

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Úvod do fraktální geometrie



**Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky**

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.**

Vypracoval(a): **Lucie Dostálová**

Studijní program: B0541A170010 Matematika a její aplikace

Studijní obor Matematika a její aplikace

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2022

## BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

**Autor:** Lucie Dostálová

**Název práce:** Úvod do fraktální geometrie

**Typ práce:** Bakalářská práce

**Pracoviště:** Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

**Vedoucí práce:** RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.

**Rok obhajoby práce:** 2022

**Abstrakt:** Hlavním cílem této práce je popsat základní pojmy týkající se fraktální geometrie, tedy Hausdorffova metrického prostoru, fraktálních dimenzí a Hausdorffovy míry, uvést netriviální příklady výpočtů dimenzí a míry množin. V práci je dále uvedena konstrukce fraktálů pomocí iterovaného systému funkcí (IFS) a aplikace této teorie - fraktální interpolace, která je aplikovaná na reálná data.

**Klíčová slova:** Hausdorffův metrický prostor, fraktální dimenze, IFS, fraktální interpolační funkce

**Počet stran:** 49

**Počet příloh:** 1

**Jazyk:** český

## BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

**Author:** Lucie Dostálová

**Title:** Introduction to fractal geometry

**Type of thesis:** Bachelor's

**Department:** Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

**Supervisor:** RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.

**The year of presentation:** 2022

**Abstract:** The main aim of the thesis is to describe the basic terms related to the fractal geometry, thus the Hausdorff metric space, the fractal dimensions and the Hausdorff measure, to give the non-trivial examples of computations of dimensions and measures of sets. In addition, the thesis contains the construction of fractal using the iteration function system (IFS) and the application of this theory - the fractal interpolation function, which is applied to experimental data.

**Key words:** Hausdorff metric space, fractal dimension, IFS, fractal interpolation function

**Number of pages:** 49

**Number of appendices:** 1

**Language:** Czech

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou zprávu zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Pavla Ludvíka, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne .....

.....

podpis

# Obsah

Úvod	7
<b>1 Teoretická část</b>	<b>8</b>
1.1 Hausdorffův metrický prostor	8
1.2 Box-counting dimenze	9
1.3 Hausdorffova míra a dimenze	17
<b>2 Příklad fraktálu a výpočet dimenze</b>	<b>21</b>
2.1 Cantorova střední- $\lambda$ -množina	21
<b>3 Systém iterovaných funkcí</b>	<b>26</b>
3.1 Banachova věta o pevném bodě	26
3.2 Kontraktivní zobrazení na Hausdorffově metrickém prostoru	27
3.3 Konstrukce fraktálů	28
<b>4 Aplikace fraktálů</b>	<b>30</b>
4.1 Fraktální interpolační funkce	30
4.1.1 Dimenze fraktální interpolační funkce	39
4.1.2 EEG data	40
Závěr	47
Literatura	49

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala panu RNDr. Pavlu Ludvíkovi Ph.D za odborné vedení bakalářské práce, pomoc, čas a ochotu, které mi věnoval.

# Úvod

Fraktální geometrie slouží k popisu složitěji strukturovaných objektů, jejichž charakter se nezmění při změně měřítka a které nelze jednoduše popsat pomocí klasické geometrie. Označení fraktál poprvé použil Benoît Mandelbrot, který je považován za zakladatele fraktální geometrie.

První kapitola je věnovaná teorii prostoru, kde se fraktály vyskytují a kde je nejvýhodnější jejich popis. Také zde popíšeme box-counting dimenzi, Hausdorffovu míru a dimenzi, díky nimž můžeme fraktály porovnávat. V další kapitole se podíváme na výpočet box-counting dimenze kompaktní množiny pomocí „fraktálních řetězců“ a na Cantorovu střední- $\lambda$ -množinu. Ve třetí kapitole se budeme zabývat systémem iterovaných funkcí a kontraktivním zobrazením.

Poslední kapitola je věnována aplikaci fraktálů. Nejprve představíme interpolační funkci, zkonstruujeme IFS v  $\mathbb{R}^2$ , tak aby jeho atraktor byl graf spojitě funkce, která interpoluje data. Nakonec použijeme fraktální interpolační funkci k aproximaci experimentálních dat a spočítáme box-counting dimenzi příslušného atraktoru IFS.

# Kapitola 1

## Teoretická část

V této kapitole si zdefinujeme Hausdorffův metrický prostor, který je vhodný k popisu fraktálních množin. Popíšeme box-counting a Hausdorffovu dimenzi, které jsou užitečné při studiu „netypických“ množin a které nám umožňují porovnávat fraktály. Zmíněné pojmy z metrických prostorů, jež nejsou vysvětlené nalezneme v [6].

### 1.1. Hausdorffův metrický prostor

Hausdorffův metrický prostor je prostor, kde se omezujeme na speciální systém množin, jinak by Hausdorffova metrika nebyla metrikou. Pomocí ní dokážeme popsat konvergenci množin, která se hodí při zkoumání fraktálních objektů.

**Definice 1.1.1** ( $\delta$ -okolí množiny, [4, str. 71]). Mějme dán metrický prostor  $(X, \rho)$ , množinu  $A \subset X$  a necht'  $\delta > 0$ . Definujeme  $\delta$ -okolí množiny  $A$  jako

$$A_\delta = \{y \in X : \rho(x, y) < \delta \text{ pro nějaké } x \in A\}.$$

**Definice 1.1.2** (Hausdorffova metrika, [4, str. 71]). Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor,  $\mathcal{S}(X)$  systém všech neprázdných kompaktních podmnožin  $X$ . Necht'  $A, B \subseteq \mathcal{S}(X)$ . Hausdorffovu metriku  $h$  definujeme vztahem

$$h(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subseteq B_\delta \wedge B \subseteq A_\delta\}$$

**Poznámka 1.1.3.** Důkaz, že Hausdorffova metrika je skutečně metrikou, nalezneme v důkazu [4, Theorem 2.5.1, str. 72].

**Definice 1.1.4** (Hausdorffův metrický prostor). Metrický prostor  $(\mathcal{S}(X), h)$  nazýváme Hausdorffův metrický prostor na  $(X, \rho)$ .



**Lemma 1.1.5** ([4, str. 72]). *Nechť  $\{A_n\}$  je posloupnost neprázdných kompaktních podmnožin  $X$  a nechť  $A$  je neprázdna kompaktní podmnožina  $X$ . Jestliže  $\{A_n\}$  konverguje k  $A$  v Hausdorffově metrice, pak*

$$A = \{x \in X : \text{existuje posloupnost } \{x_n\}, \text{ kde } x_n \in A_n, \text{ taková, že } x_n \rightarrow x\}.$$

**Věta 1.1.6** (Úplnost  $\mathcal{S}(X)$ , [4, Theorem 2.5.3., str. 72]). *Nechť  $(X, \rho)$  je úplný metrický prostor, pak  $(\mathcal{S}(X), h)$  je také úplný metrický prostor.*

**Lemma 1.1.7** ([4, Proposition 2.5.6, str. 73]). *Nechť  $\{A_n\}$  je nerostoucí posloupnost neprázdných kompaktních podmnožin, tj.  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ . Potom  $\{A_n\}$  konverguje k průniku  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  v Hausdorffově metrice.*

## 1.2. Box-counting dimenze

Nyní zavedeme box-counting dimenzi někdy také nazývanou pokrývací dimenze. Začneme motivací pro danou definici a uvedeme ekvivalentní možnosti pokrývání množin. Poznamenejme, že v celém textu bude logaritmus vždy o základu  $e$ .

Mějme danou množinu  $F \subset \mathbb{R}^2$  a pro každé  $\delta > 0$  nalezneme nejmenší počet množin průměru nejvýše  $\delta$ , které pokryjí  $F$ . Toto číslo budeme značit  $N_\delta(F)$  a určuje počet shluků velikosti přibližně  $\delta$ , na které můžeme  $F$  rozdělit. Dimenze množiny  $F$  odráží způsob, jakým se zvětšuje počet množin v  $N_\delta(F)$  při zmenšujícím se  $\delta$ . Jestliže  $N_\delta(F)$  splňuje aproximaci

$$N_\delta(F) \simeq c\delta^{-s}, \text{ kde } c > 0, s > 0,$$

potom můžeme říct, že  $F$  má box-counting dimenzi  $s$ . Pro představu o hodnotě  $s$  potřebujeme nalézt řešení. Aplikujeme logaritmus a vztah upravíme

$$\log N_\delta(F) \simeq \log(c\delta^{-s})$$

$$\log N_\delta(F) \simeq \log c - s \log \delta$$

$$s \simeq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} + \frac{\log c}{\log \delta}.$$

Hodnotu  $s$  získáme provedením limity pro  $\delta \rightarrow 0$

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

**Definice 1.2.1** (Průměr množiny, [4, str. 45]). Nechť  $(X, \rho)$  je metrický prostor a  $M \subset X$ ,  $M \neq \emptyset$ , jeho neprázdná podmnožina. Průměr množiny  $M$  je definován vztahem

$$\text{diam}(M) = \sup \{ \rho(x, y) : x, y \in M \}.$$

Tj. průměrem množiny rozumíme největší vzdálenost dvou bodů ležících v dané množině.

**Poznámka 1.2.2.** Pro eukleidovský prostor  $X = \mathbb{R}^n$  a neprázdnou  $M \subset X$  budeme psát

$$|M| = \sup \{ \|x - y\| : x, y \in M \}.$$

**Definice 1.2.3** ( $\delta$ -pokrytí, [5, str. 28]). Nechť  $(X, \rho)$  je metrický prostor,  $F \subset X$  a  $\delta > 0$ . Jestliže  $\{U_i\}$  je konečný nebo spočetný systém množin průměru nejvýše  $\delta$ , které pokrývají  $F$ , tj.  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  a  $0 < \text{diam}(U_i) \leq \delta$  pro každé  $i$ . Potom  $\{U_i\}$  nazýváme  $\delta$ -pokrytí  $F$ .

**Definice 1.2.4** (Box-counting dimenze, [5, str. 28]). Nechť  $F$  je neprázdná omezená podmnožina  $\mathbb{R}^n$  a  $N_\delta(F)$  je nejmenší počet množin průměru nejvýše  $\delta$ , které pokryjí  $F$ , tj. nejmenší počet množin v  $\delta$ -pokrytí  $F$ . Dolní, resp. horní, box-counting dimenze je

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

resp.

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Z definice horní a dolní box-counting dimenze platí  $\underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$  a pokud se rovnají, označme společnou hodnotu box-counting dimenze  $F$

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad (1.1)$$

**Poznámka 1.2.5.** Po celou dobu budeme předpokládat, že  $\delta > 0$  je dostatečně malá, aby hodnota  $-\log \delta$  byla pouze kladná.

Vztah 1.1 říká, že  $N_\delta(F) \simeq c\delta^{-s}$  pro dostatečně malé  $\delta$ , kde  $s = \dim_B F$ . Tedy, že

$$N_\delta(F)\delta^s \rightarrow \infty, \text{ pokud } s < \dim_B F,$$

$$N_\delta(F)\delta^s \rightarrow 0, \text{ pokud } s > \dim_B F.$$

Někdy bývá výhodnější pokrývat množinu  $F$  jinými specifickými množinami, přičemž se hodnota box-counting dimenze nezmění. O ekvivalentních definicích mluví následující věta.

**Věta 1.2.6** ([5, Equivalent definitions 2.1, str. 30]). *Dolní a horní box-counting dimenze množiny  $F \subset \mathbb{R}^n$  jsou dány vztahy*

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

a box-counting dimenze  $F$

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

pokud limita existuje a  $N_\delta(F)$  je některé z následujících možností:

- (i) Nejmenší počet množin průměru nejvýše  $\delta$  pokrývajících  $F$ .
- (ii) Nejmenší počet uzavřených koulí poloměru  $\delta$  pokrývajících  $F$ .
- (iii) Nejmenší počet krychlí o straně  $\delta$  pokrývajících  $F$ .
- (iv) Počet  $n$ -rozměrných krychlí v síti o straně  $\delta$ , které protínají  $F$ .
- (v) Největší počet disjunktních koulí poloměru  $\delta$ , které mají střed v  $F$ .

*Důkaz.* Lze najít například v [5]. □

**Poznámka 1.2.7.** Ve vztazích věty 1.2.6 stačí uvažovat limity pro  $\delta$  jdoucí k 0 přes libovolnou klesající posloupnost takovou, že

$$\delta_{k+1} \geq c\delta_k \text{ pro } 0 < c < 1,$$

užitečná je zejména volba  $\delta_k = c^k$ . Všimněme si, že pokud  $\delta_{k+1} \leq \delta \leq \delta_k$ , pak s  $N_\delta(F)$  jako nejmenším počtem množin v  $\delta$ -pokrytí  $F$  dostaneme odhad

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} \left(1 + \frac{\log c}{-\log \delta_{k+1}}\right)}.$$

Pro horní box-counting dimenzi platí

$$\overline{\dim}_B F \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}.$$

Opačná nerovnost plyne z definice limes superior, celkově platí

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$$

Rovnost pro dolní box-counting dimenzi by se ukázala podobným postupem, tedy

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}.$$

Následující tvrzení je příkladem výpočtu box-counting dimenze speciální množiny.

**Tvrzení 1.2.8** ([5, Exercise 2.3, str. 42]). *Nechť  $F$  je množina čísel z intervalu  $[0, 1]$  takových, že jejich desetinný zápis neobsahuje číslici 5. Pak pro box-counting dimenzi  $\dim_B F$  platí*

$$\dim_B F = \frac{\log 9}{\log 10}.$$

*Řešení.* Každé číslo z množiny  $F$  lze zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i},$$

kde  $a_i \in I \doteq \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Nechť  $E_k \subset F$  je množina, která neobsahuje číslici 5 na prvních  $k$  desetinných místech. Tj.

$$E_1 = \{x : x \neq 0, 5\}$$

$$E_2 = \{x : x \neq 0, 55\}$$

⋮

$$E_k = \{x : x \neq 0, 5 \dots 5\}$$

Množina  $F$  se skládá ze všech čísel ležících v  $E_k$  pro všechna  $k$ , tedy

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Nechť  $N_{\delta}(F)$  označuje nejmenší počet intervalů délky  $\delta$ , které pokrývají  $F$ . Nechť  $\delta > 0$  a  $k \geq 1$  je celé číslo, pro které platí

$$10^{-k} < \delta \leq 10^{-k+1}.$$

Každou z množin  $E_k$  lze považovat za sjednocení  $9^k$  intervalů délky  $10^{-k}$ . Pro přehlednost to ilustrujme na množině  $E_1$ :

$$E_1 = [0; 0, 1] \cup [0, 1; 0, 2] \cup [0, 2; 0, 3] \cup [0, 3; 0, 4] \cup [0, 4; 0, 5] \cup [0, 6; 0, 7] \cup [0, 7; 0, 8] \cup [0, 8; 0, 9] \cup [0, 9; 1].$$

Proto

$$N_\delta(F) \leq 9^k,$$

pro horní odhad horní box-counting dimenze dostáváme vztah

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 9^k}{-\log 10^{-k+1}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 9}{(k-1) \log 10} = \frac{\log 9}{\log 10}.$$

Nechť nyní  $0 < \delta < 1$  a  $k \geq 1$  je celé číslo splňující

$$10^{-k-1} \leq \delta < 10^{-k}.$$

Protože každá množina průměru  $\delta$  může protínat nejvýše dva dílčí intervaly  $E_k$  délky  $10^{-k}$  a každý takový dílčí interval obsahuje body množiny  $F$ , pak nejméně  $\frac{9^k}{2}$  intervalů délky  $\delta$  je potřeba k pokrytí množiny  $F$ . Proto

$$N_\delta(F) \geq \frac{9^k}{2},$$

pro dolní odhad dolní box-counting dimenze platí

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{9^k}{2}}{-\log 10^{-k-1}} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{2} + k \log 9}{(k+1) \log 10} = \frac{\log 9}{\log 10}.$$

Protože dolní a horní odhad box-counting dimenze se rovnají, dostáváme box-counting dimenzi množiny  $F$

$$\dim_B F = \frac{\log 9}{\log 10}.$$

■

Pokud množina  $F$  leží v  $\mathbb{R}^n$ , můžeme využít následující propozice využívající  $n$ -rozměrnou Lebesgueovu míru  $\mathcal{L}^n$  k výpočtu box-counting dimenze.

**Propozice 1.2.9** ([5, Proposition 2.4, str. 33]). *Jestliže  $F$  je podmnožina  $\mathbb{R}^n$ , pak*

$$\underline{\dim}_B F = n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta},$$

kde  $F_\delta$  je  $\delta$ -okolí množiny  $F$ .

*Důkaz.* Jestliže množina  $F$  může být pokryta  $N_\delta(F)$  koulemi poloměru  $\delta$ , kde  $\delta < 1$ , pak  $F_\delta$  může být pokryto soustřednými koulemi poloměru  $2\delta$ . Proto platí

$$\mathcal{L}^n(F_\delta) \leq N_\delta(F) c_n (2\delta)^n,$$

kde  $c_n \delta^n$  je objem koule o poloměru  $\delta$  v  $\mathbb{R}^n$ . Aplikujeme-li logaritmus na obě strany nerovnosti a vydělíme-li je hodnotou  $-\log \delta$  dostaneme

$$\frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log(N_\delta(F) c_n (2\delta)^n)}{-\log \delta}$$

$$\frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_\delta(F) + \log 2^n c_n + n \log \delta}{-\log \delta}$$

takže pro  $\delta \rightarrow 0$  platí

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B F$$

$$n - \left( -\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \right) \leq \underline{\dim}_B F$$

$$n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta} \leq \underline{\dim}_B F$$

resp.

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \overline{\dim}_B F$$

$$n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta} \leq \overline{\dim}_B F$$

Pokud bychom vzali  $N_\delta$  disjunktních koulí o poloměru  $\delta$  se středy v  $F$ , pak sečtením jejich objemů a aplikací stejných operací jako dříve, máme

$$N_\delta(F) c_n \delta^n \leq \mathcal{L}^n(F_\delta)$$

$$\frac{\log N_\delta(F) + \log c_n + n \log \delta}{-\log \delta} \leq \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta}$$

pro  $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 -n + \overline{\dim}_B &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \\
 \overline{\dim}_B F &\leq n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta} \\
 -n + \underline{\dim}_B &\leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \\
 \underline{\dim}_B &\leq n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}
 \end{aligned}$$

Celkem tedy dostaneme požadovanou rovnost. □

Nyní použijeme předchozí propozici k výpočtu box-counting dimenze Cantorovy množiny.

**Tvrzení 1.2.10** ([5, Exercise 2.7, str. 42]). *Nechť  $F$  je Cantorova množina a necht'  $0 < \delta < 1$ . Potom pro 1-dimenzionální Lebesgueovu míru  $\delta$ -okolí množiny  $F$ , tj.  $F_\delta$ , platí*

$$\mathcal{L}(F_\delta) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + 2^k \delta$$

a užitím vztahu

$$\dim_B F = 1 - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta} \text{ dostaneme } \dim_B F = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

*Řešení.* Cantorovu množinu  $F$  zkonstruujeme jako v [1, str. 22]. Začneme s jednotkovým intervalem  $E_0 = [0, 1]$ , v němž odstraníme prostřední třetinu  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , zůstanou tak intervaly  $[0, \frac{1}{3}]$  a  $[\frac{2}{3}, 1]$ . Poté provedeme to samé se zbylými intervaly. Odebereme prostřední třetiny  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  a  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ , čímž zůstanou čtyři intervaly s délkou  $\frac{1}{9}$ . Tímto způsobem pokračujeme dál, v  $k$ -tém kroku získáme  $2^k$  intervalů délky  $3^{-k}$ . Cantorova množina  $F$  je definována vztahem

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k,$$

kde  $E_k$  je množina, která vznikla v  $k$ -tém kroku, kde  $k = 0, 1, \dots$ . Pokud

$$\frac{1}{2}3^{-k-1} < \delta \leq \frac{1}{2}3^{-k},$$

pak  $\delta$ -okolí množiny  $F$ , označme ho  $F_\delta$ , vyplní mezery délek  $3^{-k-1}$  nebo méně a má dvě části délky  $\delta$  v mezerách délek  $3^{-k}$  nebo více. Navíc, části  $F_\delta$  na obou koncích množiny  $F$  mají délku  $\delta$ . Sečtením všech délek přes všechny části dostaneme pro Lebesgueovu míru množiny  $F_\delta$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(F_\delta) &= \sum_{i=k}^{\infty} 2^{i-1} 3^{-i} + 2\delta \sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} + 2\delta \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + 2\delta(2^{k-1} - 1) + 2\delta \\ &= \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}{1 - \frac{2}{3}} + 2\delta(2^{k-1} - 1 + 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \delta 2^k,\end{aligned}$$

kde jsme využily součtu geometrické řady u prvního členu. Nyní zkonstruujeme odhad pro

$$\frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta}.$$

Víme, že

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} &\leq \mathcal{L}(F_\delta) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + 2^{k-1} 3^{-k+1}, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} &\leq \mathcal{L}(F_\delta) \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

Aplikujeme logaritmus a z odhadu pro hodnotu  $\delta$  získáváme

$$\begin{aligned}\frac{\log \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}{\log \left(\frac{1}{2} 3^{-k}\right)} &\geq \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta} \geq \frac{\log 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}{\log \left(\frac{1}{2} 3^{-k-1}\right)} \\ \frac{(k-1) \log \frac{2}{3}}{\log \frac{1}{2} + -k \log 3} &\geq \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta} \geq \frac{\log 2 + (k-1) \log \frac{2}{3}}{\log \frac{1}{2} + (-k-1) \log 3}\end{aligned}$$

Pro  $k$  jdoucí k nekonečnu a  $\delta$  jdoucí k nule dostaneme

$$\frac{\log \frac{2}{3}}{-\log 3} \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta} \geq \frac{\log \frac{2}{3}}{-\log 3}.$$

Z toho plyne

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta} = \frac{\log \frac{2}{3}}{-\log 3} = -\frac{\log 2}{\log 3} + 1,$$

nyní dosadíme do vztahu pro výpočet box-counting dimenze

$$\dim_B F = 1 - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta} = 1 - \left(-\frac{\log 2}{\log 3} + 1\right) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$



### 1.3. Hausdorffova míra a dimenze

V této části se zmíníme o veličinách popisujících vlastnosti fraktálů. Ze široké škály „fraktálních dimenzí“ je Hausdorffova dimenze pravděpodobně nejstarší a nejdůležitější, proto ji zde alespoň okrajově zmíníme pro množiny v  $\mathbb{R}^n$ .

Připomeňme, že  $\delta$ -pokrytí množiny  $F \subset \mathbb{R}^n$  je spočetný nebo konečný systém množin  $\{U_i\}$  s průměrem  $0 < |U_i| \leq \delta$ , které pokryjí  $F$ .

**Definice 1.3.1** (Hausdorffova  $s$ -dimenzionální míra, ([5], str.44)). Nechť  $F \subset \mathbb{R}^n$  a  $s \geq 0$ . Pro každé  $\delta > 0$  definujeme

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrytí } F \right\}$$

Podíváme se na  $\delta$ -pokrytí množiny  $F$  a snažíme se minimalizovat součet  $s$ -tých mocnin průměrů. Protože  $H_\delta^s(F)$  je nerostoucí funkcí  $\delta$  a z definice plyne  $H_\delta^s(F) \geq 0$ , pak existuje limita

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) = H^s(F),$$

kterou nazýváme *Hausdorffova  $s$ -dimenzionální míra* množiny  $F$ .

**Poznámka 1.3.2.** Ověření, že  $H^s(F)$  je skutečně mírou, nalezneme v ([5], str. 45).

Následující tvrzení je aplikací Hausdorffovy míry na množině.

**Tvrzení 1.3.3** ([5, Exercise 3.2, str.64]). *Ukažte, že Hausdorffova 0-dimenzionální míra množiny  $F$ , tj.  $H^0(F)$ , je rovna počtu prvků množiny.*

*Řešení.* Z definice Hausdorffovy míry pro  $n = 0$  platí

$$H^0(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^0(F),$$

$$H_\delta^0(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^0 : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrytí } F \right\}.$$

Proto pro průměr množin v  $\delta$ -pokrytí máme

$$|U_i|^0 = (\text{diam}(U_i))^0 = 1, \text{ kde } i = 1, \dots, \text{ počet množin pokrývající } F,$$

pak platí

$$\sum_i |U_i|^0 = \sum_i 1 = \text{počet množin pokrývající } F.$$

Tedy  $H_\delta^0(F)$  je rovna nejmenšímu počtu množin pokrývajících  $F$ .

Řešení rozdělíme na 2 části:

1. Množina  $F$  má konečně mnoho prvků, tj.  $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Nejvýše  $n$  koulí poloměru  $\frac{\delta}{2}$  se středem v  $x_i$  pokrývají  $F$ . A pro horní odhad dostáváme

$$H_\delta^0(F) \leq n.$$

Pokud  $\delta > 0$  je dostatečně malé tak, že pro každé  $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ , platí  $|x_i - x_j| > \delta$ , pak  $\delta$ -pokrytí  $F$  obsahuje alespoň  $n$  množin. Potom pro dolní odhad dostaneme

$$H_\delta^0(F) \geq n.$$

Tedy

$$H_\delta^0(F) = n$$

a pro Hausdorffovu míru

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^0(F) = H^0(F) = n.$$

2. Množina  $F$  má nekonečně mnoho prvků, pak pro každé  $k \in \mathbb{N}$  existuje  $F_k$  takové, že  $F_k$  obsahuje právě  $k$  bodů tak, že  $F_k \subset F$ . Tedy  $H^0(F) \geq H^0(F_k)$ , podle první části řešení  $H^0(F_k) = k$  a pro  $\lim_{k \rightarrow \infty} H^0(F_k) = \infty$ , tedy také  $H^0(F) = \infty$ .

■

Nechť  $F \subset \mathbb{R}^n$ , jestliže  $t > s$  a  $\{U_i\}$  je  $\delta$ -pokrytí množiny  $F$ , pak

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

Vezmeme-li infimum přes všechna  $\delta$ -pokrytí, dostaneme

$$H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$$

Nechť  $\delta \rightarrow 0$ , můžeme vidět, že pokud  $H^s(F) < \infty$ , pak  $H^t(F) = 0$  pro  $t < s$ . Tedy existuje kritická hodnota  $s$ , ve které  $H^s(F)$  „skočí“ z  $\infty$  na 0. Označme ji  $\dim_H F$ .

**Definice 1.3.4** (Hausdorffova dimenze ([5, str. 48])). Necht  $F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $s \geq 0$  a  $H^s(F)$  je Hausdorffova  $s$ -dimenzionální míra. Hausdorffova dimenze je dána vztahem

$$\dim_H F = \inf\{s : H^s(F) = 0\} = \sup\{s : H^s(F) = \infty\},$$

kde supremum prázdné množiny definujeme jako 0.

Takže

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{pro } 0 \leq s < \dim_H F \\ 0 & \text{pro } s > \dim_H F. \end{cases}$$

Jestliže  $s = \dim_H F$ , pak  $H^s(F)$  může být nula, nekonečno nebo splňuje nerovnost  $0 < H^s(F) < \infty$ , čili nabývá nejvýše tří hodnot.

Opět ukážeme použití předchozí definice na množině.

**Tvrzení 1.3.5** ([5, Exercise 3.9, str. 64]). Necht  $F$  je množina skládající se z čísel mezi 0 a 1, jejichž desetinný zápis neobsahuje číslici 5. Ukažte, že

$$\dim_H F = \frac{\log 9}{\log 10}$$

*Řešení.* Množinu  $F$  můžeme rozdělit na devět částí  $F_0 = [0, \frac{1}{10}]$ ,  $F_1 = [\frac{1}{10}, \frac{2}{10}]$ ,  $F_2 = [\frac{2}{10}, \frac{3}{10}]$ ,  $F_3 = [\frac{3}{10}, \frac{4}{10}]$ ,  $F_4 = [\frac{4}{10}, \frac{5}{10})$ ,  $F_6 = [\frac{6}{10}, \frac{7}{10}]$ ,  $F_7 = [\frac{7}{10}, \frac{8}{10}]$ ,  $F_8 = [\frac{8}{10}, \frac{9}{10}]$ ,  $F_9 = [\frac{9}{10}, 1]$ . Navíc,

$$F_i = F \cap \left[ \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right], \text{ kde } i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

Intervaly  $F_i$  jsou disjunktní s výjimkou krajních bodů, jejichž Hausdorffova  $s$ -dim. míra je nula pro  $s > 0$ . Pro množinu  $F$  platí

$$F = \bigcup_i F_i.$$

Pro každé  $i$  je množina  $F_i$  geometricky podobná  $F$ , ale zmenšená faktorem  $\frac{1}{10}$ . Tedy pro  $s > 0$ ,

$$H^s(F) = H^s(F_0) + H^s(F_1) + \dots + H^s(F_9) = 9H^s\left(\frac{1}{10}F\right) = 9\left(\frac{1}{10}\right)^s H^s(F).$$

Nyní předpokládejme, že když  $s = \dim_H F$ , pak máme  $0 < H^s(F) < \infty$ , a můžeme nalézt  $s$ .

$$\begin{aligned} 1 &= 9 \left( \frac{1}{10} \right)^s \\ 0 &= s \log \left( \frac{1}{10} \right) + \log 9 \\ -\log 9 &= -s \log 10 \\ s &= \frac{\log 9}{\log 10} \end{aligned}$$

■

V závěru kapitoly uvedeme vztah mezi box-counting a Hausdorffovou dimenzí.

**Propozice 1.3.6** (vztah box-counting a Hausdorffovy dimenze, ([5, Proposition 3.4, str. 50])).

Pro každou neprázdnou omezenou množinu  $F \subset \mathbb{R}^n$  platí

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $1 < H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$  pro nějaké  $s \geq 0$ . Potom pro všechna dostatečně malá  $\delta$ ,

$$1 < H_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s,$$

kde  $N_\delta(F)$  je nejmenší počet množin průměru nejvýše  $\delta$  pokrývajících  $F$ . Užitím logaritmu

$$\begin{aligned} 0 &\leq \log N_\delta(F) + s \log \delta \\ s &\leq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \end{aligned}$$

z toho plyne, že

$$s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

□

# Kapitola 2

## Příklad fraktálu a výpočet dimenze

V této kapitole si definujeme Cantorovu střední- $\lambda$ -množinu, která je modifikací Cantorovy množiny. Ukážeme, že pro výpočet box-counting dimenze kompaktní množiny lze užít délky komplementárních intervalů a spočítáme box-counting dimenzi Cantorovy střední- $\lambda$ -množiny.

### 2.1. Cantorova střední- $\lambda$ -množina

**Definice 2.1.1** („fraktální řetězec“, [5, Chapter 9.6, str. 158]). Nechť  $F$  je kompaktní podmnožina  $\mathbb{R}$  Lebesgueovy míry 0, pro zjednodušení uvažujme, že  $F \subset [0, 1]$  a  $\{0, 1\} \subset F$ . Potom doplněk množiny  $F$  se skládá ze spočetného počtu otevřených intervalů. Tyto intervaly se nazývají „fraktální řetězce“.

Dva krajní intervaly v doplňku  $F$  jsou neomezené, ostatní mají délky, které seřadíme v klesajícím pořadí  $l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq \dots$ . Nechť pro každé  $\delta$ ,  $M(\delta)$  označuje počet  $i$  takových, že  $l_i \geq \delta$ .  $\delta$ -okolí množiny  $F$ , tj.  $F_\delta$ , se skládá ze všech komplementárních intervalů, jejichž délka je menší než  $2\delta$ , dvou intervalů uvnitř každého komplementárního intervalu, který má délku větší než  $2\delta$  a intervalu délky  $\delta$  na každém konci množiny  $F$ . Pak Lebesgueova míra  $\delta$ -okolí množiny  $F$  je dána vztahem

$$\mathcal{L}(F_\delta) = \sum_{j:l_j < 2\delta}^{\infty} l_j + 2\delta M(\delta) + 2\delta \quad (2.1)$$

**Definice 2.1.2** (Cantorova střední- $\lambda$ -množina, [5, str. 71]). Nechť  $0 < \lambda < 1$ . Mějme interval  $[0, 1]$ , postupným odstraňováním podintervalů délky  $\lambda(\frac{1-\lambda}{2})^{k-1}$ , kde  $k = 1, 2, \dots$ , zkonstruujeme posloupnost množin  $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$  tak, že  $E_0 = [0, 1]$ ,  $E_1$  je množina, kterou získám odstraněním

střední části délky  $\lambda$  z množiny  $E_0$ , kde odstraňovaná část je symetrická podle středu intervalu, tedy  $E_1$  obsahuje  $[0, \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}]$  a  $[\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}, 1]$ . Odstraněním středních částí délky  $\lambda \frac{1-\lambda}{2}$  z těchto intervalů dostaneme  $E_2$ , proto se skládá z intervalů  $[0, \frac{(1-\lambda)^2}{4}]$ ,  $[\frac{1-\lambda^2}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}]$ ,  $[\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda^2+3}{4}]$ ,  $[\frac{3+2\lambda+\lambda^2}{4}, 1]$ . Analogickým postupem získám další členy posloupnosti, tj.  $E_k$  získám odstraněním střední části délky  $\lambda(\frac{1-\lambda}{2})^{k-1}$ , která je symetrická podle středu každého intervalu, z každého intervalu množiny  $E_{k-1}$ . *Cantorova střední- $\lambda$ -množina*  $C$  je tvořena čísly, která leží v  $E_k$  pro každé  $k$ , tj.

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Následující lemma mluví o asymptotickém chování  $\mathcal{L}(F_\delta)$ ,  $M(\delta)$  a  $l_j$ .

**Lemma 2.1.3** ([5, Lemma 9.15, str. 159]). *Nechť  $0 < s \leq 1$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i)  $l_j = \mathcal{O}(j^{-\frac{1}{s}})$  pro  $j \rightarrow \infty$
- (ii)  $M(\delta) = \mathcal{O}(\delta^{-s})$  pro  $\delta \rightarrow 0$
- (iii)  $\mathcal{L}(F_\delta) = \mathcal{O}(\delta^{1-s})$  pro  $\delta \rightarrow 0$

*Důkaz.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Neboť (i) říká, že existuje konstanta  $c$  taková, že  $l_j \leq cj^{-\frac{1}{s}}$  pro všechna  $j$ . Pokud  $\delta > 0$ , pak  $l_j < \delta$  kdykoli když  $cj^{-\frac{1}{s}}$  a  $j > c^s\delta^{-s}$ . Tedy  $M(\delta) \leq c^s\delta^{-s}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Pokud  $M(\delta) \leq c\delta^{-s}$ , pak  $M(l_j) \leq cl_j^{-s}$  pro každé  $j$ , proto  $j \leq cl_j^{-s}$  nebo  $j \leq c^{\frac{1}{s}}l_j^{-\frac{1}{s}}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Jestliže  $\mathcal{L}(F_\delta) \leq c\delta^{1-s}$  pro všechna malá  $\delta$ , pak ze vztahu 2.1 máme  $2\delta M(2\delta) \leq c\delta^{1-s}$ . Tedy  $M(\delta') \leq c2^{s-1}\delta'^{1-s}$  pro dostatečně malé  $\delta' = 2\delta$ .

(i)  $\wedge$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii): Z (i) máme  $l_j \leq cj^{-\frac{1}{s}}$  pro nějaké  $c$ . Pro malé  $\delta$  rozdělíme součet ve

vztahu 2.1 podle toho zda  $j < \delta^{-s}$  nebo  $j \geq \delta^{-s}$ . Takže

$$\begin{aligned}
\sum_{j:l_j < 2\delta}^{\infty} l_j &\leq \sum_{j < \delta^{-s}, l_j < 2\delta}^{\infty} l_j + \sum_{j \geq \delta^{-s}}^{\infty} l_j \\
&\leq \delta^{-s} 2\delta + \sum_{j \geq \delta^{-s}}^{\infty} c j^{-\frac{1}{s}} \\
&\leq 2\delta^{1-s} + c \int_{\delta^{-s}}^{\infty} t^{-\frac{1}{s}} dt \\
&\leq 2\delta^{1-s} + c_1 \delta^{1-s},
\end{aligned}$$

kde  $c_1$  nezávisí na  $\delta$ . Společně z (ii) a 2.1 dostaneme

$$\mathcal{L}(F_\delta) \leq 2\delta^{1-s} + c_1 \delta^{1-s} + c_2 \delta^{-s} + 2\delta \leq c\delta^{1-s}, \text{ pro dostatečně malé } \delta.$$

□

Nyní můžeme získat box-counting dimenzi kompaktní množiny v  $\mathbb{R}$  pouze pomocí délek komplementárních intervalů.

**Propozice 2.1.4** ([5, Proposition 9.16, str. 160]). *Nechť  $F \subset \mathbb{R}$  je kompaktní množina, pak*

$$\overline{\dim}_B(F) \leq \frac{-1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log j}} \quad (2.2)$$

$$\underline{\dim}_B(F) \geq \frac{-1}{\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log j}} \quad (2.3)$$

Navíc,

$$\dim_B(F) = \frac{-1}{\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log j}}, \quad (2.4)$$

pokud limita existuje.

*Důkaz.* Vztah 2.2 plyne přímo z 1.2.9 a ekvivalentních tvrzení v 2.1.3 (i) a (iii). Neboť

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_B F &= 1 - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta} \\
&\leq 1 - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(c_1 \delta^{1-s})}{\log \delta} \\
&= 1 - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log c_1 + (1-s) \log \delta}{\log \delta} = s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log j} &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log c_2 j^{-\frac{1}{s}}}{\log j} \\ &= \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log c_2 + -\frac{1}{s} \log j}{\log j} = -\frac{1}{s}\end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\overline{\dim}_B F \leq \frac{-1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log j}}$$

Pro druhý výraz platí, jestliže

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log j} > -\frac{1}{s} \text{ pak } l_j \geq c j^{-\frac{1}{s}} \text{ pro všechna } j, \text{ pro libovolné } c > 0$$

Potom z rovnosti 2.1 a aproximace integrálu za sumu máme

$$\mathcal{L}(F_\delta) \geq \sum_{j: l_j < 2\delta} l_j \geq \sum_{j \geq c^s (2\delta)^{-s}} c j^{-\frac{1}{s}} \geq c \int_{c^s (2\delta)^{-s}}^{\infty} t^{-\frac{1}{s}} \geq c_1 \delta^{1-s}$$

Z 1.2.9 platí

$$\underline{\dim}_B F = 1 - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta} \geq 1 - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(c_1 \delta^{1-s})}{\log \delta} = s.$$

Dohromady dostaneme vztah

$$\underline{\dim}_B F \geq -\frac{1}{\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log j}}$$

□

**Příklad 2.1.5** ([5, Exercise 2.14, str. 43]). Necht'  $0 < \lambda < 1$  a necht'  $C$  je Cantorova střední- $\lambda$ -množina získaná opakovaným odstraňováním prostřední  $\lambda$ -části z daných intervalů. Spočtete box-counting dimenzi  $C$  pomocí vztahu 2.4.

*Řešení.* Cantorova střední- $\lambda$ -množina  $C$  je podmnožina intervalu  $[0, 1]$ , z konstrukce víme, že obsahuje uzavřené intervaly, proto  $C$  je omezená a uzavřená a tedy i kompaktní. Nyní máme splněny předpoklady 2.1.4 a můžeme použít požadovaný vztah.



V každém kroku odstraňujeme  $2^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  otevřených intervalů délky  $\lambda \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{k-1}$ . Necht'  $l_j$  označuje délku komplementárního intervalu, tj.

$$l_j = \lambda \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{k-1}, \text{ kde } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$2^{k-1} \leq j \leq 2^k - 1$$

Zkonstruujeme odhad pro výraz  $\frac{\log l_j}{\log j}$  a provedeme limitu pro  $k \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$ .

$$\frac{\log \lambda \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{k-1}}{\log(2^k - 1)} \leq \frac{\log l_j}{\log j} \leq \frac{\log \lambda \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{k-1}}{\log 2^{k-1}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda + (k-1) \log \frac{1-\lambda}{2}}{k \log 2 + \log(1 - \frac{1}{2^k})} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log j} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda + (k-1) \log \frac{1-\lambda}{2}}{(k-1) \log 2}$$

$$\frac{\log(\frac{1-\lambda}{2})}{2} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log j} \leq \frac{\log(\frac{1-\lambda}{2})}{2},$$

protože odhady shora a zdola jsou stejné, dostáváme rovnost

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log j} = \frac{\log(\frac{1-\lambda}{2})}{2}.$$

Ze vztahu 2.4 máme box-counting dimenzi

$$\dim_B C = \frac{-1}{\frac{\log(\frac{1-\lambda}{2})}{\log 2}} = -\frac{\log 2}{\log(\frac{1-\lambda}{2})} = \frac{\log 2}{\log(\frac{2}{1-\lambda})}$$

■

# Kapitola 3

## System iterovaných funkcí

### 3.1. Banachova věta o pevném bodě

K fraktálům, které mají vlastnost soběpodobnosti, můžeme přistupovat jako k pevným bodům kontraktivních zobrazení na vhodných prostorech. V této části k zavedení základních pojmů byla využita literatura [7] a [2].

**Definice 3.1.1** (Kontraktivní zobrazení, [2, Definition 6.1, Chapter III.6, str. 74]). Transformace  $f : X \rightarrow X$  na metrickém prostoru  $(X, \rho)$  se nazývá *kontraktivní zobrazení*, jestliže existuje konstanta  $0 \leq s < 1$  taková, že

$$\forall x, y \in X : \rho(f(x), f(y)) \leq s\rho(x, y).$$

Každou takovou konstantu  $s$  nazýváme *kontraktivní faktor* zobrazení  $f$ .

**Definice 3.1.2** (Pevný bod). Nechť  $(X, \rho)$  je metrický prostor a  $g : X \rightarrow X$  zobrazení. Bod  $x^*$  nazveme *pevným bodem* zobrazení  $g$ , jestliže  $g(x^*) = x^*$ .

**Věta 3.1.3** (Banachova věta o pevném bodě). *Nechť  $(X, \rho)$  je úplný metrický prostor a  $T : X \rightarrow X$  kontraktivní zobrazení. Pak existuje právě jeden pevný bod  $x_T \in X$  zobrazení  $T$ . Navíc, pro libovolný bod  $x \in X$  posloupnost  $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k  $x_T$ , tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x_T$  pro každé  $x \in X$ .*

*Důkaz.* Nechť  $0 \leq s < 1$  je kontraktivní faktor zobrazení  $T$ .

Důkaz existence: Nechť  $x_1 \in X$ . Definujme posloupnost  $\{x_n\} \subset X$  rekurentním předpisem  $x_{n+1} = T(x_n)$ . Pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq s\rho(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq s^{n-1}\rho(x_2, x_1).$$

Nechť  $m > n \in \mathbb{N}$ , pomocí trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}
\rho(x_m, x_n) &\leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \\
&= \rho(T(x_{m-1}), T(x_{m-2})) + \rho(T(x_{m-2}), T(x_{m-3})) + \dots + \rho(T(x_n), T(x_{n-1})) \\
&\leq s^{m-2}\rho(x_2, x_1) + s^{m-3}\rho(x_2, x_1) + \dots + s^{n-1}\rho(x_2, x_1) \\
&= (s^{m-2} + s^{m-3} + \dots + s^{n-1})\rho(x_2, x_1) \\
&\leq s^{n-1}(1 + s + \dots)\rho(x_2, x_1) = \frac{s^{n-1}}{1-s}\rho(x_2, x_1)
\end{aligned}$$

Provedením  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \rho(x_m, x_n) = 0$  jsme ukázali, že posloupnost  $\{x_n\}$  je cauchyovská. Protože metrický prostor  $(X, \rho)$  je úplný, je  $\{x_n\}$  konvergentní, tedy  $x_n \rightarrow x_T$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

Důkaz jednoznačnosti: Předpokládejme, že existují  $x_T, y_T \in X : x_T \neq y_T$  takové, že  $T(x_T) = x_T, T(y_T) = y_T$ . Pak

$$\rho(x_T, y_T) = \rho(T(x_T), T(y_T)) \leq s\rho(x_T, y_T),$$

z toho plyne  $\rho(x_T, y_T) = 0$  a proto  $x_T = y_T$ . □

## 3.2. Kontraktivní zobrazení na Hausdorffově metrickém prostoru

Hlavním tvrzením této podkapitoly je lemma 3.2.3, k jeho důkazu budeme potřebovat dvě pomocná lemmata, která zde uvádíme bez důkazů.

**Lemma 3.2.1** ([2, Lemmma 7.3, Chapter III.7, str. 79]). *Nechť  $w : X \rightarrow X$  je kontraktivní zobrazení na metrickém prostoru  $(X, \rho)$  s kontraktivním faktorem  $s$ . Pak  $w : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$  definované vztahem*

$$w(B) = \{w(x) : x \in B\}, \forall B \in \mathcal{S}(X),$$

*je kontraktivní zobrazení na  $(\mathcal{S}(X), h)$  s kontraktivním faktorem  $s$ .*

**Lemma 3.2.2** ([2, Lemma 7.4, Chapter III.7, str. 80]). *Pro všechna  $B, C, D, E \in \mathcal{S}(X)$*

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq \max\{h(B, D), h(C, E)\}$$

**Lemma 3.2.3** ([2, Lemma 7.5, Chapter III.7, str. 80]). *Nechť  $(X, \rho)$  je metrický prostor. Nechť  $\{w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  jsou kontraktivní zobrazení na  $(\mathcal{S}(X), h)$ . Kontraktivní faktor zobrazení  $w_n$  označme  $s_n$  pro každé  $n$ . Definujme zobrazení  $W : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$*

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_n(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B), \text{ kde } B \in \mathcal{S}(X).$$

*Potom  $W$  je kontraktivní zobrazení s kontraktivním faktorem  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .*

*Důkaz.* Důkaz provedeme matematickou indukcí, nejprve pro  $N = 2$ . Nechť  $B, C \in \mathcal{S}(X)$ ,

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq \max\{h(w_1(B), w_1(C)), h(w_2(B), w_2(C))\} \\ &\leq \max\{s_1 h(B, C), s_2 h(B, C)\} \leq s h(B, C). \end{aligned}$$

Předpokládejme, že tvrzení platí pro  $N = k$  a ukážeme, že platí pro  $N = k + 1$ .

$$\begin{aligned} h\left(\bigcup_{n=1}^{k+1} w_n(B), \bigcup_{n=1}^{k+1} w_n(C)\right) &= h\left(\bigcup_{n=1}^k w_n(B) \cup w_{k+1}(B), \bigcup_{n=1}^k w_n(C) \cup w_{k+1}(C)\right) \\ &\leq \max\left\{h\left(\bigcup_{n=1}^k w_n(B), \bigcup_{n=1}^k w_n(C)\right), h(w_{k+1}(B), w_{k+1}(C))\right\} \\ &\leq \max\{\max\{s_i : i = 1, 2, \dots, k\} h(B, C), s_{k+1} h(B, C)\} \\ &\leq s h(B, C). \end{aligned}$$

□

### 3.3. Konstrukce fraktálů

Nyní zavedeme systém iterovaných funkcí, který později budeme používat ke konstrukci fraktálních objektů.

**Definice 3.3.1** (Systém iterovaných funkcí, [2, Definition 7.1, Chapter III.7, str. 80]). Úplný metrický prostor  $(X, \rho)$  společně s konečnou množinou kontraktivních zobrazení  $w_n : X \rightarrow X$  s příslušnými kontraktivními faktory  $s_n$ , pro  $n = 1, 2, \dots, N$ , nazýváme *Systém iterovaných funkcí* (IFS) s kontraktivním faktorem  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ , značíme ho  $\{X; w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .

**Poznámka 3.3.2.** Pokud chceme zdůraznit, že zobrazení  $w_n$  v IFS jsou kontraktivní, IFS nazveme kontraktivní, resp. hyperbolický.

**Věta 3.3.3** ([2, Theorem 7.1, Chapter III.7, str. 81]). *Nechť  $\{X; w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  je kontraktivní IFS s kontraktivním faktorem  $s$ . Pak transformace  $W : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$  definovaná pro všechna  $B \in \mathcal{S}(X)$*

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

*je kontraktivní zobrazení na úplném metrickém prostoru  $(\mathcal{S}(X), h)$  s kontraktivním faktorem  $s$ . Takže pro každé  $B, C \in \mathcal{S}(X)$  platí*

$$h(W(B), W(C)) \leq sh(B, C).$$

*Navíc, existuje právě jeden pevný bod  $A \in \mathcal{S}(X)$*

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

*a je dán vztahem*

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$$

*pro každou množinu  $B \in \mathcal{S}(X)$ .*

**Definice 3.3.4** (Atraktor IFS). Pevný bod  $A \in \mathcal{S}(X)$  popsaný v 3.3.3 nazýváme *atraktor* IFS.

# Kapitola 4

## Aplikace fraktálů

Fraktály vyskytující se v přírodě nemají pravidelné tvary a popis pomocí klasické geometrie by byl složitý. Fraktální interpolace nám pomůže proložit naměřené hodnoty jistou nepravidel-  
ností a umožní nám dané hodnoty popsat.

### 4.1. Fraktální interpolační funkce

**Definice 4.1.1** (Interpolační funkce, [2, Chapter VI.2, str. 208]). Mějme danu množinu dat, která je množinou bodů ve tvaru

$$\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, 1, \dots, N\},$$

kde  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ . *Interpolační funkce* odpovídající této množině dat je spojitá funkce  $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že  $f(x_i) = F_i$  pro všechna  $i = 0, \dots, N$ . Body  $(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2$  nazveme *interpolační body*.

**Příklad 4.1.2** ([2, Example 2.1, Chapter VI.2, str. 209]). Funkce  $f(x) = 1 + x$  je interpolační funkcí pro data  $\{(0, 1), (1, 2)\}$ . Uvažujme hyperbolický IFS  $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2\}$ , kde

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

označme  $G$  atraktor IFS, tj.  $G = w_1(G) \cup w_2(G)$ . Lze ověřit, že  $G$  je úsečka, která spojuje dané

dva body, neboť

$$w_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

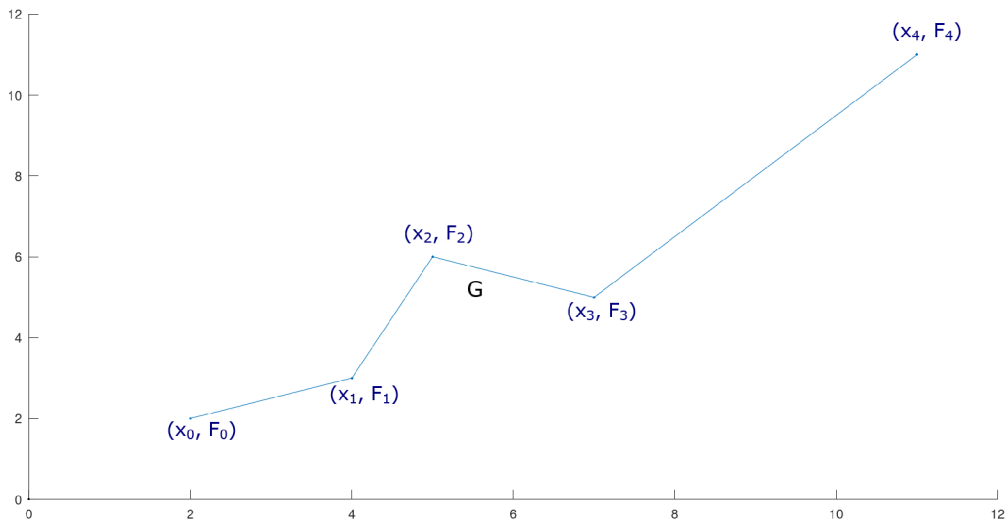
$$w_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

a proto  $G$  je graf interpolační funkce  $f$  na intervalu  $[0, 1]$ .

Mějme dānu množinu dat  $\{(x_i, F_i) : i = 0, \dots, N\}$  a předpokládejme, že existuje právě jedna spojitā funkce  $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$  prochāzející přes interpolační body, která je lineární na každém podintervalu  $[x_{i-1}, x_i]$ . Funkce  $f$  je dāna předpisem

$$f(x) = F_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}(F_i - F_{i-1}) \quad (4.1)$$

pro  $x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, N$ . Funkci  $f$  nazveme *po částech lineární interpolační funkcí*. Příklad po částech lineární interpolační funkce  $f$  je reprezentován na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Graf po částech lineární interpolační funkce pro  $N = 4$

Graf po částech lineární interpolační funkce 4.1,  $G$ , je zároveň atraktorem IFS  $\{\mathbb{R}^2 : w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ , kde  $w_n$  jsou afinní zobrazení a splňují

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0}, \\
c_n &= \frac{F_n - F_{n-1}}{x_N - x_0}, \\
e_n &= \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_N}{x_N - x_0}, \\
f_n &= \frac{x_N F_{n-1} - x_0 F_n}{x_N - x_0}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

**Příklad 4.1.3** ([2, Example 2.4, Chapter VI.2, str. 210]). Parabola definovaná vztahem  $f(x) = 2x - x^2$  je interpolační funkcí množiny dat  $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0)\}$ . Nechť  $G$  označuje graf funkce  $f(x)$ , tj.  $G = \{(x, 2x - x^2) : x \in [0, 2]\}$ . Tvrdíme, že  $G$  je atraktor IFS,  $\{\mathbb{R}^2 : w_1, w_2\}$ , kde

$$\begin{aligned}
w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ověříme, že pro všechna  $x \in [0, 2]$  platí

$$\begin{aligned}
w_1 \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(2x - x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ x - \frac{1}{4}x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ f(\frac{1}{2}x) \end{pmatrix} \\
w_2 \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}x \\ 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}x \\ 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(2x - x^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}x \\ 1 - \frac{1}{4}x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}x \\ f(1 + \frac{1}{2}x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pravá strana první rovnice dává část grafu  $f(x)$  přes interval  $[0, 1]$  zatímco pravá strana druhé rovnice dává část grafu  $f(x)$  přes interval  $[1, 2]$ . Proto  $G = w_1(G) \cup w_2(G)$  a  $G$  je atraktorem IFS.

Nyní si ukážeme, jak můžeme zkonstruovat IFS v  $\mathbb{R}^2$  tak, aby jeho atraktor, který budeme značit  $G$ , byl graf spojitě funkce  $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ , která interpoluje data. IFS je tvaru  $\{\mathbb{R}^2 : w_n, n = 1, \dots, N\}$ , kde zobrazení  $w_n$  jsou afinní transformace ve speciálním tvaru

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$



Transformace jsou pro všechna  $n = 1, 2, \dots, N$  omezené podmínkou

$$\begin{aligned} w_n \begin{pmatrix} x_0 \\ F_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \\ w_n \begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nechť  $n \in \{1, \dots, N\}$ , transformace  $w_n$  jsou stanoveny reálnými čísly:  $a_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ , které musí splňovat následující lineární rovnice:

$$\begin{aligned} a_n x_0 + e_n &= x_{n-1} \\ a_n x_N + e_n &= x_n \\ c_n x_0 + d_n F_0 + f_n &= F_{n-1} \\ c_n x_N + d_n F_N + f_n &= F_n \end{aligned} \tag{4.4}$$

Protože rovnice jsou pouze čtyři, zvolíme hodnoty  $d_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , jako parametry a jejich vektor nazveme *vertikální škálovací faktor*. Pokud  $d_n = 0$  pro všechna  $n = 1, \dots, N$ , funkce  $f(x)$  je právě po částech lineární interpolační funkce. Je-li  $d_n$  reálné číslo, řešení rovnic 4.4 je následující

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0}, \\ e_n &= \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0}, \\ c_n &= \frac{F_n - F_{n-1}}{x_N - x_0} - \frac{d_n(F_N - F_0)}{x_n - x_0}, \\ f_n &= \frac{x_N F_{n-1} - x_0 F_n}{x_n - x_0} - \frac{d_n(x_n F_0 - x_0 F_N)}{x_N - x_0}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Následující věty uvedou teoretický základ pro experimentální pozorování a popisují vlastnosti IFS popsaného výše.

**Věta 4.1.4** ([2, Theorem 2.1, Chapter VI.2, str. 215]). *Nechť  $N$  je kladné celé číslo větší než 1. Nechť  $\{\mathbb{R}^2 : w_n, \text{ kde } n = 1, 2, \dots, N\}$  označuje IFS splňující vlastnosti 4.3, odpovídající množině dat*

$$\{(x_n, F_n) : n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Nechť pro vertikální škálovací faktor  $d_n$  platí  $0 \leq d_n < 1$  pro  $n = 1, 2, \dots, N$ . Pak existuje metrika  $\rho$  na  $\mathbb{R}^2$ , která je ekvivalentní s Euklidovou metrikou  $d$  taková, že IFS je kontraktivní vzhledem k  $\rho$ . Navíc, existuje právě jedna neprázdná kompaktní množina  $G \subset \mathbb{R}^2$  taková, že

$$G = \bigcup_{n=1}^N w_n(G)$$

*Důkaz.* Definujme metriku  $\rho$  na  $\mathbb{R}^2$  vztahem

$$\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + \Theta|x_2 - y_2|,$$

kde  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$  a  $\Theta$  je kladné reálné číslo. Metrika  $\rho$  je ekvivalentní s Eukleidovou metrikou  $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$  na  $\mathbb{R}^2$ . Tj. existuje  $c_1, c_2 > 0$  takové, že

$$c_1\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq c_2\rho(x, y)$$

Nejprve ukážeme první nerovnost

$$c_1\rho(x, y) \leq d(x, y)$$

$$\text{pro } j = 1, 2 \text{ platí } |x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

potom dostaneme

$$|x_1 - y_1| + \Theta|x_2 - y_2| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \Theta\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$|x_1 - y_1| + \Theta|x_2 - y_2| \leq (1 + \Theta)\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Z toho plyne, že  $c_1$  můžeme volit například  $c_1 = \frac{1}{1+\Theta}$ .

Pro druhou nerovnost chceme ukázat, že platí

$$d(x, y) \leq c_2\rho(x, y)$$

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq c_2(|x_1 - y_1| + \Theta|x_2 - y_2|),$$

což je ekvivalentní nerovnosti

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \leq c_2^2(|x_1 - y_1|^2 + 2\Theta|x_1 - y_1||x_2 - y_2| + \Theta^2|x_2 - y_2|^2)$$

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \leq c_2^2(x_1 - y_1)^2 + c_2^2 2\Theta|x_1 - y_1||x_2 - y_2| + c_2^2\Theta^2(x_2 - y_2)^2.$$

Protože prostřední člen je větší než 0, stačí hledat  $c_2$  splňující nerovnosti

$$\begin{aligned}(x_1 - y_1)^2 &\leq c_2^2(x_1 - y_1)^2 \\ (x_2 - y_2)^2 &\leq c_2^2\Theta^2(x_2 - y_2)^2,\end{aligned}$$

proto  $c_2$  budeme volit  $c_2 = \max\{1, \frac{1}{\Theta}\}$ .

Nechť  $n \in 1, 2, \dots, N$  a  $a_n, c_n, e_n, f_n$  jsou čísla splňující 4.5. Potom dostaneme

$$\begin{aligned}\rho(w_n(x), w_n(y)) &= \rho(w_n(x_1, x_2), w_n(y_1, y_2)) \\ &= \rho((a_n x_1 + e_n, c_n x_1 + d_n x_2 + f_n), (a_n y_1 + e_n, c_n y_1 + d_n y_2 + f_n)) \\ &= |a_n x_1 + e_n - a_n y_1 - e_n| + \Theta |c_n x_1 + d_n x_2 + f_n - c_n y_1 - d_n y_2 - f_n| \\ &= |a_n| |x_1 - y_1| + \Theta |c_n(x_1 - y_1) + d_n(x_2 - y_2)| \\ &\leq |a_n| |x_1 - y_1| + \Theta |c_n| |x_1 - y_1| + \Theta |d_n| |x_2 - y_2| \\ &= (|a_n| + \Theta |c_n|) |x_1 - y_1| + \Theta |d_n| |x_2 - y_2|.\end{aligned}$$

Protože  $N \geq 2$ , je  $|x_N - x_0| > |x_n - x_{n-1}|$  pro každé  $n = 1, 2, \dots, N$ , pak  $|a_n| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_N - x_0|} < 1$ .

Pokud  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ , pak

$$\rho(w_n(x), w_n(y)) \leq |a_n| |x_1 - y_1| + |d_n| |x_2 - y_2| \leq \max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{|a_n|, |d_n|\} \rho(x, y)$$

a  $\Theta$  volíme rovno 1. Jinak položíme  $\Theta = \frac{\min_{n \in \{1, \dots, N\}} \{1 - |a_n|\}}{\max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{2|c_n|\}}$ , odtud pak plyne

$$\begin{aligned}\rho(w_n(x), w_n(y)) &\leq \left( |a_n| + \frac{\min_{n \in \{1, \dots, N\}} \{1 - |a_n|\}}{\max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{2|c_n|\}} |c_n| \right) |x_1 - y_1| + \frac{\min_{n \in \{1, \dots, N\}} \{1 - |a_n|\}}{\max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{2|c_n|\}} |d_n| |x_2 - y_2| \\ &\leq \left( |a_n| + \frac{\min_{n \in \{1, \dots, N\}} \{1 - |a_n|\}}{\max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{2|c_n|\}} \max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{|c_n|\} \right) |x_1 - y_1| + \Theta \max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{|d_n|\} |x_2 - y_2| \\ &\leq \left( |a_n| + \frac{\min_{n \in \{1, \dots, N\}} \{1 - |a_n|\}}{2} \right) |x_1 - y_1| + \Theta \max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{|d_n|\} |x_2 - y_2| \\ &\leq a |x_1 - y_1| + \Theta \delta |x_2 - y_2| \leq \max\{a, \delta\} \rho(x, y),\end{aligned}$$

kde  $a = \left( \frac{1 + \max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{|a_n|\}}{2} \right) < 1$ ,  $\delta = \max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{|d_n|\} < 1$ , neboť platí

$$\begin{aligned}|a_n| + \frac{\min_{n \in \{1, \dots, N\}} \{1 - |a_n|\}}{2} &< 1 - \frac{\max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{|a_n| - 1\}}{2} \leq 1 + \frac{\max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{|a_n|\}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 + \max_{n \in \{1, \dots, N\}} \{|a_n|\}}{2},\end{aligned}$$

Existence množiny  $G$  plyne přímo z věty 3.3.3. □

**Věta 4.1.5** ([2, Theorem 2.2, Chapter VI.2, str. 216]). *Nechť  $N$  je celé kladné číslo větší 1. Nechť  $\{(x_n, F_n) : n = 1, 2, \dots, N\}$  je IFS odpovídající množině dat*

$$\{(x_n, F_n) : n = 1, 2, \dots, N\}.$$

*Nechť vertikální škálovací faktor  $d_n$  splňuje  $0 \leq d_n < 1$  pro  $n = 1, 2, \dots, N$  tak, že IFS je kontraktivní. Nechť  $G$  označuje atraktor IFS. Pak  $G$  je graf spojitě funkce  $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ , která interpoluje data  $\{(x_i, F_i) : i = 0, 1, \dots, N\}$ . Tedy*

$$G = \{(x, f(x)) : x \in [x_0, x_N]\},$$

kde

$$f(x_i) = F_i$$

pro  $i = 0, 1, \dots, N$ .

*Důkaz.* Množinu spojitých funkcí  $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$  splňujících  $f(x_0) = F_0$  a  $f(x_N) = F_N$  označme  $\mathcal{F}$ . Definujme metriku  $\rho$  na  $\mathcal{F}$  vztahem

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [x_0, x_N]} |f(x) - g(x)|$$

pro všechna  $f, g \in \mathcal{F}$ . Díky tomu, že  $\mathcal{F}$  je uzavřená podmnožina metrického prostoru  $(C[x_0, x_N], \rho)$ , který je úplný, je úplný i metrický prostor  $(\mathcal{F}, \rho)$ . Nechť  $a_n, c_n, e_n, f_n$  jsou reálná čísla definovaná vztahy 4.5. Nyní definujme zobrazení  $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  tak, že

$$(Tf)(x) = c_n l_n^{-1}(x) + d_n f(l_n^{-1}(x)) + f_n$$

pro  $x \in [x_{n-1}, x_n], n = \{1, \dots, N\}$ , kde  $l_n : [x_0, x_N] \rightarrow [x_{n-1}, x_n]$  je invertibilní zobrazení splňující

$$l_n(x) = a_n x + e_n$$

Ověříme, že zobrazení  $T$  je kontraktivní a zobrazuje do sebe. Jako první ukážeme, že zobrazuje do sebe. Nechť  $f \in \mathcal{F}$ , pak funkce  $(Tf)(x)$  splňuje okrajové podmínky, neboť

$$\begin{aligned} (Tf)(x_0) &= c_1 l_1^{-1}(x_0) + d_1 f(l_1^{-1}(x_0)) + f_1 \\ &= c_1 x_0 + d_1 f(x_0) + f_1 \\ &= c_1 x_0 + d_1 F_0 + f_1 \\ &= F_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Tf)(x_N) &= c_N l_N^{-1}(x_N) + d_N f(l_N^{-1}(x_N)) + f_N \\
&= c_N l_N^{-1}(x_N) + d_N f(x_N) + f_N \\
&= c_N x_N + d_N f(x_N) + f_N \\
&= F_N
\end{aligned}$$

Víme, že  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $[x_{n-1}, x_n]$  pro  $n = 1, \dots, N$ ,  $l_n(x)$  je lineární a tedy i spojitá na každém intervalu  $[x_{n-1}, x_n]$  pro  $n = 1, \dots, N$ . Pak z předpisu pro  $Tf$  plyne, že je spojitá na každém intervalu  $[x_{n-1}, x_n]$  pro  $n = 1, \dots, N$ . Nyní zbývá ukázat, že  $(Tf)(x)$  je spojitá v každém bodě  $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ . V každém z těchto bodů je hodnota  $(Tf)(x)$  definována dvěma různými způsoby, pokud budou dávat stejnou hodnotu, dokázali jsme, že  $T$  zobrazuje do sebe. Pro  $n \in \{1, 2, \dots, N-1\}$  platí

$$\begin{aligned}
(Tf)(x_n) &= c_{n+1} l_{n+1}^{-1}(x_n) + d_{n+1} f(l_{n+1}^{-1}(x_n)) + f_{n+1} \\
&= c_{n+1} x_0 + d_{n+1} f(x_0) + f_{n+1} \\
&= F_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Tf)(x_n) &= c_n l_n^{-1}(x_n) + d_n f(l_n^{-1}(x_n)) + f_n \\
&= c_n x_N + d_n f(x_N) + f_n \\
&= F_n
\end{aligned}$$

Ukážeme, že  $T$  je kontraktivní zobrazení na metrickém prostoru  $(\mathcal{F}, \rho)$ .

Nechť  $f, g \in \mathcal{F}$ ,  $n \in 1, \dots, N$  a  $x \in [x_{n-1}, x_n]$ . Pak

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x) - (Tg)(x)| &= |c_n l_n^{-1}(x) + d_n f(l_n^{-1}(x)) + f_n - c_n l_n^{-1}(x) + d_n g(l_n^{-1}(x)) + f_n| \\
&= |d_n| |f(l_n^{-1}(x)) - g(l_n^{-1}(x))| \\
&\leq |d_n| \max_{l_n^{-1}(x) \in [x_0, x_N]} |f(l_n^{-1}(x)) - g(l_n^{-1}(x))| \\
&= |d_n| \rho(f, g).
\end{aligned}$$

Z toho plyne, že

$$\rho(Tf, Tg) \leq \delta \rho(f, g), \text{ kde } \delta = \max_{n \in \{1, \dots, N\}} |d_n| < 1$$

Podle Banachovy věty o pevném bodě, existuje právě jeden pevný bod zobrazení  $T$  ležící v  $\mathcal{F}$ . Tj. existuje funkce  $f \in \mathcal{F}$  taková, že

$$(Tf)(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in [x_0, x_N].$$

Nechť  $\tilde{G}$  označuje graf funkce  $f$ . Potom definici zobrazení  $T$  lze přepsat do tvaru

$$(Tf)(a_n x + e_n) = c_n x + d_n f(x) + f_n \text{ pro } x \in [x_0, x_N],$$

který implikuje, že

$$\tilde{G} = \bigcup_{n=1}^N w_n(\tilde{G}).$$

Protože  $\tilde{G}$  je neprázdna kompaktní podmnožina  $\mathbb{R}^2$ , podle předchozí věty existuje pouze jedna taková množina (atraktor IFS) určená 4.5. Tedy  $\tilde{G} = G$ .  $\square$

**Definice 4.1.6** ([2, Definition 2.2, Chapter VI.2, str. 218]). Funkce  $f(x)$  jejíž graf je atraktor IFS, který je popsán v předchozích dvou větách, nazýváme *fraktální interpolační funkce* odpovídající množině dat  $\{(x_i, F_i) : i = 1, \dots, N\}$ .

**Příklad 4.1.7** ([2, Example 2.16, Chapter VI, str. 219]). Nechť  $f$  označuje fraktální interpolační funkci množiny dat  $\{(x_i, F_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ , kde  $N > 1$ . Mějme metrický prostor  $(\mathcal{F}, \rho)$  a transformaci  $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , které jsou definované v důkazu věty 4.1.5. Výraz  $Tf = f$  můžeme použít k určení některých integrálů. Mějme integrál

$$I = \int_{x_0}^{x_N} f(x) dx,$$

protože funkce  $f$  je spojitá a integrál je dobře definovaný dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x_N} (Tf)(x) dx = \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} (Tf)(x) dx = \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} (c_n x + d_n f(x)) d(a_n x + e_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{x_0}^{x_N} (c_n x + d_n f(x)) d(a_n x + e_n) = \alpha I + \beta, \end{aligned}$$

kde

$$\alpha = \sum_{n=1}^N a_n d_n$$

$$\beta = \sum_{n=1}^N a_n \int_{x_0}^{x_N} (c_n x + f_n) dx.$$

Za předpokladu, že  $|\alpha| < 1$ , integrál je dán vztahem

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x) dx = \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

#### 4.1.1. Dimenze fraktální interpolační funkce

Následující věta je ekvivalentním vyjádřením box-counting dimenze 1.1. Lépe nám poslouží v případě výpočtu dimenze křivky zadané pomocí množiny dat.

**Věta 4.1.8** ([2, Theorem 3.1, Chapter VI.3, str. 223]). *Nechť  $N$  je kladné celé číslo větší než jedna,  $\{(x_n, F_n) \in \mathbb{R}^2 : n = 1, \dots, N\}$  je množina dat a nechť  $\{\mathbb{R}^2 : w_n, n = 1, \dots, N\}$  je IFS odpovídající množině dat, kde*

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}.$$

*Nechť vertikální škálovací faktor  $d_n$  splňuje  $0 \leq d_n < 1$  a konstanty  $a_n, c_n, e_n, f_n$  jsou dány rovnostmi 4.4 pro  $n = 1, \dots, N$ . Nechť  $G$  označuje atraktor IFS takový, že  $G$  je graf fraktální interpolační funkce. Jestliže*

$$\sum_{n=1}^N |d_n| > 1$$

*a interpolační body všechny neleží na jedné přímce, pak box-counting dimenze  $G$  je právě jedno reálné řešení  $D$  rovnice*

$$\sum_{n=1}^N |d_n| a_n^{D-1} = 1. \quad (4.6)$$

*V opačném případě je box-counting dimenze  $G$  rovna 1.*

### 4.1.2. EEG data

Fraktální interpolační funkci můžeme použít k aproximaci experimentálních dat, neboť graf fraktální interpolační funkce je velmi blízký grafu experimentálních hodnot v Hausdorffově metrice. Navíc mají stejnou box-counting dimenzi  $D$ .

V této podkapitole budeme ilustrovat využití fraktální interpolace na reálných datech. Data, která jsme k tomuto účelu použili jsou hodnoty naměřené u skupiny indických účastníků, kterým byly na povrch lebky rovnoměrně umístěny elektrody za účelem získání elektrické aktivity mozku pomocí elektroencefalografie (EEG). Následně jim bylo puštěno několik nesouvislých písní různých žánrů (od indické klasiky po gotický rock), označené A01 až A012. Nyní se budeme zabývat hypotézou, zda žánr hudby může nějak ovlivnit box-counting dimenzi.

Pro zkoumání této hypotézy byla vybrána jedna osoba a 5 různých skladeb. Pro získání grafu interpolační funkce, jsme zvolili elektrodu  $E15$ , která byla umístěna na temeni hlavy, v místě kde se v mozku nachází asociativní vnímání. Poté jsme pomocí kódu v softwaru Octave určili jednotlivé fraktální interpolační funkce (atraktory IFS), kde vertikální škálovací faktory byly voleny náhodně pomocí funkce `rand()`, která nám generuje náhodná čísla rovnoměrně rozdělená z intervalu  $(0, 1)$ . Kód byl inspirován Programem 1 z [2]. Pak ze vzorce 4.6 byla spočítána pro každou skladbu box-counting dimenze  $D$  metodou bisekce, která je více popsána například v [3]. Nutno zmínit, že byl proveden pouze dílčí výpočet, neboť pro korektní postup by musel být výpočet proveden pro „velké množství“ takto náhodně zvolených škálovacích faktorů. Kódy a zdrojová data jsou k dispozici na přiloženém USB disku.

V tabulkách na další straně je uvedeno označení skladby, její název, autor skladby, žánr a určená box-counting dimenze. Jak si můžeme všimnout, hodnoty box-counting dimenze se liší jen velmi málo, poměr mezi největší a nejmenší hodnotou je přibližně 0,01, a proto se můžeme domnívat, že box-counting dimenze nemusí souviset se žánrem skladby. Nicméně si myslím, že pro přesnější analýzu by bylo potřeba více dat a informací ke zkoumání.



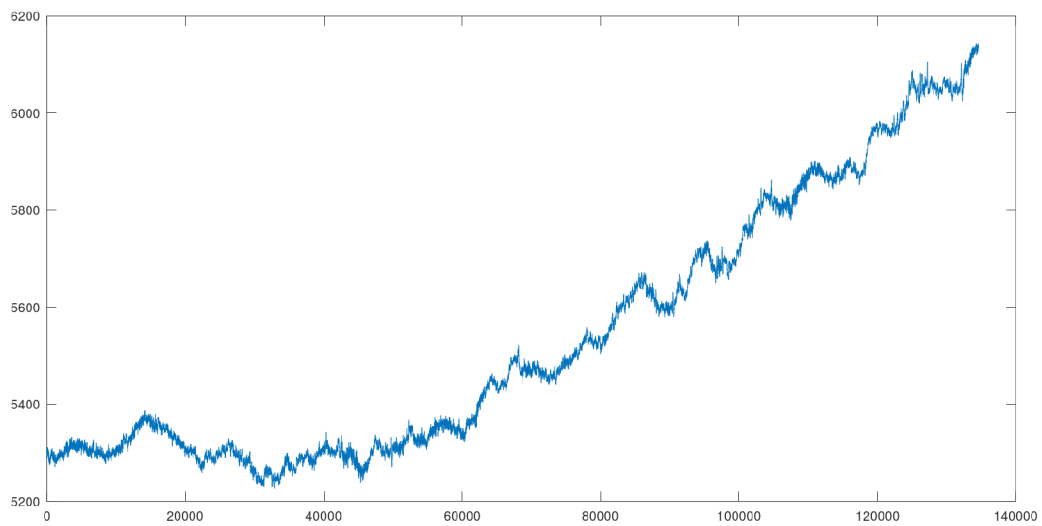
Skladba	Název skladby	Autor
A05	Proof	Idiotape
A07	Raag Bihag	B.Sivaramakrishna Rao
A09	Mor Bani Thanghat Kare	Sanjay Leela Bhansali
A10	Fallin	Dr. SaxLove
A11	Master of Running	Rickeyabo

Tabulka 4.1: Tabulka skladeb a autorů

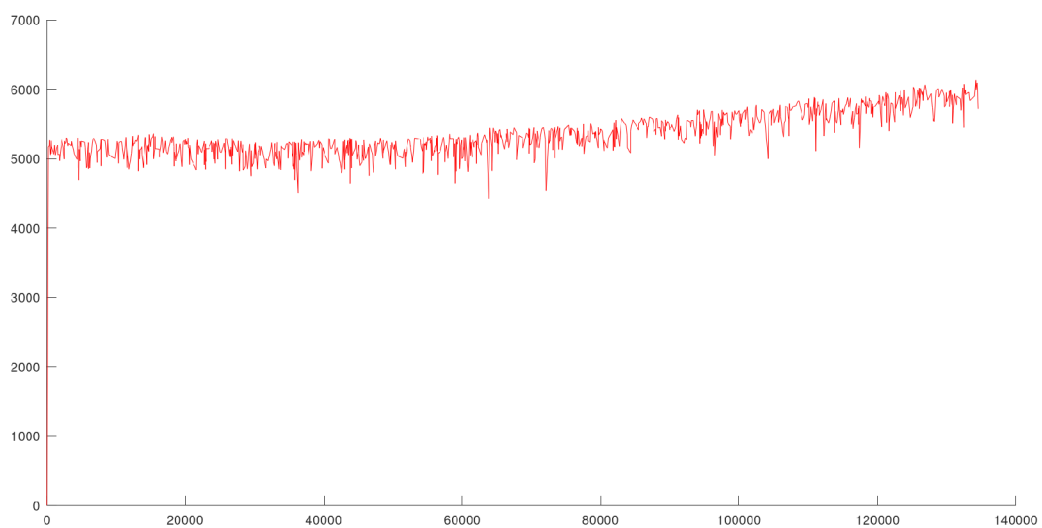
Žánr	Box-counting dimenze $D$
elektronická taneční hudba	2,9630655050
klasická hindustánská hudba	2,9583421350
indický folklór	2,9646411538
jazz	2,9657667875
gotický rock	2,9554876685

Tabulka 4.2: Tabulka jednotlivých žánrů a dimenzí

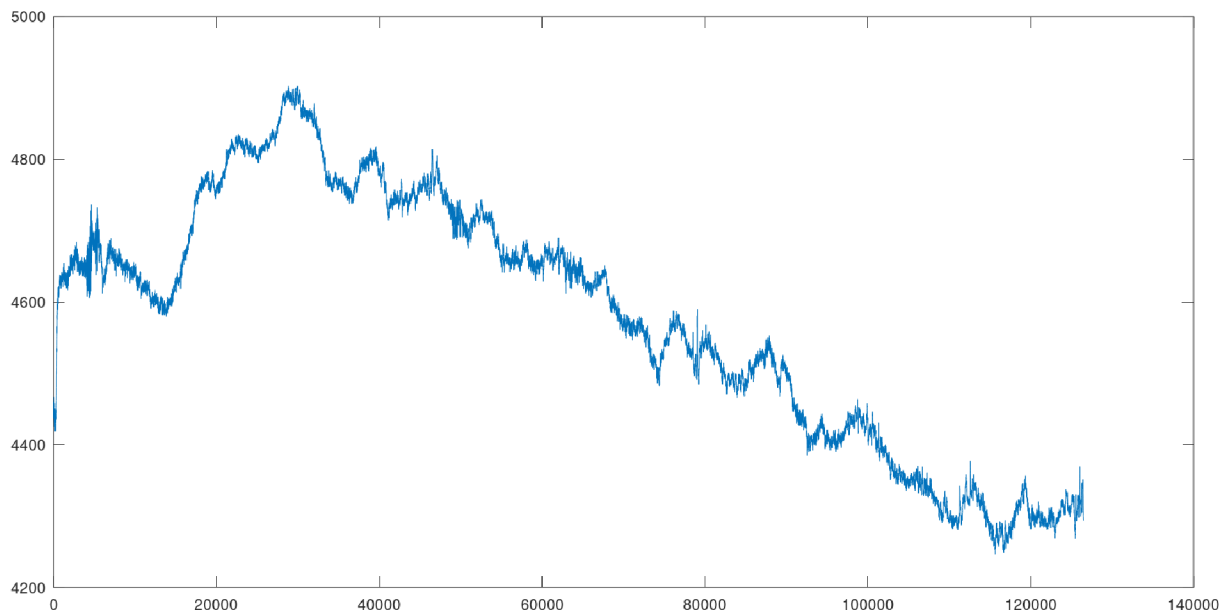
Na obrázcích níže je pro každou skladbu vykreslena funkce záznamu EEG (modrá křivka), kde jsou naměřené hodnoty elektrické aktivity mozku vztažené k času v sekundách. Poté graf fraktální interpolační funkce (červená křivka), tedy atraktor příslušného IFS.



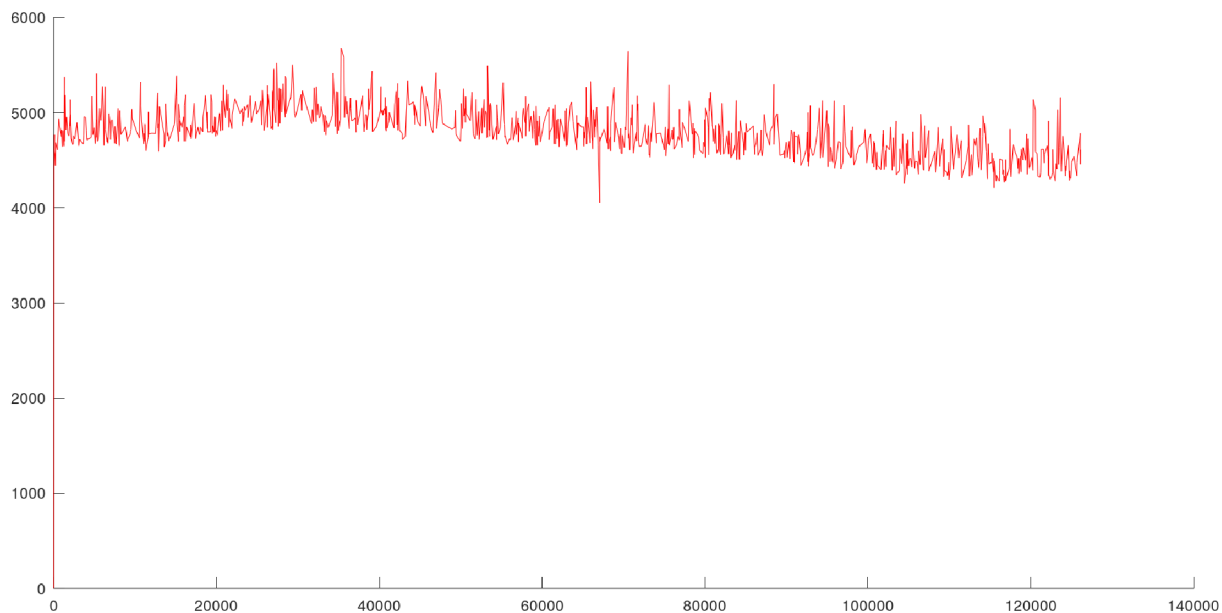
Obrázek 4.2: EEG - A05



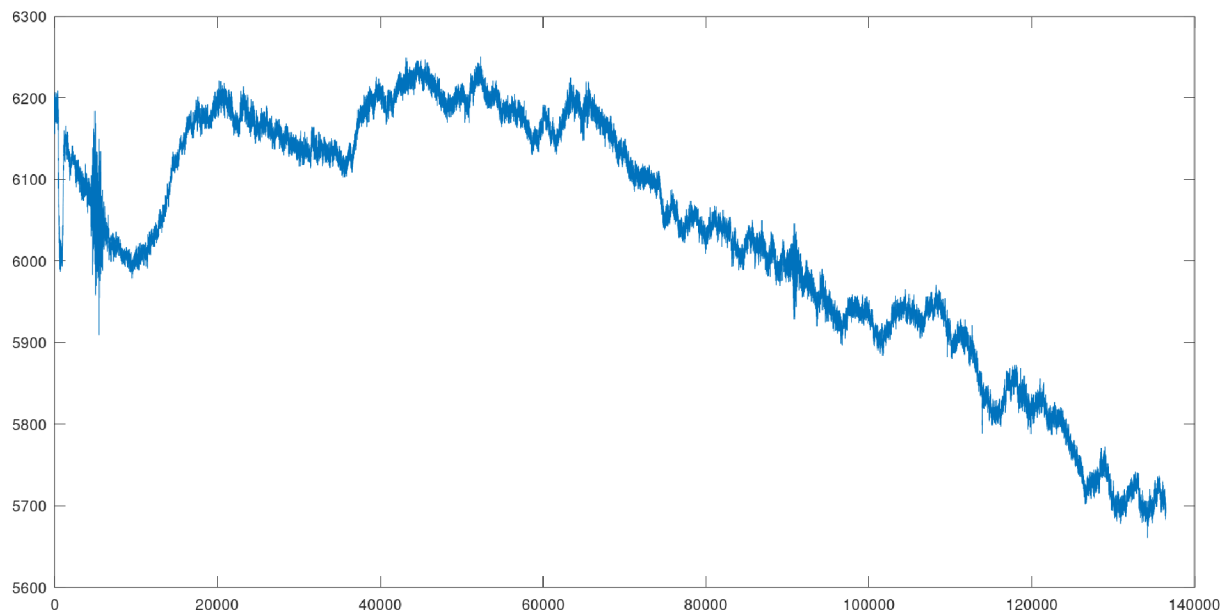
Obrázek 4.3: Atraktor IFS - A05



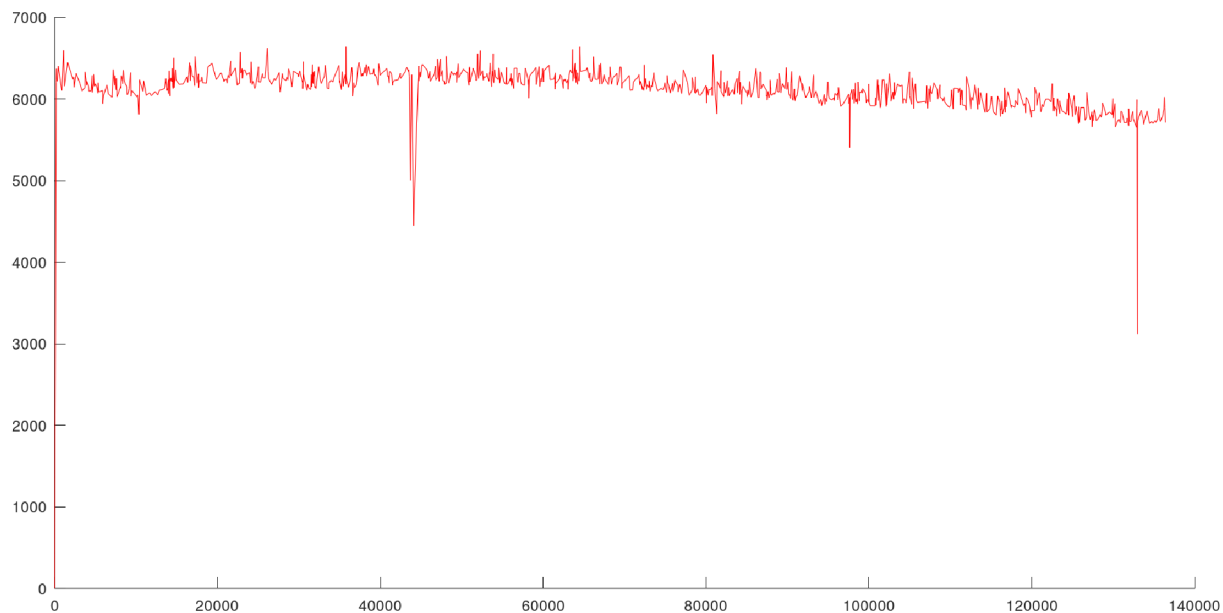
Obrázek 4.4: EEG - A07



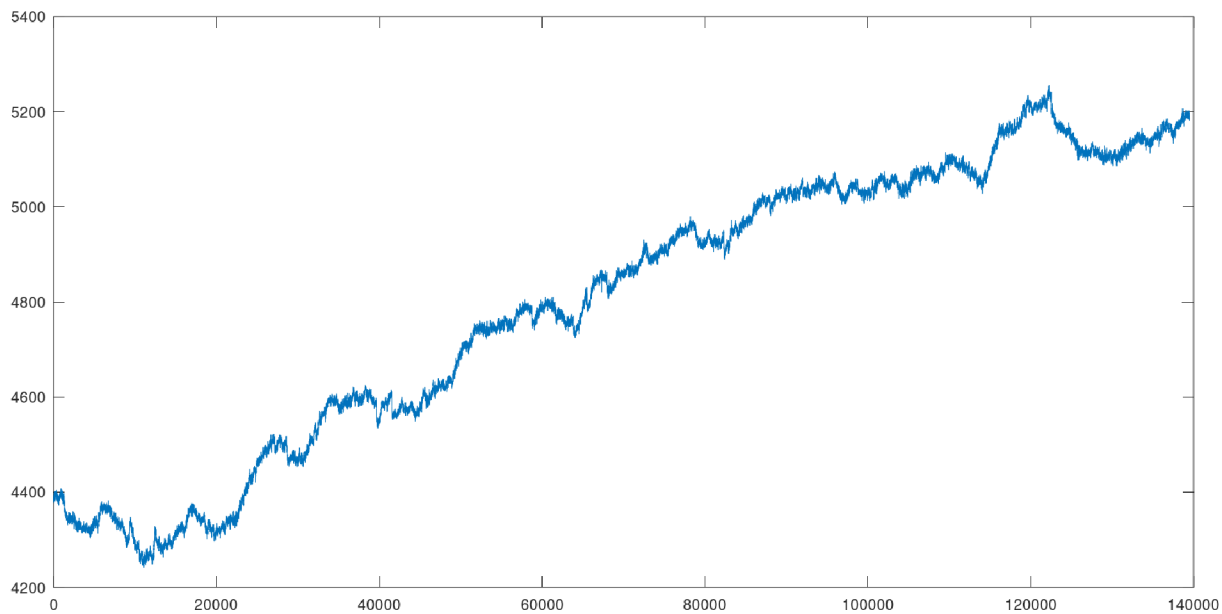
Obrázek 4.5: Atraktor IFS - A07



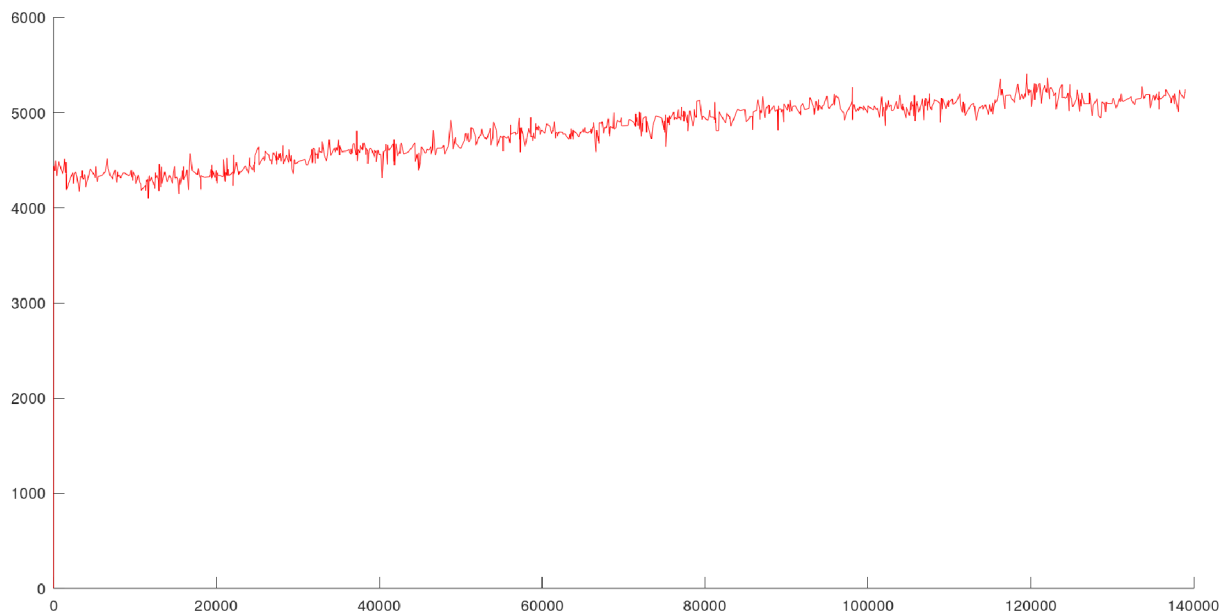
Obrázek 4.6: EEG - A09



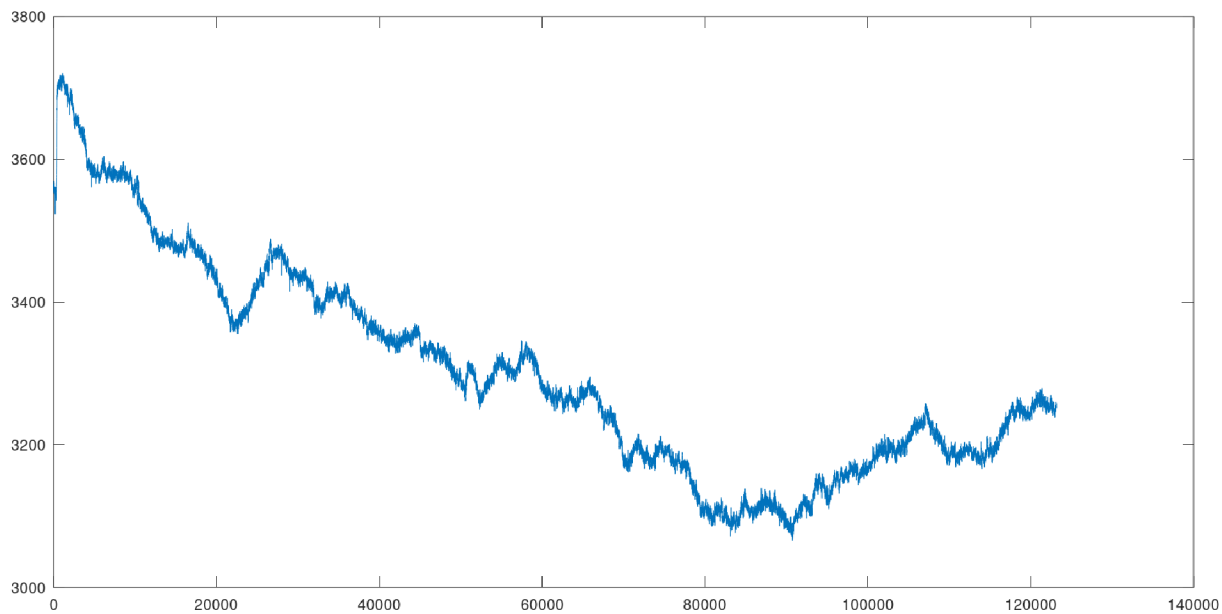
Obrázek 4.7: Atraktor IFS - A09



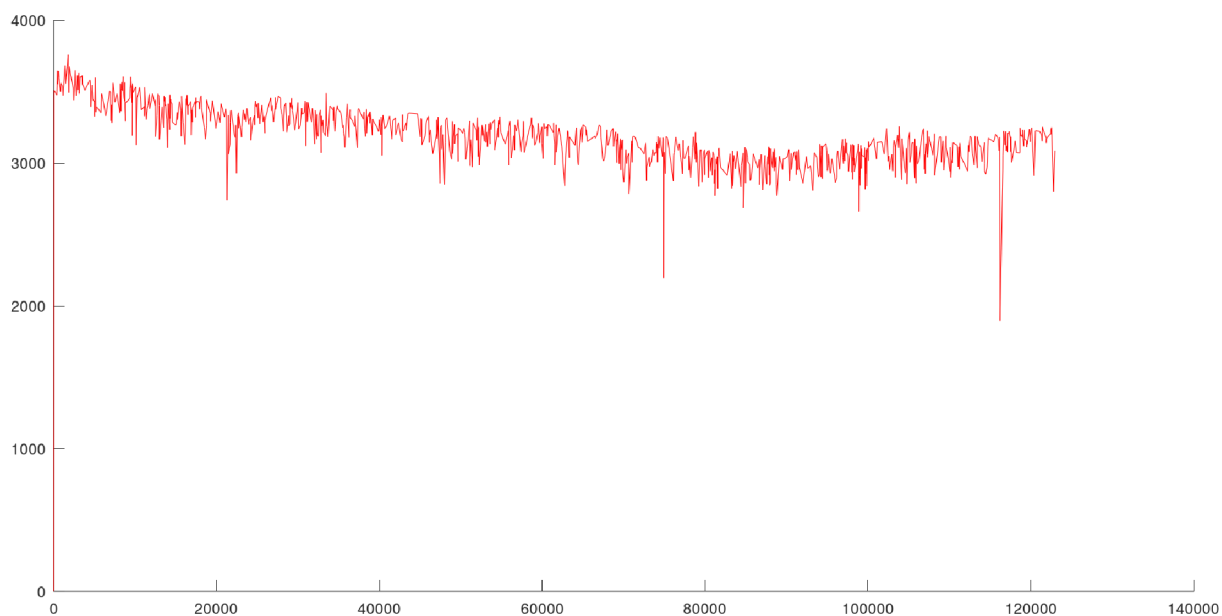
Obrázek 4.8: EEG - A10



Obrázek 4.9: Atraktor IFS - A10



Obrázek 4.10: EEG - A11



Obrázek 4.11: Atraktor IFS - A11

# Závěr

V úvodu této práce se věnujeme Hausdorffovu metrickému prostoru, kde se omezujeme na neprázdné kompaktní množiny, jinak by Hausdorffova metrika nespĺňovala definici metriky. Těm umožní popsat konvergenci množin a soběpodobné objekty, které souvisí se systémem iterovaných funkcí. Dále se věnujeme box-counting dimenzi, která vychází z pokrývání objektů různými množinami, jejichž velikost se snažíme minimalizovat. Alespoň okrajově je zde také zmíněna Hausdorffova míra a dimenze. Tyto kapitoly jsou zde doplněny o praktický výpočet dimenze a míry speciálních množin. Ve druhé kapitole je uveden jiný způsob, jak nalézt box-counting dimenzi kompaktních množin bez využití definice pomocí doplňku množiny. Tímto způsobem je zde spočítána dimenze Cantorovy střední- $\lambda$ -množiny, která je modifikací Cantorovy množiny. Ve třetí kapitole jsme se věnovali kontraktivním zobrazením a Banachově větě o pevném bodu, které jsme popsali i na Hausdorffově metrickém prostoru. Definovali jsme systém iterovaných funkcí, který později využíváme k zavedení fraktální interpolační funkce. V poslední kapitole je popsána interpolační funkce množiny dat a její souvislost s IFS, definice fraktální interpolační funkce a alternativní způsob výpočtu box-counting dimenze křivky fraktální interpolační funkce. Na závěr kapitoly ilustrujeme využití fraktální interpolace na reálných datech, na hodnotách naměřených u skupiny lidí při poslechu hudby.

Většina uvedených důkazů byla převzata, někde bylo potřeba upravit chybnou část a případně doplnit komentář, například ve větě 4.1.4 chyběla ekvivalence metrik a v závěru byl špatně uveden odhad, v lemmatu 3.2.3 bylo pro úplnost důkazu potřeba doplnit část tvrzení pro  $N = k + 1$ . Řešení, případně důkazy tvrzení 1.2.8, 1.2.10, 1.3.3, 1.3.5, 2.1.5 jsou mé vlastní. Kódy, které byly potřebné pro spočítání dimenze  $D$  a  $k$  vykreslení fraktální interpolační funkce v poslední kapitole, jsem psala v programu Octave a jsou k dispozici na přiloženém USB disku.

Během zpracování bakalářské práce jsem si prohloubila své znalosti z tématiky fraktálů, kterým během studia není věnováno tolik času. Vyzkoušela jsem si práci s odbornou literaturou

v anglickém jazyce. Věřím, že se mi cíl bakalářské práce podařilo naplnit a to popsat základní pojmy fraktální geometrie, konstrukci IFS a souvislost s fraktální interpolací.



# Literatura

- [1] ANDRES, Jan, Jiří FIŠER a Miroslav RYPKA. *Dynamické systémy 3: úvod do teorie deterministického chaosu a fraktální geometrie*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. ISBN 978-80-244-4646-2.
- [2] BARNSLEY, Michael F. *Fractals everywhere*. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1993. ISBN 0120790696.
- [3] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. *Numerické metody*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 9788021437524
- [4] EDGAR, Gerald A. *Measure, topology and fractal geometry*. New York: Springer-Verlag, 1990. Undergraduate texts in mathematics. ISBN 0-387-972272-2.
- [5] FALCONER, K. J. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. Third edition. Chichester, West Sussex: Wiley, 2014. ISBN 978-1-119-94239-9.
- [6] RUDIN, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1976. ISBN 0-07-085613-3
- [7] SMART, D.R. *Fixed point theorems*. London: Cambridge University Press, 1974. ISBN 0-521-20289-2.