TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

Algebraické rovnice ve středoškolské matematice

Diplomová práce

Studijní program: N1101 – Matematika
Studijní obory: 7504T077 – Učitelství informatiky pro střední školy
7504T089 – Učitelství matematiky pro střední školy

Autor práce: **Bc. Lenka Vaňková**
Vedoucí práce: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Liberec 2016

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2013/2014**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Lenka Vaňková**
Osobní číslo:	**P13000902**
Studijní program:	**N1101 Matematika**
Studijní obory:	**Učitelství informatiky pro střední školy**
	Učitelství matematiky pro střední školy
Název tématu:	**Algebraické rovnice ve středoškolské matematice**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

Úvod:
Algebraické rovnice představují významnou součást algebry a zaujímají významné postavení i v historii matematiky. Je zajímavé sledovat, jak se metody popisu a řešení algebraických rovnic vyvíjely v závislosti na dostupné matematické symbolice a značení, jak se postupně propracovávaly od zdlouhavého slovního popisu k dnešní elegantní symbolice s proměnnými a analytickými formulemi. Algebraické rovnice a jejich řešení jsou též důležitou součástí školské matematiky na všech jejích stupních. Budoucí učitel by měl mít v této oblasti vždy určitý nadhled, i kdyby ve své vlastní pedagogické praxi řešil vždy jen rovnice nejvýše kvadratické. Pro diplomanta bude užitečné si v této oblasti důkladněji utřídit své vlastní poznatky a uvědomovat si přitom i historické souvislosti.

Cíl:
V teoretické části shrne diplomant problematiku algebraických rovnic, historické poznámky jsou vítány. Speciální pozornost bude věnována otázkám řešitelnosti algebraických rovnic v závislosti na jejich stupni včetně tzv. Cardanových vzorců pro řešení algebraických rovnic 3. a 4. stupně.
Obsahem praktické části budou přípravy na výuku kvadratických rovnic na střední škole, v nichž se diplomant pokusí uplatnit méně tradiční přístup k tomuto tématu. Přípravy budou využity při výuce na střední škole; efektivnost alternativního přístupu bude v závěru vyhodnocena pomocí testů zadaných dvěma srovnávacím skupinám žáků. Výuku i testy povede podle možností sám diplomant během své pedagogické praxe.

Požadavky:
Orientace v matematice na úrovni základního vysokoškolského kurzu matematické analýzy a algebry, schopnost tvůrčí práce a studia cizojazyčné literatury.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

Bican, L.: Algebra (pro učitelské studium), Praha, Academia, 2001
Cohn, P.M.: Basic Algebra. 2002
Cohn, P.M.: Algebra and Applications. 2003
Goodman, F. M.: Algebra: Abstract and Concrete, Edition 2.5., Boston 1988
Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. SPN Bratislava, 1990
Struik, Dirk j.: Dějiny matematiky, Orbis, Praha 1963
Učebnice matematiky pro základní a střední školy
Odborné články v časopisech, Internet

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání diplomové práce: **18. dubna 2014**
Termín odevzdání diplomové práce: **24. dubna 2015**

M. Brzezina

L.S.

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

dne

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum:

Podpis:

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala RNDr. Aleně Kopáčkové, Ph. D. za cenné rady, věcné připomínky, ochotu a obrovskou trpělivost při vedení mé diplomové práce.

Anotace

Diplomová práce se zabývá netradičním způsobem výkladu kvadratických rovnic na střední škole, založené na grafickém znázornění této rovnice. První část práce popisuje historii rovnic, významné matematiky, algebraické rovnice různých stupňů a jejich řešení. Druhá část seznamuje s konkrétními přípravami pro výuku kvadratických rovnic vedenou hlavně metodami aktivního vyučování, tedy výkladovou částí, procvičováním kvadratických rovnic i následným ověřením nabytých znalostí. Dále popisem průběhu odučených hodin i srovnání výsledků s třídou vyučovanou frontální výukou.

Klíčová slova

Polynom, algebraická rovnice, stupeň rovnice, lineární rovnice, kvadratická rovnice, kubická rovnice, rovnice 4. a vyšších stupňů, Viètovy vzorce, diskriminant, Cardanovy vzorce, bikvadratická rovnice, binomická rovnice, reciproká rovnice, slovní úlohy, aktivní metoda vyučování, grafické znázornění rovnice

Annotation

The thesis considering about the unusual way of interpretation of quadratic equations in high schools based on a graphic representation. The first part describes the history of the equation, significant mathematicians, algebraic equations at various levels and their solutions. The second part introduces specific materials for lessons of quadratic equations based on active teaching methods, interpretation, practicing and verification of acquired knowledge. Next description of the taught lessons and compared results with the class taught by frontal teaching.

Keywords

Multinomial, algebraic equation, level of equation, linear equation, quadratic equation, cubic equation, equation of fourth and higher levels, Vietes formula, discriminant, Cardan's formula, Biquadratic equation, binomial equation, reciprocal equation, active teaching method, graphic representation of equation

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam grafů

Úvod

Pro svou diplomovou práci jsem si vybrala téma algebraických rovnic na středních školách, především kvadratickou rovnici a její výuku. K tomuto tématu mě motivovalo mé vlastní studium na střední škole, kdy jsem pozorovala, že já i moji spolužáci jsme měli problém hlouběji pochopit řešení kvadratické rovnice a zejména její využití v praxi. Cílem práce je vytvořit přípravy pro probrání látky kvadratické rovnice tak, aby ji žáci co nejlépe pochopili a byli ke studiu více motivováni. Měly by také pomoci k lepšímu rozvoji klíčových kompetencí, které jsou požadovány v Rámcových vzdělávacích programech.

Práce je v jedenácti kapitolách rozdělena na teoretickou a praktickou část.

V teoretické části se v první kapitole seznámíme s historickými údaji, které se týkají algebraických rovnic, vývojem jejich řešení i s několika významnými matematiky, kteří se o způsoby řešení algebraických rovnic zasloužili. Druhá a třetí kapitola slouží čtenáři k seznámení se s pojmem polynom, operacemi s nimi a s různými typy algebraických rovnic a jejich způsoby řešení.

Praktická část se zabývá vlastními přípravami, které mohou žákům pomoci lépe pochopit kvadratické rovnice a jejich užití v praxi. Ve čtvrté kapitole shrneme, co je po žácích v tomto tematickém celku požadováno, pátá kapitola je věnována výkladu kvadratické rovnice, který je založen na grafickém znázornění jejích jednotlivých členů ve čtvercové síti a jejich postupném přeskupování. Pomocí tohoto znázornění vysvětlíme vznik obecného vzorce. Kapitola šest shrnuje pedagogické prostředky a metody, které jsou v přípravách použity, a sedmá seznamuje s přípravami jednotlivých hodin, podle kterých probíhala výuka. Průběh výuky je sepsán v osmé kapitole spolu se závěrečným zhodnocením. V navazující deváté kapitole se seznámíme s výsledky testů, které ukazují efektivnost a vhodnost grafického zobrazení. Poslední dvě kapitoly uvádí přínos metody grafického zobrazení pohledem žáků a závěrečné shrnutí praktické části, spolu se zamyšlením nad jeho výhodami i možnými problémy.

1 Historické poznámky

Plánujeme-li žákům (a nejen jim) přiblížit nějakou oblast matematiky, a to co nejnázorněji, může být užitečné podívat se zpět do historie na vývoj, kterým se ubírala, než jsme přišli na současné početní metody a vzorce, které nám často situaci velmi zjednodušují a urychlují.

Jako mnohé další vědní obory se i matematika rozvíjela na podnětech z praktického života. Nejprve se jednalo o kupecké počty, později o geometrii v zemědělství a stavebnictví. Díky obchodu se potřeba matematiky rozšířila i mezi širší veřejnost.

My se zaměříme především na vývoj algebraických rovnic, kterými se budeme zabývat v celé této práci.

1. 1 Matematika ve starověku

Největší rozvoj zaznamenává matematika především v Egyptě a Mezopotámii. Zprvu byly veškeré matematické úlohy, problémy i jejich řešení vyjadřovány především slovně, později přišlo na řadu vyjádření geometrické, algebraické a aritmetické. Rozvíjely se jednotlivé číselné soustavy a číselné obory. Objevují se nepoziční číselné soustavy, jako první přichází Mezopotámie se šedesátkovou poziční soustavou. V 5. století př. n. l. se objevil první znak vyjadřující nulu, Babyloňané tento znak používají jako náhradu jednotek řádu, který v čísle chybí, nikoli však na koncových pozicích. [1]

Na desítkovou poziční soustavu bychom poprvé narazili v Indii, a to ve 3. století př. n. l., kde se objevují číslice zvané *brahmi*, které jsou speciálními znaky pro čísla od 1 do 9 a které se tak staly předpokladem pro vytvoření desítkové poziční numerace s použitím nuly, a to nejpozději v 7. století n. l., což je doloženo rukopisem křesťanského biskupa Sébóchtose z r. 662. [1]

V helénistickém období se v Řecku začíná měnit ráz matematiky, stává se deduktivní vědou, v autorských spisech se pozvolna objevují tvrzení s důkazy. Matematici se zabývají především geometrií, nalezli bychom tu Pythagora ze Samu, Archiméda, Euklida či Hippiase z Elidy. Už v této době bychom také nalezli slovní úlohy řešené rovnicemi, příkladem může být dílo „Matematika“ v devíti knihách od matematika Čan Sana. [2]

Jednou z metod, která byla užívána k řešení slovních úloh, se nazývala *metoda chybného předpokladu*. Starověcí matematici neznali dnešní symboliku ani elementární úpravy rovnic. Úloha by tak mohla vypadat následovně: *„Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15.“*

My bychom dnes použili zápisu $x + \frac{1}{4}x = 15$. Starověký počtář volí $x = 4$, vyjde mu tedy, že „*hromada a její čtvrtina dávají 5*“, má být však třikrát více, protože $15:5 = 3$. Proto se hledaný počet rovná $4.3 = 12$.

Metodou falešného předpokladu byly počítány i rovnice o více neznámých či soustavy rovnic. [1]

Prvním příkladem skutečné matematické teorie rozvinuté z potřeb praxe byly mezopotámské úlohy na kvadratické rovnice. Při dvou proměnných x, y se první nazývala délkou, druhá šířkou a jejich součin plochou. U kubických rovnic byla třetí proměnná z zvána hloubkou a jejich součin xyz objemem. Ve svých počtech však s geometrickými veličinami pracují jako s abstraktními pojmy a počítají součty tvaru $xy + x, xyz + x + y$ atp., které z pohledu geometrie nemají smysl.[1]

Velký krok v oblasti rovnic udělal Diofantos z Alexandrie žijící ve 3. století př. n. l., který ve své knize „Arithmetika“ rozebral lineární, kvadratické a tzv. diofantické rovnice. Ve svých dílech začal užívat speciální symboly pro sčítání, odmocňování atd. U svých úloh má zájem jen o kladná a racionální řešení. Kořeny, které dosahují hodnot záporných či iracionálních, řadí mezi nemožné. [1] [2]

1. 2 Středověká matematika

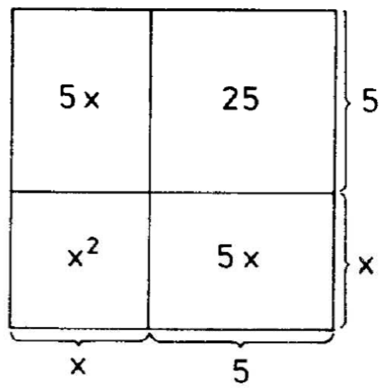
Středisko matematického bádání se přesouvá zpět do Indie a následně do Mezopotámie. V 7. století n. l. je jedním z nejznámějších matematiků Brahmagupta, který objevil první obecná řešení neurčitých rovnic prvního stupně $ax - by = c$, kde $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Oproti Diofantovi připouštěli Indové záporné kořeny, spokojili se však s celočíselným řešením rovnice. Díky Bháskarovi, který žil v Uddžajnu kolem roku 1050, se objevují první záporné kořeny, například rovnici $x^2 - 45x = 250$ přiřadil kořeny $x_1 = 50$ a $x_2 = -5$. K platnosti záporných kořenů byl však skeptický. [2]

Své řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx = c$ popsal následovně: *„K absolutnímu počtu vynásobeného čtyřnásobkem (koeficientu) čtverce přidej druhou mocninu (koeficientu) horizontu; odmocnina samého bez (koeficientu) horizontu, děl dvakrát (koeficientem) čtverce a máš hodnotu.“* Tento zápis odpovídá $x = (\sqrt{4ac + b^2} - b)/2a$, což je jeden z kořenů získaný dnes již tradičním vzorcem $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$. [4]

Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al Madžúsí al-Chvárizmí byl významný arabský matematik, který žil na přelomu 8. a 9. století. Lze říci, že ve svém spise, překládaném jako „Algebra“, navazuje v úpravách rovnic na Diofanta a rozvádí je. Přenáší členy rovnice z jedné strany na druhou s opačným významem (záporná ↔ kladná, násobící ↔ dělící). Další operací je sloučení podobných členů, na příkladu tedy 1. úprava $3x^2 - 7x + 2 = 8x - 7$ dává rovnici $3x^2 + 2 + 7 = 8x + 7x$ a s použitím 2. úpravy získáváme rovnici $3x^2 + 9 = 15x$. Kvadratické rovnice řeší pomocí geometrických konstrukcí, kdy x považuje za úsečku a x^2za čtverec se stranou x. [1]

Jako příklad uvedeme řešení rovnice, kterou bychom dnes zapsali jako $x^2 + 10x = 39$ z učebnice algebry matematika Al-Chavárízmího. Slovně ji můžeme popsat jako: *„Štvorec a desať jeho koreňov sa rovná tridsiatim deviatim dirhanom, tak to znamená, že ak pridáš k nejakému štvorcu to, čo sa rovná desiatim koreňom, dostaneš tridsaťdeväť.“*. Pravidlo je následující: *„Rozpoľ (počet) korene, dostaneš v tejto úlohe päť, vynásob to rovnakým číslom, bude dvadsaťtpäť. Pridaj to k tridsiatim deviatim, bude šesťdesiatštyri. Zober z toho koreň, bude osem, a odpočítaj od toho polovicu (počtu) koreňov, tj. päť, ostanú tri; to je koreň štvorca, ktorý se hľadal a štvorec bude deväť.“* [5]

Celý tento postup je geometrický, což je možno vidět na obrázku 1, který Hejný převzal od Bydžovského ze „Zbierky úloh z matematiky pre IV.–VIII. Triedu škôl“.



Obrázek 1: Geometrické řešení kvadratické rovnice

Autor popisuje zakreslení následovně: „*Najprv sa zostrojí útvar s obsahom $x^2 + 10x$ tak, aby sa dal ľahko doplniť na štvorec. Tým sa pôvodná rovnica upraví na „geometrický“ útvar $(x + 5)^2 = 64 = 8^2$, odkiaľ $x = 3$.“* V řešení ani komentáři příkladu se autor nezmiňuje o druhém záporném kořenu rovnice. [5]

Kubickým rovnicím se na přelomu 11. a 12. století v Persii systematicky věnuje Omar Chajján. Určuje geometrické řešení pomocí průsečíku kuželoseček a také aritmetické řešení, kde však za kořeny připouští jen kladná racionální čísla.

Čínští matematikové zkoumali především systémy lineárních rovnic, které řešili pomocí metody, která se podobala dnešnímu maticovému řešení. Díky tomuto způsobu připouštěli i záporné kořeny. Nalezneme tu také počátky Hornerova schématu a metody transformace kořenů vyšších stupňů rovnic. [3]

1. 3 Období renesance

Koncem 15. století se v matematice začínají používat znaménka pro početní operace a písmena ve významu proměnných, čímž přichází velký zlom.

Nově se objevuje metoda řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně. Jako první přišel s nápadem Scipione del Ferro z Bologni. Našel řešení výpočtu kořene rovnice $x^2 + ax = b$, kde a, b jsou kladné. Nikdy však své řešení neuveřejnil a nejspíše ani nedokázal, že vypočtené číslo je kořenem rovnice. Stejnou rovnici a k ní ještě rovnici $x^3 + ax^2 = b$, kde a, b jsou opět kladná, řešil Niccolo Fontana, ani ten však své důkazy nikde nepublikoval.

S dokázaným řešením kubických rovnic přišel až Geornimo Cardano, a to ve své knize „Velké umění“ (Ars magna) z r. 1545. Ukázal, jak ve všeobecné kubické rovnici vhodnou substitucí eliminovat kvadratický člen a geometricky dokázal, že získané číslo je kořenem příslušné rovnice. Vyřešil také kubickou rovnici $x^3 + ax = b$, a to pomocí následujícího vzorce:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}$$

Cardano vedle kladných kořenů uvažuje i záporné, ty však nazývá *fiktivními*. [6]

Cardanův žák Ludovico Ferrari přispěl do knihy „Velké umění“ svým řešením rovnic čtvrtého stupně. Řešení spočívá v převodu rovnice čtvrtého stupně na rovnici stupně třetího, například: $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ převedl na tvar $y^3 + 15y^2 + 36y = 450$. [3]

Koncem renesance jsou objeveny věty o závislosti kořenů kvadratických rovnic a to od francouzského myslitele Francoise Vièteho. Objevené vztahy jsou dodnes známé jako

Viètovy vzorce. Pro normovanou kvadratickou rovnici $x^2 + px + q = 0$ platí: $x_1 + x_2 = -p \wedge x_1 \cdot x_2 = q$. [6]

1. 4 Od novověku po současnost

Ačkoli se v období novověku rozvíjel především integrální a diferenciální počet, najdeme zde i rozvoj problematiky rovnic a algebry.

S velkým pokrokem v oblasti algebry přichází francouzský filosof a matematik René Descartes se svým dílem „Geometrie“, spojuje zde algebru s geometrií, pokládá základy analytické geometrie, věnuje se též problematice algebraických rovnic, jako první zveřejnil obecný vzorec pro řešení kvadratické rovnice v nám známé podobě. Zavádí dnešní symboliku, písmena na začátku abecedy užívá jako parametry, ta z konce abecedy využívá k označení proměnných. [6] [3] [7]

Mezi vědci dochází v tomto období také k první formulaci hypotézy, že každá rovnice n-tého stupně má n kořenů, bez důkazu tak vyslovili princip základní věty algebry, pracovali již se zápornými i imaginárními kořeny algebraických rovnic. Prvně se o její dokázání pokusil r. 1746 Jean Le Rond d’Alambert, po kterém je někdy věta také nazývána. Jako první ji však s úspěchem dokázal r. 1799 německý matematik Karl Friedrich Gauss. [1] [3]

Další rozvoj matematiky přinesl další a složitější rovnice i jejich řešení. Mimo algebraických rovnic se setkáváme s rovnicemi exponenciálními, logaritmickými či goniometrickými. Rozvíjejí se i rovnice diferenciální, Leonard Euler se jejich teorií zabýval již v 18. století a klasifikoval je na lineární, exaktní a homogenní. Ve svém díle „Vollständige Anleitung zur Algebra“ z r. 1770 popisuje teorii kubických a bikvadratických rovnic.

R. 1824 dokázal Niels Henrik Abel, že není možné obecně řešit rovnice 5. stupně, což platí i u rovnic vyšších stupňů. Významné jsou Abelovy práce z teorie eliptických integrálů („Abelův theorem“) a komplexních čísel. [7]

Pro nalezení kořenů rovnic vyšších stupňů lze použít metody numerické matematiky, s čímž nám v dnešní době již mohou pomoci různé počítačové programy, jako jsou například Maple, Matlab či Mathematica.

1. 5 Významní matematici

V historických matematických poznámkách jsme se seznámili se zlomkem významných matematiků, kteří jejímu pokroku pomohli. Někteří do oblasti algebraických rovnic přispěli zásadnějšími objevy, proto se o jejich životě a díle zmíníme více.

1. 5. 1 Diofantos z Alexandrie

Období, ve kterém Diofantos žil, není přesně určeno, víme, že se narodil mezi lety 201 a 215 ve starověkém Řecku. Léta jeho života se dají přibližně určit díky dalším matematikům a autorům, se kterými se vzájemně citují ve svých dílech. Stal se alexandrijským řeckým matematikem a autorem knih s názvem „Arithmetica“, z nichž byly mnohé ztraceny. Ve zbylých však najdeme jeho řešení algebraických rovnic, kterými se zabýval. Mnoho let strávil prací v Alexandrijské knihovně. Ve svých dílech také uznal zlomky jako čísla; uznal tak kladná racionální čísla jako koeficienty a řešení. Díky nápisu (matematické úloze) na svém náhrobku lze určit jeho přesný věk 84 let, víme tak tedy, že zemřel pravděpodobně mezi lety 285–299. [8] [9]

1. 5. 2 François Viète

François Viète se narodil r. 1540 do právnické rodiny ve Fontenay-le-Comte. Studium započal ve františkánské škole, r. 1559 promoval jako bakalář práva na Poitiers a o rok později se stal advokátem ve svém rodném městě. Od počátku byl pověřován důležitými případy a mezi jeho klienty patřila příkladně Marie Stuartovna. Po čtyřech letech se stává učitelem Catherine de Parthenay, francouzské šlechtičny a budoucí matematičky. Vyučuje ji vědám a matematice, píše pro ni i mnoho pojednání o astronomii, geografii a trigonometrii, některá z nich se dochovala dodnes. Viète používá desetinných čísel a popisuje eliptickou oběžnou dráhu planety.

Obrázek 2: François Viète

Roku 1571 se zapsal v Paříži jako advokát a nadále vyučoval Catherine. Ve svém volném čase se věnoval matematickému výzkumu. Byl známý tím, že se vydržel zabývat problémem třeba tři dny bez hnutí. Postupně se stal soudcem u vrchního soudu, soukromým poradcem krále Jindřicha III., soudcem královského dovolacího soudu a členem královy osobní rady.

V letech 1585–1589 se věnoval matematice a psaní díla „Analytical Art“. Vrátil se do Tours, kde rozluštil tajné dopisy Katolické ligy a dalších nepřátel krále.

Po smrti Jindřicha III. se stal prvním členem rady Henryho Navarejského, nyní Jindřicha IV. a získal pozici radního parlamentu v Tours. Několik týdnů před svou smrtí sepsal závěrečnou práci o otázkách kryptografie, ve které obsáhl všechny šifrovací metody té doby. Roli králova poradce zastával prakticky do své smrti 23. února 1602. [3] [10] [11]

1. 5. 3 Gerolamo Cardano

Obrázek 3: Gerolamo Cardano

Italský matematik, filosof a lékař se narodil 24. 9. 1501. Byl nemanželským synem milánského prokurátora Facia Cardana, jeho dětství bylo poznamenáno mnohými nemocemi, úrazy a špatným zacházením, matka se za něj styděla, otcem byl využíván jako sluha a zažil tak i posměch vrstevníků. Nakonec jej dali na studia, kde si během tří let osvojil potřebné znalosti a r. 1524 začal studovat medicínu na Padovské univerzitě a stal se jedním z nejslavnějších lékařů své doby. [12]

V matematice je Cardano znám především díky Cardanovým vzorcům pro řešení kubických rovnic. Jak však uvádí Folta v Dějinách matematiky, Cardano tyto vzorce pouze zobecnil, původní vzorce pochází od Niccola Fontany, který mu je prozradil pod slibem mlčenlivosti proto, aby mu pomohl sehnat mecenáše pro své výzkumy. Roku 1542 Cardano získal pozůstalost Scipione del Ferra a necítil se pak již daným slibem vázán. R. 1545 sepsal dílo „Ars Magna“, kde řešení algebraických rovnic prvního až čtvrtého stupně popisuje. [7]

Po popravě svého syna Giovanniho Battisty, který byl odsouzen za vraždu manželky, a po vydědění svého nejmladšího syna Alda kvůli gamblerství, se přestěhoval z Pavia do Bologně, a to jak z obav z Aldaniho pomsty či kvůli žárlivosti svých kolegů na jeho vědecké úspěchy, tak i kvůli nařčení ze sexuálního poměru se svými studenty. Roku 1570 byl z neznámých důvodů zatčen inkvizicí a strávil několik měsíců ve vězení. Poté se přestěhoval do Říma, kde získal doživotní rentu od papeže Řehoře XIII. a dokončil jeho autobiografii. Byl přijat na Královskou lékařskou univerzitu a pokračoval v medicínské praxi i ve filosofických studiích do své smrti r. 1576. [12]

2 Polynomy

Polynom je součástí školské látky, se kterou se žák seznamuje v rámci povinné školní docházky a případně i během svého dalšího studia. Žákům je známější česká terminologie - mnohočlen, dvojčlen, trojčlen, později pak například i jako mnohočlen čtvrtého, pátého stupně a další.

V následující části uvedeme základní teorii o polynomech, vedle definice polynomu to bude definice kořenu a jeho vlastnosti. Důkazy vynecháváme, jsou k nahlédnutí ve zmiňovaných publikacích.

Definice 2. 1: Buď R okruh[1] a x symbol. Označme $R[x]$ množinu všech výrazů tvaru $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, *kde* $a_i \in R, i = 0, 1, \dots, n; n \in \mathbb{N}_0$, a kde klademe $x^0 = 1$. Tyto výrazy se nazývají *polynomy* nad R, prvky a_i se nazývají koeficienty polynomu $f(x)$. Dva polynomy $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ a $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ budeme pokládat za rovné, právě když po vynechání všech členů s nulovými koeficienty dostaneme identické výrazy. Místo $f(x)$ budeme psát f. [13] [14]

Definice 2. 2: Operaci <u>sčítání</u> polynomů definujme následovně*:*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i \,,$$

kde pro $i > n$, resp. $i > m$, klademe $a_i = 0$, resp. $b_i = 0$. [13] [14]

Definice 2. 3: Operaci <u>součinu</u> dvou polynomů definujeme následujícím vzorcem:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \text{, kde } c_k = \sum_{i+j=k}^{n} a_i b_j.$$

[13] [14]

Snadno lze ověřit, že množina $\mathbb{R}[x]$ je spolu s operacemi sčítání a násobení *okruhem polynomů jedné neurčité nad R*. Je-li $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, kde $a_n \neq 0$, pak říkáme, že st $f = n$, tedy stupeň f je n.

---

[1] Okruhem myslíme neprázdnou množinu R se dvěma binárními operacemi $+$ a $\cdot$, jestliže $(R, +)$ je Abelova grupa, $(R,\cdot)$ je monoid a pro každé tři prvky $a, b, c \in R$ platí levý a pravý distributivní zákon $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$. [13] s. 32

Definice 2. 4: Okruh T s alespoň dvěma prvky, v němž ke každému nenulovému prvku a existuje prvek inverzní, tj. takový prvek a^{-1}, že $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, se nazývá *těleso*. [13]

Definice 2. 5: Buď U nadtěleso[2] T a buď $f \in T[x]$ polynom kladného stupně. Říkáme, že prvek $\alpha \in U$ je *kořen* polynomu f, jestliže $f(\alpha) = 0$. [13]

Věta 2. 1: Buď U nadtěleso tělesa T a buď $f \in T[x]$ polynom kladného stupně. Pak prvek $\alpha \in U$ je kořenem polynomu f, právě když $(x - \alpha)|f$ v $U[x]$. [13]

Příklady: V nějakém tělese jsou pro existenci kořenů polynomu rozhodující obě tělesa T a U i sám polynom f stejnou měrou. Konkrétně:

1. polynom $f = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \in \mathbb{Q}[x]$, má dva kořeny $x \in \{2;\ 3\}$ a to v tělese racionálních čísel $\mathbb{Q}$;
2. polynom $f = x^2 + 2x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ nemá v $\mathbb{Q}$ žádný kořen, má však dva kořeny $-1 \pm \sqrt{3}$ v tělese reálných čísel $\mathbb{R}$;
3. polynom $f = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ nemá kořeny ani v $\mathbb{Q}$ ani v $\mathbb{R}$, má ale dva kořeny $i, -i$ v tělese komplexních čísel $\mathbb{C}$.

[13]

[2] Buď T podtěleso tělesa U. Pak říkáme též, že U je nadtěleso tělesa T nebo že U je rozšířením tělesa T. V případě tří těles $T \subseteq U \subseteq V$, kdy T je podtěleso U a U je podtěleso ve V, říkáme též, že U je mezitěleso mezi T a V.

3 Algebraické rovnice

Uvažujeme-li polynom $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ z definice 2.1, kde koeficienty $a_i \in \mathbb{C}$ a $st\ f \geq 1$, a sestavíme-li rovnici:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

nazveme ji *algebraickou rovnicí n-tého stupně v anulovaném tvaru*. Pokud navíc platí, že $a_n = 1$, mluvíme o tzv. *normovaném* tvaru algebraické rovnice.

V této práci pracujeme s algebraickými rovnicemi o jedné neznámé.

Algebraické rovnice můžeme dělit podle počtu neznámých a také podle stupně. Podle prvního kritéria je dělíme na rovnice o jedné neznámé, o dvou neznámých, … až o n neznámých, k určení jejich jednoznačného řešení potřebujeme znát příslušný počet lineárně nezávislých rovnic. Podle druhého kritéria dělíme algebraické rovnice na rovnice prvního stupně, tedy rovnice lineární, druhého stupně – kvadratické, třetího stupně, jinak také kubické, rovnice čtvrtého stupně, označované někdy jako kvartické a rovnice pátého a vyššího stupně. Jednotlivé rovnice různých stupňů se počítají různými početními postupy nebo graficky, tomuto způsobu se však nebudeme v této práci věnovat.

3. 1 Lineární rovnice

Lineární rovnice je nejjednodušším případem algebraické rovnice. Žáci se s ní seznamují již na prvním stupni základní školy, kdy se poprvé potkají s proměnnou.

Jako lineární označíme rovnici ve tvaru

$$ax + b = 0;\ kde\ a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

a také rovnice, které je možno na tento tvar převést.

Pro řešení rovnic je zapotřebí znalost ekvivalentních úprav, mezi které patří:

- *„přičtení stejného čísla k oběma stranám rovnice"*
- *„přičtení stejného násobku neznámé k oběma stranám rovnice"*
- *„vynásobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem"*
- *„ "ekvivalentní" úpravy výrazů na jednotlivých stranách rovnice."* [14]
- *„umocnění obou stran rovnice přirozeným mocnitelem, nabývají-li obě strany rovnice jen nezáporných hodnot v oboru řešitelnosti."* [16]

- *„umocnění levé i pravé strany rovnice přirozeným lichým mocnitelem, nejsou-li obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení rovnice."* [16] [14]

Mimo těchto úprav můžeme využít ještě tzv. důsledkovou úpravu, která má za následek možnost vzniku „falešných" kořenů, může se množina všech řešení dané rovnice změnit, takže je bezpodmínečně nutné, aby byla po výpočtu provedena zkouška, která ukáže, které kořeny jsou správné. Touto úpravou je:

- *„umocnění levé i pravé strany rovnice přirozeným sudým mocnitelem, nejsou-li obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení rovnice."* [16] [14]

Díky této úpravě se u rovnic, kde $a \neq 0$, dobereme k výsledné jednoprvkové množině $K = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$. Pokud $b = 0$, je řešením rovnice každé číslo $x \in \mathbb{R}$. [15] [16] [17]

3. 2 Kvadratická rovnice

Algebraická rovnice druhého stupně se nazývá kvadratická, s jejím tvarem se žáci seznamují koncem druhého stupně základní školy, kdy se pracuje s mnohočleny a navazuje se výpočtem kvadratických rovnic v prvním a druhém ročníku středních škol a příslušných tříd gymnázií.

Kvadratická rovnice má tvar:

$$ax^2 + bx + c = 0, kde\ a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

Člen ax^2 se nazývá kvadratický, bx je členem lineárním a c absolutní člen kvadratické rovnice. V případě, že se jedná o rovnici, kde koeficienty $a, b, c \neq 0$, říkáme, že jde o *úplnou kvadratickou rovnici.*

Úplnou kvadratickou rovnici lze řešit mnoha způsoby, jednou z možností je využití Viètových vzorců a rozložení na součinový tvar nebo pomocí vzorce s využitím diskriminantu. Postupně si tyto početní metody ukážeme.

VIÈTOVY VZORCE

Jedná se o vzorce objevené matematikem François Viètem v 16. století. Mezi koeficienty a, b, c kvadratické rovnice a jejími kořeny x_1, x_2 platí následující vztahy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Tyto vzorce se využívají následujícím způsobem: Rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ převedeme na normovaný tvar:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Nyní dosadíme Viètovy vzorce za koeficienty:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

tento trojčlen rozložíme na součin:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Tímto rozkladem získáváme dva polynomy prvního stupně, z nichž jsou oba kořeny patrné. [15] [18]

VZOREC S DISKRIMINANTEM

U tohoto způsobu řešení velice závisí na číselném oboru, ve kterém rovnici řešíme. Diskriminantem kvadratické rovnice nazveme hodnotu $b^2 - 4ac$, kterou značíme D. Celý vzorec pro zjištění jednotlivých kořenů má následující tvar:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ \ a \neq 0,\ x \in \mathbb{C}.$$

Velice závisí na tom, jaké hodnoty nabude diskriminant, poté rozlišujeme následující případy:

1) $D > 0$, výsledná množina $K = \left\{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a\,;\ (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a\right\}$ obsahuje dva prvky,
2) $D = 0$, výsledkem je dvojnásobný kořen, který zapíšeme do množiny $K = \{-\,b/2a\}$,
3) $D < 0$, množina $K = \left\{(-b - i\sqrt{|b^2 - 4ac|})/2a\,; (-b + i\sqrt{|b^2 - 4ac|})/2a\right\}$ obsahuje opět dva prvky. Pokud by $x \in \mathbb{R}$, bude výsledná množina prázdná. [15] [18][19]

3. 2. 1 Neúplné kvadratické rovnice

Tento název se používá k označení obecné kvadratické rovnice, která má lineární či absolutní člen roven nule. Obě rovnice je možné řešit pomocí vzorce s diskriminantem, ale také je lze řešit za využití početních operací, pro žáky známých, z práce s mnohočleny. Existují dva typy takovýchto rovnic

KVADRATICKÁ ROVNICE BEZ ABSOLUTNÍHO ČLENU

Jedná se o kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, jejíž absolutní člen $c = 0$, tedy rovnice

$$ax^2 + bx = 0; a, b \neq 0, x \in \mathbb{C}.$$

Pro řešení této rovnice lze využít vytknutí neznámé před závorku:

$$ax\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0,$$

kořeny jsou tedy čísla $x_1 = 0$ a $x_2 = -b/a$. Pokud by ještě platilo, že $b = 0$, jednalo by se o dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 0$.

RYZE KVADRATICKÁ ROVNICE

V této rovnici schází lineární člen, tedy $b = 0$, rovnice pak vypadá:

$$ax^2 + c = 0; a, c \neq 0, x \in \mathbb{C}$$

za použití ekvivalentních úprav se dopracujeme k ekvivalentní rovnici:

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

pro zjištění kořenů $x_{1,2}$ použijeme následující postup:

$$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Pokud bychom rovnici řešili pro $x \in \mathbb{R}$, pak by pro $-c/a < 0$ neměla ryze kvadratická rovnice řešení.[15] [18] [19]

3. 3 Kubická rovnice

Kubickou rovnicí nazveme algebraickou rovnici třetího stupně, s koeficienty $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$, potom má rovnice tvar:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ x \in \mathbb{C}.$$

Stejně tak sem spadají rovnice, které lze na tento tvar převést ekvivalentními úpravami.

VIÈTOVY VZORCE

I pro kubickou rovnici existuji vzorce popisující jednotlivé vztahy mezi koeficienty a kořeny:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a};\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a};\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

ke kterým lze dojít obdobným způsobem jako u Viètových vzorců pro kvadratickou rovnici. Použití v praxi je však složitější, neboť je třeba najít tři hodnoty, které vzájemně splňují zadané podmínky. [14] [20]

3. 3. 1 Cardanovy vzorce

Cardanovy vzorce slouží pro nalezení kořenů kubické rovnice, o jejich vzniku jsme se již zmiňovali v první kapitole, nyní se seznámíme s jejich odvozením.

Mějme normovaný tvar kubické rovnice:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

eliminujeme kvadratický člen substitucí $x = y - a/3$ a budeme hledat kořeny kubické rovnice:

$$y^3 + py + q = 0,$$

která je v redukovaném tvaru a kde pro koeficienty platí:

$$p = -\frac{a^2}{3} + b; q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Volme α za kořen dané rovnice, zapišme jej ve tvaru $\alpha = u + v$, dosaďme jej do redukovaného tvaru rovnice $y^3 + py + q = 0$ a upravme na tvar:

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

Podmínku pro u, v stanovme tak, abychom anulovali druhou závorku $3uv + p = 0$, tedy $uv = -p/3$.

Naši rovnici tak zredukujeme na tvar

$$u^3 + v^3 = -q$$

Poslední podmínku $uv = -p/3$ umocníme na třetí, abychom s ní mohli dále pracovat, dostáváme pak:

$$u^3 v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3.$$

Pokud budeme prvky u^3, v^3 považovat za kořeny kvadratické rovnice, budou vztahy $u^3 + v^3 = -q, u^3 v^3 = (-p/3\,)^3$, které jsme právě zformulovali, představovat zápis Viètových vzorců (viz 3.2) pro kořeny u^3, v^3 kvadratické rovnice $z^2 + qz - (p/3)^3 = 0$. Tato rovnice se označuje jako kvadratická rezolventa rovnice $y^3 + py + q = 0$. Nyní již snadno můžeme vypočítat kořeny u^3, v^3 kvadratické rezolventy:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Těmito vztahy uvádíme dvě binomické rovnice třetího stupně pro neznámé u, v, kde každá z těchto proměnných může nabývat v tělese komplexních čísel tří hodnot. Můžeme tedy dostat 9 hodnot pro kořen $\alpha = u + v$ rovnice $y^3 + py + q = 0$. Nesmíme zapomenout na podmínku, kterou jsme zavedli pro čísla u, v, tedy že $uv = -p/3$, a tak nám z každých tří hodnot u vychází vždy jediná hodnota pro v, a to $v = -p/3u$. Pro součet $u + v$ získáváme tři hodnoty.

Volme u_1 jako označení jedné hodnoty třetí odmocniny $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Zvolíme-li $\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ jednu primitivní odmocninu z jedné, budou zbylé hodnoty následující $\beta u_1; \beta^2 u_1$. Pro u_1 vypočteme $v_1^3 = -\frac{p}{3u_1} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$; v_1 je kořenem rovnice $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

Pro kořeny $y^3 + py + q = 0$ platí:

$$\alpha_1 = u_1 + v_1$$

$$\alpha_2 = \beta \mathrm{u}_1 + \beta^2 v_1$$

$$\alpha_3 = \beta^2 \mathrm{u}_1 + \beta v_1$$

[14] [20] [21]

ROZKLAD NA SOUČIN

Každý algebraický mnohočlen stupně n lze podle definice o násobení polynomů rozložit na součin až n algebraických členů nižšího stupně. K rozkladu kubické rovnice lze využít vzorců $A^3 \pm B^3 = (A \pm B) \cdot (A^2 \mp AB + B^2)$ či $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$, dále pak můžeme „uhádnout“ jeden z kořenů dosazením zvoleného čísla do rovnice. Vydělením kubického mnohočlenu mnohočlenem prvního stupně získáme kvadratický trojčlen, který již řešit umíme.

3. 3. 2 Speciální případy kubické rovnice a jejich řešení

Stejně jako u kvadratické rovnice sem zařadíme kubické rovnice, kde je nějaký z koeficientů roven 0. Opět lze všechny rovnice vyřešit přes Cardanovy vzorce, avšak některé neúplné rovnice lze vyřešit jednodušším způsobem.

KUBICKÁ ROVNICE BEZ ABSOLUTNÍHO ČLENU

V této rovnici chybí absolutní člen, tedy $d = 0$ a máme následující tvar:

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0$$

Tuto rovnici vyřešíme snadno převedením na kvadratickou rovnici pomocí vytknutí neznámé x z každého členu, každá takováto rovnice má pak jeden kořen nulový, tedy $x_1 = 0$. Pokud by byl ještě další z členů nulový, tedy pokud $b, c = 0$, můžeme pokračovat opět stejným postupem a kvadratickou rovnici vyřešit podle postupu pro ryze kvadratickou rovnici či kvadratickou rovnici bez absolutního členu. (viz kapitola 3. 2. 1)

KUBICKÁ ROVNICE BEZ KVADRATICKÉHO A LINEÁRNÍHO ČLENU

Tento případ nastává, pokud $b = 0 \wedge c = 0$, dostáváme tak rovnici:

$$ax^3 + d = 0$$

kterou vyřešíme celkem snadno pomocí vzorců pro rozklad polynomů $A^3 \pm B = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$.

3. 4 Rovnice čtvrtého stupně

Rovnicí čtvrtého stupně, v některých zdrojích nazývaná jako kvartická, nazveme rovnici tvaru $ax^4 + bx^3 + cx^2 + d = 0$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$ a x je neznámá. Abychom si ulehčili vyjádření vzorce, budeme pracovat s normovaným tvarem rovnice, což znamená, že $a = 1$.

3. 4. 1 Cardanovy vzorce pro rovnice čtvrtého stupně

Označení „Cardanovy vzorce" není v tomto případě zcela přesné, jelikož jako první přichází s obecným řešením bikvadratické rovnice Cardanův žák Ludovico Ferrari (1522—1565) v průběhu 15. století. Metoda však byla publikována v Cardanově díle „Ars magna." Ferrari využívá, stejně jako Cardano u kubické rovnice pro rovnici 4. stupně substituci, aby se zbavil kubického členu. [22] s. 178

Ukážeme si jeho postup. Normovaný tvar rovnice $x^4 + ax^3 + bx + c = 0, x \in \mathbb{C}$ nejprve upravíme substitucí $x = y - a/4$, abychom odstranili kubický člen a získali tak rovnici:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Nové koeficienty vyjádříme vztahy:

$$p = b - \frac{3}{2^3}a^2$$

$$q = c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2^3}a^3$$

$$r = d - \frac{1}{2^2}ac + \frac{1}{2^4}a^2b - \frac{3}{2^8}a^4.$$

Rovnici $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ upravíme doplněním na čtverec a přesunem jednotlivých algebraických členů:

$$(y^2 + p)^2 = py^2 + p^2 - qy - r.$$

Zavedeme do kvadratického členu proměnnou m, jakožto dělitele pro levou stranu. Vyváženost rovnice zajistíme přidáním $2y^2m + 2pm + m^2$ na obou stranách. Po přeskupení koeficientů získáváme tvar:

$$(y^2 + p + m)^2 = (p + 2m)y^2 - qy + (m^2 + 2mp + p^2 - r),$$

který je ekvivalentní k původní rovnici bez ohledu na to, jakou hodnotu nabude m.

Hodnotu m zvolíme tak, abychom na pravé straně získali druhou mocninu. Z toho vyplývá, že diskriminant pro y je nulový a kořenem rovnice tak je m

$$(-q)^2 - 4(p + 2m)(m^2 + 2mp + p^2 - r) = 0,$$

následně ještě upravíme na tvar:

$$m^3 + \frac{5}{2}pm^2 + (2p^2 - r)m + \left(\frac{p^3}{2} - \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8}\right) = 0.$$

Toto je kubická resolventa kvartické rovnice. Hodnotu m získáme ze vzorců uvedených v podkapitole 3. 3. 1. Pokud je m kořenem rovnice $(p + 2m)y^2 - qy + (m^2 + 2mp + p^2 - r)$, tak druhou mocninou této rovnice je:

$$\left(y\sqrt{p + 2m} - \frac{q}{2\sqrt{p + 2m}}\right)^2.$$

Je zde problém pro $p + 2m = 0$, který je ve jmenovateli zlomku a nulou nelze dělit. Pokud $q = 0$, získáváme bikvadratickou rovnici, jejíž jednodušší řešení uvedeme v následující kapitole. V obecném případě vždycky platí, že musíme vybrat kořeny kubické rovnice takové, že platí $p + 2m \neq 0$, kromě rovnice $x^4 = 0$. Nyní tedy máme m, které je kořenem kubické rovnice, a $p + 2m \neq 0$, dostáváme tak rovnici tvaru:

$$(y^2 + p + m)^2 = \left(y\sqrt{p + 2m} - \frac{q}{2\sqrt{p + 2m}}\right)^2.$$

Rovnice má nyní tvar $A^2 = B^2$, který můžeme upravit na $A^2 - B^2 = 0$, což lze pomocí vzorce rozdílu čtverců upravit:

$$\left(y^2 + p + m + y\sqrt{p + 2m} - \frac{q}{2\sqrt{p + 2m}}\right)\left(y^2 + p + m - y\sqrt{p + 2m} + \frac{q}{2\sqrt{p + 2m}}\right) = 0.$$

Tuto rovnici vyřešíme pomocí vzorce pro řešení kvadratické rovnice a získáme tak čtyři kořeny rovnice, které můžeme zapsat jako:

$$y = \frac{\pm_1\sqrt{p+m} \pm \sqrt{-\left(3p + 2m \pm_1 \frac{2q}{\sqrt{p+2m}}\right)}}{2},$$

kde $\pm$ označuje buď $+$ nebo $-$ a $\pm_1$ musí nabývat současně stejného znaménka, dostáváme tak čtyři různé kombinace pro kořeny rovnice čtvrtého stupně. Nakonec ještě odstraníme zavedenou substituci $x = y - \frac{a}{4}$ a výsledný vzorec pro řešení kořenů rovnice čtvrtého stupně má tvar:

$$x = -\frac{a}{4} + \frac{\pm_1\sqrt{p+m} \pm \sqrt{-\left(3p + 2m \pm_1 \frac{2q}{\sqrt{p+2m}}\right)}}{2}.$$

[23][22]

Toto není jediná metoda, kterou lze vzorce odvodit. S dalšími metodami přišli například Leonhard Euler či René Descartes, který metodu založil na rozkladu rovnice $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ na dva kvadratické trojčleny, které splňují podmínku nulové hodnoty koeficientu kubického členu. [24]

3. 4. 2 Speciální případ rovnic čtvrtého stupně

I mezi rovnicemi vyšších stupňů lze nalézt speciální případy, jejichž řešení je jednodušší a jejich algoritmus řešení je „univerzální.“

BIKVADRATICKÉ ROVNICE

Takto se nazývá každá rovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na tvar:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

kde $x \in \mathbb{C}$ je neznámá a koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Pro řešení těchto rovnic se vhodně využije substituce $y = x^2$, rovnice má tedy tvar:

$$ay^2 + by + c = 0,$$

což je již kvadratická rovnice, kterou umíme vyřešit a obdržíme kořeny y_1, y_2, nesmíme však zapomenout, že šlo o substituci, tedy $x^2 = y_1; x^2 = y_2$, čili celkem získáme čtyři kořeny $x_{1,2,3,4}$. [23]

3. 5 Rovnice pátého a vyšších stupňů

Algebraickou rovnici $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, x \in \mathbb{C}$ nazveme rovnicí pátého stupně, pokud $n = 5$, šestého stupně, když $n = 6$ atp. Obecně řekneme, že pro $n \geq 5$ se jedná o rovnice stupně pět a vyšší. Tyto rovnice nelze řešit univerzálním algoritmem, tedy neexistuje univerzální analytický vzorec vyjadřující řešení rovnice. První, kdo popíral možnost obecného řešení, byl německý matematik Carl Friedrich Gauss, prvním důkazem jej podpořil italský matematik P. Ruffiny, avšak jeho důkaz byl neúplný. Správný důkaz uvádí r. 1826 norský matematik Niels Henrik Abel. [21]

Má-li rovnice stupně $n \geq 5$ speciální tvar, lze ji řešit. Jedno z možných řešení jsme již uvedli v podkapitole 3. 4. 2, další takové speciální případy následují níže.

BINOMICKÉ ROVNICE

Jedná se o rovnici s neznámou $x \in \mathbb{C}$, která má tvar

$$px^n + q = 0,$$

kde $p \neq 0; p, q \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}$. Tuto rovnici můžeme upravit na tvar $x^n = -q/p$. Je-li tedy $q = 0$, pak i $-q/p = 0$ a rovnice má právě jedno n-násobné řešení $x = 0$. Je-li však $q \neq 0$ a $-q/p = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pak rovnice má n různých komplexních kořenů, a to:

$$x_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Všechny kořeny tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka se středem v počátku a vzdálenost vrcholů od počátku je rovna $\sqrt[n]{|z|}$. [25]

RECIPROKÉ ROVNICE

Uvažujme polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$. Výraz $f(x) = 0$, kde $k = 0, 1, 2, \dots, n$, pak nazýváme:

1) Reciproká rovnice prvního druhu, pokud $a_k = a_{n-k}$
2) Reciproká rovnice druhého druhu, pokud $a_k = -a_{n-k}$

3) Reciproká rovnice sudého stupně pro sudé n
4) Reciproká rovnice lichého stupně pro liché n

Mějme reciprokou rovnici druhého druhu, každá z nich má kořen $x = 1$. Celou rovnici tak vydělíme polynomem $(x - 1)$ a dostaneme reciprokou rovnici prvního druhu.

Každá reciproká rovnice prvního druhu a lichého stupně má kořen $x = -1$. Pokud rovnici vydělíme dvojčlenem $(x + 1)$ a dostaneme reciprokou rovnici prvního druhu a sudého stupně.

Reciprokou rovnici prvního druhu, sudého stupně můžeme převést na algebraickou rovnici polovičního stupně, pokud ji vydělíme výrazem $x^{n/2}$ a zavedeme-li substituci:

$$y = x + \frac{1}{x} \qquad y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \qquad y^4 - 4y^2 + 2 = x^4 + \frac{1}{x^4}$$

Z výše uvedeného vidíme, že je-li číslo x kořenem reciproké rovnice, pak je jejím řešením i číslo x^{-1}. Takto jsme schopni vyřešit reciproké rovnice do devátého (resp. desátého) stupně. Pro rovnice vyšších stupňů musíme kvůli matematické obtížnosti přejít k řešení pomocí Hornerova schématu, numerických metod či za využití počítačových programů. [26]

4 Kvadratické rovnice ve SŠ matematice

Algebraické rovnice provází žáky a studenty v průběhu celého jejich studia, ať se jedná o základní školu, kde jsou to převážně lineární rovnice, o střední školu, kde se žáci dostanou k rovnicím kvadratickým a speciálním případům rovnic vyšších stupňů, či o některé typy vysokých škol, kdy se studenti seznámí s rovnicemi stupně třetího, čtvrtého a se speciálními rovnicemi vyšších stupňů.

Podle vlastních dosavadních zkušeností získaných v průběhu středoškolského studia, vysokoškolských praxí a rozhovorů s učiteli matematiky, které jsem při svých praxích potkala, jsou kvadratické rovnice vyučovány tak, aby se je žáci co nejsnáze naučili, ale nemyslím si, že je zcela pochopí. Žákům jsou předloženy výsledné vzorce, do kterých se učí při řešení kvadratických rovnic využívat. Procvičování probíhá společným počítáním příkladů na tabuli, ale vzorce nejsou odvozovány. Možnými důvody k tomuto způsobu výuky mohou být neochota žáků látku více pochopit, množství látky, se kterou musí učitelé žáky seznámit či nedostatek času, který je výuce ponechán. Při srovnání výsledků s výsledky šetření TIMSS 2007, zpracovanými Rendlem a Vondrovou, se ukázalo, že oblast rovnic a nerovnic má až 60% slabých a velmi slabých úloh a patří tak mezi nejslabší znalostní oblasti českých žáků. [27]

Kvadratické rovnice jsou matematickým tématem, které je zařazeno do každého středoškolského studijního oboru zakončeného maturitní zkouškou. Tato látka je zařazena do státní maturity z matematiky, tedy do společné části maturity, a k jejímu úspěšnému složení je zapotřebí dosáhnout následujících kompetencí:

„Žák dovede

- *řešit neúplné i úplné kvadratické rovnice i nerovnice;*
- *užít vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice;*
- *užít kvadratickou rovnici při řešení slovní úlohy.“* [27]

Každý žák maturitního oboru by tak proto měl být s tématem kvadratické rovnice, respektive nerovnice, dostatečně seznámen, a to i z toho důvodu, že rozvíjí logické uvažování a poskytuje možnosti, jak řešit mnohé úlohy s reálným kontextem.

Rozsah znalostí a dovedností, kterých by měl žák dosáhnout v průběhu středoškolského studia, je sepsán v Rámcovém vzdělávacím programu (dále RVP) pro příslušný studijní obor, avšak tyto požadavky jsou příliš obecné. Jako příklad uvádíme očekávaný výstup z tematického celku *„Číslo a proměnná“* z RVP pro gymnázia: *„Žák řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení.“* [29]

Ačkoli se jedná o RVP pro gymnázia, neznamená to, že v RVP pro další maturitní obory není téma kvadratické rovnice zahrnuto, což vyplývá z požadavků k maturitní zkoušce, které jsou ve společné části shodné.

Na základě příslušného RVP je každou školou vypracován Školní vzdělávací program (dále ŠVP), podle kterého učitelé postupují v učivu, probírají příslušnou látku a naplňují dílčí vzdělávací cíle. ŠVP různých škol jsou v některých případech volně přístupné na webových stránkách školy. Po prohlédnutí webových stránek několika středních škol v Mladé Boleslavi a Liberci najdeme ŠVP zveřejněn většinou na gymnáziích, ekonomických školách a školách technického zaměření (například průmyslové školy). Prohlédnuto bylo dvacet odlišných ŠVP na třinácti různých školách v těchto městech a byla zjištěna dvě časová a tematická zařazení kvadratických rovnic do výuky.

První část ŠVP, složená ze ŠVP šesti různých gymnázií a Integrované střední školy v Mladé Boleslavi, téma kvadratické rovnice zařazuje do výuky ve 2. pololetí prvního ročníku studia. Jejich výklad je zařazen za algebraické výrazy společně s lineárními rovnicemi. Po jejich probrání přichází na řadu planimetrie a až následně téma funkcí. [30] [31] [33] [34] [35] [36] [37] [37]

Druhou část ŠVP tvoří programy maturitních studijních oborů zbývajících šesti středních škol, především obchodních akademií, průmyslových škol a technických škol. Na těchto školách jsou kvadratické rovnice ve ŠVP zařazeny výukově na konec 2. pololetí prvního ročníku či začátek 1. pololetí druhého ročníku. Výkladu kvadratických rovnic předchází učivo lineárních rovnic a lineární i kvadratické funkce. [39] [40] [41] [42] [43] [44] [45] [46] [47] [47] [48] [49]

Z doby, kdy jsem sama studovala na střední škole, mám v paměti, že kvadratické rovnice byly dlouho abstraktním pojmem a nevěděla jsem, co si pod nimi mám představit. Učivo o rovnicích jsme vnímali se spolužáky jako látku, kterou je třeba se naučit pro zvládnutí testu, ale nevěděli jsme například, jak se přišlo na vzorec s diskriminantem či kde bychom kvadratickou rovnici prakticky využili. V další části této práce se budeme zabývat především přípravou na výuku, které jsem vytvořila jako nástroj k lepšímu pochopení kvadratických rovnic na střední škole.

5 Grafické znázornění kvadratické rovnice

Grafické znázornění kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsem použila jako pomůcku pro lepší pochopení a větší názornost při výuce. Kvadratický člen rovnice, kde $a = 1$, lze jednoduše znázornit jako čtverec o délce strany x, v případě $a \neq 0;\ 1$, odpovídá počet čtverců hodnotě a. Člen lineární zobrazíme jako obdélník s délkami stran b a x a člen absolutní jako plochu s daným obsahem.

Než začneme výklad grafického znázornění jednotlivých typů rovnic, je nutné poukázat na omezení, která musíme vzít při použití tohoto zobrazení na vědomí.

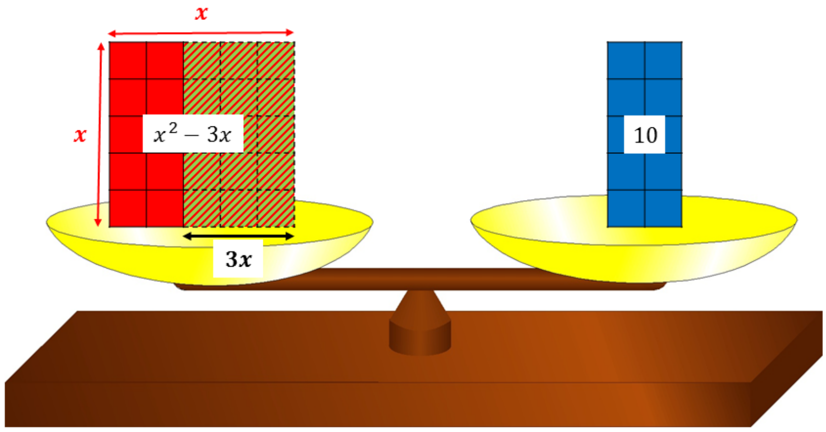
Pro pochopení látky je třeba, aby příklady byly jednoduché, aby jejich řešení nečinilo žákům obtíže. Při vhodně zvoleném měřítku by bylo možné graficky znázornit kteroukoli kvadratickou rovnici, jejíž kořen má ukončený desetinný rozvoj. My však budeme pracovat s rovnicemi, jejichž kořeny jsou celočíselné, tedy $x \in \mathbb{Z}$, abychom mohli kvadratickou rovnici jednoduše a jednoznačně graficky znázornit.

Hlavní myšlenka, kterou v této metodě využijeme, pracuje se vzájemným vztahem jednotlivých členů kvadratické rovnice. Vycházíme z předpokladu, že součet absolutní hodnoty koeficientů kvadratického a lineárního členu je stejný jako absolutní hodnota členu absolutního. Kvadratický a lineární člen obsahují neznámou, kterou tak oddělíme od absolutního členu, ve kterém obsažena není. V základním tvaru je hodnota absolutního členu záporná. Pokud $c > 0$, pak bychom jeho hodnota byla po přičtení k oběma stranám rovnice záporná a zápornou plochu není možné graficky znázornit. Porovnáním s Viètovými vzorci tedy víme, že kořeny kvadratické rovnice musí mít opačná znaménka, jeden musí být kladný, označme jej x_k a druhý záporný, ten označme jako x_z.

Pro dobré a vystihující znázornění musí mezi kořeny panovat ještě jedna vlastnost, lineární člen musí mít kladný koeficient, tedy absolutní hodnota kladného kořenu musí být menší, nežli absolutní hodnota kořenu záporného, a to právě kvůli grafickému znázornění. Pro lepší pochopení uvedeme příklad, ve kterém použijeme dvě kvadratické rovnice, jejichž kořeny mají opačnou hodnotu.

Nejprve popíšeme rovnici, která nám bude působit potíže při znázornění, jelikož budeme muset odečíst lineární člen. Oddělujeme kvadratický a lineární člen, který obsahuje neznámou x od členu absolutního, který ji neobsahuje

$$x^2 - 3x - 10 = 0; K = \{-2; 5\}, |x_z| < |x_k|$$

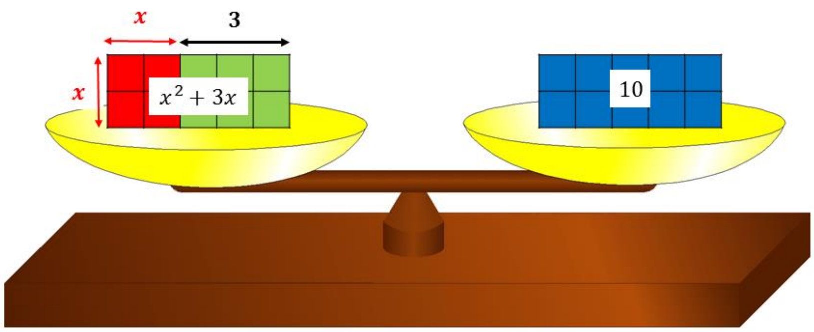


Obrázek 4: Znázornění rovnice s b<0

Takto bychom znázornili upravenou rovnici $x^2 - 3x = 10$. Absolutní člen jsme přičetli k oběma stranám, abychom oddělili neznámou, a váhy značí rovnost obou stran rovnice. Kvadratický člen je znázorněn jako čtverec s délkou strany x, z části je tento čtverec překrýván zeleným obdélníkem s délkami stran x a 3 značeným zeleně. Plocha, která je pruhovaná, je odečtená, neměla by být tedy vůbec zobrazena a zbylá část kvadratického členu by byla znázorněna jako obdélník. To nám činí problém, jelikož kvadratický člen je součinem dvou shodných hodnot.

Nyní graficky vyjádříme rovnici, jejíž kořeny mají opačné hodnoty oproti předchozí rovnici:

$$x^2 + 3x - 10 = 0; K = \{-5, 2\}; |x_z| > |x_k|$$



Obrázek 5: Znázornění rovnice s b>0

Tato rovnice je dobře znázornitelná, opět jsme k oběma stranám přičetli absolutní člen, získali jsme tak ekvivalentní rovnici $x^2 + 3x = 10$. Na levé straně rovnice tak máme členy, jež zahrnují neznámou, a na straně pravé je absolutní člen. Díky použití vah je viditelná rovnost, která mezi členy panuje. Oproti předchozí rovnici se záporným lineárním členem je dobře vidět rozdíl mezi kvadratickým a lineárním členem, které se nijak nepřekrývají, kvadratický člen je zobrazen jako čtverec, lineární člen jako obdélník s obsahem $3x$. Znázornění je takto jednoznačné, jelikož jsou splněny požadované podmínky:

1. kvadratický člen je zobrazen jako čtverec o délce strany x,
2. lineární člen je uveden jako obdélník s délkami stran 3 a x,
3. plocha má velikost 10.

Není podstatné, zda je základnou zobrazeného obdélníku určena strana délky x nebo strana délky $x + b$, hodnota kořenů se tím nezmění.

Shrňme si tedy nyní, jak má ideálně vypadat kvadratická rovnice, kterou budeme využívat k odvození způsobů řešení jednotlivých typů kvadratických rovnic. Pro rovnici bude platit následující:

1. $a, b, c, x \in \mathbb{Z}; a \neq 0$
2. $c < 0$
3. $|x_z| > |x_k|$, neboli $b > 0$.

Na obrázcích 4 a 5 jsme využili pro lepší názornost váhy, což je jedno z matematických prostředí, se kterými pracuje tzv. „Hejného matematika“. Je vhodné ji použít nejen pro kvadratickou rovnici, ale i pro další algebraické rovnice. Váha dobře vystihuje rovnost dvou stran a u rovnic nám tím umožňuje vyjádřit, které úpravy jsou ekvivalentní a které nikoli, provedeme-li nějakou početní úpravu (například přičtení či vynásobení) pouze na jedné misce vah, rovnováha bude narušena a rovnice tak již neodpovídá svému zadání.

5. 1 Úvodní úlohy

Úvodní slovní úlohy mají za cíl ukázat, že slovní úlohu, kterou je možné vyřešit kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, můžeme vyřešit i jinak, aniž bychom znali nějaký postup pro řešení kvadratické rovnice. Tím, že pro znázornění problému ve slovní úloze použijeme čtvercovou sít, se její řešení nebude jevit příliš abstraktně a stejně tak nebude příliš abstraktní kvadratická rovnice, kterou můžeme pro vyřešení úlohy také použít. Jak jsme již popsali, členy kvadratické rovnice, a tedy i ji samotnou, lze graficky znázornit. Neznámá x tak nemusí být pouze abstraktním pojmem, v našem případě je zobrazena jako délka strany.

Jedinou rovnici, ke které nepovažuji za vhodné hledat slovní úlohou s grafickým záznamem, je kvadratická rovnice bez absolutního členu. Pokud v této rovnici vytkneme x, tedy $x(ax + b) = 0$, je zjevné, že jeden kořen rovnice je nulový, což má za následek obdélník s délkou stran 0 a b, zobrazí se jako úsečka délky b. Pokud bychom chtěli na úsečce vyznačit jednotlivé členy kvadratické rovnice, měli bychom s tím problém, jelikož kvadratický člen nezobrazíme, avšak v rovnici jej nalezneme.

Ve slovních úlohách budeme využívat ilustraci situace pomocí čtvercové sítě. Ve výsledném znázornění se objeví graficky zakreslený kvadratický, lineární i absolutní člen. Jedná se o slovní úlohy, které vedou na rovnice s celočíselnými kořeny i koeficienty. Volíme je proto, že jsou dobře řešitelné, kořeny snadno viditelné. Pokud bychom volili desetinná čísla (což je možné, pro grafické znázornění bychom využili například milimetrového papíru), může být řešení chaotické či složité.

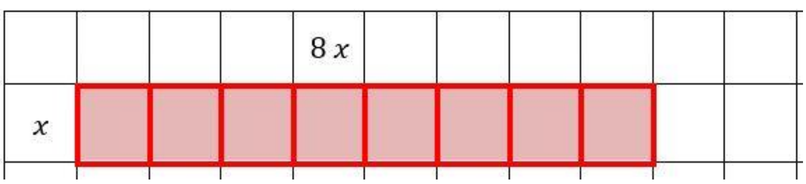
Úloha 1

Rodinný domek má celkem 8 stejných čtvercových oken. Jaký rozměr musí mít skleněné okenní tabule, když víme, že okna zabírají celkem $8\ m^2$*?*

První uvedená slovní úloha vede na ryze kvadratickou rovnici. Začínáme touto neúplnou kvadratickou rovnicí proto, že ji lze řešit jednoduše, intuitivně.

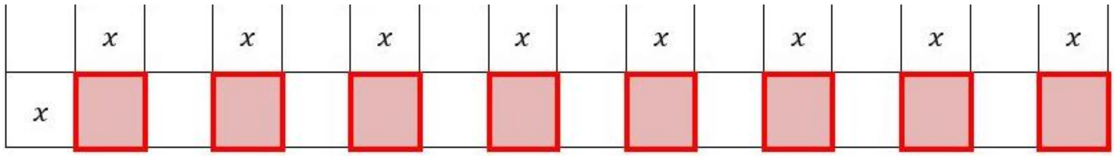
Grafické řešení

Nejprve úlohu slovně rozebereme, prakticky ji řešíme pomocí metody „pokus omyl“. Víme, že je třeba zakrýt $8m^2$, můžeme ji tedy zakreslit do mřížky ($jednotka\ 1cm$) jako obdélník o délce stran $1 \times 8\ m$ či $2 \times 4\ m$ $(1\ m \sim 1\ cm)$, kdy první případ je vhodnější, jelikož lépe vystihuje naše zadání.



Obrázek 6: Grafické znázornění 1. slovní úlohy (A)

Dále víme, že se jedná o osm čtvercových skleněných tabulí, což znamená, že plochu musíme rozdělit na osm shodných ploch, každá tedy bude mít obsah $1m^2$ a délka hrany okenní tabule tak bude $1m$.



Obrázek 7: Grafické znázornění 1. slovní úlohy (B)

Slovní úlohu vyřešíme i početně, abychom ověřili výsledek grafického řešení.

Početní řešení

$x \ldots rozměr\ skleněné\ tabulky$

$S \ldots obsah \ldots 8\ m^2$

$S = 8 \cdot x \cdot x$

$x = ?$

$8\,x \cdot x = 8$

$8\,x^2 = 8$

$x^2 = 1$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$

$|x| = 1$

$x_{1,2} = \pm 1$

Diskuse řešení

V početním řešení nám vyšly dva kořeny, jeden kladný, druhý záporný, pro naši slovní úlohu je možné využít jen kladného kořene, protože hledáme rozměry okenní tabule, které nemohou být záporné.

Odpověď

Skleněné okenní tabule musí mít rozměry 1×1 *metr.*

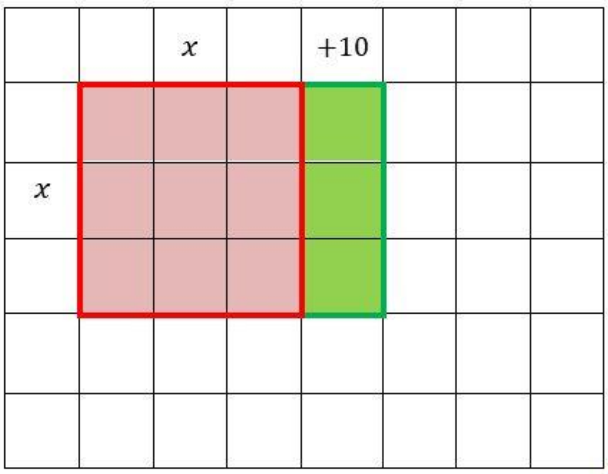
Úloha 2

V malé vesničce nedaleko Mladé Boleslavi se nacházel malý čtvercový hřbitov. Kvůli jeho malé kapacitě bylo nutné hřbitov zvětšit. Zastupitelé obce rozhodli, že hřbitov prodlouží o 10 m. Po prodloužení bude mít hřbitov rozlohu 1200 m^2*. Jaké budou nové rozměry hřbitovních zdí? O kolik* m^2 *byl hřbitov zvětšen?*

Další motivační slovní úloha vede na úplnou kvadratickou rovnici, její řešení je však viditelné ze správného nákresu.

Začneme opět tím, že si rozebereme zadání. Víme, že hřbitov je obdélníkový a má novou rozlohu $1200\ m^2$, vypočteme ji jako součin délky stran obdélníku. Zakreslovat budeme opět do čtvercové sítě se čtverečky o rozměrech $1 \times 1\ cm$ a zvolíme přiměřenou jednotku $1\ cm \sim 10\ m$. Nákres může mít tedy rozměry $1 \times 12; 2 \times 6; 3 \times 4$.

Dále víme, že původní tvar hřbitova byl čtverec a ke zvětšení došlo prodloužením hřbitovních zdí o $10m$. Známe tedy rozdíl mezi délkami stěn hřbitova, převedeme-li to na naše měřítko, musí se rozměry nákresu lišit o $1cm$. To znamená, že jediný rozměr, který nám bude vyhovovat, je 3×4, v případě, že bychom volili rozměr 1×12, tak by byl hřbitov prodloužen o $110\ m$ a v případě rozměru 2×6 bychom hřbitov prodloužili o $40\ m$, což neodpovídá našemu zadání. Nákres tedy bude vypadat následovně:



Obrázek 8: Nákres 2. slovní úlohy

Červeně jsou vyznačeny původní rozměry hřbitova a zeleně je znázorněno jeho rozšíření. Cíleně jsme tak odlišili kvadratický člen od lineárního. Kdybychom zde hledali člen absolutní, je to celá plocha, na které se nyní hřbitov rozléhá.

Z nákresu vidíme, že původní délka hřbitovních zdí byla $30\ m$, v reálu tak mají hřbitovní zdi nyní rozměr $30 \times 40\ m$, původní velikost hřbitova je znázorněna červeně, tedy 9 čtverečků, 1 $čtvereček \sim 10\ m^2$ a skutečná rozloha byla $900\ m^2$.

Pro ověření výsledků vypočteme slovní úlohu klasicky za využití kvadratické rovnice.

<u>Početní řešení</u>

$x \ldots původní\ délka\ zdi$	$S_n = x(x+10)$
$x + 10 \ldots délka\ prodloužené\ zdi$	$S_s = x^2$
$S_n = 1\,200\ m^2$	$x = ?, S_s = ?$

$x^2 + 10\,x = 1200$

$x(x+10) = 1200$; *takto vytknuté x odpovídá nákresu, podle Viètových vzorců bychom příklad rozložili takto* $(x-30)(x+40) = 0$

$x_1 = 30$

$x_2 = -40$

$S_s = 30^2 = 900$

Diskuse

Při grafickém řešení se záporný kořen nezobrazí, přijdeme na něj až při algebraickém řešení rovnice. Vzhledem k tomu, že délka nemůže nabývat záporných hodnot, není pro nás kořen $x_2 = -40$ řešením.

Odpověď

Kratší hřbitovní zeď je dlouhá $30\,m$ *a delší měří* $40\,m$. *Původní rozloha hřbitova byla* $900\,m^2$.

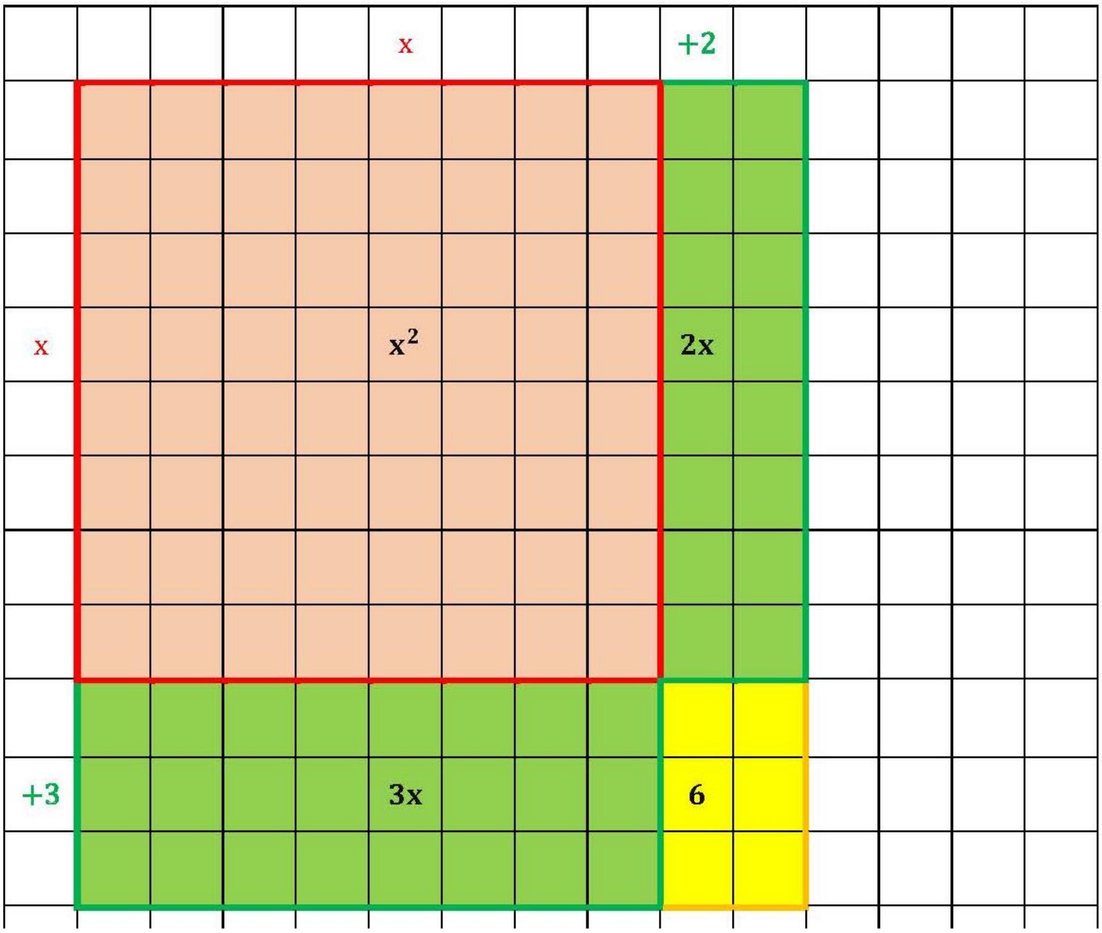
Úloha 3

Rodiče koupili obdélníkový pozemek s celkovou rozlohou $110\,m^2$. *Chtějí postavit rodinný domek čtvercové základny, přiléhající ke dvěma stranám pozemku. Na zbylé části se bude rozprostírat zahrada tvaru písmene L. Jedna část bude široká* $2\,m$ *a druhá část* $3\,m$. *Jakou plochu bude zabírat domek? Jakou bude mít délku venkovní stěna?*

Slovní úloha opět vede na obecnou kvadratickou rovnici, tentokrát již ne tak snadnou, jako v předchozí úloze.

Stejně jako u předchozích slovních úloh si všimneme tvaru a celkové rozlohy pozemku, jedná se opět o obdélník s rozlohou $110m^2$. Abychom zjistili, jaké má rozměry, musíme je opět zjistit pomocí vzorce na obsah obdélníku. 110 můžeme rozložit na několik součinů dvou čísel, $1 \times 110\,m; 2 \times 55\,m; 5 \times 22\,m; 10 \times 11\,m$ a jednotlivé rozměry postupně vylučovat v závislosti na dalších informacích ze zadání. Pro tento účel si opět uděláme náčrtek do čtvercové sítě, opět s rozměry $1 \times 1\,cm$ a měřítkem $1cm \sim 1m$.

Víme, že dům má obklopovat zahrada tvaru písmene L, z jedné strany $2m$ a z druhé strany $3m$, můžeme tedy vyloučit první a druhou kombinaci rozměrů, nesplňují zadání. Dále má dům čtvercovou základnu, tím nám tedy vypadnou i třetí možné rozměry pozemku a zůstávají pouze rozměry $10 \times 11\,m$. Neznámou délku strany domu si v nákresu označíme x.

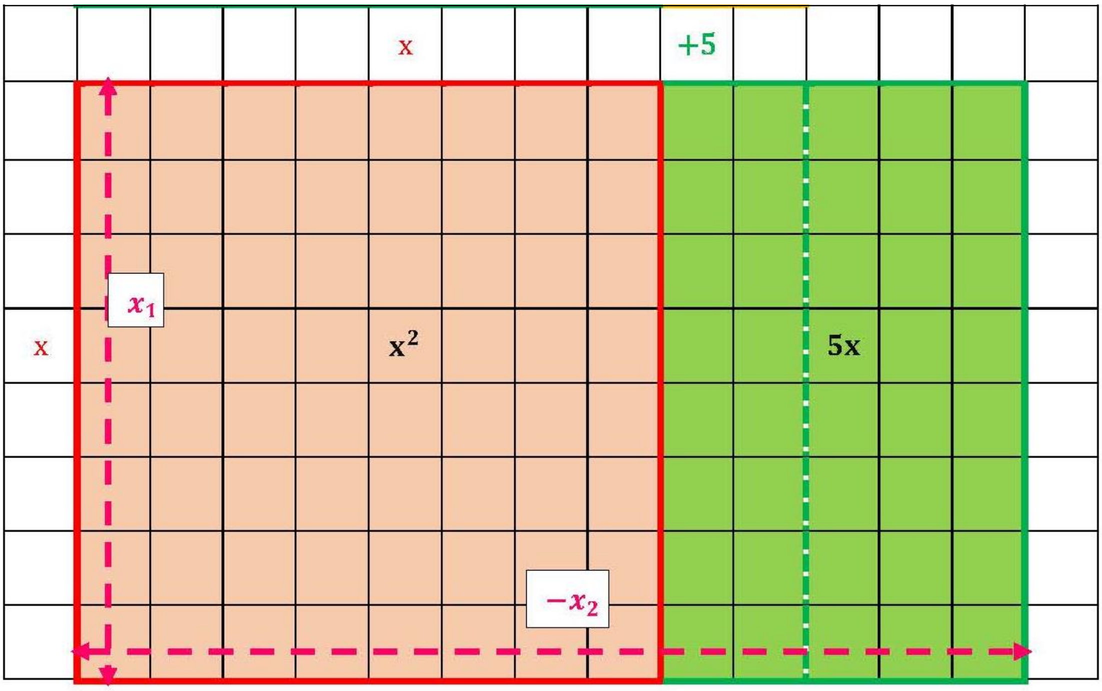


Obrázek 9: Náčrtek 3. slovní úlohy

Červeně je vyznačena základna domu, zelené jsou pruhy zahrady přiléhající k domu a žlutý je obdélník zahrady, která k domu nepřiléhá. Srovnáme-li opět jednotlivé části se členy algebraické rovnice, červeně vidíme znázorněn člen kvadratický, zeleně člen lineární a absolutní člen je roven celkové ploše obdélníku.

Již z tohoto obrázku je patrné, že délka venkovní stěny odpovídá 8 cm, tedy v reálu 8 m a celá základna domku má velikost 8×8 čtverečků, přičemž 1 čtvereček odpovídá 1 m^2, tedy výsledná plocha má rozlohu 64 m^2.

V obrázku si ještě můžeme vyjádřit stranu x a to tak, že spojíme oba pruhy zahrady do jednoho širšího a odstraníme žlutou část zahrady, která má jasnou plochu, protože se nedotýká domu. Velikost pozemku se nám tak zmenší na 104 m^2 a obrázek bude vypadat následovně:



Obrázek 10: Náčrtek 3. slovní úlohy – upravený

Po „sjednocení zahrady“ snáze vidíme, jakou délku má strana základny. Pokud bychom si sestavili příslušnou rovnici, tedy $x^2 + 5x = 104$, vidíme na náčrtku, že kladný kořen se zobrazí na straně, která vyjadřuje x, tedy $x_1 = 8$ a opačnou hodnotu záporného kořene můžeme najít na straně obdélníka, která je součtem neznámé a známého rozměru zahrady, tedy $x + 5$ a $x_2 = -13$. Podrobněji se k tomuto zjištění vrátíme při odvozování Viètových vzorců.

Získané výsledky si ještě ověříme početně přes kvadratickou rovnici.

<u>Početní metoda</u>

Opět lze využít vzorec pro výpočet obsahu obdélníku.

$a = x + 2 \ldots 1. rozměr\ pozemku$

$b = x + 3 \ldots 2. roměr\ pozemku$

$S_p = ab = 110\ m^2$

$x = ?$

$S_d = x^2 = ?$

$110 = (x + 2)(x + 3)$

$110 = x^2 + 2\,x + 3\,x + 6$

$110 = x^2 + 5\,x + 6$ / -6; *tady spojíme pruhy zahrady, sečteme lineární členy a přepočteme celkovou plochu*

$104 = x^2 + 5\,x$

$104 = x\,(x + 5)$; *takováto početní úprava odpovídá našemu grafickému znázornění, při použití Viètových vzorců bychom rovnici rozložili* $(x - 8)(x + 13) = 0$

$x_1 = 8; x_2 = -13$

$S_d = 8^2 = 64$

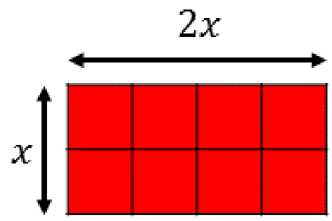
Diskuse

V početním řešení jsme nalezli i záporný kořen, který pro naše řešení však nemá smysl, jelikož rozměr nemůže být záporný, $x_2 = -13$ pro nás není správným řešením.

Odpověď

Délka stěny bude $8\ m$*. Dům bude zabírat plochu* $64\ m^2$.

5. 2 Ryze kvadratická rovnice

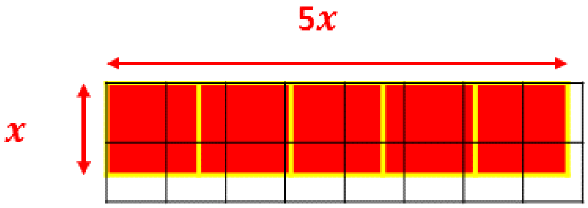


Obrázek 11: Ryze kvadratická rovnice, celočíselný kořen

Ryze kvadratickou rovnicí rozumíme neúplnou kvadratickou rovnici, kde $b = 0$. Máme tedy na mysli rovnici $ax^2 + c = 0$, kde $a \neq 0$. Obrázek 11 znázorňuje, jak jednoduše lze zobrazit rovnici $2x^2 - 8 = 0$. Červená plocha znázorňuje kvadratický člen, skládá se z osmi čtverců o délce strany x. Pokud rovnici upravíme přičtením absolutního členu k oběma stranám rovnice, dostaneme rovnici $2x^2 = 8$. Z ní můžeme vidět, čemu je roven kvadratický člen, tedy jakou plochu zabírá. Absolutní člen označuje, jaká plocha musí být odečtena, aby byla plocha zabíraná čtverci anulována. Díky tomu, že vidíme, o jaký geometrický obrazec se jedná, víme, jak spočítat jeho obsah, který je nám znám. Jednoduše tak zjistíme velikost neznámé a vypočteme kořeny rovnice. Vzhledem k početním operacím, které jsou v přípravách pro konkrétní hodinu prováděny na 1. slovní úloze, neopomeneme ani záporný kořen. Možnost grafického znázornění jednotlivých členů kvadratické rovnice využijeme později při odvozování Viètových vzorců a obecného vzorce s diskriminantem $x_{1,2} = (-\mathrm{b} \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

Kvadratický člen, který jako jediný v ryze kvadratické rovnici obsahuje neznámou, je dobře graficky znázornitelný jako čtverec o daném obsahu a v rovnici $ax^2 + c = 0$ je koeficient $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Na tomto znázornění je dobře ukázáno, že se jedná o součin čísla a jeho dvojnásobku, tedy x a $2x$.

Pokud bychom měli rovnici, kde $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, například tedy rovnici $x^2/3 - 4/5 = 0$, můžeme ji, po algebraické úpravě na ekvivalentní tvar $5x^2 - 12 = 0$, zobrazit do čtvercové sítě (černé) s jednotkou $1cm$ následovně:



Obrázek 12: Ryze kvadratická rovnice, racionální kořen

Na obrázku 12 je viditelné, že kořen rovnice $x = \sqrt{2{,}4}$, který má ukončený třicetimístný desetinný rozvoj, není dobře rozpoznatelná přesná hodnota kořenu. Náčrtek bude nepřesný, jelikož kvadratický člen není násobkem druhé mocniny. Stejně tak je špatně patrná plocha, kterou má být znázorněn absolutní člen, v červené ploše není patrné, že je shodná jako 12 čtverečků ve čtvercové síti a pokud bychom jej uvedli jako obdélník s rozměry $1 \times 12; 2 \times 6;\ 3 \times 4$, ani z jednoho rozkladu nemůžeme zjistit velikost kořene.

Tento typ rovnice je mimo obecný vzorec řešitelný dvěma dalšími způsoby, v případě, že mají koeficienty odlišná znaménka, je to rozklad podle vzorce $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, dále je možné využít postupu s přičtením absolutního členu, odmocněním a zjištěním kořenu s využitím vlastností absolutní hodnoty.

5. 3 Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Jedná se o rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, kde $c = 0$. Kvadratická rovnice bez absolutního členu má tak tvar $ax^2 + bx = 0; a \neq 0$. Ke znázornění lze využít úsečky, nikoli čtverce či obdélníku. Je to následek absence absolutního členu. Podíváme-li se blíže na kořeny této rovnice, tak vidíme, že jeden kořen bude vždy nulový, což znamená, že hodnota kvadratického členu je vždy nulová, znázornit bychom ji museli jako čtverec o nulovém obsahu, což nelze. Mohli bychom jej tedy zobrazit jako bod, lineární člen pak úsečkou, který z tohoto bodu vychází. Pro rovnici, kde $a = 1$, by tento nákres nebyl problémový, ale jakmile by se $a \neq 1$, dostaneme se do problému. V grafickém zobrazení by došlo ke sporu mezi celkovou délkou úsečky a hodnotou kořenů, jelikož a bodů znázorňujících kvadratické členy počtu a by délku úsečky prodloužila.

jelikož bychom museli příkladně kvadratický člen $5x^2$ znázornit jako pět teček, které však dají již úsečku určité délky, výsledná úsečka by tak neměla velikost druhého nenulového kořene (za předpokladu $b \neq 0$).

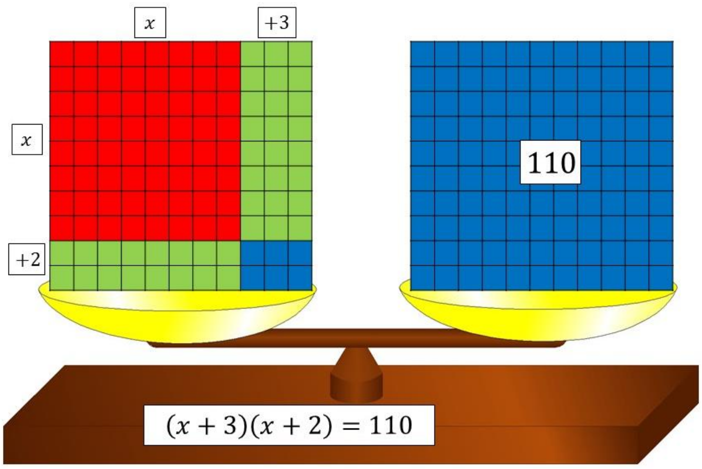
Kvadratickou rovnici bez absolutního členu lze vyřešit snadno pomocí vytýkání. Po vytknutí x z kvadratického a lineárního členu zbude dvojčlen $ax + b$, rozklad tedy vypadá $x\,(ax + b) = 0$. Podle pravidel součinu musí být první nebo druhý činitel roven nule, aby rovnice byla rovna nule. Z toho plyne, že jeden z kořenů je vždy nulový a druhý kořen je roven $-b/a$.

5. 4 Obecná kvadratická rovnice

Při odvozování Viètových vzorců a obecného vzorce s diskriminantem, využijeme třetí úvodní slovní úlohy a také budeme využívat vah, které nám pomohou zdůraznit dodržování ekvivalentních.

5. 4. 1 Viètovy vzorce

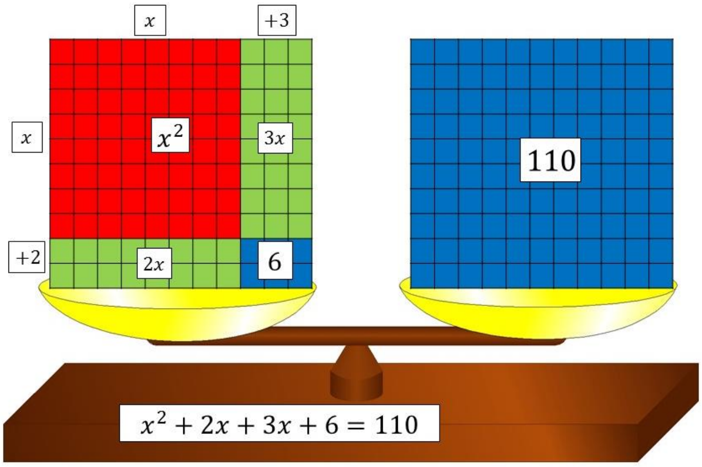
U odvození Viètových vzorců se vraťme k úvodní slovní úloze č. 3 a jejímu grafickému znázornění, které vychází ze sestavené rovnice podle zadání. Kvadratický člen je vyznačen červeně, lineární člen zeleně a absolutní člen modře. Obrazec je upravován tak, aby byla odstraněna přebytečná plocha, tedy aby byl odstraněn absolutní člen z levé strany a v rovnici tak byly odděleny člen absolutní od členů obsahující neznámou. Umožní nám to graficky zviditelnit kladný kořen rovnice.



Obrázek 13: Viètovy vzorce 1

$$(x + 3)(x + 2) = 110$$

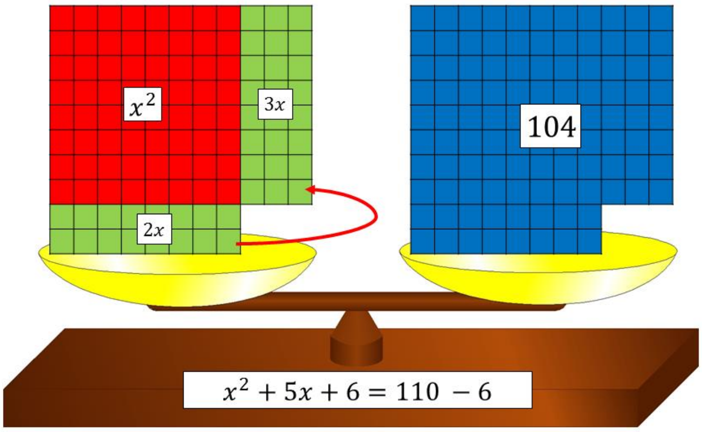
Jednotlivé činitele roznásobíme, abychom získali hodnotu jednotlivých členů.



Obrázek 14: Viètovy vzorce 2

$$x^2 + 3x + 2x + 6 = 110 \,/ - 6$$

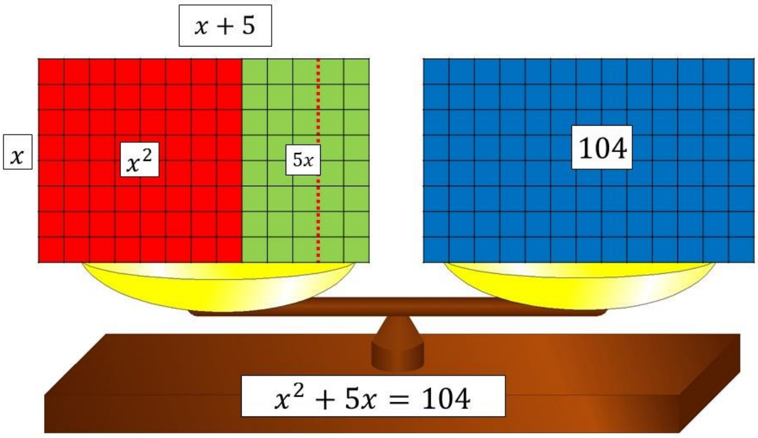
Aby byly zjištěny hodnoty x, musí být odečtena přebytečná známá plocha.



Obrázek 15: Viètovy vzorce 3

$$x^2 + 3x + 2x = 104$$

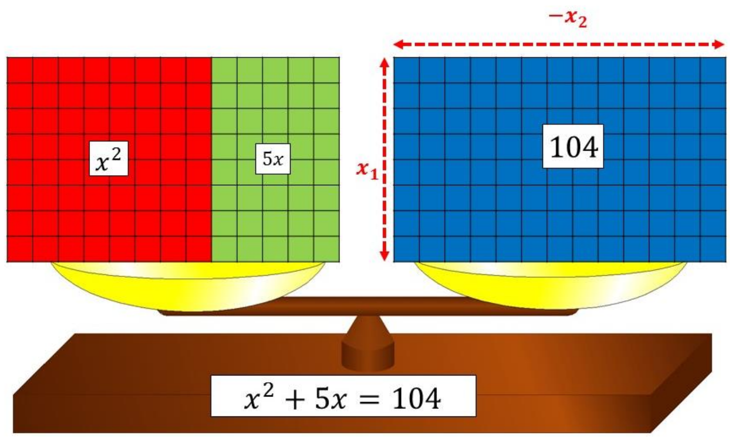
Nyní jsou přerovnávány obdélníky obsahující neznámou tak, aby strana, která znázorňuje neznámou x, byla osamocena, respektive, abychom tak neznámou vyjádřili jako délku kratší strany obdélníka vyjadřující kvadratický a lineární člen. Stejně tak jsme přeskupili obdélník na pravé misce vah, aby si strany odpovídaly jak početně, tak graficky. Po zjištění počtu čtverečků na jednotlivých stranách obdélníků poznáme, na jaké činitele rozložit absolutní člen, z nichž absolutní hodnota kladného kořenu má menší hodnotu, než absolutní hodnota kořenu záporného.



Obrázek 16: Viètovy vzorce 4

$5x$…součet pěti přidaných řad čtverců o straně x

104…celkový obsah vzniklého obdélníka, vznikne jako součin délek jednotlivých stran



Obrázek 17: Viètovy vzorce 5

Potom je znázorněn kladný kořen: $x_1 = 8$ jako kratší délka strany obdélníku. Na obrázku nalezneme i opačnou hodnotu druhého kořenu, a to v podobě druhého rozměru obdélníku, tedy $x_2 = -13$. Aby byla zachována rovnost, tak musíme absolutní člen nakonec odečíst od obou stran rovnice, což znamená, že jeho hodnota na levé straně rovnice je záporná. „Záporná plocha“ tak anuluje kvadratický a lineární člen. Obdélník se zápornou hodnotou však nedovedeme znázornit, proto vidíme na pravé misce vah záporný kořen jako délku strany kladné hodnoty, tedy opačné hodnoty pro kořen $x_2 = -13$.

Úlohu dořešme ještě početně, danou rovnici pomocí ekvivalentních úprav převedeme do anulovaného tvaru. Je třeba převést absolutní člen zpět na levou stranu rovnice. Pro zachování rovnováhy, musí být tato plocha odečtena i na levé straně. Vznikne tedy rovnice: $x^2 + 5x - 104 = 0$. Po rozkladu rovnice na součin dvou činitelů bude rovnice vypadat

$(x + 13)\ (x - 8) = 0$, jeden či druhý činitel musí být roven nule, aby byl součin roven nule, výsledné kořeny jsou: $x_1 = -13; x_2 = 8$.

Rovnici $x^2 + 2x + 3x + 6 = 110$ můžeme vyjádřit jako $x^2 + b_1x + b_2x + c_1 = c_2$, kde $b_1 + b_2 = b$ a $c_1 + c_2 = c$, tedy rovnici $x^2 + 5x = 104$, tedy $x^2 + bx = c$ a pro koeficienty platí $b_1 + b_2 = b$ a $c_1 + c_2 = c$. Vytkneme-li na levé straně kvadratické rovnice z obou členů x, dostaneme rovnici $x(x + b) = c$, tu převedeme do anulovaného tvaru $x(x + b) - c = 0$, z obou posledních rovnic vidíme, že absolutní člen je součinem dvou činitelů, kde rozdíl jejich absolutních hodnot je roven koeficientu lineárního členu b. Pro zjištění kořenových činitelů x_1, x_2 normované rovnice tedy platí:

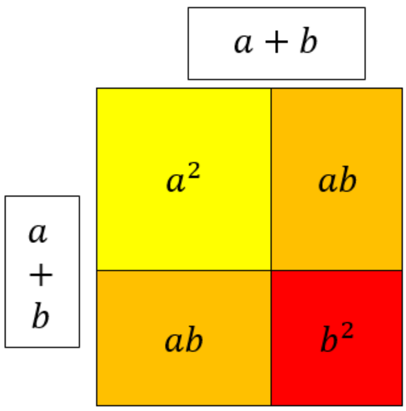
$$x_1x_2 = c; x_1 + x_2 = -b.$$

S těmito rovnicemi pak pro rozklad kvadratické rovnice na součin platí: $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$. Pro obecnou rovnici musíme uvažovat ještě koeficient kvadratického členu, pro který doposud platilo $a = 1$, obecně pro kvadratickou rovnici však platí, že $a \neq 0$, musíme vzorce upravit na následující tvar:

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}; x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

5. 4. 2 Obecný vzorec a diskriminant

Než začneme s grafickým odvozováním obecného vzorce pro kvadratickou rovnici, ukážeme, jak se graficky zobrazí vzorec $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, který stojí za nápadem graficky zobrazit kvadratickou rovnici a odvodit tak jednotlivé vzorce.

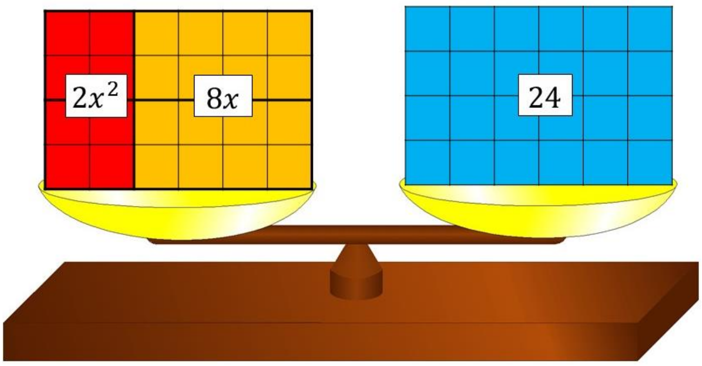


Obrázek 18: Součinový vzorec

Na obrázku 18 je dobře viditelný rozklad na součin, člen a^2 bude v kvadratické rovnici představovat kvadratický člen, člen $2ab$ využijeme jako člen lineární a za absolutní člen budeme považovat b^2.

Kvadratická rovnice, kterou použijeme k vysvětlení odvození obecného vzorce, musí opět splňovat podmínky, které byly určeny na začátku 5. kapitoly. V průběhu odvozování nebudeme provádět žádné dílčí výpočty, aby bylo možné současně odvozovat obecný vzorec s koeficienty a, b, c. Z praktického důvodu nebudeme volit koeficient $a = 1$, aby nedošlo k opomenutí jeho zápisu v součinu či podílu, v matematickém zápise se násobení či dělení číslem 1 neprojeví.

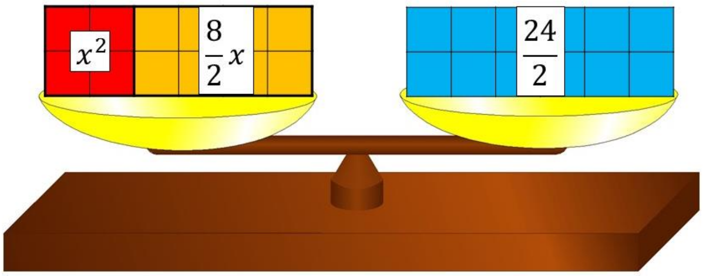
Současně při odvozování této konkrétní rovnice lze krok po kroku odvodit i obecný vzorec, použijeme-li rovnici $2x^2 + 8x - 24 = 0$, koeficienty jsou následující: $a = 2, b = 8$, $c = -24$. Abychom mohli rovnici graficky znázornit, musí být absolutní člen přičten k oběma stranám rovnice, po úpravě máme rovnici $2x^2 + 8x = 24$ a můžeme ji zobrazit:



Obrázek 19: Vysvětlení obecného vzorce 1

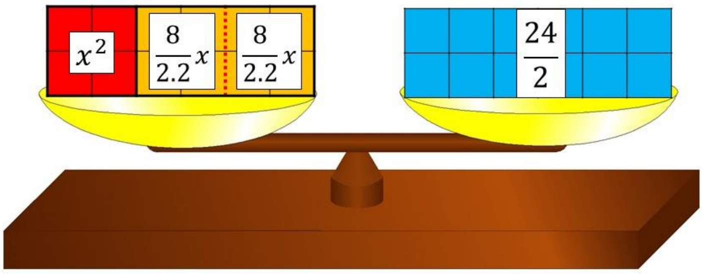
Červeně je znázorněn člen kvadratický, žlutě člen lineární a člen absolutní je modrý. Na pravé straně rovnice (pravé misce vah) tak vidíme, čemu se rovná kvadratický a lineární člen obsahující neznámou. Zobrazení rovnice je opět jednoznačné, kvadratický člen se má vyskytnout dvakrát, tedy dva čtverce, lineární člen navazuje na kvadratický, tedy musíme připojit dva obdélníky, které mají délku jedné strany x a délku druhé strany 4, absolutní člen má více možných celočíselných rozkladů, kde jsou spojeny dva obdélníky nad sebou $2 \times 12; 3 \times 8; 4 \times 6$, avšak pouze rozklad 4×6 odpovídá našemu zadání. V obecné rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ je na obou stranách odečten absolutní člen a je vyjádřeno, čemu jsou rovny zbylé dva členy. Po početní úpravě získáváme rovnici $ax^2 + bx = -c$.

K dalšímu počítání je zapotřebí normovaného tvaru rovnice, budeme zjišťovat hodnotu x, proto ji celou rovnici vydělíme koeficientem absolutního členu a dostaneme ekvivalentní rovnici $x^2 + 8x/2 = 24/2$



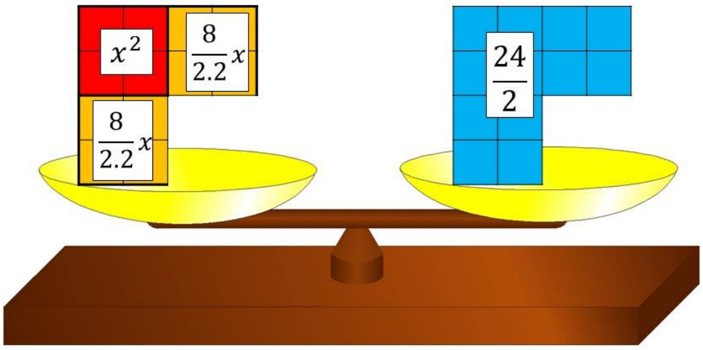
Obrázek 20: Vysvětlení obecného vzorce 2

Stejná početní operace bude provedena i u obecného tvaru kvadratické rovnice $x^2 + \ bx/a = \ -c/a$. Jediným výpočtem, který byl v tomto kroku proveden, bylo vydělení kvadratického členu. Stejně tak by upraven použitý obrázek. Pokud bychom jej neupravili a byl ponechán původní obrázek, neodpovídal by zapsané rovnici a úprava na čtverec by ve čtvercové síti již čtverec nezobrazila, což je naším záměrem.



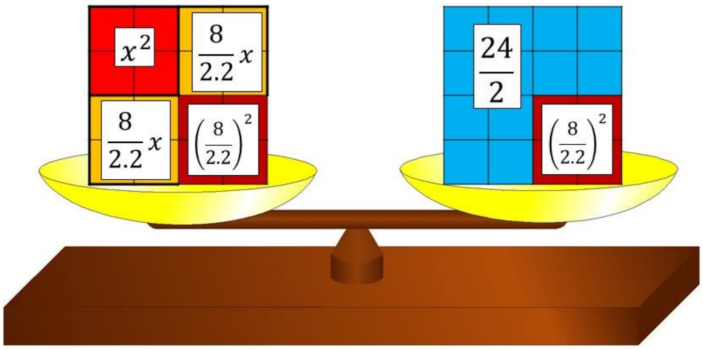
Obrázek 21: Vysvětlení obecného vzorce 3

V této chvíli je na levé straně rovnice vidět podoba s rovnicí $a^2 + 2ab + b^2$. $a^2 = x^2; 2ab = (8/2)x$ a člen b^2nám zatím není znám. Abychom jej zjistili, musí být nejdříve vypočítáno, čemu je rovno b. Lineární člen rozdělíme na dvě stejné části. Graficky jde o červenou tečkovanou čáru v oranžovém poli, početně je lineární člen vydělen dvěma. Zároveň ale nesmí být zapomenuto na to, že je tam nyní zobrazen dvakrát: $x^2 + \ 8/(2 \cdot 2)x + \ 8/(2 \cdot 2)x = 24/2$ což je $x^2 + 2[8/(2 \cdot 2)x] = 24/2$. Stejná početní operace je použita opět v obecné rovnici, která bude mít nyní tvar: $x^2 + \ 2(b/2a)x = \ - \ c/a$.



Obrázek 22: Vysvětlení obecného vzorce 4

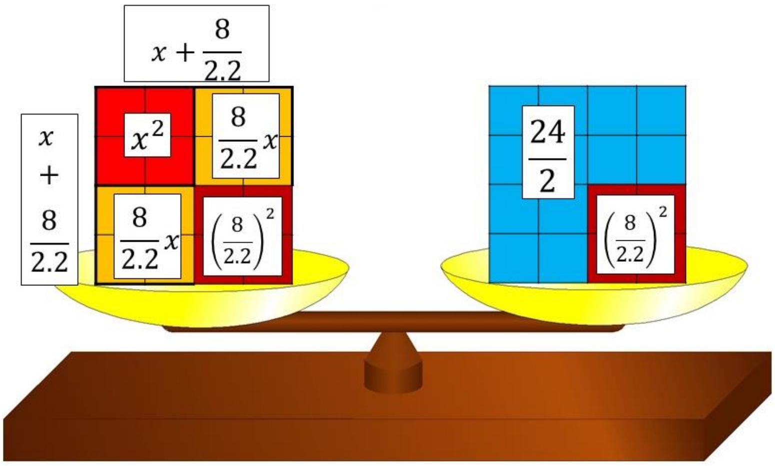
Tento obrázek není doprovázen žádnými početními operacemi, pouze jsme graficky upravili vyjádření jednotlivých členů rovnice, dalším krokem je doplnění na čtverec. Je nutné se zpět vrátit ke vzorci $a^2 + b^2$ a jeho grafickému znázornění. Jak bylo v předchozím kroku ukázáno, lineární člen byl rozložen na dvě poloviční části, ty obklopují kvadratický člen a celý obrazec je nyní třeba doplnit do tvaru čtverce



Obrázek 23: Vysvětlení obecného vzorce 5

Chybějící část má znázornit člen odpovídající b^2 ze zmiňovaného vzorce, díky tomu je vidět, že se bude jednat o čtverec a délka jeho strany musí souhlasit s přilehlými stranami sousedních obdélníků. Délky stěn ploch znázorňují lineární člen z kvadratické rovnice. Délka strany přilehlé ke kvadratickému členu má délku x, druhá strana musí mít tedy délku $8/(2 \cdot 2)$, vzhledem ke vzorci na výpočet obsahu čtverce. Obecně se bude jednat o koeficient $b/2a$. Znázornění absolutního členu musí mít délku stěny $8/(2 \cdot 2)$ a jeho obsah bude $[8/(2 \cdot 2)]^2$. V obecné rovině pak bude obsah čtverce znázorňující absolutní člen $(b/2a)^2$ Aby byla zachována rovnováha, musí být absolutní člen přidán i na druhou misku vah. Rovnice je pak upravena přičtením absolutního členu k oběma stranám rovnice a to pro zachování rovnováhy $x^2 + \ 2[8/(2 \cdot 2)]x + [8/(2 \cdot 2)]^2 = 24/2 + [8/(2 \cdot 2)]^2$.

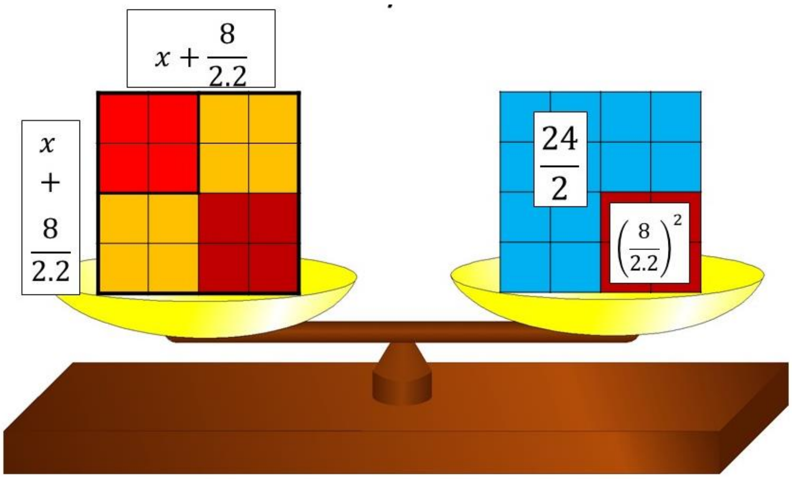
Obecná rovnice bude mít po této ekvivalentní úpravě následující tvar $x^2 + 2(b/2a)x + (b/2a)^2 = (b/2a)^2 - c/a$.



Obrázek 24: Vysvětlení obecného vzorce 6

Na levé straně rovnice je již uveden celý vzorec $a^2 + 2ab + b^2$ a kvadratický trojčlen tak může být rozložen na $(a + b)(a + b)$. Graficky tomu napomáhá vyznačení lineárního členu v oranžové části, tedy $b = 8/(2 \cdot 2)$. Po rozkladu tak bude rovnice vypadat následovně $[x + 8/(2 \cdot 2)][x + 8/(2 \cdot 2)] = 24/2 + [8/(2 \cdot 2)]^2$.

V obecné rovnici rozklad proběhne také $(x + b/2a)(x + b/2a) = (b/2a)^2 - c/a$.



Obrázek 25: Podrobné odvození 7

Na obou miskách vah jsou nyní dva shodné čtverce. U levého čtverce je obsah vyjádřen součinem dvou závorek, který může být zapsán jako druhá mocnina, jejímž základem bude lineární dvojčlen $[x + 8/(2 \cdot 2)]$. Na pravé straně zůstaneme u součtu obsahů dvou absolutních členů. Jedná se o znázorněný diskriminant, který nám určuje výsledný počet řešení. Po úpravě tedy máme rovnici: $[x+\ 8/(2\cdot 2)]^2 = [x+\ 8/(2\cdot 2)]^2 + 24/2$. U obecného vzorce bude provedena stejná úprava:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Následující úpravy již není možné jednoduše graficky znázornit. Z obrázků lze pochopit, že je hledána délka strany červeného čtverce. Další kroky se týkají vyjádření námi hledané neznámé.

Máme tedy rovnici: $[x+\ 8/(2\cdot 2)]^2 = [8/(2\cdot 2)]^2 + 24/2$, ve které je nejprve na pravé straně umocněn čitatel i jmenovatel zlomku: $[x+\ 8/(2\cdot 2)]^2 = 8^2/(2^2\cdot 2^2) + 24/2$. Opět je provedena stejná operace i u obecného vzorce $(x+b/2a)^2 = b^2/2^2a^2 - c/a$. Ještě než vyjádříme neznámou x, musíme převést ještě pravou část rovnice na společného jmenovatele a to v obou případech. Naše konkrétní rovnice tak bude mít tvar:

$$\left(x+\frac{8}{2\cdot 2}\right)^2 = \frac{8^2 - 2^2\cdot 2\cdot 24}{2^2\cdot 2^2}$$

a obecná bude upravena na tvar:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 2^2ac}{2^2a^2}.$$

Nyní již můžeme vyjádřit x, nejprve musí být obě strany rovnice odmocněny. Konkrétní rovnice bude po odmocnění vypadat následovně:

$$\left|x+\frac{8}{2\cdot 2}\right| = \sqrt{\frac{8^2 - 2^2\cdot 2\cdot 24}{2^2\cdot 2^2}};$$

obecnou rovnici také odmocníme a použijeme absolutní hodnoty, abychom vyjádřili základ druhé mocniny:

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 2^2ac}{2^2a^2}}.$$

Na pravé straně rovnice můžeme odmocnit jmenovatele a dále zbývá odstranit absolutní hodnotu:

$$x+\frac{8}{2\cdot 2} = \pm\frac{\sqrt{8^2 + 4\cdot 2\cdot 24}}{2\cdot 2}\ ;\ x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

V posledním kroku vyjádříme samotné x, které nabývá dvou hodnot, které odlišíme uvedením dolních indexů:

$$x_{1,2} = -\frac{8}{2 \cdot 2} \pm \frac{\sqrt{8^2 - 2^2 \cdot 2 \cdot 24}}{2 \cdot 2}\ ;\ x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 2^2 ac}}{2a}.$$

Při porovnání obou získaných vzorců vidíme, že $a = 2; b = 8\ a\ c = 24$, stejně tak jsme to viděli u původního tvaru rovnice $2x^2 + 8x + 24 = 0$. Byl tedy odvozen obecný vzorec pro kvadratickou rovnici:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};\ D = b^2 - 4ac$$

a to za pomoci grafického znázornění, které by mělo žákům přiblížit kvadratickou rovnici a ta by pro ně neměla být jen abstraktním pojmem. Stejně tak jsou schopni na základě již získaných zkušeností určit, kolik kořenů bude kvadratická rovnice mít v závislosti na diskriminantu D.

Konkrétní rovnici ještě musíme dopočítat:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 48}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm 8}{2},$$

jednotlivé kořeny budou mít hodnotu $x_1 = 2; x_2 = -6$. Pomocí získaného kladného kořene byl sestaven obrázek ve čtvercové síti, s jehož pomocí jsme odvodili základ vzorce.

Toto je znázornění kvadratické rovnice grafickým způsobem, který má žákům názorně přiblížit problematiku kvadratické rovnice a možnosti jejího řešení. K přípravě výuky je třeba nejen matematických pojmů a postupů, kterým jsme se doposud věnovali, ale i výukových metod a prostředků, s jejichž pomocí budeme látku žákům předávat. Vyučovací metody, které využijeme v přípravách, uvedeme v následující kapitole.

6 Pedagogické prostředky

Do příprav jsou zařazeny některé z netradičních vyučovacích metod, které vyžadují větší žákovu interakci, častější samostatné přemýšlení oproti klasické frontální výuce (např. při skupinové práci, diskusi, kvízu…) Jsou to metody aktivního vyučování, které Sitná popisuje ve své publikaci následovně: *„Aktivním učením rozumíme postupy a procesy, pomocí kterých žák přijímá s aktivním přičiněním informace a na jejich základě si vytváří své vlastní úsudky… Formou aktivního přístupu získávání nových informací si žáci současně velmi efektivně rozvíjejí schopnost tzv. kritického myšlení.“* [50]

Také je kladen větší důraz na práci se slovními úlohami, které jsou v nynější výuce matematiky někdy opomíjeny z nedostatku času. Jak uvádí Hejný: *„Děti skoro celou matematiku samy objeví ve vzájemných diskusích…i když učitel diskusi nerozumí, děti ví, o čem mluví a učiteli to následně vysvětlí, jen je nepřerušovat. Učitel má zadat jen úlohy, organisovat diskusi, ale dát dětem čas, aby na své objevy přišly. Když na myšlenku přijdou, je to velkým plus pro objevitele i pro všechny, kteří se na tom podíleli i pro ty, kteří objev jen sledovali.“* [51] Na tomto základě také funguje výuka v hodinách vedených tzv. Hejného metodou. Mimo to si na slovních úlohách obecně mohou žáci ověřit, že matematika je v praxi opravdu uplatnitelná a využitelná a nejedná se o pouhé učení teoretických poznatků.

V přípravách, které budou následovat, použijeme několik různých výukových metod, které si nejprve stručně popíšeme, abychom se s nimi seznámili a znali jejich výhody, nevýhody, pravidla. Některé jsou vhodné pro výkladové hodiny, jiné pro procvičování a opakování nabytých znalostí.

6. 1 Motivace

Motivace je důležitou součástí pro vzbuzení zájmu o probíranou látku mezi studenty. *„Motivace je proces zvnitřněného zdůvodnění potřeby učícího se jedince se učit.“* [50]

Motivaci dělíme na krátkodobou a dlouhodobou. Správná motivovanost žáků je důležitá, pokud je žák motivovaný k učení, více se snaží, jeho učení je efektivnější. Motivací je několik druhů, my využijeme motivaci, která ukazuje užitečnost získaných znalostí a jejich praktické využití. V praxi to znamená předkládat žákům aplikovatelnost a užitečnost učiva v běžném životě. [50]

6. 2 Skupinová práce

Skupinovou prací máme na mysli metody, které využívají vrstevnické sociální skupinové vztahy, průběh učebního procesu nezávisí jen na učiteli, ale také na žácích a jejich osobní zodpovědnosti za průběh učení. *„Výukou ve skupinách rozumíme aktivní spolupráci žáků rozdělených do různě velkých pracovních týmů, ve kterých se aktivně, pod vedením svého učitele, učí."* [50]

Některé z těchto metod dále využijeme, mimo ně však existují i další, jako je brainstorming, role play, snowballing, case study a další. Výhodou pro učitele je možnost pracovat s menším počtem žáků, věnovat se jim více individuálně, klást dobře směřované dotazy. Pokud se objeví problém v jedné skupině, zbytek třídy může dále nerušeně pracovat, pokud se objeví stejný problém ve více skupinách, může vyvolat mezi skupinami diskusi a problém tak vyřeší společně.

6. 3 Výukový kvíz

Vhodnou aktivizační metodou je výukový kvíz, který může oživit hodinu, navodit příjemnou atmosféru a učitel s jeho pomocí napříč celou třídou procvičí s žáky požadované znalosti.

*„Kvíz je soutěž mezi družstvy (skupinami žáků), který nejčastěji probíhá otevřeně, formou veřejné soutěže, tváří v tvář. Je velice důležité, aby byl připraven **zajímavou formou**, aby žáky bavil a vedl je tak k intenzivní žákovské práci.*

Kvíz je zábavný způsob, jak procvičit a zkontrolovat naučenou látku. Kvíz nemusí mít velký rozsah, i mini kvíz trvající několik minut může žáky výborně motivovat k práci v hodině nebo jim pomoci zábavnou formou velmi účinně shrnout nové poznatky." [50]

6. 4 Soutěž

Soutěž je další z aktivních vyučovacích metod, která je využita v uvedených přípravách. Podle Sitné: *„Soutěž může učitel zadat, aby s žáky zopakoval minulou látku, může ji využít jako úvodní motivaci, jiný způsob řešení problému apod. Může ji zařadit v kterékoli části hodiny, a to s jasně stanoveným cílem."* [50]

6. 5 Diskuse

Diskuse je základním způsobem komunikace mezi lidmi, žákům umožní konzultovat své výsledky, obhájit je před svými spolužáky či přijít na to, kde udělali chybu, nechat si vysvětlit ostatními postup řešení, který nepochopili či se doptat na nejasnosti. Rozvíjí také klíčové kompetence k učení (zvažování, posuzování a promýšlení názorů, využívání zkušeností, sebereflexe…), komunikativní (dodržování všech zásad verbální komunikace) a sociální a personální (dodržování pravidel komunikace v sociální skupině, zúčastněnost, podpora, pochopení,…). [50]

7 Komentář k přípravě výuky kvadratických rovnic

V této kapitole okomentujeme konkrétní přípravy, ve kterých využijeme úvodní slovní úlohy, pedagogické prostředky, grafické znázornění kvadratické rovnice a dříve uvedené zdůvodnění odvození vzorců. Přiložené přípravy byly použity v hodinách, uvedený komentář má přiblížit a odůvodnit skladbu hodiny i použité výukové metody. Jednotlivé podrobné přípravy a pracovní listy jsou uvedeny v přílohách, na které budeme odkazovat.

7. 1 První hodina: motivační

První hodina (viz příloha 1) bude věnována motivaci žáků, využijeme v ní úlohy z podkapitoly 5. 1, kde je popsáno i jejich řešení, ke kterému je třeba žáky směrovat. Jako výuková metoda je volena skupinová práce, aby žáci mohli spolupracovat na jednotlivých slovních úlohách v pracovním listě (viz příloha 2), diskusí nad zápisem i řešením slovní úlohy.

Slovní úlohy jsou užitečným typem matematického zadání problému, ale dělávají studentům problémy. Toto tvrzení dokládají výsledky mezinárodního testování PISA 2009, podle nichž nastal pokles u čtenářské gramotnosti a výzkum TIMSS 2007, který u českých žáků prokázal pokles matematické gramotnosti. Mnozí žáci slovní úlohu nepochopí, neuvědomí si, co je v rovnici neznámá a jak ji mají zjistit, nemusí vždy rozeznat, které údaje jsou jim prospěšné, užitečné a které nikoli. Ve školách je nejspíše slovním úlohám věnováno v hodinách matematiky málo času, což potvrdilo několik učitelů, se kterými jsem mluvila v rámci své praxe na středních školách. Díky velkému objemu látky, kterou mají se studenty probrat a relativně malému počtu hodin věnovaných matematice, které bývají často „ukrajovány“ prázdninami, školními akcemi (exkurze, výlety, besídky, soutěže atp.), věnují učitelé čas tomu, aby se studenty počítali konkrétní příklady bez kontextu a nutnosti vyhledávání informací, což je časově náročnější. [52] [53]

To může mít za následek nejen to, že žáci nechápou, proč se mají danou látku učit, ale i to, že látku chápou jen povrchně. Naučí se vzorec, který využijí v písemné práci, ale dál jej i s probranou látkou zapomenou, protože je již nebudou dle svého názoru nikdy potřebovat a je čeká studium dalšího tematického celku. Na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové proběhla mezi studenty matematiky výzkumná sonda, která obsahovala 4 úlohy ze základní a střední školy, jejím výsledkem byla 70 % neúspěšnost studentů. V závěru Kuřina uvádí: *„Přednáška absolvovaná bez porozumění je zárodkem formálního přístupu ke* *vzdělávání. Student při přípravě na zkoušku nemá někdy čas učivo hluboce promýšlet.“* Tato myšlenka je směrována spíše na vysokoškolské studenty, ti však využívají během studia zkušenosti, které nabyli již dříve, tedy na střední škole. Znalosti v matematice mají návazný charakter, je třeba znát základy a souvislosti, aby mohl žák postoupit znalostmi výše. [54]

Úvodní úlohy vedou na ryze kvadratickou a obecnou kvadratickou rovnici, mají pomoci žákům ukázat, že kvadratické rovnice mají využití a není to jen látka, kterou se musí naučit. Díky grafickému znázornění ve čtvercové síti mohou přijít na jejich řešení bez znalostí algoritmu řešení. Bude-li při řešení úloh využita metoda „pokus-omyl“, dosáhne se při dodržení podmínek ze zadání správného výsledku. Pokud si žáci nebudou vědět rady, můžeme použít pomocných otázek, které pomohou řešení nasměrovat správným směrem a zaměřit se na důležité prvky ze zadání. Jedna ze skupin znázorní své řešení na tabuli, obhájí a zdůvodní ho před spolužáky, případně zodpoví jejich dotazy.

7. 2 Druhá hodina: odvození jednotlivých vzorců

Druhá hodina (viz příloha 3) bude věnována odvození algoritmů a vzorců pro řešení neúplných kvadratických rovnic (viz podkapitoly 5. 2 a 5. 3) a Viètových vzorců (viz podkapitola 5. 4. 1). Před odvozením jednotlivých vzorců je třeba u žáků vytvořit pojmový aparát, aby uměli popsat jednotlivé rovnice a znali podmínky, které musí být splněny, aby se jednalo o kvadratickou rovnici.

Ve druhé části hodiny odvodíme algoritmy pro řešení neúplných kvadratických rovnic, k čemuž žáci využijí již dříve nabytých znalostí z úpravy algebraických výrazů a zkontrolujeme řešení první slovní úlohy z předchozí hodiny. Viètovy vzorce odvodíme za pomoci prezentace, ve které postupně žákům promítneme obrázky 13–17, na kterých je zobrazeno grafické znázornění třetí slovní úlohy z předchozí hodiny. Pomocí jednotlivých grafických úprav, které jsou následované početními úpravami, se podaří zobrazit jednotlivé kořeny, jak jsme již popsali v podkapitole 5. 4. 1. Toto odvození má žákům pomoci zapamatovat si, jak se kvadratická rovnice sestavuje a vznik koeficientu lineárního a absolutního členu. Po odvození jednotlivých způsobů řešení následuje vždy procvičení dané metody řešení, aby si ji žáci procvičili.

7. 3 Třetí hodina: odvození obecného vzorce

Po úvodním shrnutí a zopakování poznatků z předchozích hodin začneme s žáky odvozovat obecný vzorec s diskriminantem pro řešení obecné kvadratické rovnice (viz příloha 4). Odvozování bylo podrobně popsáno v podkapitole 5. 4. 2.

Odvození proběhne ve dvou fázích. Nejprve budeme provádět částečné výpočty a pracovat s jejich konkrétními výsledky, až poté probereme odvození jen se zapisováním početních operací a postupným nahrazováním koeficientů písmeny. Po předchozích vlastních zkušenostech ze studia i výuky a rozhovorem s učiteli matematiky na školních praxích, žákům může činit problém uvědomit si hodnotu číselných výrazů a důvod zápisu početních operací bez zapisování výsledků.

Pro odvození vzorce využijeme obrázků 19–25 a obrázků pro rovnici $x^2 + 4x - 12 = 0$ uvedených v přípravě na hodinu (viz příloha 4). V hodině si žáci postup odvozování nezapisují, je pro ně připraven i s příslušným komentářem k jednotlivým krokům a zároveň jsou vedle sebe uvedeny úpravy v konkrétní a obecné rovnici.

7. 4 Čtvrtá hodina: procvičování a opakování

Poslední vyučovací hodina (viz příloha 5) se bude zabývat procvičováním a opakováním probraného učiva. Ke zvýšení zájmu studentů využijeme různé metody aktivního vyučování, které tak žákům umožní zdokonalovat se i v některých klíčových kompetencích. Jednotlivé metody a pedagogické prostředky jsme si již popsali v kapitole 6, nyní si uvedeme jejich konkrétní použití.

Pro začátek hodiny je vhodný výukový kvíz, je rychlý, zapojí celou třídu a všichni studenti si tak zopakují danou látku. Žáci si náhodně tahají otázky, které vzápětí sami zodpovídají. Do kvízu jsme zařadili otázky, vztahující se ke kvadratické rovnici. Jsou to otázky teoretické, ptají se na znalosti, které jsou nutné ke zvládnutí dané látky. Týkají se jak procvičení zopakování vzorce, tak možností řešení, počtu kořenů i pojmového aparátu. Mnohé odpovědi žáci zvládnou vymyslet na základě odvozených vzorců. Odměnou za správně zodpovězenou otázku je bod pro skupinu.

Do soutěže je na začátku zapojen výukový kvíz, následovaný procvičováním jednotlivých příkladů počítaných na tabuli. Jednotlivé příklady budou žáky voleny samostatně podle písmene (vždy další příklad volí skupina, která naposledy správně spočetla příklad). Průběh hodiny s konkrétními příklady a soutěží je uveden v příloze 5.

Za domácí úkol mají žáci připraveny dvě slovní úlohy (viz příloha 5, úlohy A, B). Úloha A je na zjištění plochy a navazuje tak na úlohy motivační. Je třeba, aby žáci byli schopni určit základní informace, které jsou důležité pro její výpočet a zodpovězení dotazu. Je nutné, aby byli schopni sestavit rovnici, vypočítat ji a určit, který z kořenů je možným řešením. Případně také zvolený kořen dále upravit, aby získali hledanou odpověď.

Slovní úloha B nemá grafické řešení, jde o zjištění, zda studenti i bez náčrtku umí na základě zadaných údajů sestavit a vyřešit rovnici a zodpovědět kladenou otázku.

Poslední fází výuky je ověření výsledků, tedy kontrolní test, který ověří, zda odlišná výuka tohoto tématu, pomohla žákům lépe pochopit problematiku. Test se bude skládat ze tří příkladů, které pokryjí všechny tři základní typy rovnic, a ze slovní úlohy, která je analogická jako motivační úloha. Konkrétní podoba testu i se vzorovým řešením je uvedena v příloze 6. Tímto můžeme přípravu výuky kvadratických rovnic uzavřít.

8 Výuka

Výuku kvadratických rovnic uvedenými přípravami jsem realizovala na Ekonomickém lyceu na Obchodní akademii v Mladé Boleslavi. Jedná se o druhý ročník, ve kterém se nachází 30 žáků (23 dívek a 7 chlapců). Třída mi byla známa z předchozího školního roku, kdy jsem tu učila v rámci povinné praxe na SŠ. Jedná se o žáky, kteří jsou temperamentní, nikdo z nich není žákem se speciálními vzdělávacími potřebami či individuálním vzdělávacím plánem.

Paní učitelka mi vyšla vstříc jak při výuce a kontrole výsledků, tak i při výběru druhé třídy, kde se kvadratické rovnice vyučovaly bez odvozování, grafického znázornění či čehokoli podobného. V průběhu jednotlivých hodin byla paní učitelka ve třídě přítomna. Žáci obou tříd věděli o tom, že výuka a testování je součástí mé diplomové práce, předem na to byli připraveni. Výuka probíhala v období, kdy se ve škole běžně kvadratické rovnice učí, neproběhl žádný posun v látce vzhledem k běžné výuce.

8. 1 Motivační hodina

První hodina probíhala ve čtvrtek 15. 10. 2015 od 12.45 podle přípravy na motivační hodinu (viz příloha 1). Třída je zvyklá pracovat hlavně frontálním způsobem, skupinová práce či aktivní vyučování zde neprobíhá.

PRŮBĚH HODINY

Žáky jsem na začátku hodiny rozdělila do devíti skupin podle jejich rozsazení ve třídě. Každý dostal pracovní list s motivačními slovními úlohami (viz příloha 2), které bez problémů pochopili a pustili se do práce.

V průběhu vypracovávání slovních úloh jsme s paní učitelkou procházely po třídě a pomáhaly skupinám, které to potřebovaly, pomocnými otázkami: *„Co značí rozloha? Jak ji vypočteme? Co známe ze zadání slovní úlohy? Jaký tvar měl a nově bude mít hřbitov?“* Od žáků několikrát zazněla otázka: „Jak máme vyřešit kvadratickou rovnici? To jsme se ještě neučili.“ Vysvětlila jsem jim tedy slovně, aby pracovali se čtvercovou sítí, zkusili si do ní zadání nakreslit a pracovat s již nabytými znalostmi. Skupinová práce zabrala studentům 25 minut.

Zbylou část hodiny jsme využili ke kontrole správnosti výsledků, nákresy na tabuli zakreslovali žáci, kterým řešení slovní úlohy nedělalo velké problémy, a řešení mohli krok po kroku odůvodnit. Po každém nákresu ještě navrhli zápis rovnice, podle které měli být schopni vyřešit úlohu početně.

V závislosti na slovních úlohách a na dříve probraných algebraických výrazech jsem jim za domácí úkol zadala příklady (viz příloha 1) na řešení neúplných kvadratických rovnic, které si měli do příští hodiny rozmyslet a pokusit se je vyřešit.

HODNOCENÍ

Zpočátku bylo obtížné udržovat pozornost žáků nad prací a organizovat jejich skupinovou práci, na kterou nejsou zvyklí.

Ne každá skupina zvládla vyřešit všechny úlohy samostatně. Nejmenší problémy dělala 1. úloha, ve které měli žáci vypočítat rozměr okenní tabule. Znázornění osmi shodných oken ve čtvercové síti zvládly všechny skupiny bez potíží, stejně jako vyčíst z nich rozměr okenních tabulí.

Druhá slovní úloha již byla pro studenty obtížnější. Čtyři skupiny měly problém uvědomit si, že mají využít vzorec pro výpočet obsahu a rozložit velikost plochy tak, aby splňovala obě zadané podmínky. Na základě pomocných otázek však na řešení přišli a zakreslili ho do čtvercové sítě.

Při řešení třetí slovní úlohy si uvědomili určitou analogii s předchozí slovní úlohou, díky tomu ji byli schopni snadno vyřešit. U grafického řešení dělalo některým problém zakreslit plochu pro dům a pro zahradu, takže zakreslovali podle různého rozložení plochy, ale nakonec správně zakreslili obdélník 10×11, který jako jediný splňoval zadané podmínky.

Nakonec při předvádění řešení na tabuli se objevil problém, který má mnoho žáků, tedy popsat slovně proces, kterým úlohu vyřešili. Bylo nutné klást dotazy, ale nakonec postup řekli a zodpověděli i dotazy svých spolužáků.

8. 2 Úvod do kvadratických rovnic

Druhá hodina se uskutečnila v pondělí 19. 10. 2015 od 8.55. na základě přípravy na úvod do kvadratických rovnic (viz příloha 3). Hodina byla vyučována výkladovou metodou spojenou s dotazováním a diskusí o způsobu řešitelnosti typů kvadratických rovnic.

PRŮBĚH HODINY

Hodinu jsme zahájili společným utvářením pojmů týkajících se kvadratické rovnice, které žáci z části znali z přechozí výuky, kdy probírali kvadratickou funkci.

Na základě úvodních slovních úloh a příkladů z domácího úkolu žáci odvodili za použití početních úprav známých již z úpravy výrazů řešení jednotlivých typů kvadratických rovnic a odvodili jejich obecné řešení.

Zbylou část hodiny jsme věnovali třetí úvodní úloze. Jednotlivé grafické úpravy, které odpovídaly početním operacím a úpravám, žáci viděli v prezentaci a díky tomu jsme společně odvodili Viètovy vzorce. Tyto vzorce nepochopili všichni ihned, zvládli je však vyložit spolužáci, kterým to nedělalo problém.

Na procvičení jsme vypočetli ještě druhou úvodní úlohu a za domácí úkol dostali tři příklady na vypočítání.

HODNOCENÍ

Někteří žáci v hodině nespolupracovali, dle paní učitelky se jednalo o žáky, kteří nespolupracují ani v jiných hodinách. Debatující žáky jsem vyvolávala k tabuli, abych ověřila, jak zvládají probíranou látku. Někteří věděli hned jak příklad řešit, jiným to chvíli trvalo nebo jim poradili spolužáci. Při odvozování často přišli na další krok, který byl třeba udělat a sami objevili i obecné řešení. V závěru hodiny byli žáci schopni určit relevantní výsledek v závislosti na zadané úloze.

8. 3 Odvození obecného vzorce

Cílem druhé výkladové hodiny, která se konala ve středu 21. 10. 2015 od 9.50., bylo odvodit a probrat obecný vzorec pro řešení kvadratické rovnice. (viz příloha 4)

PRŮBĚH HODINY

Začátek hodiny byl věnován kontrole domácího úkolu. Žáci při řešení udělali několik chyb, první chybou bylo, že po rozkladu trojčlenu nepoložili závorky rovny nule, takže zapsali jako výsledek opačné hodnoty kořenů. U druhého příkladu si žákyně neuvědomila, který z koeficientů má být součtem a který součinem. Procvičili jsme tuto znalost tím, že jsme opačným postupem, tedy roznásobením dvou závorek ukázali fungování Viètových vzorců. Poslední příklad byl již vypočten bez potíží.

Zbylá část hodiny byla věnována odvozování obecného vzorce s diskriminantem. Na počátku jsem žákům ukázala grafické znázornění vzorce $(a+b)^2$, ze kterého jsem vycházela. Pokračovali jsme odvozením a na jednoduchém příkladu jsme provedli vyjádření x. Tato rovnice se dala vyřešit i pomocí Viètových vzorců, proto jsem navázala na předchozí vzorec rozepsáním rovnice a poukázáním na podobnost s ním. Žáci měli co nejvíce připodobnit daný obrázek mnou zobrazenému vzorci, když víme, že $a^2 = x^2$, $2ab = 4x$ ale b^2 ještě pořádně neznáme, avšak by to měl být absolutní člen. Jednoho ze studentů napadlo rozdělit $4x$ na dvě části a jednu přesunout. To byla část, na kterou studenti přišli sami. Potřebovali jsme dokončit doplnění na čtverec, k čemuž obrázek vybízel. Díky čtvercové síti byli studenti schopni doplnit čtyři na obě misky vah. Z obrázku vyplynulo rozložení zobrazené kvadratické rovnice na součin dvojčlenů. V průběhu zbylých ekvivalentních úprav se vyskytly dva problémy.

Prvním z nich byla snaha o použití Viètových vzorců na levou stranu rovnice bez ohledu na to, že není rovna nule, což si po chvíli většina žáků uvědomila. Druhým problémem bylo správné odmocnění závorek, neuměli použít a odstranit absolutní hodnotu, ačkoli jsme ji používali u ryze kvadratické rovnice. Jeden z chápavějších studentů byl schopen vysvětlit, že druhou mocninu čísla i čísla jemu opačnému získáme stejnou hodnotu a proto to musíme zohlednit i při odmocňování při hledání kořenů. Potom se po všech úpravách objevil hledaný upravený obecný vzorec. Nebyl zde však rozepsaný diskriminant a zcela zmizel jmenovatel.

Následně jsme na předchozí příklad navázali téměř stejným příkladem, byl roznásoben dvěma (viz podkapitola 5. 4. 2 a příloha 5), aby koeficient $a \neq 1$. Opět jsme ho začali řešit s graficky i početně. Další odlišností bylo, že jsem nedělala částečné výpočty, aby se nám ve výsledné rovnici ukázal celý vzorec. Toto odvození jsem pro ně měla připravené na papírech a doplněné komentářem. Souběžně s odvozováním na konkrétním příkladu zde bylo odvození pomocí proměnných. Při tomto odvozování (ačkoli se jednalo o stejný příklad), jsme se zastavili už nad tím, že se žáci nevyznali ve zlomcích. Bylo pro ně těžké pochopit, jak mohou $4x$ rozšířit na $2 \cdot 4x/2$. Když jsme se s tímhle vypořádali, objevil se další problém po grafickém rozdělení a doplnění 4 na obě misky vah. Ačkoli to byla hodnota 4, byla zapsána jako $(8/(2 \cdot 2))^2$.

Díky těmto zastávkám nám do konce hodiny zbývalo 10 minut, a protože bylo zapotřebí věnovat další hodinu procvičování, musela jsem vynechat početní část odvozování. Zapsala jsem poslední krok s vyjádřeným $x_{1,2}$. Žáci tak viděli, kam se ve vzorci dostaly jednotlivé koeficienty rozmístěné v kvadratické rovnici. Tyto číslice jsme nahradili zpět písmeny a vyšel nám z toho obecný vzorec pro kvadratickou rovnici. Zpod odmocniny jsme vyjádřili diskriminant a popsali si jeho 3 možné podoby a jeho vliv na počet kořenů rovnice. Žáci si uvědomili, že po součtu a součinu různých čísel mohou dostat jak záporné, tak kladné číslo či případně nulu. V závislosti na hodnotě diskriminantu byli schopni určit počet kořenů a danou řešitelnost v oboru reálných čísel.

Na konci hodiny dostali žáci tabulku s celým odvozeným vzorcem a měli se na ni doma podívat. Po ukončení hodiny se zastavili tři studenti, kterým nebylo jasné zlomkové vyjádření. Jak to, že se tam objevila najednou dvakrát stejná část. Bylo jednodušší jim to vysvětlit takto ve trojici, kterou to opravdu zajímalo, poslouchali a zamýšleli se nad tím. K pochopení pomohlo názorné rozkreslení.

HODNOCENÍ

V průběhu kontroly nedávali někteří žáci pozor, jelikož si mysleli, že úkol mají správně, ne pro všechny to však platilo. V části hodiny, kdy jsme prováděli grafické a početní úpravy byl ve třídě celkem klid, žáci se snažili látce porozumět a vzorec odvodit. Jejich pozornost začala upadat při číselném odvozování, kdy jsme podruhé odvozovali vzorec bez dílčích výpočtů. Dle slov paní učitelky bylo toto odvození na některé studenty příliš složité.

8. 4 Procvičování

Předposlední hodina se konala ve čtvrtek 22. 10. 2015 od 12.45. Věnována byla procvičování, počítání jednotlivých příkladů. Žáci byli usazeni v lavicích ve třech řadách, čehož jsem později využila pro rozdělení týmů pro soutěž.

PRŮBĚH HODINY

Ihned jsme navázali na předchozí hodinu, zopakovali jsme vzorec, který se již někteří stihli naučit zpaměti, vypočetli u tabule příklady odlišující se hlavně hodnotou diskriminantu. U rovnice, jejíž diskriminant vycházel záporný, došlo ve třídě ke dvěma protichůdným názorům. Velká část třídy radila žákyni, aby jej odmocnila, což se jí nezdálo, menší část třídy radila, že to nelze. Nakonec správně odůvodnila, že záporný diskriminant nelze odmocnit v množině reálných čísel. Zbylé příklady žáci vypočetli bez obtíží.

Následovalo procvičování, které bylo formou soutěží mezi družstvy tvořené třemi řadami. V první části si žáci tahali otázky, které směřovaly na kvadratické rovnice. Bez problémů je během pěti minut zodpověděli a nasbírali tak body.

Ve druhé části počítali příklady na probrané typy kvadratické rovnice. S neúplnými typy rovnice nebyly problémy, žáci je rychle vyřešili. U úplných kvadratických rovnic někteří používali Viètových vzorců a kořeny tak našli rychleji, než ti, kteří rovnici počítali přes obecný vzorec. Žáci vítězné řady byli ohodnocení malými jedničkami za samostatnou práci. V závěru hodiny dostali žáci ještě dvě slovní úlohy na procvičení před testem.

HODNOCENÍ

Ve třídě panovala soutěživá nálada, sousedé v lavicích i za sebou si vzájemně radili a u tabule se v průběhu hodiny prostřídali téměř všichni žáci. Skupiny byly ve své práci vyrovnané.

Nutno podotknout, že v příkladu, kde nebyly kořeny vyjádřitelné racionálními čísly (viz příloha 5 příklad g), se ukázala neznalost dříve probírané látky. Až na dva žáky měli všichni problém částečně odmocnit číslo pod odmocninou.

8. 5 Písemná práce

Test byl naplánovaný na pondělí 26. 10. 2015 od 8.55. Přítomno bylo 28 z celkově 30 žáků.

Na začátku hodiny jsme v rychlosti zkontrolovali slovní úlohy z domácího úkolu. Už tady se ukázalo, že někteří žáci mají problém správně pochopit zadání. Ve slovní úloze „ZOO Chleby“ dělalo žákům problém pochopit, že pokud se ohrada zvětší na všech stranách, znamená to, rozšíření zleva, zprava, shora i zdola. Vzhledem k tomu, že při zvětšení shora a zleva vyšla rovnice jinak, ale také „hezky“, nepovažovali to za problém. U druhé slovní úlohy neuměli někteří sestavit správně rovnici, s tím však pomohli o přestávce spolužáci, kteří jim poradili.

Následovala písemná práce. Žáci pracovali v klidu, měli povolené kalkulačky, protože druhá mocnina o základu čísla od nuly do dvaceti dělala některým problém. Na písemnou práci měli vyhrazeno 15 minut z hodiny. Někteří byli hotovi již po 10 minutách, zbývající čas však většinou věnovali kontrole nebo se vraceli ke slovní úloze. U nikoho jsem nezaznamenala žádný pokus o podvádění. Test sebrala a správné výsledky ukázala žákům na tabuli. V závěru jsem je požádala o vyplnění dotazníku.

8. 6 Celkové zhodnocení

V průběhu hodin nebyly s žáky závažné problémy. Při samostatných úkolech bylo nutné zajistit, aby ji nebrali jako volnou zábavu. Podařilo se mi docílit toho, aby se ve skupinkách bavili nad tématem, diskutovali nad řešením příkladů, slovních úloh a vzájemně si vysvětlovali řešení. Třídě nedělalo problém přemýšlet nad řešením, ačkoli neznali obecný postup. Jakmile jsem chtěla, aby své znalosti propojili s dříve nabytými, byl to problém. Bohužel to značí, že se žáci naučí zpaměti danou látku, která se právě probírá. Někteří nemají zájem látku pochopit, ale jen splnit požadavky učitele, aby prošli testem a měli klid.

To mi u této třídy bohužel potvrdila i jejich učitelka matematiky. V rámci hodin matematiky nevyučuje jen látku střední školy, ale doučuje i látku základní školy. Žáci byli v posledních letech přijímáni na tuto střední školu bez přijímacích zkoušek, což mělo za následek, že po pololetním vysvědčení se velká část z nich v 9. ročníku ZŠ přestala tolik zaměřovat na studium.

Také tomu nenapomáhá to, že vedení školy požaduje, aby nebyl vysoký úbytek žáků, a tak jsou učitelé nuceni posunout hodnotící hranici. Nemohou si dovolit mít ve třídě mnoho žáků, kteří propadají.

Ve výsledku jsem z jednotlivých hodin měla spíše smíšené pocity. Zklamání ve mně zůstalo po 3. vyučovací hodině, kdy jsem nedokázala zcela odvodit vzorec pro celou třídu. Stejně tak bohužel čas pracoval proti mně. Od paní učitelky jsem měla původně 3 vyučovací hodiny, v jejichž rámci jsem měla výuku kvadratických rovnic zvládnout. Když následně viděla, jak hodiny probíhají, přidala mi ještě jednu hodinu věnovanou procvičování, což mi hodně pomohlo.

U slovních úloh nastal u žáků problém v tom, že si často nedokázali ujasnit, co je vlastně neznámá. Vzhledem k nedostatku času se slovní úlohy často vynechávají a probírá se zbylá látka. Na praktickou aplikaci moc času nezbývá. Žáci pak nepracují na tom, aby se snažili najít uplatnění dané látky v praxi. Nedají si k sobě souvislosti a nevyznají se v textu. Často opomíjejí napsat odpověď nebo řešení ukončí u částečného výpočtu. V tomto případě vypočetli kořeny kvadratické rovnice a nezjišťovali, zda jim kořeny stačí k řešení nebo potřebují řešení nějak dopočítat.

V přílohách 7 a 8 jsou uvedeny vybrané písemné práce žáků obou skupin, které ukazují způsob řešení jednotlivých příkladů v závislosti na výuce. V obou skupinách byly testy součástí hodnocení žáků.

9 Porovnání obou skupin

Písemná práce měla za cíl ukázat, zda přípravy výuky kvadratických rovnic s grafickým znázorněním a aktivními metodami výuky pomohly žákům látku lépe pochopit a naučit se ji efektivněji než klasickou metodou prostého výkladu.

Obě skupiny žáků, které se testování zúčastnily, jsou žáky stejného oboru na stejné škole a jsou vyučováni podle stejného učebního plánu a ŠVP. Jednalo se o třídy se 30 žáky ve věku 16–17 let. V obou třídách je 20% chlapců. Jsou vyučováni frontální metodou a většina znalostí je jim předkládána výkladem. V obou třídách výuce kvadratických rovnic předcházelo probrání kvadratické funkce.

Třída 2. A byla vyučována mnou podle přiložených příprav. Třída 2. B byla vyučována klasickou výukou, nic nebylo odvozováno, neprobíhaly zde žádné alternativní metody výuky.

Obě oddělení testu měla stejnou skladbu příkladů. V obou odděleních byla snaha o stejnou úroveň obtížnosti. V oddělení A ve 3. příkladu sice žáci pracovali s většími čísly, ale naopak v oddělení B měli žáci v 1. příkladu kladný absolutní člen, což mělo za následek prázdnou výslednou množinu řešení a ve druhém příkladu bylo minus u kvadratického členu. Slovní úlohy mají také stejnou obtížnost. Ani jedna z nich nepracovala s velkými čísly, výsledné rovnice byly jednoduše rozložitelné dle Viètových vzorců a z vypočtených kořenů museli studenti v obou případech vybrat nezáporný kořen a dopočítat výsledné rozměry výběhu.

Na písemnou práci dostali žáci 15 minut. Čas byl trojnásobkem času, který jsem k výpočtu písemné práce potřebovala já. Trojnásobný čas byl zvolen na základě rozhovoru s paní učitelkou, která měla trojnásobek svého potřebného času zjištěn jako dostatečný. To se také na hodině potvrdilo, jelikož někteří studenti již ke konci odkládali psací potřeby.

9. 1 Řešení příkladů a časté chyby

Díky odlišným způsobům výuky došlo i k diferencím v řešení jednotlivých příkladů. Žáci 2. B častěji využívali obecného vzorce s diskriminantem, ve kterém také dělali chyby, spíše tedy v jeho použití, dosazování do něj. Chyba, která se průběžně objevovala nezávisle na třídě či oddělení, bylo nezapsání výsledku množinovým zápisem. Objevovalo se to většinou pro celou písemnou práci, žáci jej nezapisovali vůbec. V obou třídách se nezávisle na sobě objevila zajímavá chyba. Při zápisu výsledných kořenů zapisovali výsledek stylem $x_1 \neq d$, kde d značí hodnotu kořene. Snažili se nejspíše využít dříve nabytých znalostí z určování podmínek řešitelnosti, nulových bodů při řešení nerovnic a lomených výrazů. Zjevně nepochopili v předchozí probírané látce, že nerovnítko se používá při určování podmínek řešitelnosti. Objevovaly se samozřejmě i početní chyby.

9. 1. 1 Příklad 1: ryze kvadratická rovnice

Ve třídě 2. A byl 1. příklad (viz příloha 6 př. 1) řešen přes odmocninu absolutního členu nebo rozklad na vzorec. V žádné z písemných prací této třídy nebyl tento příklad řešen přes obecný vzorec. Mnoho chyb se v tomto příkladu nenacházelo. Ve 4 písemných pracích oddělení A žáci opomněli při odmocňování absolutní hodnoty, takže jim vyšel pouze jeden kořen. Ve skupině B obsahovaly 4 práce odmocninu záporného čísla.

Ve třídě 2. B žáci řešili první příklad rozkladem na vzorec, odmocněním absolutního členu ale využívali i obecného vzorce. Oproti 2. A byla chybovost vyšší. V obou skupinách se nacházely chyby v obecném vzorci, špatně dosazená konstanta či chyba ve vzorci. Ve skupině B žáci špatně aplikovali rozklad podle vzorce, rozkládali $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b)$. Objevila se tady také kombinace rozkladu rovnice na součin závorek a zároveň všechny členy odmocňovali. Žák nejspíše ví, jaké početní operace má k dispozici, ale neumí jich využít ke zjištění správného výsledku. Zkombinovali si špatně dvě různé metody řešení, které zcela nepochopili.

9. 1. 2 Příklad 2: kvadratická rovnice bez absolutního členu

Žáky třídy 2. A byl tento příklad (viz příloha 6 př. 2) řešen pomocí vytýkání. Jednalo se o nejjednodušší a nejrychlejší způsob zjištění kořenů. V obou odděleních se neobjevily hromadnější chyby, někteří se nechali zmást minusem před kvadratickým členem, mívali početní chybu nebo vymysleli příkladně odmocninu lineárního členu.

Ve druhé třídě byl tento příklad řešen pomocí vytýkání, ale také přes obecný vzorec. Jeden z žáků odmocňoval celou levou stranu rovnice. Častější chyby, které se objevovaly, se týkaly špatného vytýkání, chyb v obecné rovnici, ale jiné častější chyby tu nebyly. Jednalo se o ojedinělé chyby, jako je příkladně špatný výpočet jednoho z kořenů či absence druhého kořene.

9. 1. 3 Příklad 3: kvadratická rovnice

Žáci měli pevně stanoveno, jak řešit obecnou kvadratickou rovnici (viz příloha 6 př. 3). Bylo nutné ověřit, zda si pamatují obecný vzorec s diskriminantem, který je nutný při výpočtech rovnic i v dalším tématu kuželoseček ve vyšším ročníku.

Ve 2. A se nejčastěji objevovalo opomenutí zapsání minusu před *b* ve jmenovateli. Další častou chybou bylo špatné dosazení do vzorce, konkrétně žáci zapomínali dopisovat minusy k záporným koeficientům, což vedlo příkladně k zápornému diskriminantu a tedy ke špatnému vyřešení rovnice. Zajímavou chybou, která se v hodinách při procvičování neukázala, bylo dopisování neznámé do vzorce společně s koeficienty, díky čemuž příklad pravidelně nedopočítali.

Druhá třída na tom byla obdobně. Chyby byly žáky dělány v dosazování do vzorce, zapomínali dopisovat minus ať při dosazení nebo ve vzorci. V této třídě byla některými žáky řešena kvadratická rovnice jak přes diskriminant tak přes Viètovy vzorce. Je možné, že tak byla kontrolována správnost řešení, nebo byli zmateni zápisem v zadání „*řešte přes obecný vzorec a diskriminant*“ a pod pojmem obecný vzorec byly chápány Viètovy vzorce a pod pojmem diskriminant právě obecný vzorec s diskriminantem. Zajímavý byl rozptyl bodového ohodnocení příkladu. Až na pár výjimek totiž žáci získali maximum bodů nebo nulu.

9. 1. 4 Příklad 4: slovní úloha

V obou třídách slovní úloha (viz příloha 6 př. 4) dopadla hůře, než předchozí příklady. Žáci měli problém s vyhledáváním potřebných informací v textu a mnozí nezapsali, co je neznámá.

2. A byla třída, které slovní úloha činila méně problémů díky tomu, že jsem s nimi slovní úlohy procvičila. Zápis neznámé se objevil v několika případech, buď žáci využili klasického zápisu, nebo náčrtku. Ve většině příkladů však žádný zápis nebyl. Bylo hodně slovních úloh, kde byla špatně sestavená kvadratická rovnice. Většinou si žáci neuvědomili, zda uvedená plocha je nového či starého výběhu. Pokud správně určili, že se jedná o nový výběh, rovnici dopočítali. Určovali, že se může jednat i o starý výběh a odčítali část plochy z výpočtu nového výběhu, aby dostali rovnost.

Když už žáci správě sestavili a dopočetli rovnici, tak nedořešili slovní úlohu. Neurčili, který kořen mají využít a podle něj dopočítat nové rozměry výběhu. Příčinou mohlo být také nedočtení slovní úlohy a žáci tak nevěděli, co mají zjistit. Slovní odpověď se objevila jen u 2 písemných prací. U zbylých slovních úloh, kde by měla odpověď smysl, žáci zapsali pouze množinový výsledek bez odpovědi.

Druhá třída měla horší výsledky. Objevilo se zde 6 prací, ve kterých se žáci nepokusili slovní úlohu vůbec řešit. Mnozí z žáků nepracovali s jakýmkoli označením x. Nezapsali jej pomocí zápisu ani přes náčrtek. Klasickou rovnici špatně sestavila více jak polovina žáků. Některé rovnice byly náhodným součtem čísel a neznámé, další studenti počítali obsah podle vzorce pro obvod, další zase nedoplnili, čemu se rovnice rovná.

Pokud měli žáci sestavenou správnou rovnici, nedopočítali se do konce. Některými byla slovní úloha dopočtena k určení kořenů, ale ne vždy u správných. Příklad byl občas řešen rozkladem, ale většinou byl využit obecný vzorec. Původní rovnice nebyla vždy upravena do anulovaného tvaru. Řešení slovní úlohy se objevilo ve 3 písemných pracích, u kterých si žáci mysleli, že dopočítali správně a do konce. Pouze v jednom případě to byla pravda.

9. 2 Hodnocení příkladů

Maximální možný počet získaných bodů bylo 10, přičemž příklady 1 a 2 byly hodnoceny nejvýše dvěma body, příklady 3 a 4 nejvýše třemi body.

První příklad byl hodnocen po půl bodu podle toho, jak daleko se žáci dopočítali: základní úprava, odmocnění, vyjádření obou kořenů a množinový zápis výsledku.

U druhého příkladu bylo hodnocení obdobné, opět byly jednotlivé kroky ohodnoceny po půlbodu: vydělení, rozklad, zápis kořenů a množinový zápis výsledku.

U třetího příkladu bylo jedním bodem ohodnoceno správné dosazení do vzorce. Výpočty, které vedly ke zjištění diskriminantu, byly hodnoceny půlbodem, správné dopočítání jednotlivých kořenů byl opět 1 bod (tedy každý kořen půl bodu) a množinový zápis, který byl vyžadován u všech příkladů krom slovní úlohy, byl opět za půlbod.

Ve slovní úloze byly body udělovány nejen za výpočty, ale i za formální součásti slovní úlohy, jako je zápis či odpověď. První půlbod byl tedy za to, když žáci zapsali, co je vlastně x, bylo tak stanoveno po rozmluvě s paní učitelkou, protože je to vlastně to jediné, co od nich ve slovních úlohách vyžaduje. Bylo jedno, zda neznámou vyjádří pomocí zápisu nebo náčrtkem, muselo být jasné, že vědí, co vlastně počítají. Druhý půlbod byl udělen za správné sestavení výchozí rovnice $(x-2)(x+4)=40$, resp. $(x+2)(x+3)=42$, podle oddělení. Dalším bodem bylo ohodnoceno správné vyřešení rovnice, a to ať se jednalo o řešení přes obecný vzorec nebo přes Viètovy vzorce. Pokud byly žáky špatně zapsány výsledné kořeny, dostali alespoň půl bodu za průběh řešení. Poslední bod byl udělen za dořešení slovní úlohy a odpověď. Žákem měl být vybrán z kořenů ten kladný, podle zadání jej upravit tak, aby zjistil rozměry nového výběhu a zapsal odpověď. Zapomněl-li žák zapsat odpověď, ale dopočetl rozměry, dostal půl bodu.

9. 2. 1 Výsledky testů ve 2. A

Písemná práce	oddělení	ryze kv. rce	rce bez abs. čl.	kv. rce D	slov. úloha	součet	bez sl. úl.
2A_A16	A	1,5	2	3	2	8,5	6,5
2A_A08	A	2	2	3	1	8	7
2A_B02	B	2	2	3	1	8	7
2A_A07	A	2	1	3	2	8	6
2A_A02	A	2	2	3	0,5	7,5	7
2A_A10	A	2	2	3	0,5	7,5	7
2A_B05	B	1,5	2	1	3	7,5	4,5
2A_A15	A	2	2	3	0	7	7
2A_B06	B	2	2	3	0	7	7
2A_A09	A	2	2	1,5	1,5	7	5,5
2A_B04	B	1,5	1,5	3	0,5	6,5	6
2A_A04	A	1,5	1	3	1	6,5	5,5
2A_B07	B	1,5	2	2	1	6,5	5,5
2A_B03	B	2	2	1	1	6	5
2A_A03	A	2	0,5	3	0	5,5	5,5
2A_A12	A	2	2	1	0	5	5
2A_B09	B	2	1	2	0	5	5
2A_A06	A	0,5	2	1	1,5	5	3,5
2A_A13	A	2	1,5	0	1,5	5	3,5
2A_B11	B	0,5	0,5	3	0	4	4
2A_A01	A	1	1,5	1	0	3,5	3,5
2A_A11	A	1	0,5	1	1	3,5	2,5
2A_B01	B	1,5	0,5	0	0	2	2
2A_A14	A	1	0,5	0	0	1,5	1,5
2A_B08	B	0	1	0,5	0	1,5	1,5
2A_A05	A	0	0,5	0,5	0,5	1,5	1
2A_B10	B	0,5	0	0,5	0	1	1
2A_B12	B	0	0	0,5	0	0,5	0,5

Tabulka 1: Přehled bodových výsledků ve třídě 2. A

Zobrazená tabulka ukazuje výsledné hodnocení písemných prací ve třídě 2. A. Označení písemné práce obsahuje třídu, ve které byla práce napsána a za podtržítkem je uvedeno její oddělení a pořadové číslo. Práce jsou zde seřazeny podle celkového součtu získaných bodů. Žádný ze studentů nezískal maximální počet, tedy neměl svou písemnou práci zcela správně vyřešenou. Nejvyšší bodový zisk byl u písemné práce 2A_A16, kde žák dosáhl 8,5 bodů. U 1. příkladu nezapsal množinově řešení a u slovní úlohy nedopočítal rozměry nového výběhu a nezapsal odpověď.

Žáci úspěšně vyřešili příklad, pokud získali 2 nebo alespoň 1,5 bodu. Ryze kvadratickou rovnici byli schopni vyřešit, zapomněli jen zapsat kořeny do výsledné množiny. Jedná se o 67 % úspěšně vyřešených příkladů tohoto typu. 22 % písemných prací obsahovalo částečné řešení, většinou žáci zapomněli na absolutní hodnotu a dostali jen kladný kořen, ve druhé skupině žáci odmocňovali záporný absolutní člen. Zbylých 11 % nebylo vyřešeno vůbec nebo zcela špatně.

U kvadratické rovnice bez absolutního členu byla úspěšnost počítána stejně. Úspěšně vyřešená rovnice má oba kořeny, chybí maximálně zápis množiny K. Tento příklad byl úspěšně vyřešen z 57 %. U dalších 4 (14 %) písemných prací byly drobnější chyby, například zapomenuté znaménko nebo špatně vyjádřený jeden z kořenů. 21 % příkladů bylo takových, že žáci například jen vytnuli konstantu a neznámou a příklad nedořešili, nebo jej nedořešili správně. Nulu z tohoto příkladu získalo 7% písemných prací.

Kvadratická rovnice byla úspěšně vyřešena z poloviny, tedy 50% prací. U tohoto příkladu považuji za úspěšné získání 2; 2,5 a 3 bodů. 0,5 bodu žáci ztráceli za nezapsání kořenů do množiny a druhá polovina bodu byla strhávána za početní chybu při dopočítání výsledku. Dalších 25 % písemných prací obsahovalo řešení příkladu ohodnocené 1,5 či 1 bodem a to za chyby typu špatného dosazení, početní chyby, které ovlivnily celý příklad, chyby ve vzorci nebo špatného způsobu řešení, tedy využití Viètových vzorců.

Příkladem, který dosáhl nejnižší úspěšnosti, byla slovní úloha. Jedna jediná práce obsahovala správné řešení slovní úlohy. Dalších 7 % prací obsahovalo řešení, kde byl znázorněn zápis a byla správně sestavena a vyřešena kvadratická rovnice, nebyly však dopočteny rozměry nového výběhu. 33 % prací obsahovalo správně sestavenou rovnici, ale v průběhu řešení se vyskytla početní chyba nebo zde nebyl žádný zápis, který by ukázal, že by žáci věděli, co počítají a co vyjadřuje neznámá. U 14% písemných prací byla vidět snaha nákresu obrázku či zápisu. U zbylých 43 % prací byla slovní úloha řešena špatně.

Shrneme-li celkové výsledky, můžeme říci, že kvadratické rovnice se naučilo řešit 46 % studentů, tedy ti, kteří získali alespoň 5,5 bodů. Z tohoto hodnocení vyjímáme slovní úlohu, u které nehodnotíme pouze řešení kvadratické rovnice, ale i porozumění textu, sestavení rovnice a další. Možné maximum získaných bodů z těchto příkladů je 7 bodů. Odečteme-li body, které jsou za „formality“, tedy za množinový zápis výsledků, dostaneme právě 5,5 bodu. O 22 % písemných pracích lze prohlásit, že byly neúspěšné. Práce neměly ani jeden správně vypracovaný příklad a bodový zisk tak byl maximálně 1 bod.

9. 2. 2 Výsledky testů ve 2. B

Písemná práce	oddělení	ryze kv. rce	rce bez abs. čl.	kv. rce D	slov. úloha	součet	bez sl. úl.
2B_B12	B	0,5	2	3	3	8,5	5,5
2B_A03	A	2	2	3	1	8	7
2B_A11	A	2	1	3	1,5	7,5	6
2B_A10	A	2	2	3	0	7	7
2B_A15	A	2	2	3	0	7	7
2B_B09	B	2	2	3	0	7	7
2B_A14	A	0	2	3	2	7	5
2B_B03	B	2	1,5	3	0	6,5	6,5
2B_B04	B	1,5	2	3	0	6,5	6,5
2B_B05	B	0,5	2	3	0,5	6	5,5
2B_A09	A	2	0,5	3	0	5,5	5,5
2B_A07	A	1,5	0,5	2,5	1	5,5	4,5
2B_A12	A	2	0	3	0	5	5
2B_B07	B	0	2	3	0	5	5
2B_B10	B	1	1,5	1,5	1	5	4
2B_B01	B	0,5	1	3	0	4,5	4,5
2B_B08	B	2	2	0	0	4	4
2B_A02	A	1,5	1,5	0,5	0	3,5	3,5
2B_A06	A	0,5	0	3	0	3,5	3,5
2B_A04	A	2	1	0	0	3	3
2B_A13	A	0,5	1	1,5	0	3	3
2B_B06	B	1,5	1,5	0	0	3	3
2B_B11	B	2	0	0,5	0	2,5	2,5
2B_A01	A	0,5	1,5	0	0	2	2
2B_A08	A	2	0	0	0	2	2
2B_B02	B	0,5	0,5	0	0	1	1
2B_B13	B	0,5	0	0	0,5	1	0,5
2B_A05	A	0	0	0	0	0	0

Tabulka 2: Přehled bodových výsledků ve třídě 2. B

Tato tabulka ukazuje výsledky třídy 2. B, kde byla výuka kvadratických rovnic vedena klasickým způsobem, tj. frontálně. Nejlepší písemná práce zde získala 8,5 bodů. Nebyla zde vypočítána ryze kvadratická rovnice, díky odmocnění záporného diskriminantu. Zbylé příklady byly vyřešeny zcela správně. V této třídě to byla také písemná práce, kde byla jako jediná ze všech písemných prací vyřešena zcela správně slovní úloha.

První příklad byl vyřešen u 57 % prací. Práce, ve kterých byl opomenut zápis množinového výsledku, jsou zde započteny také, jelikož formální zápis výsledku postup řešení příkladu neovlivní. 33 % prací obsahovalo alespoň částečné řešení příkladu. V této třídě byly časté chyby v dosazení do vzorce nebo rozklad polynomu $a^2 + b^2$ podle vzorce $a^2 - b^2$. 11 % prací bylo bez řešení tohoto příkladu nebo bylo řešení zcela chybné.

Úspěšnost u druhého příkladu, tedy u kvadratické rovnice bez absolutního členu, činí 54 %, což je o jednu práci méně, než u příkladu předchozího. Závažnější chybu, než nezapsání výsledků do množiny K, mělo 25 % prací. Jednalo se o chyby špatného vytknutí, špatného dosazení do vzorce či opomenutí druhého kořene.

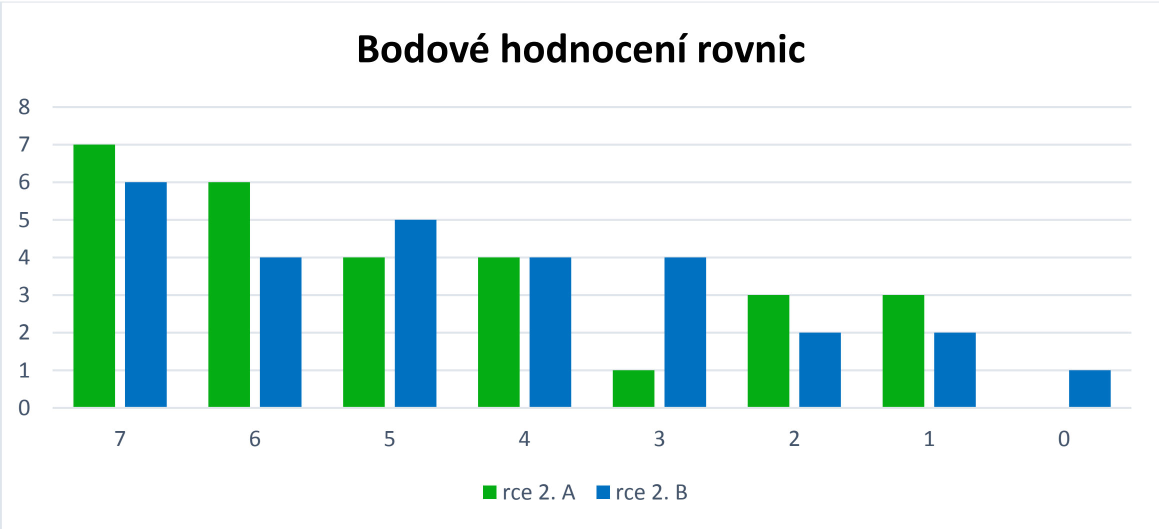
57 % úspěšnosti dosáhla obecná kvadratická rovnice řešená obecným vzorcem s diskriminantem. U 7 % prací byl tento příklad vyřešen z části správně. U těchto prací se objevila chyba špatného dosazení do vzorce, konkrétně bylo opomenuto minus u koeficientu lineárního členu. Zcela špatně byl tento příklad vyřešen u 36 % prací. Nebyl uveden správný vzorec, byl špatně určen koeficient kvadratického členu nebo byl příklad řešen přes Viètovy vzorce, za což dostali alespoň půl bodu.

U slovní úlohy zaznamenala plný počet bodů jedna jediná práce. V jedné další práci byla sestavena a vyřešena správná kvadratická rovnice, ale špatně dopočítány výsledné rozměry výběhu. 15 % prací mělo správně znázorněné či zapsané x, sestavenou výslednou rovnici a částečně vyřešeno, nedopočítali však kořeny. V dalších 7 % prací se objevil alespoň zápis slovní úlohy, avšak 71 % prací neobsahovalo správnou myšlenku nebo byla tato úloha zcela bez řešení.

Celkově lze říci, že 36 % prací bylo úspěšných, opomineme-li slovní úlohu. Zcela neúspěšných prací bylo 18 %. V tomto případě opět nezapočítáváme do výsledků body ze slovní úlohy, které byly v této třídě ve většině případů nulové. Zbylé písemné práce měly alespoň jeden správně vyřešený příklad.

9. 3 Zhodnocení výzkumné sondy

V rámci své výzkumné sondy jsem chtěla poukázat na to, že grafické znázornění kvadratické rovnice by mělo pomoci studentům pochopit a lépe řešit kvadratické rovnice.



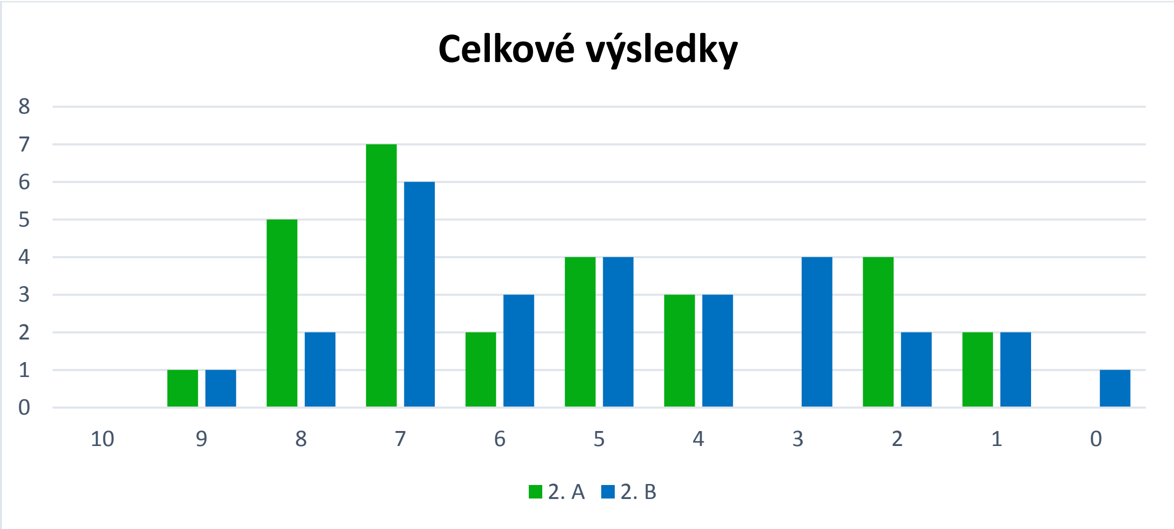
Graf 1: Porovnání bodových výsledků - rovnice

První graf zobrazuje porovnání výsledků písemných prací obou tříd bez slovních úloh. Osa x zobrazuje počet získaných bodů, osa y zaznamenává počet studentů, kteří tento počet bodů dosáhli. Nutno podotknout, že písemné práce jsou pro potřeby grafu matematicky zaokrouhlovány.

Při porovnávání úspěšnosti řešení jednotlivých příkladů jsem zmiňovala, že písemnou práci považuji za úspěšně zpracovanou, pokud v hodnocení dosáhla alespoň 5,5 bodů. Podíváme-li se na graf 1, tak vidíme, že třída 2. A má 13 takovýchto písemných prací a třída 2. B 10. U prací průměrných, za které můžeme označit práce, které získaly bodové ohodnocení mezi 5–2,5 body, činil rozdíl 4 písemných prací, ve prospěch třídy 2. B. U neúspěšných prací, tedy u těch, které získaly 2 body a méně je ve třídě 2. A o 2 písemné práce více.

Rozdíl ve výsledcích písemných pracích není veliký. V nejúspěšnější skupině činil rozdíl třech prací, což je 10 %. Jednotlivé rovnice byly řešeny různými způsoby, což může být způsobeno v závislosti na výuce. Rovnice písemných prací ve třídě 2. A byly řešeny z velké části co nejjednodušším způsobem tak, jak jim látka byla vysvětlena, aby neztráceli čas s obecným vzorcem u jednoduchých příkladů. To považuji za částečný úspěch. Žáci nerezignovali na různá řešení a nenaučili se jen to jedno univerzální. Ve třídě 2. B se i u ryze kvadratických rovnic objevovalo často řešení přes obecný vzorec.

Nyní se podíváme na celkové zhodnocení písemných prací na následujícím grafu.



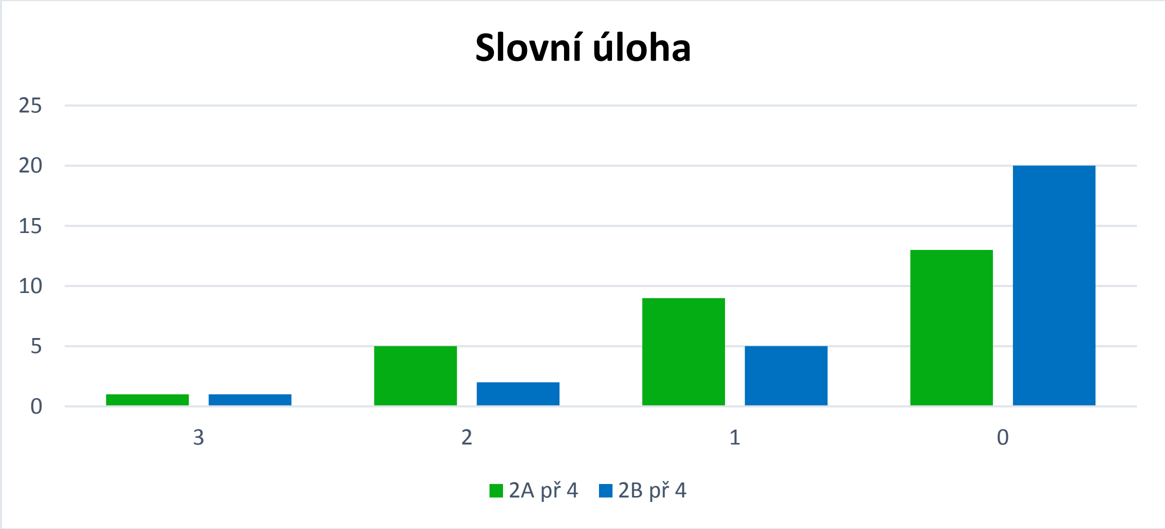
Graf 2: Porovnání celkových výsledků

Graf 2 znázorňuje počet písemných prací, které byly obodovány daným počtem bodů. Na ose x je zanesen počet bodů, na ose y je počet písemných prací. Tento graf zobrazuje bodové ohodnocení včetně slovní úlohy.

Za zdařilou práci považujeme takovou, která dosáhla alespoň 8 bodů, musela být prokázána znalost řešení kvadratických rovnic i slovní úlohy. Zmíněný počet bodů dovoluje jeden nezdařilý lehčí příklad nebo několik drobnějších chyb, jako je třeba nedopočtení slovní úlohy. Z grafu vidíme, že třída 2. A byla o tři písemné práce úspěšnější, než třída 2. B. Podíváme-li se na to z druhé strany, za neúspěšnou práci můžeme považovat práci, která nedosáhla více jak třech bodů. Nebyl tedy správně vypočten více jak jeden příklad.

Ani v celkovém pohledu není možné prohlásit, že mé přípravy byly prokazatelně lepší než frontální výuka. Třída 2. A byla lepší o tři práce, což není dostatečný rozdíl, který by potvrzoval výhodu výuky pomocí grafického znázornění a odvození jednotlivých vzorců.

Částečně prokazatelné je lepší porozumění slovním úlohám. Ve třídě 2. B bylo zařazení slovních úloh do výuky a procvičování normální vzhledem k ostatním probíraným tematickým celkům.



Graf 3: Porovnání získaných bodů - slovní úloha

Jak je vidět v grafu, provázání výuky se slovními úlohami alespoň částečně pomohlo žákům, aby byli schopni sestavit správnou kvadratickou rovnici podle zadání. Tato rovnice byla zapsána v 15 z 28 písemných pracích ze třídy 2. A. Ve třídě 2. B tato rovnice byla sestavena v 8 pracích. Rozdíl je tedy 7 prací, což je 25 % ze všech písemných prací jedné třídy. Grafické znázornění pomohlo žákovské představivosti. Alespoň polovina třídy byla schopna začít správně řešit slovní úlohu. Bohužel mnozí nezvládli dopočítat kvadratickou rovnici a i ti, kteří ji dopočítali, tak nedopočítali požadované údaje.

Se slovními úlohami jsou obecně problémy. Žáci nejsou zvyklí s nimi pracovat, neví, které informace jsou pro ně podstatné, jak sestavit zápis, rovnici a případně že mají dořešit něco dalšího kromě hlavní rovnice.

10 Dotazník

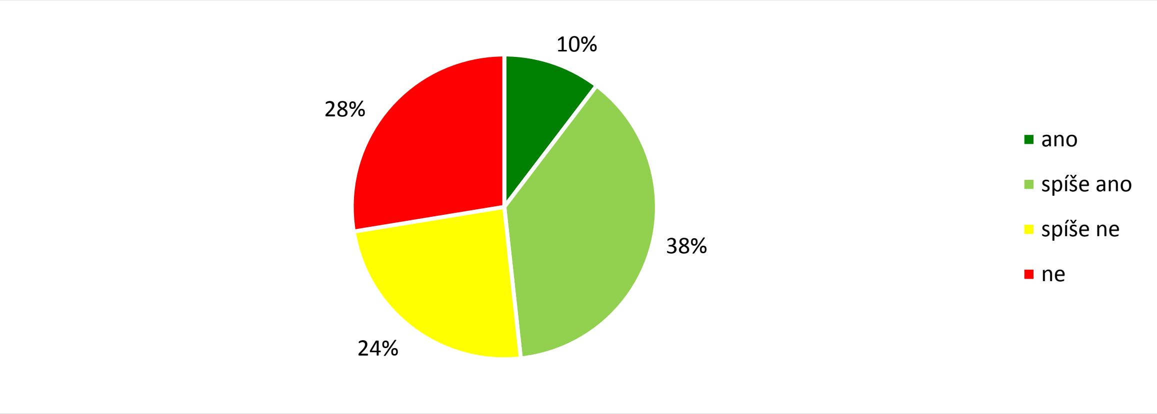
V závěru svého působení ve třídě jsem žákům rozdala dotazník (viz příloha 7), který měl zjistit, jak oni sami vidí přínos výukové metody s grafickým znázorněním, zda jim pomohlo k pochopení látky a k propojení znalostí.

Dotazník byl anonymní a skládal se ze sedmi uzavřených otázek, z nichž pět se vztahovalo ke způsobu výuky. Vyplnilo jej celkem 30 studentů druhého ročníku, z nichž bylo 7 chlapců a 23 dívek.

Otázka č. 2: Baví vás matematika?

Baví vás matematika?	**Četnost**	**Údaje v %**
Ano	3	10
Spíše ano	11	38
Spíše ne	7	24
Ne	8	28

Tabulka 3: Oblíbenost matematiky



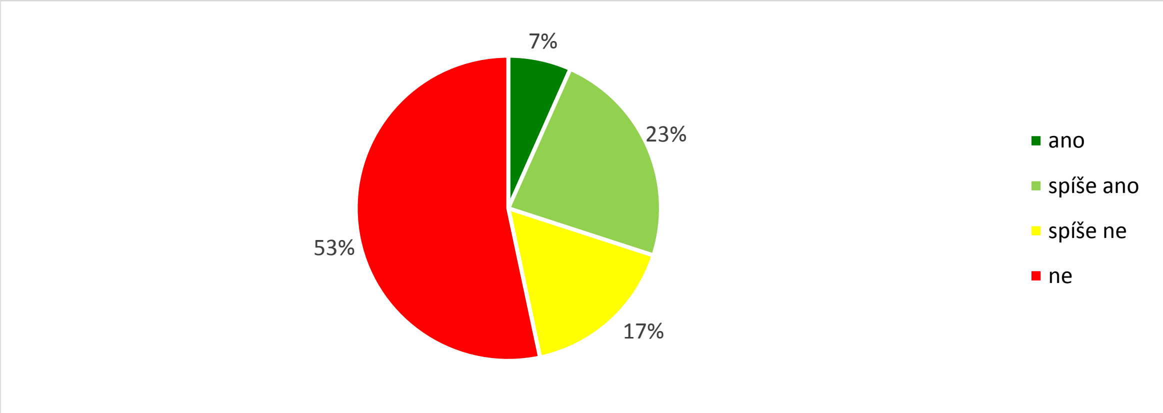
Graf 4: Oblíbenost matematiky

Z uvedeného grafu nelze rozhodnout, zda je matematika na Obchodní akademii v oboru ekonomické lyceum oblíbená či naopak. Znatelný rozdíl je mezi jednoznačnými odpověďmi „ano“ a „ne“. V tomto případě činí rozdíl 10% ve prospěch neoblíbenosti matematiky. U méně rozhodných studentů naopak převládá názor, že je matematika baví a je jejich oblíbeným předmětem. Závěrem je možné říct, že u rozhodných studentů matematika na oblíbenosti ztrácí a u méně rozhodných naopak získává.

Otázka č. 3.: Bylo pro Vás při počítání úvodních slovních úloh názornější použít pro nákres mřížku než nákres bez použití mřížky?

Byl názornější nákres v mřížce než bez ní?	**Četnost**	**Údaje v %**
Ano	2	7
Spíše ano	7	23
Spíše ne	5	17
Ne	16	53

Tabulka 4: Využití čtvercové sítě pro nákres



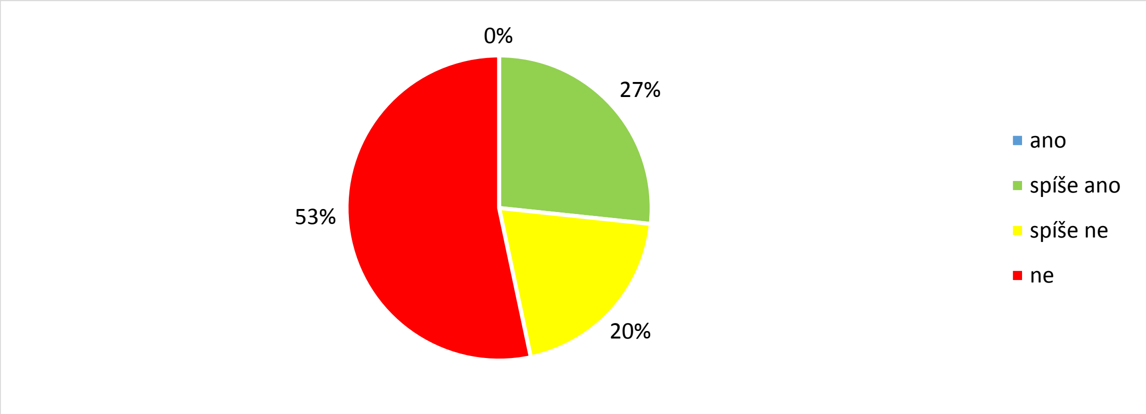
Graf 5: Využití čtvercové sítě pro nákres

Z odpovědí na zmíněnou otázku vyplývá, že je pro studenty minimálně ze začátku výuky matoucí použití mřížky. Tento názor je umocněn nadpoloviční většinou rozhodné odpovědi „ne“. Naopak pro velmi málo studentů je použití mřížky jasným přínosem k pochopení slovních úloh. Skoro čtvrtina studentů v mřížce určitý přínos vidí a je možné, že po delší době výuky pomocí grafických prvků by tento názor mohl sílit.

Otázka č. 4: Pomohlo Vám grafické znázornění k lepšímu pochopení kvadratických rovnic?

Pomohlo Vám grafické znázornění k lepšímu pochopení kvadratických rovnic?	**Četnost**	**Údaje v %**
Ano	0	0
Spíše ano	8	27
Spíše ne	6	20
Ne	16	53

Tabulka 5: Grafické znázornění



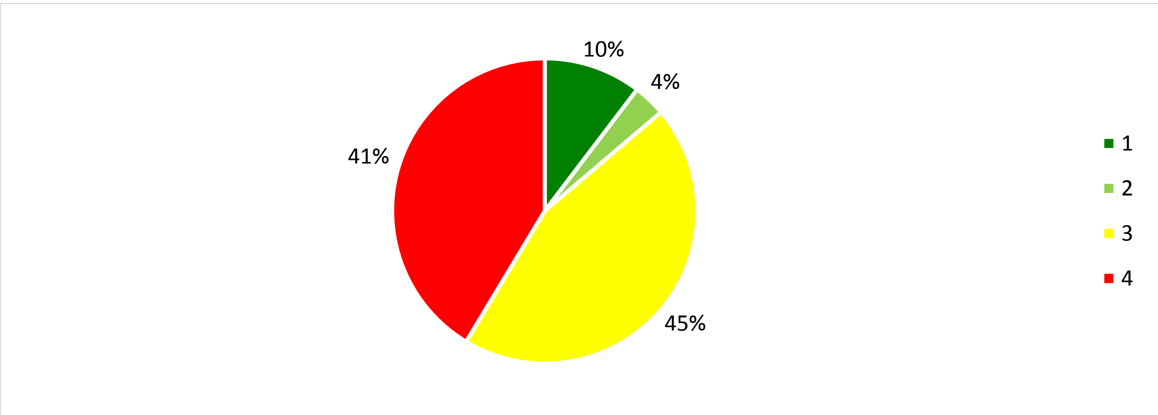
Graf 6: Grafické znázornění

Grafické znázornění je obvykle nejlepší cestou k lepšímu pochopení probírané látky, které v tomto případě nebylo potvrzeno. Více než 70 % respondentů neshledává přínos v grafickém znázornění kvadratických rovnic. Pouze 27 % studentů se přiklání k určitému přínosu grafického znázornění k pochopení kvadratických rovnic. Nikdo si však nemyslí, že grafické znázornění má jasný a viditelný přínos. Jako každá nová technika může být nový způsob výuky pro žáky nejasný, nezvyklý a částečně matoucí.

Otázka č. 5: Jak si pamatujete Viètovy vzorce?

Způsob zapamatování Viètových vzorců	**Četnost**	**Údaje v %**
1. Nemusím si pamatovat vzorec, odvodím si ho z grafické podoby.	3	10
2. Lépe si je představím díky grafickému znázornění.	1	4
3. Pamatuji si je díky roznásobení závorek.	13	45
4. Vzorce se musím učit zpaměti.	12	41

Tabulka 6: Způsob zapamatování Viètových vzorců



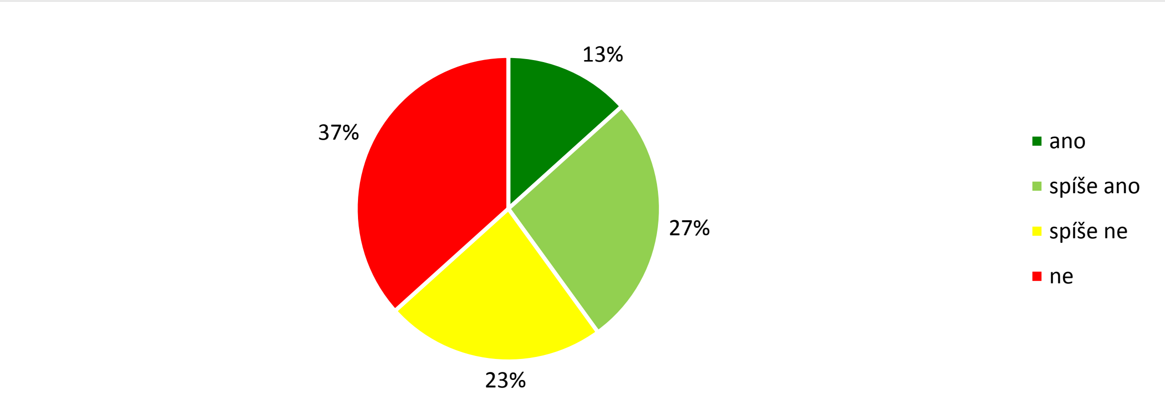
Graf 7: Způsob zapamatování Viètových vzorců

Vyhodnocení způsobu zapamatování Viètových vzorců vyplývá ze způsobu výuky, jakým se studenti látku učí. Nejčastěji na tyto vzorce přichází právě roznásobením závorek a právě podle toho si ji studenti zapamatují. Jinou metodu už studenti k zapamatování obvykle nemají a tak přichází na řadu pamatování zpaměti. Oproti těmto dvěma způsobům je grafická podoba v menšině a studenti dávají přednost klasickému odvození vzorce či učení zpaměti.

Otázka č. 6: Je pro Vás obecný vzorec kvadratické rovnice srozumitelnější po názorném odvození?

Je pro Vás obecný vzorec kvadratické rovnice srozumitelnější po názorném odvození?	**Četnost**	**Údaje v %**
Ano	4	13
Spíše ano	8	27
Spíše ne	7	23
Ne	11	37

Tabulka 7: Srozumitelnost obecného vzorce



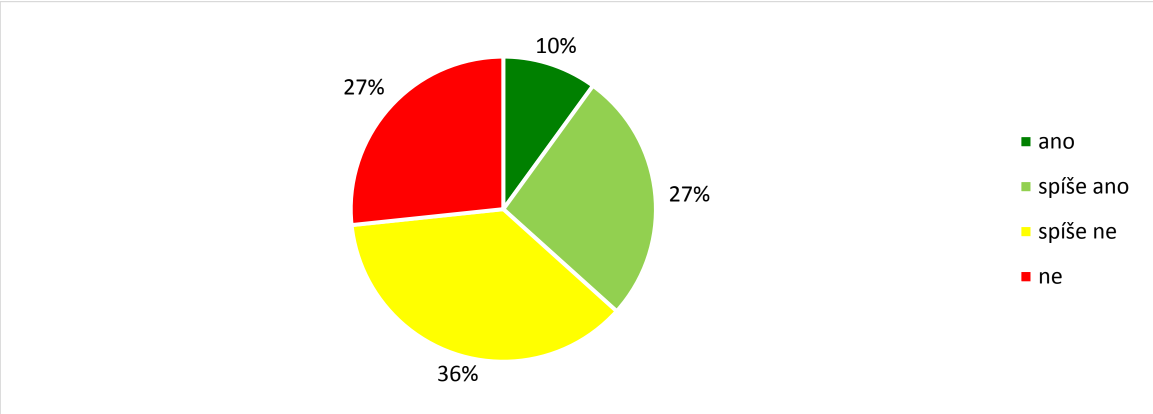
Graf 8: Srozumitelnost obecného vzorce

Z odpovědí je vidět, že názorné odvozování není pro studenty v tomto konkrétním případě velkým přínosem, co se týče jeho srozumitelnosti. Tyto odpovědi korespondují s předchozí otázkou, kde pouze 10 % studentů shledávalo přínos v odvození vzorce pomocí grafického znázornění. V případě srozumitelnosti vzorce je to již 30% studentů, pro které je lepší na pochopení grafické znázornění. Určitý vliv na výsledek má i učitelův způsob výuky a obsah výkladu.

Otázka č. 7: Je pro Vás lepší, přijdete-li na řešení zadaných problémů sami, než když je výsledek sdělen učitelem?

Je pro Vás lepší, přijdete-li na řešení zadaných problémů sami, než když je výsledek sdělen učitelem?	**Četnost**	**Údaje v %**
Ano	3	10
Spíše ano	8	27
Spíše ne	11	36
Ne	8	27

Tabulka 8: Způsob získání vzorce



Graf 9: Způsob získání vzorce

Z tohoto grafu vyplývá skutečnost o snaze studentů bádat a samostatně přemýšlet. Většina respondentů by uvítala pouhé předložení řešení daného problému. Pouze 37 % studentů rozhodně odpovídá kladně v otázce způsobu řešení problému. Zbylých 63 % studentů nemá chuť řešit problémy sami. Toto zjištění navazuje i na otázku způsobu zapamatování Viètových vzorců, které si více jak 40 % respondentů učí zpaměti.

11 Shrnutí praktické části

Během svého týdenního praktikování na škole jsem mluvila s učiteli matematiky, abych zjistila, jak je předmět vyučován, které výukové metody se používají, jaké znalosti žáci mají ze základní školy i jak se jim daří dosahovat požadovaných znalostí na střední škole.

Kvůli poklesu počtu studentů, kteří míří na střední školy, byly zavedeny požadavky při přijímacích zkouškách. Jedním z nich bylo upuštění od přijímacích zkoušek, nebo byly požadavky na úspěšnost staženy na minimum. To má za následek, že mnozí studenti základních škol v deváté třídě ve druhém pololetí již neusilují o dobré studijní výsledky, aby úspěšně zvládli přijímací zkoušky na zvolenou školu. Stejně tak se danou látku učí z testu na test. U žáků to znamená nepropojení nabytých znalosti s další probíranou látkou. Jednoduše se zpaměti a bez propojení informací naučí požadované vzorce a informace, aby zvládnuli test na konci probíraného tématu, a následně jsou informace vypuštěny z hlavy. Na střední škole se pak musí učitelé při výuce zabývat látkou základní školy namísto jejího krátkého shrnutí na začátku školního roku. Následkem je časté doučování této látky učiteli v době, kdy by měli vyučovat středoškolská témata. Když se k tomu připočte fakt, že počet plánovaných hodin věnovaných matematice je snížen cca o 20 hodin v důsledku státních svátků, prázdnin, exkursí a nepředvídaných akcí, končí učitelé zcela pochopitelně u klasické frontální výuky, která jim ponechává určitým způsobem kontrolu nad probranou látkou. Žák je tedy navyklý na režim výkladu, shrnujícího zápisu, procvičení vzorových příkladů, vypracování testu a znovu takto postupovat při jiné probírané látce. Na úlohy související s praxí, jiné formy výuky proto nezůstává moc místa a prostoru.

Žáci, které jsem měla možnost učit, nejsou zvyklí moc často samostatně uvažovat, i když jejich paní učitelka má snahu je přimět ke spolupráci a samostatnému myšlení. Pokud by tito žáci byli více zvyklí pracovat samostatně, více přemýšlet a pomáhat si vzájemně, mohly mít mé přípravy větší úspěch.

Některé části výkladu mohly být i z mé strany jasnější a například odvození obecného vzorce by si dle mého uvážení zasloužilo o hodinu více, což však nebylo možné kvůli počtu vyučovacích hodin, který mi byl věnován na probrání látky. Na druhou stranu nejsem zkušeným pedagogem, přípravy byly zaměřeny spíše na zdatnější žáky, pro ostatní mohly být hůře pochopitelné a nejasné.

V praktické části je poukázáno na fakt, že grafická stránka kvadratické rovnice může žákům pomoci při jejím pochopení, pro žáky by měla být rovnice konkrétnější, zřetelnější, jasnější.

Stejně tak by mělo pomoci využití slovních úloh, které vedly jak na grafický způsob znázornění, tak měly žákům učivo propojit s realitou. Slovní úlohy jsou tu nejen proto, aby prokázaly žákovo matematické porozumění dané látce a schopnost jejího praktického využití, ale i s cílem propojit matematické poznatky s realitou.

Dále jsou v praktické části použity některé alternativní metody vyučování, které jsou určeny k prohloubení Klíčových kompetencí z RVP pro Gymnázia. Prohlubuje se kompetence komunikativní, sociální a personální v diskusi a skupinové práci, dále kompetence k učení a k řešení problémů a to hlavně ze slovních úloh, kde jsou žákům předkládány problémové situace. Utváří se schopnost obhájit si svůj názor, stejně tak vyslechnout a akceptovat názor odlišný.

Odlišení různých způsobů řešení u jednotlivých rovnic prohlubuje u žáků přemýšlení, jelikož je nutí uvědomit si, který typ rovnice počítají a jaký způsob řešení je nejefektivnější. Odvozování vzorce vyžaduje, aby žáci zapojili logické uvažování. Je žádoucí, aby si uvědomili vztahy mezi jednotlivými členy kvadratické rovnice.

Nevýhodou popsaných alternativních způsobů výuky je delší doba probírání jedné látky. Déle trvá, než žáci přijdou na řešení, ať konkrétní či obecné. Je nutné překonat žákovu nechuť a nejistotu k aktivní práci.

Klasická frontální výuka má výhodu v tom, že je pro učitele relativně jednoduché předstoupit před třídu s výkladem látky a nevyžadovat od žáků velkou míru interakce. Žák sám není nucen moc přemýšlet, pokud nechce. Vzorce a postupy jsou mu předkládány jako hotové, které je schopen se naučit a zautomatizovanými postupy řešit příklady. To umožňuje celkem rychlý postup probíranou látkou. Je možné díky ní učivo strukturovaně uspořádat a rozčlenit do jednotlivých témat.

Nevýhodou frontální výuky je, že žáci nejsou nuceni samostatně myslet a uvažovat. Nepropojují si informace z jednotlivých tematických celků dohromady a to má za následek neúspěch v souhrnných testech.

I v diplomové práci jsou k nalezení pasáže, které jsou určeny k frontální výuce. Na druhou stranu bychom měli žáky motivovat k učení, a proto jim byl nabídnut jiný pohled na látku, ve které měli propojit téma s reálnými situacemi. Z toho důvodu je ideální zkombinovat obě metody výuky, o což jsem se ve svých přípravách snažila.

Závěr

Ve své diplomové práci jsem se zabývala algebraickými rovnicemi. Teoretická část uvádí pohled do historie na vývoj algebraických rovnic a na jejich způsoby řešení, ve kterých lze hledat inspiraci i pro nynější výuku, a to hlavně z důvodu názornosti. Třetí kapitola je věnována řešitelnosti algebraických rovnic v závislosti na jejich stupni a popisu způsobu řešení.

V praktické části jsem se snažila uvést jiný pohled na výuku kvadratických rovnic pomocí jejich grafického znázornění. Tento způsob výuky do jisté míry vychází ze snahy co nejvíce přiblížit problematiku žákům tak, aby byla i na první pohled srozumitelná a přehledná. Úzce souvisí s historickým vývojem rovnic. Z pohledu Rámcového vzdělávacího programu jsem se snažila do výuky zapojit co nejvíce aktivních vyučovacích metod, například výukový kvíz, diskusi, skupinovou práci. Pro výuku rovnic jsem využila rovnoramenných vah, které jsou vhodné pro znázornění ekvivalentních úprav.

Výzkumná sonda, kterou jsem provedla, neprokázala oproti klasické frontální metodě v krátkém časovém úseku lepší studijní výsledky. Pro žáky by metoda s aktivní výukou měla být zábavnější, aktivnější, více rozvíjející jejich klíčové kompetence, mezi které patří primárně logické myšlení a uvažování. Mezi žáky bylo vidět nadšení, které plyne z odlišného způsobu učení, než jaký zažívají v běžných hodinách. Na druhou stranu jsem zaznamenala i znudění jiných žáků, že nemohou jen sedět a opisovat si příklady z tabule. Aby se žáci naučili pracovat aktivními metodami, muselo by se s nimi tímto způsobem pracovat pravidelně.

Tento způsob výkladu je dalším z mnoha, které jsou již užívány, a není vhodný pro všechny žáky. Určitým omezením je nemožnost zobrazení záporného kořenu nebo interpretace kořenů racionálních, popřípadě iracionálních.

Cílem práce bylo seznámit čtenáře s výukou kvadratických rovnic, založeném především na grafickém znázornění a ověřit její využití. Jsem ráda, že jsem v praxi viděla, jak se podle nich učí a že tato metoda není vhodná pro studenty každého studijního oboru. Díky teoretické části jsem si upevnila své znalosti o algebraických rovnicích a historie mě obohatila mnoha zajímavostmi.

Seznam literatury

[1] KONFOROVYČ, Andrìj Hryhorovyč. *Významné matematické úlohy*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-042-1848-2.

[2] BALADA, František. *Z dějin elementární matematiky: František Balada*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1959. Pomocné knihy pro učitele.

[3] STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. 1. vyd. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie (Orbis).

[4] Quadratic formula. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-01-29]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_formula

[5] HEJNÝ, Milan. *Theória vyučovania matematiky 2*. 1. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1987. ISBN 80-08-00014-7.

[6] ZNÁM, Štefan. *Pohľad do dejín matematiky: celoštátna vysokoškolská príručka*. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1986. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry.

[7] FOLTA, Jaroslav. *Dějiny matematiky I*. 1. Praha: Národní technické muzeum, 2004. Práce z dějin techniky a přírodních věd. ISBN 80-239-4031-7.

[8] Diofantos z Alexandri::MEF:. *Fyzika::MEF:* [online]. Praha, 2006 [cit. 2016-02-02]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1436-diofantos-z-alexandrie

[9] Diophantus. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-02]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Diophantus

[10] François Viète. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-02]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te?oldid=413457367

[11] François Viète. *Eduportál: Eduportál Techmania* [online]. Plzeň: Techmania Science Center, 2006 [cit. 2016-02-02]. Dostupné z: http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1354/viete

[12] Gerolamo Cardano. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-02]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano

[13] BICAN, Ladislav. *Algebra (pro učitelské studium)*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2001. ISBN 80-200-0860-8.

[14] GOODMAN, Frederic M. *Algebra: Abstract and concrete*. 2. Iova City: SemiSimple, 2014. ISBN 978-0-9799142-1-8. Dostupné také z: http://homepage.math.uiowa.edu /~goodman/algebrabook.dir/book.2.6.pdf

[15] CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice*. 3. přepr. vyd. Praha: Prometheus, 1999. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-719-6154-X.

[16] Rovnice vyšších stupňů. *Katedra didaktiky matematiky MFF UK* [online]. Praha, 2016 [cit. 2016-02-06]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//diplomky/kristyn a_podhajska_bp/rovnice/?page=rdefinice

[17] Lineární rovnice. *Rovnice a nerovnice* [online]. Praha, 2008 [cit. 2016-02-06]. Dostupné z: http://www.rovnice.kosanet.cz/lin_rce.html

[18] Kvadratické rovnice. *Rovnice a nerovnice* [online]. Praha, 2008 [cit. 2016-02-06]. Dostupné z: http://www.rovnice.kosanet.cz/kvad_rce_viet.html

[19] Quadratic equation. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-06]. Dostupné z: https://en.wikip edia.org/wiki/Quadratic_equation#Quadratic_formula_and_its_derivation

[20] Cubic Function. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-08]. Dostupné z: https://en.wikipedia.o rg/wiki/Cubic_function#Cardano.27s_method

[21] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry: celostátní vysokoškolská učebnice*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1953.

[22] Algebra v 16. a 17. století. *Matematika v 16. a 17. století: seminář Historie matematiky III : Jevíčko, 18. 8.–21. 8. 1997*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, s. 161-235. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 12. ISBN-80-7196-150-7. Dostupné také z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401579/DejinyMat_1 2-1999-1_10.pdf

[23] Vyšší rovnice. In: *Rovnice a nerovnice* [online]. Praha, 2014 [cit. 2016-02-08]. Dostupné z: http://www.rovnice.kosanet.cz/vyssi_rce.html

[24] Quartic function. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: https://en.wikipedia.o rg/wiki/Quartic_function

[25] Binomická rovnice. In: *Katedra didaktiky matematiky MFF UK* [online]. Praha, 2016 [cit. 2016-02-08]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~robova/stranky /silarova/vlastni_stranky/rovnice.html#u2

[26] Reciproká rovnice. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-08]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Reciprok%C3%A1_rovnice

[27] RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*. 2014, **24**(1), 22-56. DOI: 10.5817/PadOr2014-1-22. ISSN 12114669.

[28] *Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky: Matematika*. 1. Praha, 2014. MSMT-6858/2014-CERMAT. Dostupné také z: http://www.novamaturita.cz/index.php?id_document=1404033138

[29] BALADA, Jan. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia: RVP G*. 1. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, c2007. ISBN 978-80-87000-11-3. Dostupné také z: http://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/skolskareforma/ramcove-vzdelavaci-programy

[30] *IT systémy ve strojírenství: Školní vzdělávací program*. 1. Mladá Boleslav, 2013. Dostupné také z: https://www.spsmb.cz/pdf/SVP_ISTR_192013.pdf

[31] *Školní vzdělávací program: Gymnázium Dr. Josefa Pekaře v Mladé Boleslavi*. 1. Mladá Boleslav, 2014. Dostupné také z: http://www.pekargmb.cz/stah/svp.pdf

[32] Učební osnovy: Obchodník. *Integrovaná střední škola, Mladá Boleslav, Na Karmeli 206* [online]. 2014, 2015-10-08 [cit. 2015-10-08]. Dostupné z: http://www.issmb.cz/svp/obchodnik/ucebni-osnovy_i_matematika.htm

[33] Učební osnovy: Informační služby - knihovnictví. *Integrovaná střední škola, Mladá Boleslav, Na Karmeli 206* [online]. 2014, 2015-10-08 [cit. 2015-10-08]. Dostupné z: http://www.issmb.cz/svp/knihovnictvi/ucebni-osnovy_i_matematika.htm

[34] Učební osnovy: Ekonomika a podnikání. *Integrovaná střední škola, Mladá Boleslav, Na Karmeli 206* [online]. 2014, 2015-10-09 [cit. 2015-10-09]. Dostupné z: http://www.issmb.cz/svp/ekonomika/ucebni-osnovy_i_matematika.htm

[35] Učební osnovy: Pedagogika. *Integrovaná střední škola, Mladá Boleslav, Na Karmeli 206* [online]. 2014, 2015-10-08 [cit. 2015-10-08]. Dostupné z: http://www.issmb.cz/svp/ucitelka/ucebni-osnovy_i_matematika.htm

[36] *Školní vzdělávací program pro Gymnázia Frýdlant*. 1. Frýdlant, 2012. Dostupné také z: http://www.gymfry.cz/pdf/svp_gf.pdf

[37] PŘÁDNÁ, Irena, Marcela DANAJOVIČOVÁ a Věra VORŠILKOVÁ. *Školní vzdělávací program Gymnázia F. X. Šaldy v Liberci: pro nižší stupeň gymnázia zpracováno podle RVP ZV; pro vyšší stupeň gymnázia zpracováno podle RVP G*. 1. LIberec, 2007. Dostupné také z: http://www.gfxs.cz/uploads/studium/SVP_GFXS_2007.pdf

[38] *Strojírenská technická administrativa: Školní vzdělávací program*. 1. Mladá Boleslav, 2010. Dostupné také z: https://www.spsmb.cz/pdf/SVP_STA_192010.pdf

[39] *Informační technologie: Školná vzdělávací program*. 1. Mladá Boleslav, 2011. Dostupné také z: https://www.spsmb.cz/pdf/SVP_IT_192015.pdf

[40] *Školní vzdělávací program pro obor Dopravní prostředky*. 1. Liberec, 2012. Dostupné také z: http://wordpress.ssams.cz/wp-content/uploads/2014/08/%C5%A1vp.pdf

[41] *Školní vzdělávací program pro obor Mechanik elektrotechnik*. 1. Liberec, 2009. Dostupné také z: http://wordpress.ssams.cz/wp-content/uploads/2014/08/ME.pdf

[42] *Obchodní akademie 2015: Školní vzdělávací program*. 2. Liberec, 2015. Dostupné také z: http://www.oalib.cz/oalib2/images/stories/jaroslav_pocer/Dokumenty/2015/Obchodn%C3%AD%20akademie%202015.pdf

[43] *057/2013 Autotronik*. 2013. Liberec II, 2013. Dostupné také z: http://www.sslbc.cz/files/svp/2013/Autotronik.pdf

[44] *043/2011 Technická zařízení budov*. 1. Liberec II, 2011. Dostupné také z: http://www.sslbc.cz/files/svp/2011/Technicke_Zarizeni_Budov.pdf

[45] *034/2011 Mechanik instalatérských a elektrotechnických zařízení: Školní vzdělávací program*. 1. Liberec II, 2011. Dostupné také z: http://www.sslbc.cz/files/svp/2011/Mechanik_Instalaterskych_A_Elektrotechnickych_Zarizeni.pdf

[46] *041/2011 Provoz a ekonomika dopravy: Školní vzdělávací program*. 1. Liberec II, 2011. Dostupné také z: http://www.sslbc.cz/files/svp/2011/Provoz_A_Ekonomika_Dopravy.pdf

[47] *036/2011 Mechanik seřizovač - CNC vstřikovací stroje: Školní vzdělávací program*. 1. Liberec, 2011. Dostupné také z: http://www.sslbc.cz/files/svp/2011/Mechanik_Serizovac_-_Cnc_Vstrikovaci_Stroje.pdf

[48] *058/2013 Mechanik seřizovač - CNC obráběcí stroje: Školní vzdělávací program*. 2. Liberec, 2013. Dostupné také z: http://www.sslbc.cz/files/svp/2013/Mechanik_Serizovac_-_Cnc_Obrabeci_Stroje.pdf

[49] *Školní vzdělávací program: Správce počítačové sítě, virtualizace a cloud computing, 18-20-M/01 Informační technologie*. Štětí: VOŠ obalové techniky a Střední škola, 2012. Dostupné také z: http://www.odbornaskola.cz/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=192:vp&catid=21:svp&Itemid=105

[50] SITNÁ, Dagmar. *Metody aktivního vyučování: spolupráce žáků ve skupinách*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-246-1.

[51] Nadace Depositum Bonum. Rozhovor s prof. Milanem Hejným. In: *Youtube* [online]. Zveřejněno 02. 10. 2016 [vid. 2015-12-01]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=IQZHUlpVm-0

[52] PALEČKOVÁ, Jana, Vladislav TOMÁŠEK a Josef BASL. *Hlavní zjištění výzkumu PISA 2009: Umíme ještě číst?*. 1. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2010. ISBN 978-80-211-0608-6.

[53] RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*. 2014, **24**(1), 22-56. DOI: 10.5817/PadOr2014-1-22. ISSN 12114669.

[54] KUŘINA, František. Naše pedagogická realita. *MATEMATIKA-FYZIKA-INFORMATIKA*, 2014, 23.1: 1–8.

Seznam příloh

Příloha 1

Ročník:	Druhý
Datum:	15. 10. 2015 (6. vyučovací hodina)
Tematický okruh:	Kvadratické rovnice
Téma hodiny:	1. hodina: Úvod do kvadratických rovnic (motivace)
Očekávané výstupy v RVP:	
Očekávané výstupy v ŠVP	
Školní výstup:	Žák vyřeší slovní úlohy vedoucí na kvadratickou rovnici a své řešení zdůvodní.
Výchov. vzděl. strategie:	Skupinová práce, diskuse
Kompetence:	Komunikativní, k řešení problémů
Pomůcky:	Pracovní listy: Úvodní slovní úlohy

Průběh hodiny:

Úvod hodiny (0.00–0.05):

Rozdělení žáků do jednotlivých skupin, rozdání pracovních listů a sdělení pokynů k práci. Na lavici nebude nic, kromě pracovních listů a psacích potřeb, nic jiného pro danou práci není třeba.

Skupinová práce na zadaných slovních úlohách (0.05–0.25):

Žáci pracují na zadaných slovních úlohách. Učitel mezi nimi prochází, průběžně kontroluje jejich práci. Pokud někdo potřebuje pomoci, navede ho jednoduchou otázkou, aby si uvědomil souvislost, nesmí mu však podat instruktáž, jak daný problém vyřešit. Skupinka na to musí přijít sama, případně od svých spolužáků z jiné skupinky.

Je-li to možné, učitel využije ke znázornění řešení interaktivní tabuli, kde si zobrazí čtvercovou síť a žáci do ní mohou svá řešení zakreslovat. Pokud ne, využijí klasickou tabuli, kde je třeba grafické znázornění zakreslit pomocí čtvercové sítě, kterou učitel může promítnout, má-li k dispozici dataprojektor (případně i meotar), nebo ji předkreslí na tabuli, žáci do ní obrázek zakreslí. Poslední možností je nechat na žácích, aby zakreslili obrázek sami pomocí čtvercové sítě.

Diskuse nad řešeními (0.25–0.43):

Diskuse nad výsledky samostatné práce by měla být hlavně mezi žáky. Učitel zde funguje především jako moderátor a případný „nahlodávač“, zda je řešení opravdu správné. Klade podněcující dotazy.
Jedna ze skupinek půjde zakreslit své řešení na tabuli a popisuje při tom, jak na řešení přišla. Je třeba, aby u toho použila zápis, kde uvede neznámou a k jakým změnám vůči ní došlo.
Dotazy:

- Jak jste zakreslili zadání slovní úlohy? *Jako obdélník, jehož obsah známe a který splňuje zadané podmínky.*
- Kde se vám zobrazilo x? *x je velikost kratší strany zobrazeného obdélníku.*

- Jak jste zapsali matematicky zadání úlohy? (S jakými problémy jste se u zápisu potýkali?) *Měl by odpovídat matematickému zápisu u řešení slovních úloh.*
- Nenarazili jste při hledání řešení na dvě možné odpovědi? *Někoho mohlo napadnout, především u 1. slovní úlohy, že odmocnina z 1 je 1, ale může vyjít i -1.*

Závěr hodiny (0.43–0.45):

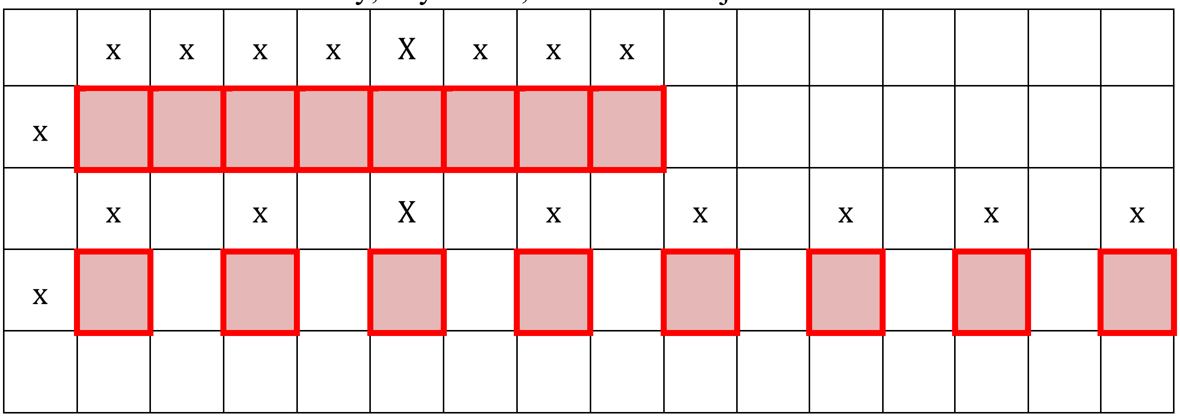
V závěru hodiny je třeba, aby některý z žáků shrnul, co jsme v hodině udělali. Je celkem jisté, že se nestihne vše probrat v rámci jedné vyučovací hodiny. Je důležité, aby si žáci přinesli pracovní listy na další hodinu, kdy se bude ze začátku hodiny pokračovat v diskusi a naváže se další částí – zobecněním. Žáci dostanou také zadání domácího úkolu, ve kterém jde o výpočet neúplných kvadratických rovnic, které mají žáci na základě předchozího studia algebraických výrazů vypočíst.

Domácí úkol:

a) $x^2 - 9 = 0$	d) $7x^2 - 70 = 0$	a) $9x^2 + 91x = 0$	d) $x^2 - 567x = 0$
b) $2x^2 + 162 = 0$	e) $5x^2 = 0$	b) $x^2 + 8x = 0$	e) $56x^2 = 28x$
c) $2x^2 - 242 = 0$	f) $3x^2 + 93 = 0$	c) $-x^2 + 23x = 0$	f) $7x^2 - 49x = 0$

Slovní úlohy:

1. Rodinný domek má celkem 8 stejných čtvercových oken. Jaký rozměr musí mít skleněné okenní tabulky, když víme, že okna zabírají celkem $8m^2$?



x … *rozměr skleněné tabulky*

$$8x \cdot x = 8m^2$$

$$8x^2 = 8$$

$$x^2 = 1$$

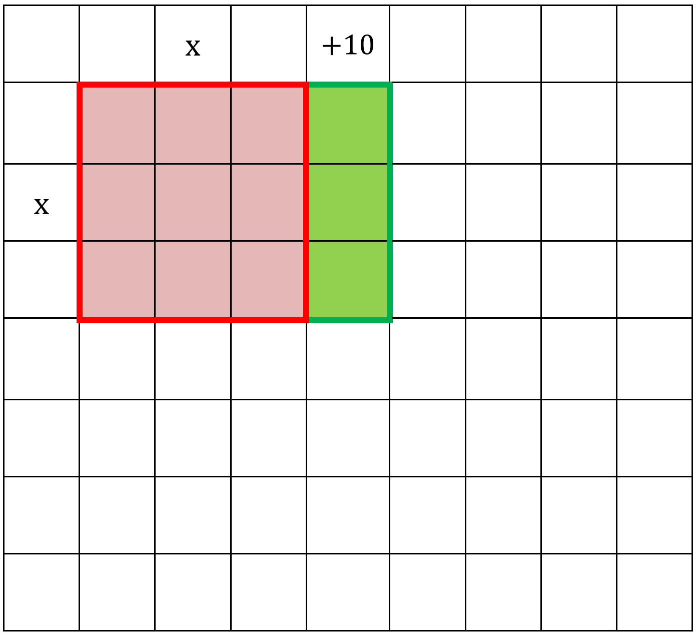
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$|x| = 1$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Skleněné okenní tabule musí mít rozměry 1×1 metr.

2. V malé vesničce nedaleko Mladé Boleslavi se nacházel malý čtvercový hřbitov. Kvůli jeho kapacitě bylo nutné hřbitov zvětšit. Zastupitelé obce rozhodli, že hřbitov prodlouží o 10m. Po prodloužení bude mít hřbitov rozlohu 1200m2. Jaká bude délka hřbitovních zdí?



$x \ldots původní\ délka\ zdi$

$x + 10$

$S = 1\,200 m^2$

$S = x(x + 10)$

$x = ?$

$x^2 + 10x = 1200$

$x(x + 10) = 1200$

$x_1 = 30\ m;$

$x_2 = -40\ m, není\ řeš.\ sl.\ úlohy$

Kratší hřbitovní zeď je dlouhá 30m a delší měří 40m.

3. Rodiče koupili obdélníkový pozemek s celkovou rozlohou 110m². Chtějí postavit rodinný domek čtvercové základny, přiléhající ke dvěma stranám pozemku. Na zbylé části se bude rozprostírat zahrada tvaru písmene L. Jedna část bude široká 2m a druhá část 3m. Jakou plochu bude zabírat domek? Jakou bude mít délku venkovní stěna?

$a = x + 2 \ldots 1. rozměr\ pozemku$

$b = x + 3 \ldots 2. roměr\ pozemku$

$\underline{S = ab = 110 m^2}$

$110 = (x + 2)(x + 3)$

$110 = x^2 + 2x + 3x + 6$

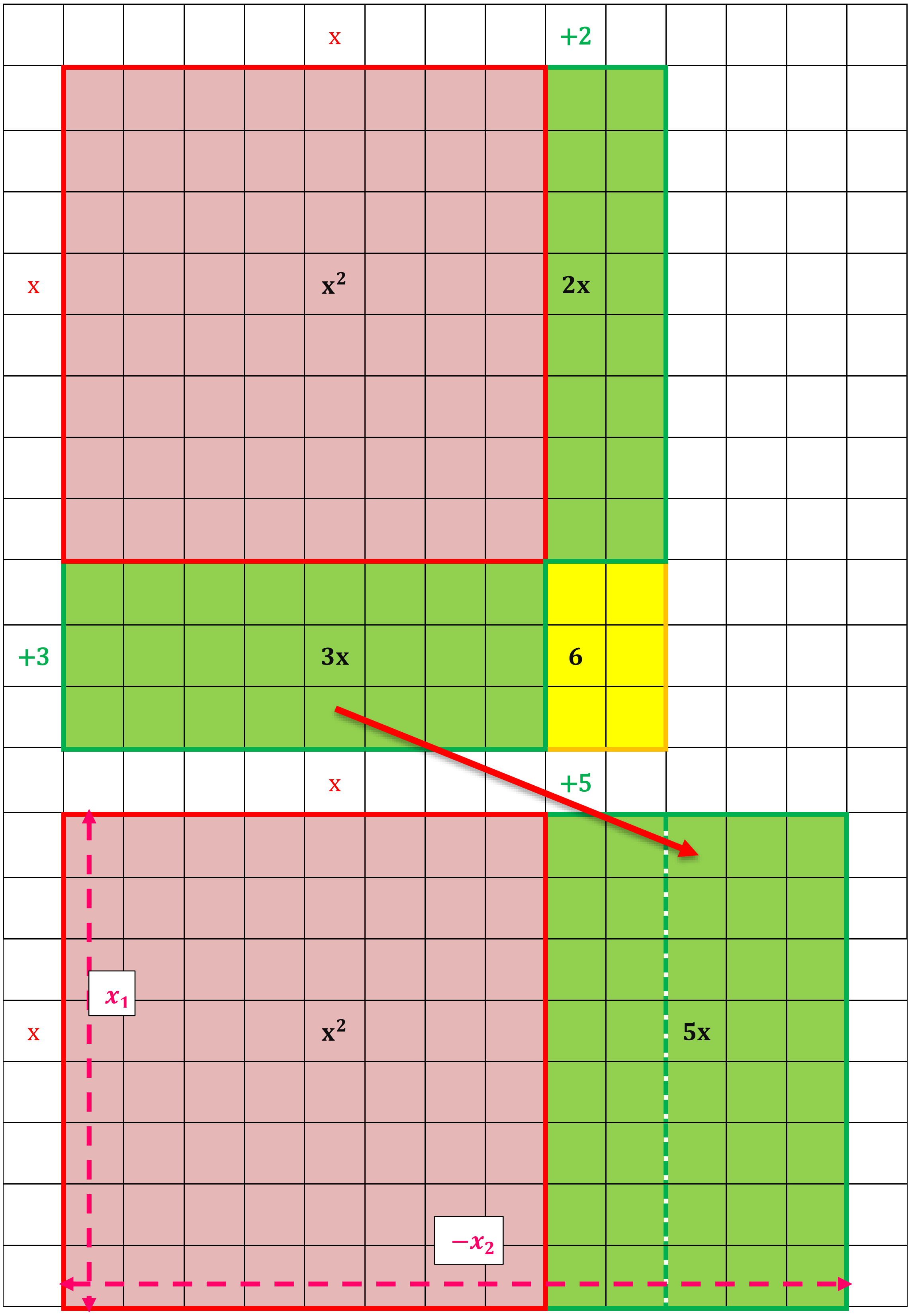
$110 = x^2 + 5x + 6$ / -6; *přerovnání ploch a přepočet plochy*

$104 = x^2 + 5x$

$104 = x(x + 5)$

$x_1 = 8; x_2 = -13$

Délka stěny bude 8m. Dům bude zabírat plochu 64m².


x
+2
x
x²
2x
+3
3x
6
x
+5
x
x²
5x
x₁
−x₂

Příloha 2

Na pracovním listě jsou pro Vás nachystány tři slovní úlohy. Ve skupinkách je popořadě vypracujte.

Zadání se pokuste zakreslit do čtvercové sítě. Vzpomeňte si na vzorec pro výpočet obsahu plochy, pomůže vám. Není zatím třeba, abyste něco matematicky zapisovali. Zamyslete se. Ve skupině diskutujte, jak byste řešení obhájili.

Jakmile budete mít úlohy vyřešeny, pokuste se zadání i řešení zapsat matematicky. Uvědomte si, jaké matematické operace provádíte.

1. Rodinný domek má celkem 8 stejných čtvercových oken. Jaký rozměr musí mít skleněné okenní tabulky, když víme, že okna zabírají celkem $8m^2$?

2. V malé vesničce nedaleko Mladé Boleslavi se nacházel malý čtvercový hřbitov. Kvůli jeho kapacitě bylo nutné hřbitov zvětšit. Zastupitelé obce rozhodli, že hřbitov prodlouží o 10m. Po prodloužení bude mít hřbitov rozlohu 1200m2. Jaká bude délka hřbitovních zdí?

3. Rodiče koupili obdélníkový pozemek s celkovou rozlohou 110m^2. Chtějí postavit rodinný domek čtvercové základny, přiléhající ke dvěma stranám pozemku. Na zbylé části se bude rozprostírat zahrada tvaru písmene L. Jedna část bude široká 2m a druhá část 3m. Jakou plochu bude zabírat domek? Jakou bude mít délku venkovní stěna?

Příloha 3

Ročník:	Druhý
Datum:	19. 10. 2015 (2. vyučovací hodina)
Tematický okruh:	Kvadratické rovnice
Téma hodiny:	1. hodina: Úvod do kvadratických rovnic
Očekávané výstupy v RVP:	Žák rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic. Žák rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy.
Očekávané výstupy v ŠVP	Žák rozliší úplnou a neúplnou kvadratickou rovnici, rozhodne o metodě řešení. Žák uvede vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice a použije je při řešení úloh. Žák převede kvadratický trojčlen na součin lineárních činitelů. Žák rozlišuje úpravy rovnic na ekvivalentní a neekvivalentní.
Školní výstup:	Žák vypočte neúplnou kvadratickou rovnici a vypočte kvadratickou rovnici pomocí Viètových vzorců.
Výchov. vzděl. strategie:	Skupinová práce, diskuse
Kompetence:	Komunikativní, k řešení problémů
Pomůcky:	Pracovní listy: Úvodní slovní úlohy

Průběh hodiny:

Úvod hodiny (0.00–0.03):

Stručné zopakování, co jsme dělali předchozí hodinu. Věnovali jsme se slovním úlohám vedoucím na kvadratickou rovnici. Viděli jsme, že kvadratickou rovnici lze vyřešit i pomocí selského rozumu a není k tomu v mnohých případech třeba složitý matematický aparát.

Pojmy (0.03–0.07):

Je zapotřebí vytvořit pojmový aparát, popsat jednotlivé členy kvadratické rovnice. Co platí pro jednotlivé koeficienty, aby kvadratická rovnice zůstala kvadratickou a nezměnila se na lineární rovnici či rovnost. Žáci by měli na většinu věcí přijít sami, pojmy pro ně nejsou zcela neznámé, buď je použijí intuitivně, nebo se s nimi setkali již dříve.

Kvadratická rovnice

Obecná kvadratická rovnice:

absolutní člen

kvadratický člen $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$

lineární člen

$x \ldots neznámá;\ a, b, c \ldots koeficienty$

$a = 0 \rightarrow ax^2 = 0 \rightarrow nejedná\ se\ o\ kvadratickou\ rovnici, ale\ o\ lineární$

Neúplné kvadratické rovnice (0.07–0.25):

Ryze kvadratická rovnice:

$b = 0 \rightarrow bx = 0 \rightarrow ax^2 + c = 0$

$8x^2 = 8 \rightsquigarrow x^2 = 1 \rightsquigarrow |x| = \sqrt{1} \rightsquigarrow x = \pm 1$

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0 \rightsquigarrow x^2 = -\frac{c}{a} \rightsquigarrow |x| = \sqrt{-\frac{c}{a}} \rightsquigarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Rovnice, kde $b = 0$, nám vypadne lineární člen. *Návaznost na slovní úlohu č. 1.*

Jak byste ji řešili? Nač je třeba si dát pozor? Co absolutní hodnota – jak do toho zapadá? Jaké číslo jsme museli umocnit, abychom dostali c/a?

Odmocnina je vždy kladné číslo, avšak původní číslo, které muselo být umocněno, mohlo být kladné i záporné, proto je třeba užít absolutní hodnotu k nalezení obou kořenů rovnice.

g) $x^2 - 9 = 0$
h) $2x^2 + 162 = 0$
i) $2x^2 - 242 = 0$
j) $7x^2 - 70 = 0$
k) $5x^2 = 0$
l) $3x^2 + 93 = 0$

Kvadratická rovnice bez absolutního členu:

$c = 0 \rightarrow ax^2 + bx = 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = 0 \rightsquigarrow x\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0 \rightsquigarrow x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$$

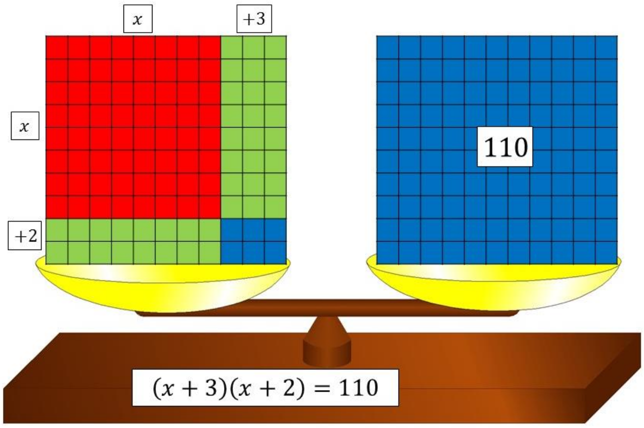
Rovnice, kde $c = 0$, nám vypadne absolutní člen. *Napadne někoho, jak lze tuto rovnici znázornit?(úsečka) Jak byste ji řešili? Co můžeme říci o kořenech?*

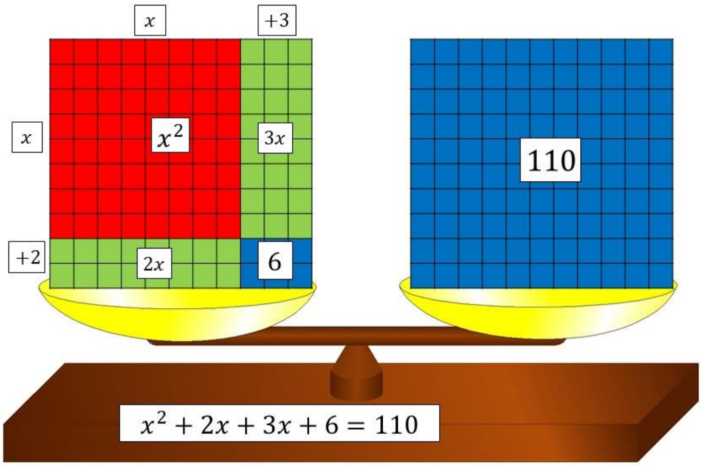
Aby se součin rovnal nule, musí být alespoň jeden z činitelů roven nule. V tomto případě bude jeden z kořenů roven nule, druhý bude roven –b/a.

g) $9x^2 + 91x = 0$
h) $x^2 + 8x = 0$
i) $-x^2 + 23x = 0$
j) $x^2 - 567x = 0$
k) $56x^2 = 28x$
l) $7x^2 - 49x = 0$

Viètovy vzorce (0.25–0.42):

Viètovy vzorce vyžadují návrat k motivační slovní úloze č. 3. Žáci se snaží sami vyjádřit hledané x, upravují daný obrazec tak, aby odstranili přebytečnou plochu a zbylou zobrazili tak, aby šlo vyjádřit jejich hodnotu. Musí vidět, že konstanta u lineárního členu je součtem a absolutní člen je součinem délky stěn obdélníka. Navázání na příklad ze slovních úloh.

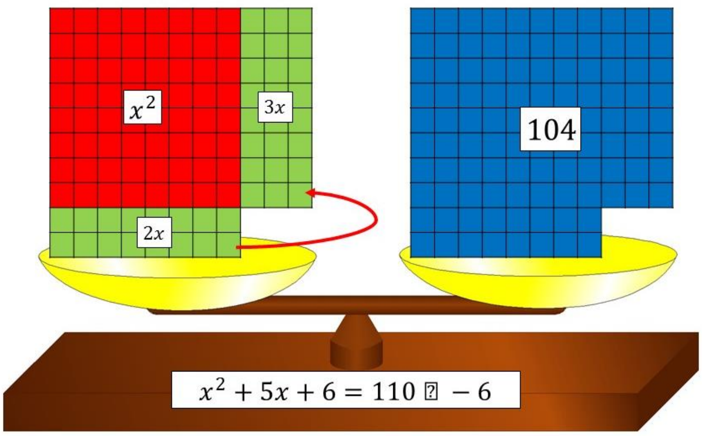




$$(x + 3)(x + 2) = 110$$

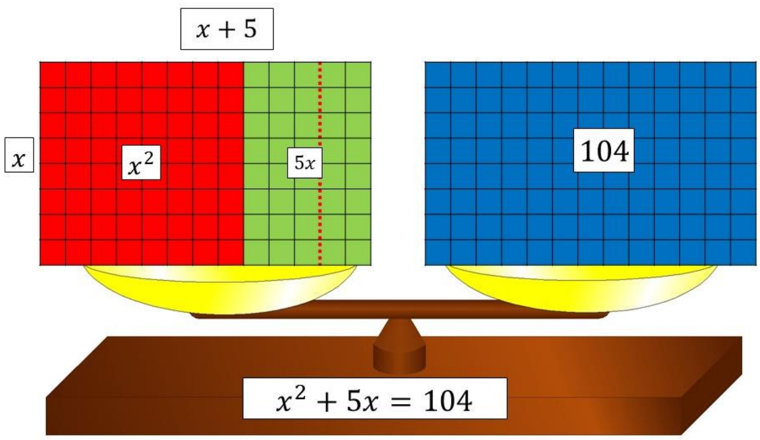
$$x^2 + 3x + 2x + 6 = 110 \,/\, -6$$

6 je součinem přidaných hodnot k x. Abychom zjistili hodnoty x, musíme se zbavit přebytečné známé plochy



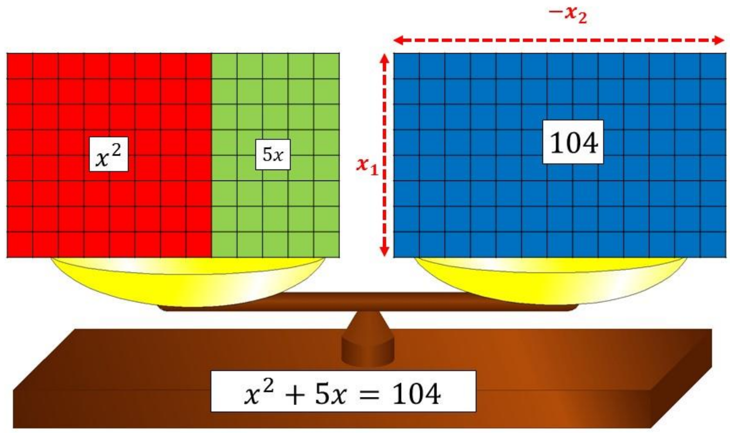
$$x^2 + 3x + 2x = 104$$

Nyní přerovnáme obdélníky obsahující neznámou tak, aby strana, která znázorňuje x byla osamocena, respektive, abychom ji tak vyjádřili.



5x…součet přidaných čtverců k x^2

104…celkový obsah vzniklého obdélníka, vznikne jako součin délek jednotlivých stran



Potom je vidět jeden z kořenů: $x_1 = 8$. *Je to jak kratší délka strany obdélníku, tak i číslo, které musíme doplnit do rovnice, aby platila rovnost. Druhá velikost strany obdélníku značí opačnou hodnotu* x_2, *v tomto případě je* $x_2 = -13$.

Danou rovnici již pomocí úprav převedeme do anulovaného tvaru. Žáci vidí, že proto, aby na pravé straně byla miska vah prázdná, je třeba odečíst plochu 104, vpravo nám zmizí, ale aby zůstala rovnováha zachována, musíme tuto plochu odečíst i na levé straně, proto nám vznikne „záporná plocha“ na levé straně vah, která anuluje plochu vyjádřenou pomocí kvadratického a lineárního členu. Vznikne nám tedy rovnice: $x^2 + 5x - 104 = 0$. Kostičky na obrázku ukazují, absolutní člen jako součin dvou délek (z nichž 1 musí být záporná, abychom dostali plochu, která nám zajistí anulování levé strany) a lineární člen je jejich součtem. Rozklad na součin tak bude vypadat $(x + 13)(x - 8) = 0$; a výsledné kořeny: $x_1 = -13; x_2 = 8$.

Následně pak vyjádříme obecné znázornění Viètových vzorců:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}; x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Procvičení na dalších příkladech. Je nutné, aby si žáci uvědomili, že ne všechny rovnice lze takto zakreslit, pokud odečítáme lineární člen, znázornit ho graficky bude složitější a nemusí se to povést. Pro názornost stačí, aby si žáci uvědomili, že „opačný“ koeficient lineárního členu je součtem a absolutní člen součinem kořenů rovnice.

Na domácí procvičení:

$x^2 - x - 6 = 0$ $2x^2 - 22x + 36 = 0$ $3x^2 + 30x + 72 = 0$

Závěr hodiny (0.42–0.45):

Žáci shrnou, jak řešíme jednotlivé typy neúplné kvadratické a zopakují Viètovy vzorce a jejich princip.

Příloha 4

Ročník:	Druhý
Datum:	21. 10. (3. vyučovací hodina)
Tematický okruh:	Kvadratické rovnice
Téma hodiny:	3. hodina: Odvození vzorců
Očekávané výstupy v RVP:	Žák rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic. Žák rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy.
Očekávané výstupy v ŠVP	Žák rozliší úplnou a neúplnou kvadratickou rovnici, rozhodne o metodě řešení. Žák zná vzorec pro řešení úplné kvadratické rovnice, umí rozhodnout o počtu řešení na základě hodnoty diskriminantu. Žák uvede vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice a použije je při řešení úloh. Žák převede kvadratický trojčlen na součin lineárních činitelů. Žák rozlišuje úpravy rovnic na ekvivalentní a neekvivalentní.
Školní výstup:	
Výchov. vzděl. strategie:	Diskuse, „výklad“
Kompetence:	Komunikativní, k řešení problémů
Pomůcky:	Pracovní listy: Úvodní slovní úlohy

Průběh hodiny:

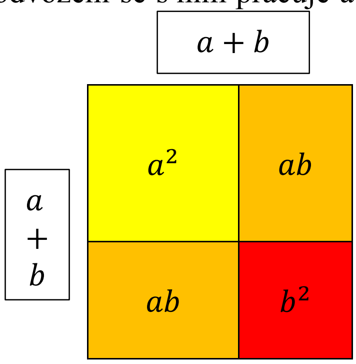
Úvod hodiny (0.00–0.10):

Shrnutí, co jsme udělali minulou hodinu, kontrola zadaných příkladů.

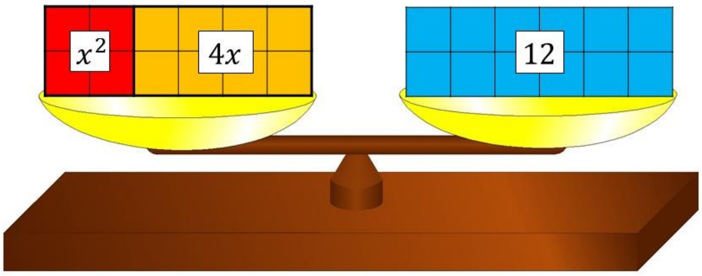
Odvozování (0.05–0.40):

Odvození obecného vzorce. Jednotlivé kroky odvozují žáci. Případné chyby by měli odhalit sami.

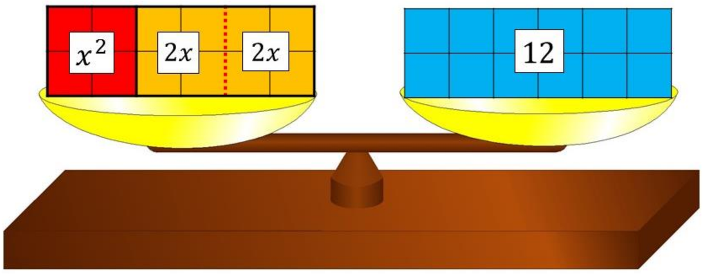
Ještě před odvozováním seznámíme s žáky s grafickým znázorněním vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. V průběhu odvození se s ním pracuje a moc žáků s grafickým vyjádřením do styku nepřišlo.



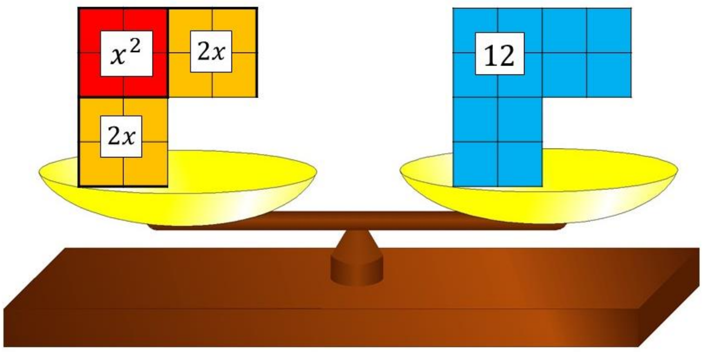
Mějme pro začátek rovnici $x^2 + 4x - 12 = 0$ Použijeme opět váhy, aby nám byly úpravy jasnější, proto tedy položíme opět proměnné rovnu obsahu:



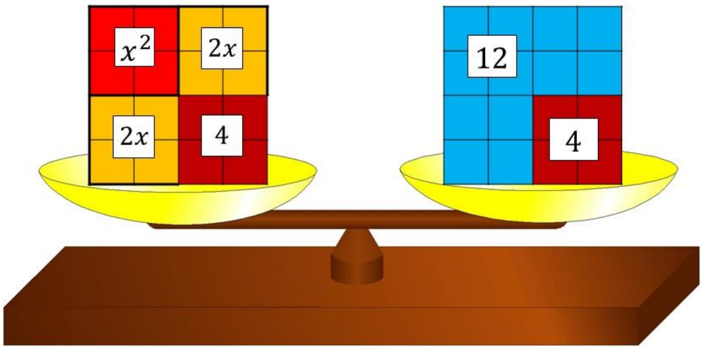
Potřebujeme zjistit kořeny rovnice. Rovnice $x^2 + 4x - 12 = 0$ připomíná vzorec, který žáci znají již ze základní školy, nesedí tam hodnota absolutního členu. Jedná se o vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Jedná se o kvadratickou rovnici, když jsme probírali Vietovy vzorce, zbavovali jsme se přebytečné plochy. Teď musíme udělat krok zpět, abychom se dostali ke kořenům rovnice.



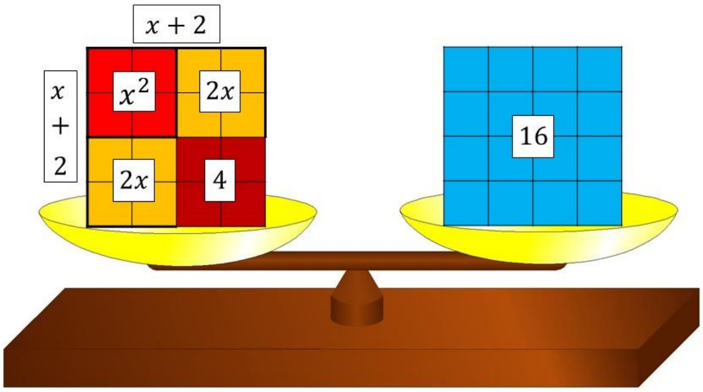
Teď, když jsme rozdělili kombinovanou část na dvě poloviny, je trochu přesuneme, upravíme na čtverec:



Nyní máme částečně upravenou rovnici $x^2 + 2 \cdot 2x = 12$, teď ještě doplníme na čtverec. Díky čtverečkům vidíme délku hran plochy, kterou máme doplnit, abychom získali plný čtverec.



Právě jsme danou rovnici doplnili na čtverec:$x^2 + 2 \cdot 2x + 4 = 12 + 4$.



Na levé straně rovnice jsme se dostali ke tvaru $a^2 + 2ab + b^2$, kde $a = x; b = 2$. Díky němu můžeme kvadratickou rovnici upravit následovně:

$$x^2 + 4x + 4 = 16$$

$$(x + 2)^2 = 16$$

$$|x + 2| = \sqrt{16}$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{16}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{16}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 4$$

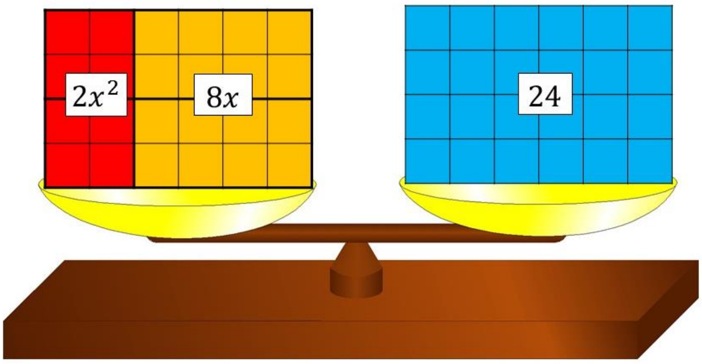
$$x_1 = 2; x_2 = -6$$

Tím jsme dostali oba kořeny rovnice. Pro kontrolu provedeme zkoušku.

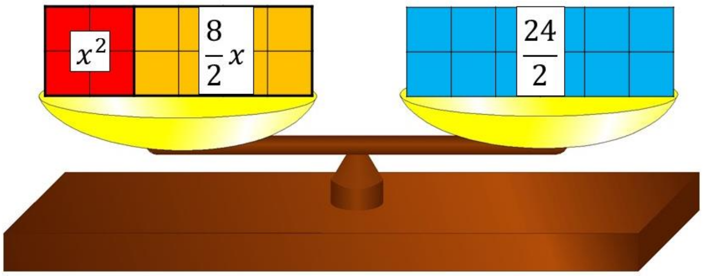
Stejný postup provedeme nyní ještě jednou, aniž bychom něco zkracovali či průběžně počítali. Docílíme tím tak toho, že v závěru budeme moci daná čísla nahradit konstantami a vznikne nám tak obecný vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

$\boxed{2x^2 + 8x - 24 = 0}$

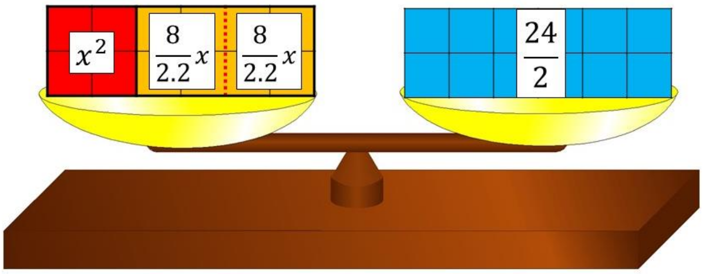
1.



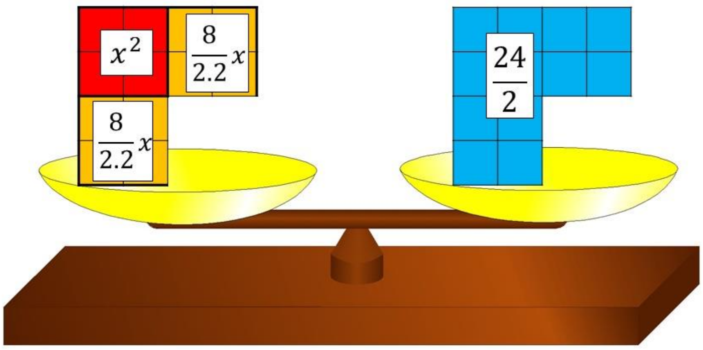
2.



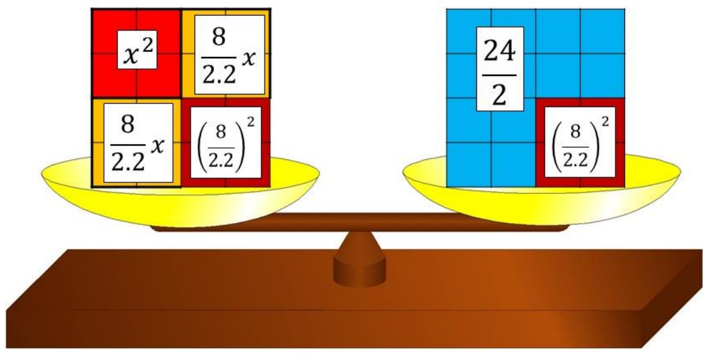
3.



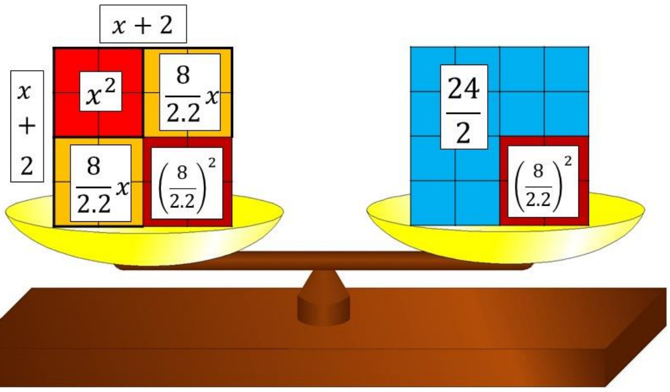
4.



5.



6.



Jednotlivé snímky jsou provázány s kroky *v tabulce a jsou popsány níže. Takto upravenou tabulku s konkrétními kroky můžeme rozdat žákům, aby pro ně bylo jednodušší sledovat změny. Od 7. kroku se jedná již o početní úpravy, které lze jen špatně graficky znázornit.*

1	$2x^2 + 8x - 24 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
2	$x^2 + \frac{8}{2}x - \frac{24}{2} = 0$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
3	$x^2 + \frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 2}x - \frac{24}{2} = 0$	$x^2 + \frac{2 \cdot b}{2 \cdot a}x + \frac{c}{a} = 0$
4	$x^2 + \frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 2}x + \left(\frac{8}{2 \cdot 2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2 \cdot 2}\right)^2 - \frac{24}{2} = 0$	$x^2 + \frac{2 \cdot b}{2 \cdot a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$
5	$x^2 + \frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 2}x + \left(\frac{8}{2 \cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2 \cdot 2}\right)^2 + \frac{24}{2}$	$x^2 + \frac{2 \cdot b}{2 \cdot a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
6	$\left(x + \frac{8}{2 \cdot 2}\right)^2 = \frac{8^2}{4 \cdot 2^2} + \frac{24}{2}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
7	$\left(x + \frac{8}{2 \cdot 2}\right)^2 = \frac{8^2 + 4 \cdot 2 \cdot 24}{4 \cdot 2^2}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
8	$\left\lvert x + \frac{8}{2 \cdot 2}\right\rvert = \sqrt{\frac{8^2 + 4 \cdot 2 \cdot 24}{4 \cdot 2^2}}$	$\left\lvert x + \frac{b}{2a}\right\rvert = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

9	$x+\frac{8}{2\cdot 2}=\pm\frac{\sqrt{8^2+4\cdot 2\cdot 24}}{2\cdot 2}$	$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
10	$x_{1,2}=-\frac{8}{2\cdot 2}\pm\frac{\sqrt{8^2+4\cdot 2\cdot 24}}{2\cdot 2}$	$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
11	$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+48}}{2\cdot 2}=\frac{-4\pm 8}{2}$	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ D=b^2-4ac$
12	$x_1=2; x_2=-6$	$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Abychom vypočetli velikost kořenů, musíme si rovnici upravit. Aby žák měl větší představu, o tom, co se v rovnici děje, vypočteme nejprve vzorec z konkrétní zadané rovnice a to tak, aniž bychom dělali nějaké mezi-výpočty. Analogicky k tomuto postupu pak odvodíme obecný vzorec pro řešení kvadratické rovnice.

1. Napíšeme si úplnou kvadratickou rovnici.
2. Vydělíme celou rovnici koeficientem a, abychom nezjišťovali násobek x.
3. Musíme se dopracovat k doplnění rovnice na čtverec, abychom se dostali ke vzorci $(a+b)^2$. Rozdělíme tedy lineární člen na polovic, objeví se nám teď dva stejné poloviční lineární členy.
4. Podle koeficientu b, u lineárního členu, vytvoříme podle zmiňovaného vzorce člen "b^2", musíme jej ale jak přičíst, tak i odečíst, aby se nám nezměnila hodnota rovnice, vzhledem k vahám – musíme stejný čtverec přidat na obě strany, aby váha zůstala zachována.
5. Převedeme přebytek rovnice $(a+b)^2$ na druhou misku vah, aby byly vyrovnány.
6. Upravíme levou stranu na základní tvar vzorce, na druhé straně rovnice rozepíšeme umocnění.
7. Převedeme pravou stranu na společného jmenovatele. Opět nic nepočítáme, jen píšeme početní operace.
8. Dalším krokem je odstranění 2. mocniny. Levou stranu rovnice umístíme do absolutní hodnoty, vzhledem k tomu, že odmocnina je vždy kladná, číslo, které jsme však předtím umocnili, mohlo být jak kladné tak záporné.
9. Odstraníme absolutní hodnotu.
10. Osamostatníme x, převedeme zbylé číselné hodnoty na pravou stranu.
11. Převedeme zlomky na stejného jmenovatele a hodnotu kořene x již snadno vypočteme ze získaného vzorce.

Část vzorce, která se nachází pod odmocninou, se nazývá Diskriminant. Podle něj určíme, kolik kořenů (různých hodnot neznámé x) daná rovnice má. Pokud bude D>0, rovnice bude mít 2 kořeny, bude-li D=0, získáme jeden dvojnásobný kořen a je-li D<0, není možné jej odmocnin, vzhledem k tomu, že záporná čísla nelze v oboru reálných čísel odmocnit.

Závěr hodiny (0.40–0.45): Shrnutí vycházející od žáků, dotazy, čemu nerozumí.

Příloha 5

Ročník:	Druhý
Datum:	22. 10. 2015 (6. vyučovací hodina)
Tematický okruh:	Kvadratické rovnice
Téma hodiny:	4. hodina: Procvičování příkladů
Očekávané výstupy v RVP:	Žák rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic. Žák rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy.
Očekávané výstupy v ŠVP	Žák rozliší úplnou a neúplnou kvadratickou rovnici, rozhodne o metodě řešení. Žák zná vzorec pro řešení úplné kvadratické rovnice, umí rozhodnout o počtu řešení na základě hodnoty diskriminantu. Žák uvede vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice a použije je při řešení úloh. Žák převede kvadratický trojčlen na součin lineárních činitelů. Žák rozlišuje úpravy rovnic na ekvivalentní a neekvivalentní.
Školní výstup:	Žák vypočte kterýkoli typ kvadratické rovnice, umí popsat její členy, vyslovit podmínky, které pro kvadratickou rovnici platí a umí své znalosti využít při řešení kvadratické rovnice.
Výchov. vzděl. strategie:	Kvíz; Práce ve dvojicích
Kompetence:	Komunikativní, k řešení problémů
Pomůcky:	Lístečky s otázkami; kartičky s příklady

Průběh hodiny:

Úvod hodiny (0.00–0.10):

Hodina zaměřená na procvičování jednotlivých příkladů a pojmů. Žáci jsou podle řad rozděleni do skupin, kdy se každá skupina snaží získat co nejvíce bodů zodpovídáním otázek a výpočtem příkladů. V závěru vítězná skupina obdrží 1 za práci v hodině.

Žáci jednotlivě odpovídají na otázky týkající se kvadratických rovnic, kterou si vytáhnou. Správné odpovědi se jim započítávají jako body do skupin rozdělených po řadách.

- Jak zjistit diskriminant?
- Co je to diskriminant?
- Jak vypočteme kořeny kvadratické rovnice?
- Jaké máme typy kvadratické rovnice?
- Jak se jmenuje člen ax^2?
- Jak se jmenuje člen bx?
- Jak se jmenuje člen c?
- Jak se jmenuje rovnice, které schází lineární člen?
- Jak se jmenuje rovnice, které chybí c?
- Co platí pro a?
- Kolik řešení má rovnice s D=0?
- Kolik kořenů má rovnice s D>0?
- Jaké řešení bude mít rovnice s D<0?
- Co platí pro diskriminant, má-li rovnice dvounásobný kořen?
- Jaký je diskriminant, nemá-li rovnice žádné řešení?
- Kdy má rovnice dva odlišné kořeny?
- Který člen rovnice je absolutní?
- Který člen rovnice je kvadratický?
- Který člen rovnice je lineární?
- Jak vyřešíte kvadratickou rovnici bez absolutního členu?
- Jak vyřešíte ryze kvadratickou rovnici?

Příklady (0.10–0.40):

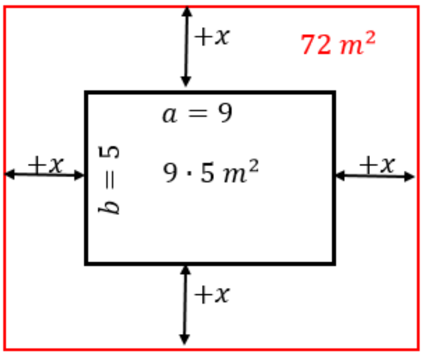
Procvičení jednotlivých příkladů: práce ve dvojicích/skupinách v lavicích. 1 student z každé řady jde počítat příklady k tabuli. Ten, který má první správný výsledek, získává bod pro svůj tým. *2 studenti se schovají za křídla tabule, třetí musí psát doprostřed. „prostřední" student není vždy ze stejné řady, je nutné je prostřídat.*

a) $3x^2 - 8x + 4 = 0$
b) $x^2 + 7x + 10 = 0$
c) $x^2 - 10x + 28 = 0$
d) $x^2 + x - 1 = 0$
e) $x^2 + x + 1 = 0$
f) $2x^2 - 8x + 8 = 0$
g) $x^2 + 6x - 21 = 0$
h) $x^2 - x - 90 = 0$
i) $x^2 + 121 = 0$
j) $x^2 + 6x = 0$
k) $x^2 - 16x = 0$
l) $-x^2 - 81 = 0$
m) $-3x^2 = -15x$

DÚ + shrnutí (0.40–0.45):

A. *Obdélníkový výběh pro surikaty v Zoo Chleby má být zvětšen o* $72\,m^2$ *tak, že na všech stranách se jeho velikost zvětší o stejnou hodnotu. Jaké budou nové rozměry výběhu? Původní rozměr byl* $9 \times 5\,m$.

Pro zakreslení této slovní úlohy můžeme využít čtvercovou síť. Při vhodném zvolení jednotky ($1 čtvereček \sim 1m^2$) lze jednoduše zakreslit původní výběh, jehož rozměry jsou zadány, podle toho také snadno určí původní velikost plochy, následně ze všech stran přidají stejný počet čtverečků tak, aby přidaná hodnota odpovídala zadaným $72m^2$. Zobrazí tak počet metrů, který musí připojit z každé strany. Nové rozměry označíme indexem n.



Obrázek 26: Náčrtek slovní úlohy A

x … zvětšení

$a_n = 9 + 2x$

$b_n = 5 + 2x$

$S_n = 9 \cdot 5 + 72$

$S_n = a_n \cdot b_n$

$(9 + 2\,x)(5 + 2\,x) = 9 \cdot 5 + 72$

$x^2 + 7\,x - 18 = 0$

$(x + 9)(x - 2) = 0$

$x_1 = 2; x_2 = -9$

$a_n = 9 + 2 \cdot 2 = 13\,m$
$b_n = 5 + 2 \cdot 2 = 9\,m$

Odpověď: *Výběh pro surikaty byl zvětšen o* $2\,m$, *nové rozměry budou* $9 \times 13\,m$.

Druhá slovní úloha nemá grafické řešení, jde o zjištění, zda studenti umí na základě zadaných údajů sestavit a vyřešit rovnici a zodpovědět kladenou otázku.

B. *Vedoucí pavilonu dravců slíbila žákům za pomoc při úklidu odměnu 18 vstupenek. Po týdnu se k nim přidali ještě 4 žáci a tak na každého připadlo o 6 vstupenek méně. Kolik žáků se původně na úklid hlásilo?*

$vstupenek\ celkem \ldots 18$

$počet\ žáků \ldots x$

$vstupenky\ na\ žáka \ldots \frac{18}{x}$

$+\ 4\ žáci \ldots \frac{18}{4} - 6\ vstupenek$

$\frac{18}{x+4} + 6 = \frac{18}{x}$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$(x+6)(x-2) = 0$

$x_1 = -6;\ x_2 = 2$

Odpověď: *Na úklid se původně hlásili 2 žáci.*

Žáci vlastními slovy shrnou, co jsme probrali a procvičili. Příští hodinu bude písemná práce, kde se objeví všechny typy kvadratické rovnice a slovní úloha obdobná těm, které byly v hodinách či DÚ.

Příloha 6

Písemná práce

Na písemnou práci mají žáci 15 minut, což je dostatečný čas na výpočet příkladů. Zastoupeny jsou všechny typy kvadratické rovnice. Vzhledem ke 2. mocnině, kterou si žáci z paměti nepamatují (i když není použit základ přesahující 20, a tyto mocniny se žáci učili zpaměti), mají povoleno povolit kalkulačky.

A

Vypočtěte:

1. $\mathbf{3x^2 - 363 = 0}$

$x^2 - 121 = 0$

$x^2 = 121$

$|x| = 11$

$x_{1,2} = \pm 11; K = \{-11; 11\}$

2 body

2. $\mathbf{-2x^2 + 26x = 0}$

$x^2 - 13x = 0$

$x(x - 13) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 13;\ K = \{0; 13\}$

2 body

3. $\mathbf{x^2 - 19x + 78 = 0}$ ***Řešte přes obecný vzorec a D.***

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4.1.78}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 312}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{19 + 7}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

$$x_2 = \frac{19 - 7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$K = \{6; 13\}$

3 body

4. **Čtvercový výběh pro fretky má být přebudován. Musí být na severu zkrácen o 2 $\boldsymbol{m}$ a na západě prodloužen o 4 $\boldsymbol{m}$. Fretky teď budou mít k dispozici výběh s rozlohou 40 $\boldsymbol{m^2}$. Jaké rozměry bude mít nový výběh?** *Řešte přes kvadratickou rovnici.*

$x \ldots původní\ délka\ stěny$

$a = x - 2 \ldots zkrácená\ stěna$

$b = x + 4 \ldots prodloužená\ stěna$

$(x - 2)(x + 4) = 40$

$x^2 + 2x - 8 = 40$

$x^2 + 2x - 48 = 0$

$(x + 8)(x - 6) = 0$

$x_1 = -8; x_2 = 6$

$a = 4\ m; b = 12\ m$

$Nové\ rozměry\ výběhu\ budou\ \ 4 \times 10\ m.$

3 body

B

Vypočtěte:

1. $\mathbf{2x^2 + 242 = 0}$

$x^2 + 121 = 0$ $\quad$ $nelze;\ K = \emptyset$

$x^2 = -121$

2 body

2. $\mathbf{-4x^2 - 20x = 0}$

$x^2 + 5x = 0$ $\quad$ $x_1 = 0; x_2 = -5; K = \{-5; 0\}$

$x(x + 5) = 0$

2 body

3. $\mathbf{x^2 + 3x - 18 = 0}$ *Řešte přes obecný vzorec a D.*

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.(-18)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 9}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 9}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-3 - 9}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$K = \{-6; 3\}$

3 body

4. **Panda červená se v ZOO dočkala zvětšení svého čtvercového výběhu. Byl rozšířen o 2 $\boldsymbol{m}$ a prodloužen o 3 $\boldsymbol{m}$. Nově mají pandy 42 $\boldsymbol{m^2}$ k dovádění. Jaké rozměry má nový výběh?** *Řešte přes kvadratickou rovnici.*

x ... *původní délka stěny*

$a = x + 2$ ... 1. *prodloužená stěna*

$b = x + 3$ ... 2. *prodloužená stěna*

$(x + 2)(x + 3) = 42$ $\quad$ $(x + 9)(x - 4) = 0$

$x^2 + 5x + 6 = 42$ $\quad$ $x_1 = -9; x_2 = 4$

$x^2 + 5x - 36 = 0$ $\quad$ $a = 6\ m; b = 7\ m$

Panda červená má nyní výběh o rozměrech $6 \times 7\ m$.

3 body

Po písemné práci žáci dostali ještě krátký dotazník týkající se předchozích hodin.

Příloha 7

Dotazník

Ráda bych Vás požádala o vyplnění dotazníku vztahujícího se k předchozím hodinám matematiky, které jsme spolu měli. Jednalo se o jiné pojetí výkladu kvadratických rovnic, které Vám mělo pomoci k jejich lepšímu pochopení. Odpovězte prosím na následující otázky, které mi pomohou zhodnotit a vylepšit následující hodiny.

Velice Vám děkuji.

Lenka Vaňková

1. Jaké je Vaše pohlaví?
   a. Muž
   b. Žena
2. Baví Vás matematika?
   a. Ano
   b. Spíše ano
   c. Spíše ne
   d. Ne
3. Bylo pro Vás při počítání úvodních slovních úloh názornější použít pro nákres mřížku než nákres bez použití mřížky?
   a. Ano
   b. Spíše ano
   c. Spíše ne
   d. Ne
4. Pomohlo Vám grafické znázornění k lepšímu pochopení kvadratických rovnic?
   a. Ano
   b. Spíše ano
   c. Spíše ne
   d. Ne
5. Jak si pamatujete Viètovy vzorce?
   - ☐ Nemusím si pamatovat vzorec, odvodím si ho z grafické podoby.
   - ☐ Lépe si je představím díky grafickému znázornění.
   - ☐ Pamatuji si je díky roznásobování závorek.
   - ☐ Vzorce se musím učit zpaměti.
6. Je pro Vás obecný vzorec kvadratické rovnice srozumitelnější po názorném odvození?
   a. Ano
   b. Spíše ano
   c. Spíše ne
   d. Ne
7. Je pro Vás lepší, přijdete-li na řešení zadaných problémů sami, než když je výsledek sdělen učitelem?
   a. Ano
   b. Spíše ano
   c. Spíše ne
   d. Ne

Příloha 8

8,5 b. 2 ½ / .

A

Vypočtěte:

1. $3x^2 - 363 = 0$ $/ :3$

$x^2 - 121 =$

$x^2 = 121 / \sqrt{\ }$

$x = \sqrt{121}$ $\quad x = \pm 11$

$K = \{\pm 11\}$

1,5 b

2. $-2x^2 + 26x = 0$

$2x(-x + 13) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 13$

$K = \{0, 13\}$

2 b.

3. $x^2 - 19x + 78 = 0$ *Řešte přes obecný vzorec a D.*

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac$

$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 1 \cdot 78}}{2 \cdot 1}$

$D > 0$ 2 reálná čísla

$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 312}}{2}$

$K = \{6, 13\}$

3 b.

$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{49}}{2}$

$x_1 = \frac{19 + \sqrt{49}}{2}$

$x_1 = \frac{19 + 7}{2}$

$x_1 = \frac{26}{2}$

$x_1 = 13$

$x_2 = \frac{19 - \sqrt{49}}{2}$

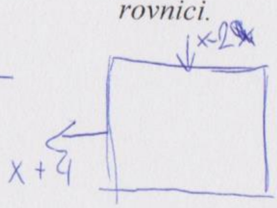
$x_2 = \frac{19 - 7}{2}$

$x_2 = \frac{12}{2}$

$x_2 = 6$

2 b.

4. Čtvercový výběh pro fretky má být přebudován. Musí být na severu zkrácen o $2\ m$ a na západě prodloužen o $4\ m$. Fretky teď budou mít k dispozici výběh s rozlohou $40\ m^2$. Jaké rozměry bude mít nový výběh? *Řešte přes kvadratickou rovnici.*



$(x - 2)(x + 4) = 40$

$x^2 + 4x - 2x - 8 = 40$

$x^2 + 2x - 8 = 40$

$x^2 + 2x = 48$

$x^2 + 2x - 48 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-2 + 14}{2}$

$x_1 = 12/2$

$x_2 = \frac{-2 - 14}{2}$

$x_2 = \frac{-16}{2}$

$x_2 = -8$

$K = \{-8, 12\}$

Příloha 8:

A

Vypočtěte:

1. $3x^2 - 363 = 0$

2b.

$a = 3$, $b = 0$, $c = -363$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-363)$

$D = 4356$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{4356}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{66}{6} = 11$; $-\frac{66}{6} = -11$

$K = \{-11; 11\}$

2. $-2x^2 + 26x = 0$

$a = -2$, $b = 26$, $c = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 26^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0$

$D = 676$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{676}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{-26 + 26}{2 \cdot (-2)} = \frac{0}{-4} = 0$; $\frac{-26 - 26}{-4} = -\frac{52}{-4} = 13$

2b.

$K = \{0; 13\}$

3. $x^2 - 19x + 78 = 0$ *Řešte přes obecný vzorec a D.*

$a = 1$, $b = -19$, $c = 78$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 78$

$D = 361 - 312 = 49$

$x_{1,2} = \frac{19 + 7}{2} = \frac{26}{2} = 13$; $\frac{19 - 7}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$K = \{6; 13\}$

3b.

$(x - 13)(x - 6) = 0$

$x_1 = 13$, $x_2 = 6$

$K = \{6; 13\}$

4. Čtvercový výběh pro fretky má být přebudován. Musí být na severu zkrácen o $2\,m$ a na západě prodloužen o $4\,m$. Fretky teď budou mít k dispozici výběh s rozlohou $40\,m^2$. Jaké rozměry bude mít nový výběh? *Řešte přes kvadratickou rovnici.*

0b.

$40m^2 - 2m + 4 = 0$

$a = 40$, $b = -2$, $c = 4$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 40 \cdot 4$

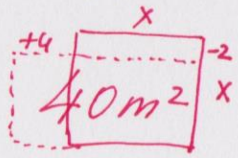
$D = 4$

$40m^2 + 4m - 2 = 0$

$a = 40$, $b = 4$, $c = -2$

$D = 16 - 320$

$D -$



$(x-2)(x+4) = 40$