek. Určíme viditelnost. Strana *DE* protíná trojúhelník *ABC* v bodě *X*, úsečka *XE* má vyšší kótu krycího bodu než úsečka *BC*, která má kótu jedna, proto je úsečka *XE* viditelná. Část úsečky *XD* směrem k bodu *D* bude neviditelná, je pod rovinou trojúhelníku *ABC*.

Příklad 35: Sestrojte průmět krychle ABCDEFGH, jestliže známe stopu roviny p = AX, v které leží podstava krychle, a bod B. A = [0, 4, 0], B = [3, 3, 2], X = [1, 0, 0].



Obrázek 3.40: Zobrazení krychle

Řešení: Zobrazíme si stopu roviny $p^\varrho{}_1$, která prochází body A a X, a bod B. Bod B otočíme kolem stopy roviny $p^\varrho{}_1$ do průmětny π. Bod A leží na stopě roviny $p^\varrho{}_1$ v průmětně π, proto otočený bod A_0 je totožný s bodem A_1. Vzdálenost otočeného bodu B_0 a A_0 je rovna délce hrany krychle ($|A_0B_0| = |AB|$). V průmětně π sestrojíme podstavu krychle, tedy čtverec s délkou stran $|A_0B_0|$. Podstavu otočíme zpět do roviny ϱ, použijeme **osovou afinitu** ($p^\varrho{}_1$, $B_1 \rightarrow B_0$). Najdeme přímku k kolmou k rovině ϱ procházející bodem B. Na sklopenou přímku (k) naneseme délku hrany krychle a určíme bod *(F)* a F_1. Kótované promítání zachovává rovnoběžnost, zbývající body (E, G a H) zkonstruujeme pomocí rovnoběžek. V průmětu krychle ABCDEFGH určíme viditelnost. Viditelný bude vnější obrys krychle a horní podstava (*FEGH*), protože krycí bod hrany *EH* s hranou *DC* má vyšší kótu na hraně *EH*. Viditelnost ostatních hran určíme zmíněným způsobem nebo pomocí prostorové představivosti.

4 Program GeoGebra

GeoGebra je dynamický matematický software pro všechny úrovně vzdělávání, který propojuje geometrii, algebru, tabulky, grafy, statistiku a počítání.

Matematický software používá nespočet lidí po celém světě, hlavní výhodou určitě je jeho online verze na webové stránce *geogebra.org* a volná dostupnost. Zájemci si na webu mohou stáhnout aplikaci GeoGebra zdarma do svého počítače, mobilu nebo tabletu (s Windows, Android, iOS, Mac, Chromebooky, Linux). Lze stáhnout ucelenou verzi GeoGebra Klasik 6 nebo 5, popřípadě určitou část aplikace Calculator Suite, Grafický kalkulátor, 3D Grafy, Geometrie, CAS kalkulačka.

Při tvorbě mé bakalářské práce jsem používala k řešení úloh část GeoGebra – Geometrie. Obrázky v teoretické části jsem vytvořila v GeoGebra – 3D Grafy.

Práce v programu je jednoduchá. Na domovní stránce si můžeme kliknutím na tlačítko „spustit kalkulačku“ otevřít ucelenou verzi. Ikonou v pravém horním rohu se otevře nabídka aplikací, kde si vybereme Geometrii. V novém okně se nám zobrazí Grafická kalkulačka nebo Geometrie. Po levé straně se zobrazí panel s Menu, Algebrou a Nástroji, na pravé části nákresna a v pravém rohu ikona s Nastavením.

V liště po levé straně si zvolíme Nástroje, otevře se nabídka různých nástrojů, kde si můžeme vybrat, co potřebujeme, například vložit nový bod, přímku, úsečku, průsečík, kružnici, kolmici, rovnoběžku. Najdeme zde nástroje na měření úhlu, vzdálenosti a obsahu, nebo vkládání textu. V liště si můžeme vybrat ikonu Algebra, kde musíme zadávat do příkazového řádku písemné pokyny, aby se nám zobrazily požadované předměty. Pro urychlení psaní speciálních znaků Algebra nabízí virtuální klávesnici, která se otevře na ploše.

Vytvořenou konstrukci si můžeme uložit, pokud se přihlásíme nebo si vytvoříme účet. K registraci je potřeba zadat pouze emailovou adresu, uživatelské jméno a heslo. Web nabízí možnost přihlásit se přes sociální síť (Google, Office 365, Microsoft, Facebook nebo Twitter). Po přihlášení si práci můžeme uložit na profil, nechat exportovat obrázek, sdílet nebo vytisknout. Práci lze stáhnou ve formátu PDF dokument (.pdf), Geogebra soubor (.ggb), PNG obrázek (.png), SVG obrázek (.svg) nebo 3D tisk (.stl). Na profilu najdeme všechny naše vytvořené materiály, které je možno znovu otevřít, upravit, kopírovat a sdílet přes webový odkaz.

Závěr

Kótované promítání neboli pravoúhlé promítání na jednu průmětnu je jedna ze základních zobrazovacích metod v deskriptivní geometrii. V bakalářské práci je popsán princip zobrazení bodu pomocí kót, přímky, roviny a tělesa na průmětnu π. Je zde vysvětlena základní metoda – sklápění promítací roviny do průmětny, která se používá k řešení různých úloh. Pomocí sklápění promítací roviny do průmětny můžeme určit délku úsečky, úhel, který svírá přímka s průmětnou, dvě přímky nebo roviny, přímka s rovinou. Prvky v prostoru proložíme rovinou kolmou k průmětně a po sklopení řešíme příklad v rovině. Prvky v obecné rovině řešíme otočením roviny kolem její stopy do průmětny.

Dále je vysvětlena vzájemná poloha přímek, rovin, přímky a roviny. Nebo jak můžeme zkonstruovat prvky v dané poloze, přímku kolmou k rovině a naopak. Teoretická část je pro názornost a lepší pochopení doplněna obrázky vytvořenými v programu GeoGebra.

V praktické části je vytvořena sbírka z několika základních typů úloh, které navazují na zmíněnou teorii v předchozích kapitolách. Příklady jsou doplněny vlastním postupem řešení a vizualizací, která je zhotovena v programu GeoGebra. V programu jsem se poměrně rychle naučila pracovat. Jednoduše se v něm orientovalo a během tvoření dalších konstrukcí jsem objevovala nové nástroje a možnosti programu. Bohužel jsem narazila na menší nedostatek, a to, že osa *y* nejde otočit tak, aby pod osou *x* byla kladná část osy *y*. Proto, když jsem zadávala body pomocí souřadnic do příkazového řádku, jsem *y*-ové souřadnice zadávala s opačným znaménkem.

Prvotním cílem práce bylo vytvořit studijní materiál, který pomůže studentům při studiu pravoúhlého promítání na jednu průmětnu, naučit se základům a principům zmíněného zobrazení. Věřím, že práce bude užitečná minimálně druhou částí, řešenými příklady. Protože učebnice, do kterých jsem měla možnost nahlédnout, sice obsahovaly několik příkladů, ale pouze část jich byla vyřešena.

Použité zdroje

1. HARANT, Michal a Oldřich LANTA. *Deskriptivní geometrie pro II. a III. ročník SVVŠ*. 1. vyd. Praha: SPN, 1965.
2. POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.
3. ŠVERCL, Josef. *Zobrazovací metody*. Praha: Práce, 1971.
4. RESTL, Čestmír, Jiří DOLEŽAL. *Kótované promítání a topografické plochy*. Ostrava: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2004. ISBN 80-248-0651-7.
5. HORÁK, Stanislav. *Sbírka řešených úloh z deskriptivní geometrie*. Praha: SPN, 1970.
6. *GEOGEBRA* [online]. GeoGebra [cit 19. 4. 2022]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/.
7. MEDEK, Václav. *Deskriptívna geometria*. Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1962.
8. KLÍMA, Josef, Josef KOUNOVSKÝ a František KADEŘÁVEK. *Deskriptivní geometrie*. I. 3. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1954.
9. SETZER, Ota, Karel DRÁBEK a František HARANT. *Deskriptivní geometrie*. I. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978.
10. URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie*. I. 2. rev. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1977.
11. DRS, Ladislav. *Deskriptivní geometrie pro střední školy. 1*. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-66-6.

Seznam obrázků

Anotace

Jméno a příjmení:	Lucie Kabelková
Katedra:	Katedra matematiky (PDF)
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2022

Název práce:	Metrické a polohové úlohy v kótovaném promítání
Název v angličtině:	Positional and metrical talks in dimensioned projection
Anotace práce:	V práci se zabývám kótovaným promítáním – pravoúhlým promítáním na jednu průmětnu. V teoretické části je vysvětlen princip zobrazení bodu, přímky, roviny, tělesa a základní úlohy. V praktické části jsou řešeny příklady pomocí programu GeoGebra.
Klíčová slova:	Deskriptivní geometrie, Kótované promítání, Kolmé promítání, Rovnoběžné pravoúhlé promítání, Promítání na jednu průmětnu, Řešené příklady, Sklápění promítací roviny
Anotace v angličtině:	In my work I deal with Dimensioned projection – Projection onto one projection plane. The theoretical part explains the principle of displaying a point, line, plane, solid and basic problems. The practical part solves examples using the software program GeoGebra.
Klíčová slova v angličtině:	Descriptive geometry, Dimensioned projection, Orthographic projection, Orthogonal parallel projection, Projection onto one projection plane, Solve examples, Tilting the projection plane
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	73 stran
Jazyk práce:	Český jazyk