PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Časové operátory

Autor: Bc. Martin Pospíšil
Vedoucí práce: Doc. Mgr. Michal Botur Ph.D.
Studijní obor: Diskrétní matematika (DISMAT)
Forma studia: Prezenční
Rok: 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Doc. Mgr. Michala Botura Ph.D., a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Olomouci dne 8. 6. 2016 ....

Zde bych velice rád poděkoval Doc. Mgr. Michalu Boturovi Ph.D., vedoucímu mé diplomové práce, za konzultace a rady během vypracovávání a všem, kteří mi jakkoliv pomohli při její tvorbě. Dále bych rád poděkoval mé přítelkyni a rodině za trpělivost a podporu během studia.

Obsah

Seznam užitých symbolů

$\mathbb{D}$	- množina dyadických čísel;
$\mathbb{N}$	- množina přirozených čísel;
$\mathbb{N}_0$	- množina přirozených čísel s nulou, tedy $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{R}$	- množina reálných čísel;
$\langle a, b\rangle$	- uzavřený interval od čísla a do čísla b;
f_A	- n-ární funkce (operace) na algebře $\mathbf{A}$;
A^B	- množina všech zobrazení z množiny B do množiny A;
$A \setminus B$	- množinový rozdíl, tedy platí: $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$, $(A \setminus B) \cup B = A$.

Úvod

V roce 1940 G. Moisil zavedl Łukasiewicz-Moisilovy algebry (zkráceně LM_n-algebry) jako jednu z prvních struktur algebraické logiky. Moisilův záměr byl najít algebry, kterými by byl schopen popsat n-hodnotovou Łukasiewiczovu logiku. Nicméně, v roce 1956 A. Rose ukázal, že pro $n \geq 5$ LM_n-algebra neodpovídá Łukasiewiczové n-hodnotové logice. Nato v roce 1958 publikoval C. C. Chang svůj článek o MV-algebrách v němž popisoval MV-algebry jako algebraické struktury pro nekonečně hodnotovou Łukasiewicz-Tarskiho logiku. Pro axiomaticky komplikovanější n-hodnotovou Łukasiewiczovu výrokovou logiku byly vhodné algebry nalezeny v roce 1977 R. Grigoliem. Objevené algebry nazval MV_n-algebry, což jsou MV-algebry splňující několik dalších axiomů a jsou podtřídou LM_n-algeber. Později pak byly prokázány vztahy mezi LM_n-algebrami a MV_n-algebrami. Samotné tense MV-algebry pak zavedli D. Diagonesca a G. Georgescu na začátku 21. století.

Cílem této práce je shrnutí několika přístupů k zavedení operátorů modelujících časovou škálu do klasických i neklasických logik. V prvních dvou kapitolách si připomeneme několik nezbytných pojmů z oblastí univerzální algebry a svazů. Ve třetí kapitole si stručně zavedeme základní pojmy týkající se tense logiky, na kterou navážeme kapitolou o tense Booleových algebrách. Ukážeme si základní princip konstrukce tense operátorů a hlavně reprezentační větu pro tense Booleovy algebry. Dále si definujeme MV-algebry, zmíníme některé základní poznatky týkající se těchto algeber a definujeme si některé pojmy, jako jsou MV-termy a dyadická čísla, které později využijeme v důkazu reprezentační věty pro tense MV-algebry. Zavedeme samotné tense MV-algebry a podobně jako u Booleových algeber si i tady ukážeme jak můžeme zavést tense operátory a formulujeme zmíněnou reprezentační větu. Nakonec se seznámíme s některými vlastnostmi týkajících se vztahů mezi tense operátory a relacemi, kterými jsou tyto operátory indukovány.

1 Základní pojmy

V této kapitole si připomeneme několik základních pojmů nutných k pochopení problematiky týkající se tense logiky a tense algeber. Vše je možné nalézt v [2].

Definice 1.1. Uvažujme množinu F jejíž prvky jsou symboly operací. Dvojici $(F;\sigma)$, kde F je množina symbolů a $\sigma : F \to \mathbb{N}_0$ je zobrazení, nazýváme *typem.* Zobrazení σ tedy každému symbolu operace $f \in F$ přiřazuje jeho aritu. Jednoduše říkáme, že f je $\sigma(f)$-*ární operace.*

Definice 1.2. Je-li $A \neq \emptyset$ a každému symbolu $f \in F$ je přiřazena $\sigma(f)$-ární operace na množině A, pak dvojici $\mathbf{A} = (A;F)$ nazýváme *algebra typu* (F,σ) a neprázdnou množinu A nazýváme *nosič algebry* $\mathbf{A}$.

Definice 1.3. Je-li $\mathbf{A} = (A;F)$ algebra typu (F,σ) a $B \subseteq A, B \neq \emptyset$, pak algebru $\mathbf{B} = (B;F)$ nazveme *podalgebrou* algebry $\mathbf{A}$, jestliže pro každou $f \in F$ takovou, že $\sigma(f) = n$ platí

$$f(b_1,\ldots,b_n) \in B, \text{ pro libovolné } b_1,\ldots,b_n \in B.$$

Definice 1.4. Jsou-li $\mathbf{A} = (A;F)$ a $\mathbf{B} = (B;F)$ algebry stejného typu a pro každé $f \in F$ platí $\sigma(f) = n$, pak zobrazení $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ splňující

$$\forall a_1,\ldots,a_n \in A : \quad h(f_A(a_1,\ldots,a_n)) = f_B(h(a_1),\ldots,h(a_n))$$

nazýváme *homomorfismem.* Je-li navíc homomorfismus h bijektivní zobrazení, pak jej nazýváme *izomorfismus.*

1.1 Faktorizace

Definice 1.5. Je-li $\mathbf{A} = (A;F)$ algebra a θ relace ekvivalence na množině A, pak θ nazveme *kongruencí* na algebře $\mathbf{A}$, jestliže splňuje tzv. *substituční podmínku.* Tedy jestliže $f \in F$ je n-ární a $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in A$, pak

$$(a_i,b_i) \in \theta \text{ pro } i = 1,\ldots,n \quad \Rightarrow \quad (f(a_1,\ldots,a_n), f(b_1,\ldots,b_n)) \in \theta.$$

Poznámka 1.1. Jako *triviální kongruenci* označujeme identickou ekvivalenci ω a kongruenci, která nám tvoří tzv. úplný čtverec ($\iota = A \times A$). Tyto kongruence existují na každé algebře.

Dále v textu budeme množinu všech ekvivalencí na algebře $\mathbf{A}$ označovat $\mathrm{Ekv}\,\mathbf{A}$ a množinu všech kongruencí $\mathrm{Con}\,\mathbf{A}$.

1.1.1 Faktorová algebra

Definice 1.6. Předpokládejme, že $\mathbf{A} = (A; F)$ je algebra a $\theta \in \operatorname{Con} \mathbf{A}$ je kongruence. Označíme-li

$$[a]_\theta = \{x \in A : (a, x) \in \theta\},$$

pro $a \in A$, pak $[a]_\theta$ nazýváme *třídou kongruence* θ reprezentovanou prvkem a. Množinu všech tříd $[a]_\theta$, které tvoří rozklad množiny A označujeme A/θ a nazýváme *faktorová množina.*

Věta 1.1. Předpokládejme, že f je n-ární operace na množině A a $a_1, \ldots, a_n \in A$. Definujeme-li

$$f([a_1]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta) = [f(a_1, \ldots, a_n)]_\theta,$$

pak $f : (A/\theta)^n \to A/\theta$ je korektně definovaná operace na A/θ.

Důkaz. Jestliže $b_i \in [a_i]_\theta$, pro $i = 1, \ldots, n$, pak $(a_i, b_i) \in \theta$. Jelikož θ splňuje substituční podmínku, pak také $(f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta$, z čehož plyne, že $f(b_1, \ldots, b_n) \in [f(a_1, \ldots, a_n)]_\theta$. Tedy zavedená relace f je jednoznačně definovaná operace. $\square$

Definice 1.7. Algebru $\mathbf{A}/\theta = (A/\theta; F)$, kde A/θ je faktorová množina množiny A a F je množina operací, nazýváme *faktorová algebra* algebry $\mathbf{A}$ dle kongruence θ.

Důsledek 1.1. Z předchozí věty nám přímo plyne, že faktorová algebra $(A/\theta; F)$ je stejného typu jako algebra $(A; F)$.

Dále si uvedeme souvislost mezi kongruencemi a homomorfismy.

Věta 1.2. Je-li $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ homomorfismus, pak relace θ_h definovaná

$$(a, b) \in \theta_h \quad \Leftrightarrow \quad h(a) = h(b)$$

je kongruence indukovaná homomorfismem h na algebře $\mathbf{A}$.

Celý důkaz můžeme nalézt v [2] na straně 58. Princip důkazu je takový, že jelikož $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je zobrazení a θ_h je ekvivalence, pak se ověří platnost substituční podmínky.

Věta 1.3. Je-li θ kongruence na algebře $\mathbf{A} = (A; F)$ a $h_\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ je zobrazení dané předpisem

$$h_\theta(x) = [x]_\theta,$$

pak zobrazení h_θ je surjektivní homomorfismus a tento homomorfismus nazýváme *přirozený homomorfismus* indukovaný kongruencí θ.

Důkaz. Předpokládejme, že $\theta \in \operatorname{Con} \mathbf{A}$ a $h_\theta(x) = [x]_\theta$. Pak pro každou n-ární operaci $f \in F$ a $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$\begin{aligned} h_\theta(f(a_1, \dots a_n)) &= [f(a_1, \dots, a_n)]_\theta \\ &= f([a_1]_\theta, \dots, [a_n]_\theta) \\ &= f(h_\theta(a_1), \dots, h_\theta(a_n)). \end{aligned}$$

□

Jelikož každá třída je reprezentována svým libovolným prvkem, je h_θ surjektivní zobrazení.

Poznámka 1.2. Z předchozích dvou vět je zřejmé, že každá kongruence algebry $\mathbf{A}$ je indukovaná nějakým homomorfismem.

Pro snadnější popis pojmů v následujících kapitolách si zavedeme pojem simple algebry.

Definice 1.8. *Simple algebrou* nazveme takovou algebru $\mathbf{A} = (A; F)$, která má jen triviální kongruence.

1.2 Direktní a subdirektní součiny algeber

Definice 1.9. Jsou-li $\mathbf{A} = (A; F)$ a $\mathbf{B} = (B; F)$ algebry stejného typu, pak *direktním součinem* $A \times B$ nazýváme algebru $(A \times B; F)$, kde operace jsou definovány následovně: Je-li $f \in F$ n-ární, $(a_i, b_i) \in A \times B$ pro $i = 1, \dots, n$, pak

$$f((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) = (f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)).$$

Definici direktního součinu můžeme indukcí rozšířit nejenom na konečný počet algeber stejného typu, ale také na libovolný (t.j. i nekonečný) systém algeber stejného typu.

Poznámka 1.3. Všimněme si, že prvky kartézského součinu $\prod\{A_i, i \in I\}$ jsou všechna zobrazení $I \to \bigcup\{A_i, i \in I\}$ taková, že $f(i) \in A_i$ pro každé $i \in I$.

Definice 1.10. Jsou-li $\mathbf{A}_i = (A_i, F)$ algebry stejného typu pro $i \in I \neq \emptyset$, pak *direktním součinem* $\prod\{\mathbf{A}_i, i \in I\}$ algeber $\mathbf{A}_i$ nazveme algebru

$$\mathbf{A} \;=\; (\prod\{\mathbf{A}_i, i \in I\}, F),$$

kde pro každou n-ární operaci $f \in F$ a libovolné $a_1, \ldots, a_n \in \prod\{\mathbf{A}_i, i \in I\}$ platí rovnost

$$f(a_1, \ldots, a_n)(i) = f(a_1(i), \ldots, a_n(i)),$$

pro každé $i \in I$.

Této definici také můžeme rozumět tak, že operace f je prováděna „po souřadnicích“.

Definice 1.11. Je-li $\prod\{\mathbf{A}_i, i \in I\}$ direktní součin algeber, pak zobrazení

$$\pi_i : \prod\{\mathbf{A}_i, i \in I\} \to \mathbf{A}_i$$

dané předpisem

$$\pi_i(a) = a_i$$

nazýváme *i-tá projekce.*

Definice 1.12. Algebru $\mathbf{A} = (A; F)$ nazveme *subdirektním součinem* algeber $\mathbf{A}_i$, pro $i \in I$, jestliže

1. algebra $\mathbf{A}$ je podalgebra direktního součinu $\prod\{A_i, i \in I\}$,
2. pro každé $i \in I$ platí, že $\pi_i(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_i$.

Lemma 1.1. [2, s. 63] Každá i-tá projekce je surjektivní homomorfismus.

2 Svazy a Booleovy algebry

Na uspořádané množiny a některé algebry můžeme nahlížet jako na svazy. Proto si v této kapitole připomeneme některé základní pojmy týkajících se těchto algebraických struktur. Podobně jako v předchozí kapitole je vše možné nalézt v [2].

2.1 Svazy

2.1.1 Polosvazy a svazy

Definice 2.1. Grupoid $\mathbf{G} = (G; *)$ nazýváme polosvazem, jestliže pro každé tři prvky $a, b, c \in G$ platí

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$ - asociativita,
2. $a * b = b * a$ - komutativita,

3. $a * a = a$ - idempotence.

Definice 2.2. Je-li $L \neq \emptyset$ a $\vee$ a $\wedge$ jsou dvě binární operace takové, že $(L;\vee)$ a $(L;\wedge)$ jsou polosvazy, a platí-li *zákony absorpce*

$$a \wedge (a \vee b) = a \qquad \text{a} \qquad a \vee (a \wedge b) = a,$$

pro každé $a, b \in L$, pak trojici $\mathbf{L} = (L;\vee,\wedge)$ nazýváme *svaz*.

Poznámka 2.1. Ve svazu $\mathbf{L} = (L;\vee,\wedge)$ nazýváme operaci $\vee$ *spojení* a operaci $\wedge$ *průsek*.

V teorii uspořádaných množin zavádíme pojmy *nejmenší prvek* a *největší prvek*. Nejmenší prvek $a \in A$, kde A je libovolná množina, je takový prvek, kde pro každé $x \in A$ platí $a \leq x$. Duálně pak největší prvek je takový prvek $a \in A$, kde pro každé $x \in A$ platí $x \leq a$.

Dále si připomeňme, že v teorii uspořádaných množin také zavádíme dvě speciální množiny, které nazýváme *horní* a *dolní kužel*. Horní kužel množiny M obvykle značíme symbolem $U(M)$ a definujeme jej

$$U(M) = \{x \in A : y \leq x \text{ pro každé } y \in M\}.$$

Dolní kužel množiny M obvykle značíme symbolem $L(M)$ a definujeme jej

$$L(M) = \{x \in A : x \leq y \text{ pro každé } y \in M\}.$$

Má-li horní kužel $U(M)$ nejmenší prvek, pak tento prvek nazýváme *supremum* a značíme jej $\sup M$. Má-li dolní kužel $L(M)$ největší prvek, pak tento prvek nazýváme *infimum* a značíme jej $\inf M$.

Věta 2.1. [2, s. 9] Je-li $(L;\leq)$ uspořádaná množina, ve které pro každé $a, b \in L$ existuje $\sup(a, b)$ a $\inf(a, b)$ a označíme-li

$$\sup(a, b) = a \vee b \qquad \text{a} \qquad \inf(a, b) = a \wedge b,$$

pak $\mathbf{L} = (L;\vee,\wedge)$ je svaz.

Důkaz Věty 2.1 je možné nalézt v [2] na straně 9. V důkazu se ověří, že operace $\vee$ a $\wedge$ splňují idempotenci, komutativitu, asociativitu a zákony absorpce.

2.1.2 Distributivní svazy

Definice 2.3. [2, s. 19] Svaz $\mathbf{L}$ nazveme *distributivní*, jestliže pro každé $a, b, c \in L$ platí *distributivita*, tedy jestliže platí

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Lemma 2.1. Svaz $\mathbf{L}$ je *distributivní*, jestliže pro každé $a, b, c \in L$ platí duální rovnost k distributivitě, tedy jestliže platí

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

2.1.3 Komplementární svazy

Definice 2.4. Je-li $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge)$ svaz s 0 a 1, kde 1 je největší prvek svazu a 0 nejmenší, pak prvek $b \in L$ nazveme *komplement* prvku $a \in L$, jestliže

$$a \vee b = 1 \qquad \text{a} \qquad a \wedge b = 0.$$

Komplement k prvku x označujeme symbolem x'.

Je-li dále v textu uvedeno, že svaz, případně uspořádaná algebra, je s prvky 0 a 1, budeme vždy těmito prvky rozumět největší (1) a nejmenší (0) prvek dané struktury.

Definice 2.5. [2, s. 23] Svaz $\mathbf{L}$ s 0 a 1 nazveme *komplementární*, jestliže má každý jeho prvek alespoň jeden komplement.

Definice 2.6. [2, s. 25] Svaz $\mathbf{L}$ s 0 a 1 nazveme *jednoznačně komplementární*, jestliže má každý jeho prvek právě jeden komplement.

Lemma 2.2. [2, s. 25] Každý komplementární distributivní svaz je jednoznačně komplementární.

Definice 2.7. [2, s. 25] Každý komplementární distributivní svaz nazýváme *booleovský*.

2.2 Booleovy algebry

Definice 2.8. Šestici $(A; \vee, \wedge, ', 0, 1)$, kde $A \neq \emptyset$ a $0 \neq 1$, nazveme *Booleovou algebrou* jestliže

1. $(A; \vee, \wedge)$ je distributivní svaz,
2. 0 je nejmenší a 1 největší prvek tohoto svazu.

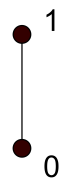
Symbolem $'$ pak označujeme komplementaci na množině A.

Tímto způsobem jsme Booleovu algebru definovali jako zvláštní případ svazu (uspořádané množiny). Nejmenší netriviální Booleova algebra má právě dva prvky (0 a 1) a platí tedy

$$0' = 1 \quad , \quad 1' = 0$$

a také

$$0 \vee 0 = 0, \qquad 1 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1 \vee 1 = 1,$$
$$0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \qquad \text{a} \qquad 1 \wedge 1 = 1.$$



Obrázek 1: Dvouprvková Booleova algebra

Povšimněme si, že tato Booleova algebra je izomorfní s Booleovou algebrou pravdivostních hodnot výrokové logiky, kde 1 odpovídá pravdivostní hodnotě pravdivého výroku a 0 odpovídá pravdivostní hodnotě nepravdivého výroku. Operace $\vee$ a $\wedge$ pak můžeme chápat jako disjunkci a konjunkci a operaci $'$ jako negaci. Tedy na logické spojky lze nahlížet jako na operace na výrocích. Na tyto operace, společně s konečnou množinou výroků, pak lze nahlížet jako na konečnou Booleovu algebru $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$. S touto myšlenkou přišel jako první v roce 1847 George Boole při výzkumu formalizace klasické výrokové logiky.

2.3 Filtry na Booleových algebrách

Definice 2.9. Jako filtr Booleovy algebry $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ nazveme množinu $F \subseteq B$, splňující

(F1) $1 \in F$,

(F2) $x \in F, y \in B, x \leq y \;\Rightarrow\; y \in F$,

(F3) $x, y \in F \;\Rightarrow\; x \wedge y \in F$.

Filtr nazveme *vlastní*, jestliže $0 \notin F$.

Věta 2.2. [5, s. 46] Je-li F filtr na Booleově algebře $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, pak relace θ_F definovaná vztahem

$$(x, y) \in \theta_F \text{ právě tehdy, když } x \wedge w = y \wedge w,$$

pro některé $w \in F$, je kongruence na Booleově algebře B. Opačně, je-li $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ Booleova algebra a θ je kongruence na $\mathbf{B}$, pak třída $[1]_\theta$ je filtr. Popsaný vztah mezi filtry a kongruencemi je vzájemně jednoznačný.

Díky předchozí větě lze zavést faktorizaci na Booleově algebře podle filtru F pomocí vztahu $B/F = B/\theta_F$.

Poznámka 2.2. Zavedeme-li na množině B/F operace

1. $\neg[x]_F := [\neg x]_F$,
2. $[x]_F \wedge [y]_F := [x \wedge y]_F$,
3. $[x]_F \vee [y]_F := [x \vee y]_F$,

pak systém $\mathbf{B}/F = (B/F, \vee, \wedge, \neg, [1]_F)$ je Booleova algebra, kde symbolem $[1]_F$ rozumíme třídu ekvivalence největšího prvku. Tuto Booleovu algebru pak nazýváme *faktorová Booleova algebra* podle filtru F. Navíc existuje tzv. *přirozený homomorfismus* $\nu : \mathbf{B} \to \mathbf{B}/F$.

Definice 2.10. Filtr P Booleovy algebry $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ nazveme *prvofiltr*, jestliže splňuje vlastnosti

(P1) $0 \notin P$,

(P2) $\forall x, y \in B, x \vee y \in P$ platí, že $x \in P$ nebo $y \in P$.

Definice 2.11. Filtr V Booleovy algebry $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ nazveme *maximální (ultrafiltr)*, jestliže splňuje vlastnosti

(V1) $0 \notin V$,

(V2) pro každý jiný filtr F Booleovy algebry $\mathbf{B}$, $V \subseteq F$ platí

$$F = A \text{ nebo } F = V.$$

Povšimněme si, že faktorizací libovolné Booleovy algebry podle ultrafiltru získáme faktorovou algebru, která je izomorfní s dvouprvkovou Booleovou algebrou.

Věta 2.3. Je-li $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ dvouprvková Booleova algebra, tedy $B = \{0, 1\}$, pak všechny vlastní filtry algebry $\mathbf{B}$ jsou prvofiltry.

Důkaz věty 2.3 v obecnější podobě, je možné nalézt například v [4] na straně 16.

Lemma 2.3. Je-li $\mathbf{B}$ libovolná Booleova algebra a F filtr, pak F je prvofiltr právě tehdy, když F je ultrafiltr.

Důkaz lemmatu 2.3 je možné nalézt v [2, Věta D.2., s. 44]. Platnost věty 2.3 a lemmatu 2.3 shrneme do následujícího lemmatu, které později využijeme v důkazu.

Lemma 2.4. Máme-li libovolný filtr F na Booleově algebře $\mathbf{B}$ a existuje-li prvek $m \notin F$, pak existuje ultrafiltr V na Booleově algebře $\mathbf{B}$ takový

$$F \subseteq V \quad \text{a} \quad m \notin V\ .$$

K důkazu předchozí věty je potřeba Zornovo lemma tedy i axiom výběru.

Věta 2.4. Předpokládejme, že $\mathbf{B}$ je libovolná Booleova algebra, pak existuje Booleova algebra 2^T, kde T je množina všech ultrafiltrů a injektivní homomorfismus $f : \mathbf{B} \to 2^T$ ve tvaru charakteristické funkce, tedy

$$f(x)(V) = \begin{cases} 1 & \text{v případě, že } x \in V, \\ 0, & \text{v případě, že } x \notin V, \end{cases}$$

pro libovolný $V \in T$.

Důkaz. Z toho, že faktorizací libovolné Booleovy algebry získáme algebru, která je izomorfní s dvouprvkovou Booleovou algebrou plyne, že charakteristická funkce f je homomorfismus. Proto nyní stačí dokázat, že f je injektivní. Předpokládejme, že U je libovolný filtr. Jestliže $x \neq y$, pak platí

$$x \notin [y]_U \text{ nebo } y \notin [x]_U.$$

Předpokládejme, že platí první možnost tedy, že $x \notin [y]_U$. Z lemmatu 2.4 víme, že filtr U je možné rozšířit na ultrafiltr V tak, že $x \notin [y]_V$ z čehož plyne

$$f(x)(V) = 0 \text{ a zároveň } f(y)(V) = 1.$$

Z tohoto vztahu dostáváme, že $f(x) \neq f(y)$ a tedy platí, že homomorfismus f je injektivní. □

3 Tense logika

Tense logika pochází z dlouhodobého studia vztahů mezi časem a modalitou, tedy vztahem času a vyjádřením způsobu platnosti nějaké výpovědi. Výroková logika obvykle neuvažuje časovou dimenzi. Pokud tedy chceme získat tzv. *tense logiku*, zavedeme na klasické výrokové logice unární operátory, tzv. *tense operátory.*

Definice 3.1. Uvažujme dvojici $(T; R)$, kde T je neprázdná množina (množina okamžiků) a $R \subseteq T \times T$ je binární relace na množině T. Tuto dvojici nazýváme *time frame* (časový rámec) a relaci R nazýváme *časová preference*, kde

$$xRy \text{ vyjadřuje „}x\text{ je před }y\text{“ a také „}y\text{ je po }x\text{“.}$$

Logický jazyk tense logiky obsahuje, kromě obvyklých logických spojek a funkčních operátorů, čtyři modální operátory, tzv. *tense operátory.* Tyto operátory obvykle značíme písmeny G, H, F a P, kde operátor G chápeme ve smyslu „vždy bude platit, že…“ a operátor H jako „vždy platilo, že…“. Operátory F a P, tzv. existenční operátory, pak definujeme pomocí operátorů G a H následovně

1. $F := \neg G \neg$,
2. $P := \neg H \neg$.

Definice 3.2. Jestliže $t \in T$ a ϕ je výroková formule z dané výrokové logiky pak říkáme, že

1. $G(\phi)(t)$ *je splněna*, jestliže výroková formule ϕ je splněna pro každé s takové, že tRs,
2. $H(\phi)(t)$ *je splněna*, jestliže výroková formule ϕ je splněna pro každé s takové, že sRt,
3. $F(\phi)(t)$ *je splněna*, jestliže výroková formule ϕ je splněna pro alespoň jedno s takové, že tRs.
4. $P(\phi)(t)$ *je splněna*, jestliže výroková formule ϕ je splněna pro alespoň jedno s takové, že sRt.

Formuli $G(\phi)(t)$ lze číst jako: „V okamžiku t prohlašujeme, že vždy bude platit výroková formule ϕ“.

Příklad 3.1. Uvažujme výrok $\phi =$ „Prší.“. Pak platí

1. $G(\phi)(t)$ = „V okamžiku t prohlásím, že vždy bude pršet.“
2. $F(\phi)(t) = \neg G(\neg\phi)(t)$
   = „V okamžiku t prohlásím, že alespoň jednou bude pršet.“
3. $H(\phi)(t)$ = „V okamžiku t prohlásím, že vždy pršelo.“
4. $P(\phi)(t) = \neg H(\neg\phi)(t)$
   = „V okamžiku t prohlásím, že alespoň jednou pršelo.“

4 Tense Booleovy algebry

Z historického hlediska se tense operátory nejprve studovaly na Booleových algebrách. Proto si v této kapitole zavedeme tense Booleovy algebry, které budeme popisovat jako modely klasické tense logiky. Ukážeme si, že tyto tense Booleovy algebry jsou zvláštním případem Booleovy algebry s operátory.

4.1 Tense Booleova algebra

Definice 4.1. Je-li $\mathbf{A} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ Booleova algebra (algebra typu $(2, 2, 1, 0, 0)$) a $G, H : B \to B$ jsou zobrazení splňující

(B1) $G(1) = 1, \quad H(1) = 1,$

(B2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y), \quad H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y), \qquad \forall x, y \in B,$

(B3) $x \leq GP(x), \quad x \leq HF(x), \qquad \forall x \in B,$

pak algebru $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1, G, H)$ nazveme *tense Booleovou algebrou.* Zobrazení $F, P : B \to B$ jsou pak definována následovně

$$F(x) = \neg G(\neg x) \qquad \text{a} \qquad P(x) = \neg H(\neg x), \qquad \forall x \in B.$$

Tense Booleovu algebru $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1, G, H)$ budeme jednoduše značit jako trojici $(\mathbf{B}; G, H)$, pokud nehrozí, že by došlo k nedorozumění.

Poznámka 4.1. Axiom (B3) je pro Booleovy algebry ekvivalentní axiomu

(B3') $G(x) \vee y = x \vee H(y).$

Tento axiom také můžeme popsat pomocí vztahu

(B3") $\neg G \neg H(x) \leq x, \quad \neg H \neg G(x) \leq x.$

Tento poslední zápis vztahu (B3) využijeme později v důkazech.

Definice 4.2. Jsou-li $(\mathbf{B}_1; G_1, H_1)$ a $(\mathbf{B}_2; G_2, H_2)$ tense Booleovy algebry, pak zobrazení

$$f : (\mathbf{B}_1; G_1, H_1) \to (\mathbf{B}_2; G_2, H_2)$$

nazýváme *homomorfismem tense Booleových algeber* $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$, jestliže zobrazení $f : B_1 \to B_2$ je homomorfismem Booleových algeber a platí-li

1. $f(G_1(x)) = G_2(f(x)),$
2. $f(H_1(x)) = H_2(f(x)),$

pro všechna $x \in B_1$.

4.2 Konstrukce tense operátorů

Definice 4.3. [3, s. 56] Trojici $(S, T; R)$, kde S, T jsou neprázdné množiny a $R \subseteq S \times T$ je binární relace, nazýváme *frame*. Jestliže navíc $S = T \neq \emptyset$ a $R \subseteq T \times T$ je binární relace, pak dvojici $(T; R)$ nazýváme *time frame*.

Definice 4.4. [3, s. 56] Je-li $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ Booleova algebra a $(S, T; R)$ frame, kde množiny $S, T \neq \emptyset$, pak definujeme zobrazení $G^*, F^* : B^T \to B^S$ a $H^*, P^* : B^S \to B^T$ tak, že pro každé $p \in B^T$ a pro každé $s \in S$ platí

$$G^*(p)(s) = \bigwedge\{p(t) : sRt\},$$
$$F^*(p)(s) = \bigvee\{p(t) : sRt\}$$

a pro každé $q \in B^S, t \in T$ platí

$$P^*(q)(t) = \bigvee\{q(s) : sRt\},$$
$$H^*(q)(t) = \bigwedge\{q(s) : sRt\}.$$

Říkáme, že G^*, H^*, F^* a P^* jsou *indukovány framem* $(S, T; R)$. Jestliže navíc $S = T$, pak říkáme, že G^*, H^*, F^* a P^* jsou *indukovány time framem* $(T; R)$.

4.3 Reprezentační věta

Definice 4.5. Je-li $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ Booleova algebra, T je množina ultrafiltrů a U a V jsou ultrafiltry na této algebře, pak zavedeme relace $\rho \subseteq T^2$ a $\rho' \subseteq T^2$ následovně

1. $U\rho V \quad \Leftrightarrow \quad [G(x)]_U \leq [x]_V,$
2. $U\rho' V \quad \Leftrightarrow \quad [H(x)]_V \leq [x]_U,$

pro všechna $x \in B$.

Věta 4.1. Platí, že $\rho = \rho'$.

Důkaz. Předpokládejme, že $U\rho V$. Z definice tense Booleovy algebry víme, že

$$\neg G \neg H(x) \leq x \quad \Rightarrow \quad \neg x \leq G \neg H(x).$$

Faktorizujeme-li nyní tuto nerovnost podle U (nerovnost se faktorizací zachovává), pak dostaneme, že

$$[\neg x]_U \leq [G \neg H(x)]_U.$$

Jelikož $U\rho V$, pak

$$[\neg x]_U \leq [G\neg H(x)]_U \leq [\neg H(x)]_V.$$

Úpravou dostaneme

$$\neg[x]_U \leq \neg[H(x)]_V.$$

Celý výraz znegujeme a dostaneme

$$[H(x)]_V \leq [x]_U$$

pro všechna $x \in A$. A proto $U\rho' V$. Opačně důkaz provedeme analogicky. $\square$

Definice 4.6. Předpokládejme, že U je ultrafiltr. Nyní si zavedeme množiny $L(U)$ a $R(U)$ následovně:

$$L(U) = \{x : G(x) \in U\} \qquad \text{a} \qquad R(U) = \{x : H(x) \in U\}$$

Věta 4.2. Množiny $L(U)$ a $R(U)$ jsou filtry.

Důkaz. Pro $L(U)$ a $R(U)$ tedy ověříme vlastnosti filtru.
1. Jelikož $G(1) = 1$, pak podle definice

$$1 \in L(U) \text{ a tedy } L(U) \neq \emptyset.$$

2. Předpokládejme, že $x \leq y, x \in L(U)$. Z předpokladu a definice množiny $L(U)$ nám plyne, že $G(x) \in U$. Z toho, že $x \leq y$ plyne, že $G(x) \leq G(y)$ a jelikož U je ultrafiltr, pak také $G(y) \in U$. Z definice pak dostáváme, že $y \in L(U)$. Dokázali jsme tedy, že platí vlastnost

$$x \in L(U), x \leq y \quad \Rightarrow \quad y \in L(U).$$

3. Předpokládejme, že $x, y \in L(U)$. Z předpokladu a definice množiny $L(U)$ nám ihned plyne, že $G(x), G(y) \in U$. Proto platí

$$G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y).$$

Z toho, že U je ultrafiltr a $G(x), G(y) \in U$ plyne, že také $G(x) \wedge G(y) \in U$ a podle předchozího vztahu také $G(x \wedge y) \in U$. Podle definice množiny $L(U)$ pak dostáváme, že $x \wedge y \in L(U)$. Dokázali jsme, že platí vlastnost

$$x, y \in L(U) \Rightarrow x \wedge y \in L(U).$$

Celkově jsme tedy dokázali, že množina $L(U)$ je filtr. Vlastnosti množiny $R(U)$ ověříme analogicky. $\square$

Věta 4.3. Jsou-li U a V ultrafiltry na Booleově algebře $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, pak platí

$$U\rho V \quad \Leftrightarrow \quad L(U) \subseteq V \quad \Leftrightarrow \quad R(V) \subseteq U.$$

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích.
1. Předpokládejme, že $U\rho V$. Jestliže $x \in L(U)$, potom $G(x) \in U$. Faktorizací podle U dostaneme

$$1 = [G(x)]_U$$

a jelikož $U\rho V$ pak platí

$$[G(x)]_U \leq [x]_V.$$

Z toho dostáváme

$$1 = [x]_V \Rightarrow x \in V.$$

2. Nyní předpokládáme, že $L(U) \subseteq V$ a sporem existenci $x \in B$ takového, že

$$[x]_V < [G(x)]_U.$$

Jelikož faktorizací podle ultrafiltru U (resp. podle V) získáme dvouprvkovou Booleovu algebru tak platí

$$[x]_V = 0 \quad < \quad [G(x)]_U = 1.$$

Z tohoto vztahu pak dostaneme

$$x \notin V \text{ jelikož } x \neq 1 \qquad \text{a} \qquad G(x) \in U \Rightarrow x \in L(U).$$

Což je spor, jelikož $L(U) \subseteq V$. Druhou část věty dokážeme analogicky. □

Věta 4.4. *(Reprezentační věta)* Je-li $(\mathbf{B}; G, H)$ tense Booleova algebra, pak existuje tense Booleova algebra $(2^T; G_\rho, H_\rho)$ indukovaná time framem (T, ρ), kde T je množina všech ultrafiltrů, a injektivní homomorfismus (vnoření)

$$f : (\mathbf{B}; G, H) \to (2^T; G_\rho, H_\rho).$$

Důkaz. Z věty 2.4 víme, že f je vnoření Booleovy algebry $\mathbf{B}$ do 2^T. Dokážeme, že f je homomorfismus, tedy že $f(G(x)) = G_\rho(f(x))$.
1. Z definice víme

$$[G_\rho(x)]_U = \bigwedge_{U\rho V} [x]_V.$$

Navíc ale platí

$$[G(x)]_U \leq [x]_V,$$

pro všechna $U\rho V$. Z čehož nám plyne

$$[G(x)]_U \leq \bigwedge_{U\rho V} [x]_V = [G_\rho(x)]_U.$$

2. Dokážeme druhou nerovnost. Jelikož $\mathbf{B}/U$ je dvouprvková Booleova algebra, budeme nyní předpokládat, že

$$[G(x)]_U = 0.$$

Z toho nám plyne

$$G(x) \notin U \Rightarrow x \notin L(U).$$

Z lemmatu 2.4 nám plyne, že existuje maximální filtr V takový

$$x \notin V \supseteq L(U).$$

Z první části nerovnosti je vidět, že $[x]_V = 0$. Z druhé části nerovnosti (díky platnosti předchozí věty) je vidět, že $U\rho V$. Tedy platí

$$[G_\rho(x)]_V = \bigwedge_{U\rho V} [x]_V = 0.$$

Celkem jsme tedy dokázali, že $f(G(x)) = G_\rho(f(x))$. □

Poznámka 4.2. Díky tomu, že jsme ve větě 4.1 dokázali, že relace $\rho = \rho'$ nyní víme, že reprezentační věta platí i pro operátor H. Nebo-li platí, že každý operátor H je indukován nějakou relací ρ, tedy

$$f(H(x)) = H_\rho(f(x)).$$

Jelikož f je vnoření, pak vztahu $f : (\mathbf{B}; G, H) \to (2^T; G_\rho, H_\rho)$ můžeme rozumět také tak, že $(\mathbf{B}; G, H)$ je podstruktura struktury $(2^T; G_\rho, H_\rho)$ a tedy také „všechny“ operátory G jsou podstruktury operátoru G_ρ.

5 MV-algebry

Tense MV-algebry byly zavedeny D. Diagonescou a G. Georgescem. Jedná se o MV-algebry, na kterých jsou definovány unární operátory G a H. V této kapitole si připomeneme definici MV-algebry, definujeme si tense MV-algebru a pojmy, které budeme potřebovat pro dokázání reprezentační věty pro tense MV-algebry.

5.1 MV-algebra

MV-algebry byly zavedeny C. C. Changem jako algebraický model Łukasiewiczovy vícehodnotové logiky. V této kapitole si připomeneme základní poznatky týkajících se MV-algeber. Některé základní poznatky je možné nalézt v [1], mnohem detailněji je tato teorie popsána v [8].

Definice 5.1. Algebru $\mathbf{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ typu $(2, 1, 0)$ nazýváme *MV-algebrou*, jestliže splňuje axiomy

(MV1) $\quad x \oplus y = y \oplus x,$

(MV2) $\quad x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$

(MV3) $\quad x \oplus 0 = x,$

(MV4) $\quad \neg\neg x = x,$

(MV5) $\quad x \oplus 1 = 1$, kde navíc platí $1 := \neg 0$,

(MV6) $\quad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$

Poznámka 5.1. Je-li $\mathbf{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ libovolná MV-algebra, pak relaci uspořádání $\leq$ můžeme zavést následovně

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad \neg x \oplus y = 1,$$

pro každé $x, y \in A$.

Poznámka 5.2. Je-li $(A; \leq)$ uspořádaná množina a definujeme-li operace $\vee$ a $\wedge$ následovně

$$x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y \qquad \text{a} \qquad x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y),$$

pak $(A; \vee, \wedge, 0, 1)$ tvoří ohraničený svaz.

Poznámka 5.3. Mimo jiné můžeme na každé MV algebře zavést operace $\odot$ a $\to$ následovně

$$x \odot y := \neg(\neg x \oplus \neg y) \qquad \text{a} \qquad x \to y := \neg x \oplus y.$$

Tyto operace pak spojuje vztah

$$x \odot y \leq z \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y \to z.$$

Definice 5.2. Jestliže $M = \langle 0, 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}$ a definujeme-li

$$x \oplus_M y = \min\{x + y, 1\} \qquad \text{a} \qquad \neg x = 1 - x,$$

pak $\mathbf{M} = (M; \oplus_M, \neg, 0)$ je MV-algebra. Tuto MV-algebru nazýváme *standardní MV-algebra.*

Definice 5.3. MV-algebru $\mathbf{A}$ nazveme *lineárně uspořádanou* neboli *MV-řetězec*, jsou-li její prvky lineárně uspořádány.

Poznámka 5.4. Na MV-algebrách obvykle zavádíme přirozený součin a přirozenou mocninu následujícím způsobem: pro $n \in \mathbb{N}$ zavedeme přirozený součin následovně

$$0 \times x = 0; \quad (n+1) \times x = (n \times x) \oplus x$$

a mocninu následovně

$$x^0 = 1; \quad x^{n+1} = x^n \odot x.$$

Definice 5.4. Prvek a MV-algebry $\mathbf{A}$ nazveme *idempotentní*, jestliže splňuje

$$a \oplus a = a.$$

Definice 5.5. Řekneme, že MV-algebra $\mathbf{A}$ je *booleovská*, jestliže každý prvek algebry $\mathbf{A}$ je idempotentní.

Věta 5.1. [1, s. 3] Pro každou MV-algebru $\mathbf{A}$ platí, že množina $B(\mathbf{A})$ všech jejich idempotentních prvků tvoří Booleovu algebru.

Definice 5.6. Zobrazení $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ nazveme *homomorfismem MV-algeber* $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, jestliže splňuje

(H1) $h(0) = 0,$

(H2) $h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y), \quad \forall x, y \in A,$

(H3) $h(\neg x) = \neg h(x), \quad \forall x \in A.$

5.2 MV-termy

Definice 5.7. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ předpokládejme existenci množiny

$$S_n := \{0, \neg, \oplus, x_1, \ldots, x_n, (,)\}.$$

Jako *MV-term*, v proměnných $x_1, \ldots x_n$, nazveme právě ty řetězce, které jsou vytvořené z množiny symbolů S_n konečným počtem aplikací následujících pravidel:

1. Prvky 0 a $x_1, \ldots, x_n$ jsou MV-termy.
2. Jestliže řetězec τ je MV-term, pak také $(\neg\tau)$ je MV-term.
3. Jestliže řetězec τ a σ jsou MV-termy, pak také $(\tau \oplus \sigma)$ je MV-term.

Poznámka 5.5. Pojmem *řetězec (slovo)* rozumíme konečný seznam prvků z množiny $S \neq \emptyset$. Symbolem T_X budeme dále označovat množinu všech MV-termů nad množinou proměnných X.

5.3 Dyadická čísla

V této části uvedeme některé základní poznatky týkající se MV-termů a dyadických čísel.

Definice 5.8. [7, s. 76] Je-li $n \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}_0$, pak každé číslo ve tvaru

$$\frac{n}{2^m}$$

nazýváme *dyadické číslo*. Množinu všech dyadických čísel budeme označovat $\mathbb{D}$.

Věta 5.2. [7, s. 76] Množina dyadických čísel $\mathbb{D}$ je hustá množina[1].

Definice 5.9. [1, s. 4] Jestliže a je číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, pak *dyadickým rozkladem* čísla a rozumíme posloupnost

$$a^* = (a_i)_{i\in \mathrm{N}}$$

čísel a_i z množiny $\{0, 1\}$ takovou, že

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}.$$

Číslo a_i^*, pak označuje i-tý člen posloupnosti a^*. Je-li a dyadické číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, pak existuje jediný konečný dyadický rozklad, odpovídající číslu a.

Poznámka 5.6. Každé dyadické číslo má ve svém rozkladu pouze konečný počet prvků $a_i = 1$.

Poznámka 5.7. Je-li a^* dyadický rozklad reálného čísla a a $k \in \mathbb{N}$, pak symbolem

$$\ulcorner a^* \urcorner_k$$

značíme konečnou posloupnost k čísel $(a_1, \ldots, a_k)$ čísla a^* a symbolem

$$\llcorner a^* \lrcorner_k$$

označujeme dyadické číslo

$$\sum_{i=1}^{k} a_i 2^{-i}.$$

[1]Kompletní důkaz je možné nalézt v [7] na straně 76.

Příklad 5.1. Dyadickými čísly nazveme např. čísla

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Provedeme-li například dyadický rozklad čísla $\frac{15}{16}$, pak platí

$$\ulcorner \tfrac{15}{16}^{*} \urcorner_4 = (1,1,1,1),$$

jelikož

$$\frac{15}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

Všimněme si, že dyadický rozklad čísla $\frac{15}{16}$ odpovídá binárnímu zápisu čísla 15.

Označme nyní symboly $f_0(x)$ a $f_1(x)$ po řadě termy $x \oplus x$ a $x \odot x$ a symbolem $T_{\mathbb{D}}$ množinu všech termů nad množinou $\mathbb{D}$. Množina $T_{\mathbb{D}}$ je tedy množina všech termů, které jsme schopni vytvořit z množiny $\mathbb{D}$ užitím pravidel 1 až 3 z definice 5.7. Vzhledem k tomuto označení je vidět, že celou množinu $T_{\mathbb{D}}$ můžeme vytvořit pomocí termů $f_0(x)$ a $f_1(x)$. Dále symbolem g_* označme zobrazení, mezi množinou konečných posloupností čísel z množiny $\{0,1\}$ (tedy i dyadická čísla z intervalu $\langle 0,1\rangle$) a množinou zobrazení $T_{\mathbb{D}}$, které definujeme následovně:

$$g_{(a_1,\dots,a_k)} = f_{a_k} \circ \dots \circ f_{a_1},$$

pro každou konečnou posloupnost $(a_1,\dots,a_k)$ prvků z $\{0,1\}$.

Poznámka 5.8. Pro zjednodušení (nebude-li to na úkor srozumitelnosti nebo jednoznačnosti) budeme místo $g_{(a_1,\dots,a_k)}$ psát jen g_a, kde

$$a = \sum_{i=1}^{k} a_i 2^{-i}.$$

Lemma 5.1. [1, s. 4] Jsou-li $a^* = (a_i)_{i\in N}$ a $b^* = (b_i)_{i\in N}$ dyadické rozklady dvou čísel $a, b \in \langle 0,1\rangle$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$g_{\ulcorner a^* \urcorner_k}(b) = \begin{cases} 1 & \text{v případě, že } b > \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i 2^{-i} + 2^{-k} \\ 0 & \text{v případě, že } b < \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i 2^{-i}. \end{cases}$$

Věta 5.3. Pro každý konečný k-členný dyadický rozklad $(a_1, \ldots, a_k)$ čísla a, kde $a_i \in \{0,1\}$ pro $i = 1, \ldots, k-1$ a $a_k = 0$ platí

$$g_{(a_1,\ldots,a_k)} = g_{(a_1,\ldots,a_{k-1})} \oplus g_{(a_1,\ldots,a_{k-1})},$$

pro libovolné dyadické číslo a, které má rozklad $(a_1, \ldots, a_k)$.

Důkaz. Předpokládejme, že máme libovolné dyadické číslo $a = (a_1, \ldots, a_k)$ takové, že $a_i \in \{0,1\}$ pro libovolné $i = 1, \ldots, k-1$ a $a_k = 0$. Podle tvrzení má platit

$$g_{(a_1,\ldots,a_k)} = g_{(a_1,\ldots,a_{k-1})} \oplus g_{(a_1,\ldots,a_{k-1})}.$$

Levou stranu si můžeme přepsat následovně

$$\begin{aligned} g_{(a_1,\ldots,a_k)} &= f_{a_k} \circ \ldots \circ f_{a_1} \\ &= f_{a_k}(f_{a_{k-1}}(\ldots(f_{a_1}))). \end{aligned}$$

Touto úpravou pak tvrzení můžeme přepsat následovně

$$f_{a_k}(f_{a_{k-1}}(\ldots(f_{a_1}))) = f_{a_{k-1}}(f_{a_{k-2}}(\ldots(f_{a_1}))) \oplus f_{a_{k-1}}(f_{a_{k-2}}(\ldots(f_{a_1}))).$$

Pokud člen $a_k = 0$, pak platí $f_{a_k} = f_0$ a tedy platí

$$\begin{gathered} f_{a_{k-1}}(f_{a_{k-2}}(\ldots(f_{a_1}))) \oplus f_{a_{k-1}}(f_{a_{k-2}}(\ldots(f_{a_1}))) = \\ = f_{a_{k-1}}(f_{a_{k-2}}(\ldots(f_{a_1}))) \oplus f_{a_{k-1}}(f_{a_{k-2}}(\ldots(f_{a_1}))). \end{gathered}$$

□

Poznámka 5.9. Pro upřesnění předchozího tvrzení důkaz doplníme následující úvahou. Pokud by se člen $a_k = 1$, pro libovolné dyadické číslo a s rozkladem $(a_1, \ldots, a_k)$, platilo by, že $f_{a_k} = f_1$ a po rozepsání

$$\begin{gathered} f_{a_{k-1}}(f_{a_{k-2}}(\ldots(f_{a_1}))) \odot f_{a_{k-1}}(f_{a_{k-2}}(\ldots(f_{a_1}))) \neq \\ \neq f_{a_{k-1}}(f_{a_{k-2}}(\ldots(f_{a_1}))) \oplus f_{a_{k-1}}(f_{a_{k-2}}(\ldots(f_{a_1}))) \end{gathered}$$

což je ve sporu s naším tvrzením.

Přímým důsledkem předchozího lemmatu je následující věta.

Důsledek 5.1. [1, Důsledek 1, s. 4] Máme-li standardní MV-algebru, $x \in \langle 0,1 \rangle$ a $d \in (0,1) \cap \mathbb{D}$ (d je tedy libovolné dyadické číslo z intervalu $\langle 0,1 \rangle$), pak existuje term $t_d \in T_{\mathbb{D}}$ takový, že

$$t_d(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad d \leq x.$$

Tato věta je velice důležitá jelikož nám říká, že vše co je „nad" dyadickým číslem term $t_d \in T_{\mathbb{D}}$ zobrazí na 1.

5.4 Filtry na MV-algebrách

Definice 5.10. Jako *filtr* MV-algebry $\mathbf{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ nazveme množinu $F \subseteq A$, splňující

(F1) $1 \in F$,

(F2) $x \in F, y \in A, x \leq y \;\Rightarrow\; y \in F$,

(F3) $x, y \in F \;\Rightarrow\; x \odot y \in F$.

Filtr nazveme *vlastní*, jestliže $0 \notin F$.

Věta 5.4. [8, s. 10] Je-li F filtr na MV-algebře $\mathbf{A}$, pak relace ekvivalence θ_F na A, definovaná následovně

$$(x, y) \in \theta_F \quad \text{právě tehdy, když} \quad (x \to y) \odot (y \to x) \in F,$$

je relace kongruence. Opačně, jestliže θ je kongruence na MV-algebře $\mathbf{A}$, pak $[1]_\theta$ je filtr.

Nyní si uvedeme způsob, jak vytvořit faktorovou MV-algebru.

Poznámka 5.10. Definujeme-li na množině A/F operace

1. $\neg[x]_F := [\neg x]_F$,
2. $[x]_F \odot [y]_F := [x \odot y]_F$,

pak systém $(A/F; \odot, \neg, [1]_F)$ je MV-algebra, kde symbolem $[1]_F$ rozumíme třídu ekvivalence jednotkového prvku. Tuto MV-algebru nazýváme *faktorová MV-algebra* určená filtrem F. Stejně jako u Booleových algeber existuje tzv. *přirozený homomorfismus* $\nu : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/F$.

Již dříve jsme ukázali, že přirozený homomorfismus je surjektivní. Můžeme si povšimnout, že v případě MV-algeber také odpovídají kongruence filtrům a tedy simple MV-algebra je taková MV-algebra, která má pouze dva filtry. Konkrétně jsou to pak filtry, které obsahují pouze prvek 1 a celou množinu.

Definice 5.11. Filtr P MV-algebry $\mathbf{A}$ nazveme *prvofiltr*, jestliže splňuje vlastnosti

(P1) $0 \notin P$,

(P2) $\forall x, y \in A : x \vee y \in P$ platí, že $x \in P$ nebo $y \in P$.

Definice 5.12. Filtr V nazveme *maximální (ultrafiltr)*, jestliže splňuje vlastnosti

(V1) $0 \notin V$,

(V2) pro každý jiný filtr F MV-algebry $\mathbf{A}$, $V \subseteq F$ platí, že

$$F = A \text{ nebo } F = V.$$

Následující věty 5.5, 5.6 a 5.7, včetně jejich důkazů, je možné nalézt v [4] na stranách 16 - 18.

Věta 5.5. Je-li $\mathbf{A}$ MV-řetězec, pak všechny vlastní filtry MV-řetězce $\mathbf{A}$ jsou prvofiltry.

Věta 5.6. Každý prvofiltr F MV-algebry $\mathbf{A}$ je obsažen v ultrafiltru V algebry $\mathbf{A}$.

Věta 5.7. Je-li $\mathbf{A}$ MV-algebra, F je filtr algebry $\mathbf{A}$ a prvek $m \in A \setminus F$, pak existuje prvofiltr P algebry $\mathbf{A}$ takový, že

$$F \subseteq P \quad \text{a} \quad m \notin P.$$

K důkazu předchozí věty je nutné Zornovo lemma a tedy i axiom výběru. Platnost předchozích vět si shrneme v následujícím lemmatu, které později využijeme v důkazech.

Lemma 5.2. Máme-li libovolný filtr F na MV-algebře $\mathbf{A}$ a existuje-li prvek $m \notin F$, pak existuje ultrafiltr V na MV-algebře $\mathbf{A}$ takový, že

$$m \notin V \quad \text{a} \quad F \subseteq V.$$

Nyní si uvedeme důležitou větu, která nám ukazuje, že prvky libovolné simple MV-algebry můžeme identifikovat s konkrétními prvky ve standardní MV-algebře a proto je můžeme považovat za konkrétní reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Věta 5.8. [8, Věta 11.2.4, s. 44] Každou simple MV-algebru lze jednoznačně vnořit do standardní MV-algebry.

Díky tomu, že jsme si v první kapitole zavedli direktní a subdirektní součin, nyní zavedeme pojem semisimple algebra. Tento pojem je pro nás velice důležitý a využijeme jej v následující kapitole.

Definice 5.13. MV-algebru $\mathbf{A}$ nazveme *semisimple*, jestliže je subdirektním součinem simple algeber.

Nyní si uvedeme důležitý důsledek předchozí věty 5.8.

Důsledek 5.2. Předpokládejme, že $\mathbf{A}$ je libovolná semisimple MV-algebra. Pak existuje MV-algebra $\langle 0,1\rangle^T$, kde T je množina všech ultrafiltrů, a injektivní homomorfismus $f : \mathbf{A} \to \langle 0,1\rangle^T$, pro který platí

$$f(x)(U) = [x]_U, \quad \forall U \in T.$$

Jinak řečeno, každou semisimple MV-algebru lze jednoznačně vnořit do MV-algebry $\langle 0,1\rangle^T$.

Dále v textu již budeme prvky simple MV-algebry ztotožňovat s jejich hodnotami ve standardní MV-algebře. Poznamenejme, že tato vlastnost je důležitá pro reprezentační věty tense MV-algeber. Bez této reprezentace není studium tense operátorů na dané třídě algeber možné[2].

Lemma 5.3. Je-li $\mathbf{A}$ netriviální MV-řetězec (lineárně uspořádaná MV-algebra) a V je ultrafiltr algebry $\mathbf{A}$, pak pro každé $x \in A$, pro které platí rovnost $[x]_V = 1$ platí

$$x \oplus x = 1.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $x \leq \neg x$. Pak platí

$$1 = [1]_V = [x]_V \odot [x]_V = [x \odot x]_V.$$

Jestliže $\neg x \geq x$, potom

$$[x \odot x]_V \leq [x \odot \neg x]_V = [0]_V = 0,$$

což je spor. Z toho plyne, že musí platit $\neg x < x$, a tedy

$$x \oplus x \geq x \oplus \neg x = 1.$$

□

Věta 5.9. [1, Tvrzení 1, s. 5] Je-li $\mathbf{A}$ MV-řetězec, V je ultrafiltr na algebře $\mathbf{A}$ a $x \in A$, pak platí

$$[x]_V = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t_d(x) = 1,$$

pro všechna $d \in (0,1) \cap \mathbb{D}$. Navíc platí, že $[x]_V < 1$ právě tehdy, když existuje dyadické číslo $d \in (0,1) \cap \mathbb{D}$ takové, že $t_d(x) \neq 1$. V tomto případě také platí, že $[x]_V < d$.

Důkaz. Nejprve připomeňme, že $[t_d(x)]_V = t_d[x]_V$ právě tehdy, když V je ultrafiltr na MV-algebře $\mathbf{A}$. Předpokládejme nyní, že $[x]_V = 1$, pak platí

[2] Což je například případ třídy Basic fuzzy logic algeber, zkráceně BL-algeber.

$$\begin{aligned}
[x]_V = 1 \quad & \Leftrightarrow \quad d \leq [x]_V, \quad \forall d \in (0,1) \cap \mathbb{D} \\
& \Leftrightarrow \quad t_d[x]_V = 1, \quad \forall d \in (0,1) \cap \mathbb{D} \\
& \Leftrightarrow \quad [t_d(x)]_V = 1, \quad \forall d \in (0,1) \cap \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že $t_d(x) = 1$, pro každé $d \in (0,1) \cap \mathbb{D}$. Pak zřejmě

$$[t_d(x)]_V \ = \ 1, \quad \forall d \in (0,1) \cap \mathbb{D},$$

a z předchozích úvah víme, že $[x]_V = 1$.

Nyní obráceně. Předpokládejme, že $[x]_V = 1$ a také, že existuje dyadické číslo $d \in (0,1) \cap \ \mathbb{D}$. Pak

$$t_d(x) = t(x) \oplus t(x),$$

kdy $t(x)$ je libovolný term z množiny $T_{\mathbb{D}}$, vytvořený z operací $\oplus$ a $\odot$. Z toho nám plyne, že

$$[t_d(x)]_V = t[x]_V = t(1) = 1.$$

Užitím předchozího lemma dostáváme

$$t_d(x) = t(x) \oplus t(x) = 1.$$

□

Věta 5.10. [1, Tvrzení 2, s. 5] Předpokládejme, že $\mathbf{A}$ je MV-algebra, $x \in A \setminus F$ a F je filtr na $\mathbf{A}$. Pak existuje ultrafiltr V na algebře $\mathbf{A}$ takový, že $F \subseteq V, x \notin V$ právě tehdy, když existuje dyadické číslo $d \in (0,1) \cap \mathbb{D}$ takové, že $t_d(x) \notin F$.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje ultrafiltr V pro který platí

$$\forall y \in F : [y]_V = 1 \quad \text{a} \quad [x]_V < 1.$$

Jelikož množina dyadických čísel je hustá, pak existuje dyadické číslo $d \in (0,1) \cap \mathbb{D}$, pro které platí

$$[x]_V < d < 1.$$

Z důsledku 5.1 pak dostáváme

$$[t_d(x)]_V = t_d[x]_V \neq 1 \quad \Rightarrow \quad t_d(x) \notin V \quad \Rightarrow \quad t_d(x) \notin F.$$

Nyní obráceně. Předpokládejme, že máme dyadické číslo $d \in (0,1) \cap \mathbb{D}$ takové, že $t_d(x) \notin F$. Pak existuje filtr K na MV-algebře $\mathbf{A}$ takový, že $F \subseteq K$, $t_d(x) \notin K$ a který je maximální filtr s touto vlastností. K je prvofiltr algebry $\mathbf{A}$. Z toho plyne, že $\mathbf{A}/K$ je lineárně uspořádaná a existuje jediný přirozený MV-morfismus $\nu : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/K$ takový, že

$$\nu(K) = 1.$$

Označme nyní symbolem U_K ultrafiltr na algebře $\mathbf{A}/K$. Protože $t_d(x) \notin K$, pak dostáváme

$$t_d(\nu(x)) = \nu(t_d(x)) \neq 1.$$

Z předchozí věty nám plyne

$$[t_d(\nu(x))]_{U_K} < d < 1.$$

Z toho dostáváme

$$[\nu(t_d(x)]_{U_K} < d < 1.$$

Ultrafiltr U_K odpovídá MV-morfismu $h_K : \mathbf{A}/K \to \langle 0, 1 \rangle$. Označíme-li

$$h = h_K \circ \nu,$$

pak MV-morfismus h odpovídá ultrafiltru V na algebře $\mathbf{A}$ a platí

$$[t_d(x)]_V < d < 1.$$

Zřejmě $[x]_V < d < 1$ jinak by totiž platilo

$$1 = [t_d(x)]_V < 1$$

což je spor. Dohromady platí

$$[F]_V \subseteq [K]_V = [\nu(K)]_{U_K} \subseteq [1]_{U_K} = 1.$$

$\square$

Důsledek 5.3. [1, Důsledek 2, s. 6] Je-li $\mathbf{A}$ MV-algebra, $x \in A$ a F je filtr algebry $\mathbf{A}$ takový, že $t_d(x) \notin F$ pro nějaké dyadické číslo $d \in (0, 1) \cap \mathbb{D}$, pak existuje ultrafiltr V na algebře $\mathbf{A}$ takový, že

$$F \subseteq V \quad \text{a} \quad [x]_V < d < 1.$$

6 Tense MV-algebry

Pro zavedení tense operátorů na neklasických logikách je nutné pro operátory G a H přidat několik dalších axiomů pro vyjádření spojení s dodatečnými operacemi.

Definice 6.1. Je-li $\mathbf{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ MV-algebra a unární operátory G a H splňují následující vlastnosti:

1. $G(1) = 1, \quad H(1) = 1,$
2. $G(x) \odot G(y) \leq G(x \odot y), \qquad H(x) \odot H(y) \leq H(x \odot y),$

3. $G(x) \oplus G(y) \leq G(x \oplus y)$, $\quad H(x) \oplus H(y) \leq H(x \oplus y)$,

4. $G(x) \odot G(x) = G(x \odot x)$, $\quad H(x) \odot H(x) = H(x \odot x)$,

5. $G(x) \oplus G(x) = G(x \oplus x)$, $\quad H(x) \oplus H(x) = H(x \oplus x)$,

6. $x \leq GP(x)$, $\quad x \leq HF(x)$,

pak G a H jsou *tense operátory* a trojici $(\mathbf{A}; G, H)$ nazýváme *tense MV-algebra*. Poslední vlastnost můžeme také popsat pomocí vztahu:

6'. $\neg G \neg H(x) \leq x$, $\quad \neg H \neg G(x) \leq x$.

Lemma 6.1. Operátory G a H jsou monotónní. Jinak řečeno, jestliže $x \leq y$, pro všechna $x, y \in A$, pak $G(x) \leq G(y)$ a zároveň $H(x) \leq H(y)$ pro všechna $x, y \in A$.

Důkaz. Předpokládejme, že $x \leq y$, pak existuje $z \in A : x \oplus z = y$. Aplikováním operátoru G dostaneme

$$G(y) = G(x \oplus z).$$

Z vlastnosti 3. pak plyne

$$G(y) = G(x \oplus z) \geq G(x) \oplus G(z) \geq G(x).$$

Pro operátor H provedeme důkaz analogicky. $\square$

6.1 Konstrukce tense operátorů

Definice 6.2. [3, s. 56] Je-li $\mathbf{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ úplný MV-řetězec a $(S, T; R)$ je frame, pak definujeme zobrazení $G_R, F_R : A^T \to A^S$ a $H_R, P_R : A^S \to A^T$ tak, že pro každé $p \in A^T$ a pro každé $s \in S$ platí

$$G_R(p)(s) = \bigwedge \{p(t) : sRt\},$$
$$F_R(p)(s) = \bigvee \{p(t) : sRt\},$$

a pro každé $q \in A^S$ a pro každé $t \in T$ platí

$$H_R(q)(t) = \bigwedge \{q(s) : sRt\},$$
$$P_R(q)(t) = \bigvee \{q(s) : sRt\}.$$

Říkáme, že operátory G_R, H_R, F_R a P_R jsou *indukovány framem* $(S, T; R)$. Jestliže navíc $S = T$, pak říkáme, že tyto operátory jsou *indukovány time framem* $(T; R)$.

Lemma 6.2. Je-li $\mathbf{A}$ úplný MV-řetězec a $(T; R)$ je time frame, pak trojice $(\mathbf{A}^T; G_R, H_R)$, kde operátory G_R a H_R jsou definovány podle předchozí definice, je tense MV-algebra.

Říkáme, že MV-algebra $(\mathbf{A}^T; G_R, H_R)$ je *indukována time framem* $(T; R)$.

Poznámka 6.1. Pokud standardní MV-algebru $\mathbf{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ faktorizujeme přes ultrafiltr V, pak získaná faktorová algebra $\mathbf{A}/V = (A/V; \oplus, \neg, 0)$ je simple MV-algebra. A jak víme, tak $\mathbf{A}/V$ můžeme vždy vnořit do intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

6.2 Reprezentační věta

Věta 6.1. Předpokládejme, že algebra $(\mathbf{A}; G, H)$ je semisimple tense MV-algebra, kde G a H jsou tense operátory na této algebře. Pak algebru $(\mathbf{A}; G, H)$ můžeme vnořit do tense MV-algebry $(\langle 0, 1\rangle^T; G_\rho, H_\rho)$ indukované time framem (T, ρ), kde T je množina všech maximálních vlastních filtrů a relace $\rho \subseteq T^2$ je definovaná následovně

$$U \rho V \quad \Leftrightarrow \quad [G(x)]_U \leq [x]_V,$$

pro všechna $x \in A$.

Pro potřeby důkazu zavedeme ještě druhou relaci ρ' následovně

$$U \rho' V \quad \Leftrightarrow \quad [H(x)]_V \leq [x]_U,$$

pro všechna $x \in A$.

Tyto vztahy můžeme předpokládat, jelikož faktorizováním algebry $\mathbf{A}$ přes ultrafiltry získáme simple MV-algebry na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a podle věty 5.8 víme, že jejich prvky můžeme porovnávat.

Věta 6.2. Platí, že $\rho = \rho'$.

Důkaz. Předpokládejme, že máme ultrafiltry U a V a že platí $U\rho V$. Z definice tense MV-algebry víme, že

$$\neg G \neg H(x) \leq x \qquad \text{a tedy} \qquad \neg x \leq G \neg H(x).$$

Faktorizujeme-li podle U (nerovnost se faktorizací zachovává), pak dostaneme

$$[\neg x]_U \leq [G \neg H(x)]_U.$$

Jelikož $U\rho V$, pak

$$[\neg x]_U \leq [G \neg H(x)]_U \leq [\neg H(x)]_V.$$

Úpravou dostaneme

$$\neg[x]_U \leq \neg[H(x)]_V.$$

Celý výraz znegujeme a dostaneme, že platí

$$[H(x)]_V \leq [x]_U$$

pro všechna $x \in A$. A proto $U\rho' V$. Opačný důkaz provedeme analogicky. $\square$

Definice 6.3. Předpokládejme, že U je ultrafiltr. Nyní si zavedeme množiny $L(U)$ a $R(U)$ následovně

$$L(U) = \{x : G(x) \in U\} \qquad \text{a} \qquad R(U) = \{x : H(x) \in U\}.$$

Věta 6.3. Množiny $L(U)$ a $R(U)$ jsou filtry.

Důkaz. Pro $L(U)$ a $R(U)$ tedy ověříme vlastnosti filtru.
1. Předpokládejme, že $G(1) = 1$. Jelikož $G(1) = 1$, pak podle definice

$$1 \in L(U) \text{ a tedy } L(U) \neq \emptyset.$$

2. Předpokládejme, že $x \leq y, x \in L(U)$. Z předpokladu a definice množiny $L(U)$ nám plyne, že $G(x) \in U$. Z toho, že $x \leq y$ plyne, že $G(x) \leq G(y)$ a jelikož U je ultrafiltr, pak také $G(y) \in U$. Z definice pak dostáváme, že $y \in L(U)$. Dokázali jsme tedy, že platí

$$x \in L(U), x \leq y \quad \Rightarrow \quad y \in L(U).$$

3. Předpokládejme, že $x, y \in L(U)$. Z předpokladu a definice množiny $L(U)$ nám ihned plyne, že $G(x), G(y) \in U$. Proto platí nerovnost

$$G(x \odot y) \geq G(x) \odot G(y).$$

Z toho, že U je ultrafiltr a $G(x), G(y) \in U$ plyne, že také $G(x) \odot G(y) \in U$ a podle předchozího vztahu také $G(x \odot y) \in U$. Podle definice množiny $L(U)$ pak dostáváme, že $x \odot y \in L(U)$. Dokázali jme tedy, že platí

$$x, y \in L(U) \Rightarrow x \odot y \in L(U).$$

Celkově jsme tedy dokázali, že množina $L(U)$ je filtr. Vlastnosti množiny $R(U)$ ověříme analogicky. $\square$

Věta 6.4. Jsou-li U a V ultrafiltry na MV-algebře $\mathbf{A}$, pak platí

$$U\rho V \quad \Leftrightarrow \quad L(U) \subseteq V \quad \Leftrightarrow \quad R(V) \subseteq U.$$

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích.
1. Předpokládejme, že $U\rho V$. Jestliže $x \in L(U)$, pak $G(x) \in U$. Faktorizací podle U dostaneme

$$1 = [G(x)]_U$$

a jelikož $U\rho V$, pak platí

$$[G(x)]_U \leq [x]_V.$$

Z toho dostáváme

$$1 = [x]_V \Rightarrow x \in V.$$

2. Nyní předpokládáme sporem, že $L(U) \subseteq V$ a existuje $x \in A$ takové, že

$$[x]_V < [G(x)]_U.$$

Jelikož množina všech dyadických čísel je hustá množina, pak existuje dyadické číslo d takové, že

$$[x]_V < d < [G(x)]_U.$$

Z toho plyne

$$t_d([x]_V) < 1,$$

jelikož tato hodnota je ostře pod dyadickým číslem d. Dále ale platí, že

$$1 = [t_d G(x)]_U.$$

Jelikož term t_d je poskládán pouze z operací $\oplus$ a $\odot$, pak komutuje s operátorem G a tedy platí

$$[t_d G(x)]_U = [G t_d(x)]_U.$$

Celkem jsme tedy dostali

$$t_d(x) \notin V \qquad \text{a} \qquad G t_d(x) \in U \Rightarrow t_d(x) \in L(U).$$

Což je spor, jelikož $L(U) \subseteq V$. Pro $R(V) \subseteq U$ se důkaz provede analogicky. □

Věta 6.5. *(Reprezentační věta)* Je-li $(\mathbf{M}; G, H)$ semisimple tense MV-algebra, pak existuje tense MV-algebra $(\langle 0,1\rangle^T; G_\rho, H_\rho)$ indukovaná time framem (T, ρ), kde T je množina všech ultrafiltrů, a injektivní homomorfismus (vnoření)

$$f : (\mathbf{M}; G, H) \to (\langle 0,1\rangle^T; G_\rho, H_\rho).$$

Důkaz. Z důsledku 5.2 víme, že každou semisimple MV-algebru lze jednoznačně vnořit do algebry $\langle 0,1\rangle^T$. Budeme chtít dokázat, že f je homomorfismus, tj. $f(G(x)) = G_\rho(f(x))$.
1. Z definice víme

$$[G_\rho(x)]_U = \bigwedge_{U\rho V} [x]_V.$$

Navíc ale platí

$$[G(x)]_U \leq [x]_V, \quad \forall U\rho V.$$

Z čehož nám plyne

$$[G(x)]_U \leq \bigwedge_{U\rho V} [x]_V = [G_\rho(x)]_U.$$

2. Dokážeme druhou nerovnost. Předpokládejme nyní

$$[G(x)]_U < d,$$

kde d je libovolné dyadické číslo. Z toho nám plyne

$$[t_d G(x)]_U < 1 \Rightarrow G t_d(x) \notin U \Rightarrow t_d(x) \notin L(U).$$

Z lemma 5.3 plyne, že existuje ultrafiltr V takový

$$t_d(x) \notin V \supseteq L(U).$$

Z první části je vidět, že $[t_d(x)]_V < 1$. Z druhé části je vidět, že $U\rho V$. Z věty 5.9 pak plyne, že jestliže

$$[t_d(x)]_V < 1 \Rightarrow [x]_V < d.$$

Nyní jsme našli prvek $[x]_V$, který je menší než dyadické číslo d. Tedy platí

$$[G_\rho(x)]_V = \bigwedge_{U\rho V} [x]_V < d.$$

Celkově jsme dokázali, že neexistují žádná dyadická čísla mezi $G_\rho(x)$ a $G(x)$ a proto musí platit, že $f(G(x)) = G_\rho(f(x))$, jelikož dyadická čísla tvoří hustou množinu. $\square$

Poznámka 6.2. Díky tomu, že jsme ve větě 6.2 dokázali, že relace $\rho = \rho'$ víme, že reprezentační věta 6.5 platí i pro operátor H. Nebo-li platí

$$f(H(x)) = H_\rho(f(x)).$$

6.3 Vlastnosti

V poslední kapitole se budeme zabývat vlastnostmi a vztahy mezi relacemi a jednotlivými tense operátory.

Věta 6.6. [1, s. 11] Je-li $(\langle 0,1\rangle^T; G_\rho, H_\rho)$ tense MV-algebra indukovaná time framem $(T;\rho)$, pak platí

1. Jestliže je relace ρ reflexivní, pak

$$G_\rho(x) \leq x \qquad \text{a} \qquad H_\rho(x) \leq x,$$

   pro libovolné $x \in \langle 0,1\rangle^T$.

2. Jestliže je relace ρ symetrická, pak

$$G_\rho(x) = H_\rho(x),$$

   pro libovolné $x \in \langle 0,1\rangle^T$.

3. Jestliže je relace ρ tranzitivní, pak

$$G_\rho G_\rho(x) \geq G_\rho(x) \qquad \text{a} \qquad H_\rho H_\rho(x) \geq H_\rho(x),$$

   pro libovolné $x \in \langle 0,1\rangle^T$.

Důkaz. Ověříme platnost jednotlivých tvrzení.

1. Jestliže je relace ρ reflexivní, pak z toho, že $i\rho i$ plyne

$$G_\rho(x)(i) = \bigwedge_{i\rho j} x(j) \leq x(i),$$

   pro libovolné $i \in T$. Pro H_ρ provedeme důkaz analogicky.

2. Jestliže je relace ρ symetrická, pak

$$G_\rho(x)(i) = \bigwedge_{i\rho j} x(j) = \bigwedge_{j\rho i} x(j) = H_\rho(x)(i),$$

   pro libovolné $i \in T$. Z toho vyplývá, že $G_\rho = H_\rho$.

3. Jestliže je relace ρ tranzitivní, pak

$$\{x(k) : i\rho j \text{ a } j\rho k\} \subseteq \{x(k) : i\rho k\}$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned} G_\rho G_\rho(x)(i) &= \bigwedge_{i\rho j} G_\rho(x)(j) = \bigwedge_{i\rho j}\bigwedge_{j\rho k} x(k) \\ &= \bigwedge\{x(k) : i\rho j \text{ a } j\rho k\} \geq \bigwedge_{i\rho k} x(k) = G_\rho(x)(i), \end{aligned}$$

pro všechna $i \in T$.

$\square$

Věta 6.7. [1, s. 11] Je-li $(\mathbf{A}; G, H)$ semisimple tense MV-algebra a $(T; \rho)$ je time frame, který indukuje tense MV-algebru $(\langle 0,1\rangle^T; G_\rho, H_\rho)$, definovaný ve větě 6.1, pak platí

1. Jestliže

$$G(x) \leq x \qquad \text{a} \qquad H(x) \leq x,$$

   pro libovolné $x \in A$, pak ρ je reflexivní.

2. Jestliže

$$G(x) = H(x),$$

   pro libovolné $x \in A$, pak ρ je symetrická relace.

3. Jestliže

$$GG(x) \geq G(x) \qquad \text{a} \qquad HH(x) \geq H(x),$$

   pro libovolné $x \in A$, pak ρ je tranzitivní.

Důkaz. Ověříme jednotlivá tvrzení.

1. Jestliže $G(x) \leq x$ pro libovolné $x \in U$, pak

$$[G(x)]_U \leq [x]_U,$$

   pro libovolné $x \in U$ z čehož podle definice plyne, že $U\rho U$. Tedy ρ je reflexivní.

2. Podle věty 6.1 víme, že

$$[G(x)]_U \leq [x]_V, \forall x \in U \qquad \Leftrightarrow \qquad [H(x)]_V \leq [x]_U, \forall x \in U.$$

Jestliže $G = H$, pak musí platit

$$[G(x)]_U \leq [x]_V, \forall x \in U \qquad \Leftrightarrow \qquad [G(x)]_V \leq [x]_U, \forall x \in U.$$

Z toho vyplývá, že

$$U\rho V \quad \Leftrightarrow \quad V\rho U.$$

Tedy relace ρ je symetrická.

3. Předpokládejme, že $GG(x) \geq G(x)$, pro libovolné $x \in U$. Jestliže $U\rho V$ a $V\rho W$, pak pro libovolné $x \in U$ platí

$$[G(x)]_U \leq [GG(x)]_U \leq [G(x)]_V \leq [x]_W,$$

čemuž odpovídá vztah $U\rho W$. Tedy relace ρ je tranzitivní.

□

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo shrnout několik přístupů k zavedení operátorů modelujících časovou škálu nebo časy do klasických i neklasických logik. Hlavním výsledkem měla být prezentace důkazů reprezentačních vět pro tzv. tense Booleovy algebry a tense MV-algebry. Domnívám se, že tento cíl byl úspěšně naplněn.

V prvních dvou kapitolách jsme čtenáři připomenuli základní pojmy z univerzální algebry a teorie svazů, jejichž znalost je nutná k pochopení problematiky týkající se tense logiky a tense algeber. Poté jsme se krátce seznámili se základy tense logiky a tense operátorů. Veškeré tyto poznatky jsme následně využili při zavedení tense Booleových algeber a prezentaci důkazů reprezentačních vět pro tense Booleovi algebry. V předposlední kapitole jsme si uvedli některé základní poznatky týkající se MV-algeber a dyadických čísel, které jsme následně aplikovali v poslední kapitole při zavedení tense MV-algeber a hlavně při prezentaci důkazů reprezentačních vět pro tyto algebry. Nakonec jsme prezentovali základní vlastnosti mezi relacemi a jednotlivými tense operátory.

V případě, že by se čtenář chtěl dále zabývat studiem tense operátorů na algebraických strukturách, doporučuji ke studiu publikace [3] a [6], případně pak z hlediska historického vývoje zajímavou [5].

Reference

[1] BOTUR M., PASEKA J. : *On Tense MV-algebras*, PŘF - Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. Dostupné na: http://arxiv.org/abs/1305.3406

[2] CHAJDA I. : *Algebra 3.* 2. vyd. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1998. 124 s. ISBN 8070678038

[3] CHAJDA I. PASEKA J. : *Algebraic approach to tense operators*, Lemgo: Heldeman Verlag, 2015. 204 s. Research and Exposition 35. ISBN 978-3-88538-235-5

[4] CIGNOLI R. L. O., OTTAVIANO I.M., MUNDICI D. : *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Dordrecht: Kuwer acad. public, 2000. 233 s. ISBN 978-9048153367

[5] DIACONESCU D., GEORGESCU G. : *Tense operators on MV-algebras and Łukasiewicz-Moisil algebras*, Fundanenta Informaticae, 2007. 30 s.

[6] KOWALSKI T. : *Varietes of tense algebras*, Reports on Mathematical Logic 32, 1998. s. 53-95. Dostupné na: http://rml.tcs.uj.edu.pl/rml-32/kowalski.pdf

[7] DAVIDOV L. : *Škola mladých matematiků*, Praha: Mladá fronta, 1984. s. 76 - 78. Dostupné na: http://dml.cz/dmlcz/404105

[8] MUNDICI D. : *MV-Algebras - A short tutorial*, Florence: Department of Mathematics "Ulisse Dini", University of Florence, 2007. 62 s. Dostupné na: http://www.matematica.uns.edu.ar/IXCongresoMonteiro/Comunicaciones/Mundici_tutorial.pdf