



Zdravotně
sociální fakulta
Faculty of Health
and Social Sciences

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

**Matematické základy zobrazovacích metod pro
radiologické asistenty**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Studijní program: **SPECIALIZACE VE ZDRAVOTNICTVÍ**

Autor: Barbora Jelínková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Přemysl Záškodný, CSc.

České Budějovice 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci s názvem „Matematické základy zobrazovacích metod pro radiologické asistenty“ jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby bakalářské práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé bakalářské práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 29. 4. 2021

.....

Barbora Jelínková

Poděkování

Touto cestou bych ráda poděkovala panu doc. RNDr. Přemyslu Záškodnému, CSc. za cenné rady při vedení této bakalářské práce. Také bych chtěla poděkovat všem respondentům, kteří se ochotně podíleli na mém výzkumu. V neposlední řadě děkuji mé rodině za umožnění vysokoškolského studia a psychickou podporu při psaní bakalářské práce.

Matematické základy zobrazovacích metod pro radiologické asistenty

Abstrakt

Téma bakalářské práce reagovalo na zjištění, že v současnosti není k dispozici vhodný edukační text obsahující matematické základy pro edukaci radiologických asistentů a dalších příbuzných oborů. Bakalářská práce obsahuje vybrané okruhy matematiky, které je nutné znát pro pochopení fyzikálních základů zobrazovacích metod. Formulace těchto okruhů je přiměřená potřebám budoucích absolventů uvedených studijních oborů.

Cíle bakalářské práce byly následující:

- C1 Vytvoření učebního textu a příkladových ilustrací obsahujících základy matematiky, které jsou potřebné k co nejúplnějšímu pochopení fyzikálních popisů zobrazovacích metod.
- C2 Sestavení testu, který bude použit k ověření znalosti matematiky studentů oboru Radiologický asistent či jeho absolventů, a následné statistické vyjádření úrovně znalostí.

Na základě cílů byly sestaveny hypotézy:

- H1 Aplikací teorie kurikulárního procesu lze popsat strukturu matematických základů zobrazovacích metod pro radiologické asistenty.
- H2a Komparací množinových struktur matematiky se složkami profilu radiologického asistenta lze popsat jednotlivé strukturní úrovně matematických základů pro radiologické asistenty.
- H2b Z hlediska potřeb a možností radiologických asistentů lze vybrat příkladové ilustrace z oblasti funkcí, diferenciálního počtu, integrálního počtu a počtu vektorového.
- H3 Znalosti respondentů v oblasti vymezených matematických základů zobrazovacích metod budou mít rozdělení blízké rozdělení normálnímu.

S ohledem na kurikulární proces byl sestaven výukový text společně s příkladovými ilustracemi. Tento krok vedl ke splnění cíle C1. Poté byl sestaven single-choice test o 20 otázkách ke zjištění úrovně znalosti matematiky napříč oborem Radiologický asistent. Tento krok vedl ke splnění cíle C2. Tento test byl následně rozšířen pomocí online formuláře mezi radiologické asistenty a studenty tohoto oboru. Vzhledem k výše uvedeným splněným cílům bylo možno potvrdit hypotézy H1 i H2a a H2b. Výsledky testu byly statisticky vyjádřeny v praktické části bakalářské práce. Potvrdilo se, že

empirické rozdělení odpovědí testu je blízké normálnímu rozdělení. Tímto krokem byla potvrzena také hypotéza H3.

Přínosy bakalářské práce lze spatřovat v rovině praktické (konstrukce edukačního textu ověřeného testovým šetřením) a v rovině teoretické (ověření aplikace teorie kurikulárního procesu).

Klíčová slova

Radiologická matematika; kurikulární proces; množiny; funkce; diferenciální počet; integrální počet; vektorový počet; analytická geometrie

Elementary mathematics of imaging methods for radiology assistants

Abstract

The topic of the bachelor's thesis responded to the finding that there is currently no suitable educational text containing mathematical foundations for the education of radiological assistants and other related fields. The bachelor thesis contains selected areas of mathematics that are necessary to know to understand the physical foundations of imaging methods. The formulation of these areas is appropriate to the needs of future graduates of these fields of study.

The goals of the bachelor thesis were the following:

- G1 Creation of an educational text and examples containing elementary mathematics that are essential to fully understand physical principles of imaging methods.
- G2 Compilation of a test that will be used to verify the knowledge of mathematics of radiological assistance field students and its graduates, followed by a statistical expression of knowledge level.

Based on the goals, the following hypotheses were made:

- H1 By application of a curricular process a structure of elementary mathematics of imaging methods for radiological assistants can be described.
- H2a By comparing mathematical structures with components of a radiological assistant's profile, individual structural levels of elementary mathematics for radiological assistants can be described.
- H2b According to needs and abilities of radiological assistants, examples of functions, differentiation, integration, and vectors can be chosen.
- H3 Respondent's knowledge of the defined mathematical foundations of imaging methods will have a distribution close to the normal distribution.

With regard to the curricular process, a teaching text was compiled together with example illustrations. This step led to the fulfillment of goal G1. Then, a single-choice test of 20 questions was compiled to determine the level of mathematics knowledge across the field of radiological assistance. This step led to the achievement of goal G2. This test was subsequently extended using an online form among radiological assistants and students in this field. Given the above objectives, hypotheses H1, H2a and H2b could be confirmed. The test results were statistically expressed in the practical part of the bachelor

thesis. It was confirmed that the empirical distribution of test responses is close to the normal distribution. Hypothesis H3 was also confirmed by this step.

The benefits of the bachelor's thesis can be seen in the practical level (construction of an educational text verified by a test survey) and in the theoretical level (verification of the application of the theory of the curricular process).

Key words

Radiology mathematics; curricular process; sets; functions; differentiation; integration; vectors; analytic geometry

Obsah

1	Teoretická část.....	10
1.1	Kurikulární proces.....	10
1.2	Množiny	11
1.3	Funkce	21
1.4	Diferenciální počet	31
1.5	Integrální počet.....	41
1.6	Vektorový počet	47
1.7	Analytická geometrie	51
2	Cíle práce a hypotézy	59
3	Metodika.....	59
4	Výsledky.....	60
4.1	Statistické vyhodnocení testu	61
5	Diskuze	69
5.1	Vybraná edukační teorie	69
5.2	Výsledky statistického zpracování testu	71
6	Závěr.....	72
6.1	Zhodnocení splnění cílů a hypotéz.....	72
7	Seznam použitých zdrojů	74
8	Seznam obrázků a tabulek	78
9	Přílohy	81
9.1	Příkladové ilustrace	81
9.2	Edukační text jako podklad k testu, který byl poskytnut respondentům.....	90
9.3	Test.....	118

Úvod

Obsahem této bakalářské práce je především edukační text popisující základy matematiky vhodně formulované pro studenty radiologické asistence. Text obsahující tuto elementární matematiku v současné době není k dispozici. Práce uvádí matematické znalosti, jež jsou elementární pro pochopení fyzikálních základů tří hlavních složek profilu radiologického asistenta: radiodiagnostiky, radioterapie a nukleární medicíny. Diferenciální či integrální počet je součástí řady fyzikálních vzorců, také mnoho fyzikálních veličin je veličinami vektorovými (rychlost, zrychlení, ...). Matematika je tedy podstatnou částí aplikované fyziky pro radiologické asistenty. Při absenci matematických znalostí může dojít k problémům s edukací aplikované fyziky, případně k úplnému nepochopení fyzikálních základů radiologie studenty.

Při tvorbě teoretické části bakalářské práce bude snahou podat vybranou matematiku co nejsrozumitelněji společně se řadou ilustračních příkladů a obrázků, aby byl text edukačně přitažlivý. Praktická část se bude zabývat aktuální úrovní znalostí respondentů v oblasti aplikované fyziky pro radiologické asistenty. Výsledky testu, jenž byl položen respondentům, vypovídají nejen o znalostech, ale i o vhodnosti a úrovni zpracování edukačního textu.

Matematika bude formulována takovým stylem, aby mohla fungovat jako učební materiál pro studenty radiologické asistence. Tento edukační text by měl sloužit jako součást projektového kurikula.

Výchozími teoriemi aplikovaného kvantitativního výzkumu, o němž podává zprávu předložená bakalářská práce, jsou teorie kurikulárního procesu a vědecký systém matematiky elementárně sdělitelný studentům radiologické asistence.

1 Teoretická část

1.1 Kurikulární proces

„Kurikulum, tj. souhrn znalostí, které si má osvojit člen dané společnosti, je součástí kultury společnosti, odráží úroveň jejího rozvoje i potřeby života. Kultura je svět vytvořený člověkem pro člověka, odráží celkový stav společnosti, je životním prostorem každého jednotlivce.“ (Maňák et al. 2008, s. 13)

Variantní formy kurikula

Samotný kurikulární proces se skládá z 5 po sobě jdoucích variantních forem kurikula: konceptuální kurikulum, zamýšlené kurikulum, projektové kurikulum, implementované kurikulum a dosažené kurikulum. **Konceptuální kurikulum** je koncepcí toho, co má být obsahem vzdělávání. **Zamýšlené kurikulum** pojednává o plánovaných cílech a obsahu vzdělávání v učebnicích či učebních osnovách. **Projektové kurikulum** a částečně i implementované kurikulum (tzv. implementované kurikulum 1) je obsah vzdělávání prezentovaný subjektům edukace – projektová a realizační forma. **Implementované kurikulum 2** se zabývá učivem, jež si subjekty edukace skutečně osvojily. Zaměřuje se na seberealizaci edukanta. Konečně **dosažené kurikulum** je obsahem vzdělávání fungujícího na straně subjektů edukace (Záškodný 2015).

Transformace v didaktické komunikaci

Zároveň je kurikulární proces sledem vstupů a výstupů transformací T^1 až T^5 . Oba sledy se prolínají a jsou velmi podstatnými pro teorii didaktické komunikace a kurikulárního procesu. Záškodný (2021 s. 193-194) uvádí schéma transformací:

„**Transformace T^1** (vstup \rightarrow výstup) – Komunikační transformace

Vstup T^1 : Vědecký systém fyziky \rightarrow Výstup T^1 : Sdělitelný vědecký systém fyziky jako konceptuální kurikulum

Transformace T^2 (vstup \rightarrow výstup) – Obsahová transformace

Vstup T^2 : Sdělitelný vědecký systém fyziky jako konceptuální kurikulum \rightarrow Výstup T^2 : Didaktický systém fyziky a jeho učivo jako zamýšlené kurikulum

Transformace T^3 (vstup \rightarrow výstup) – Kurikulární transformace

Vstup T^3 : Didaktický systém fyziky a jeho učivo jako zamýšlené kurikulum \rightarrow Výstup T^3 :
Výukový projekt fyziky a jeho učebnice a připravenost učitele na výuku jako projektové
kurikulum a implementované kurikulum 1

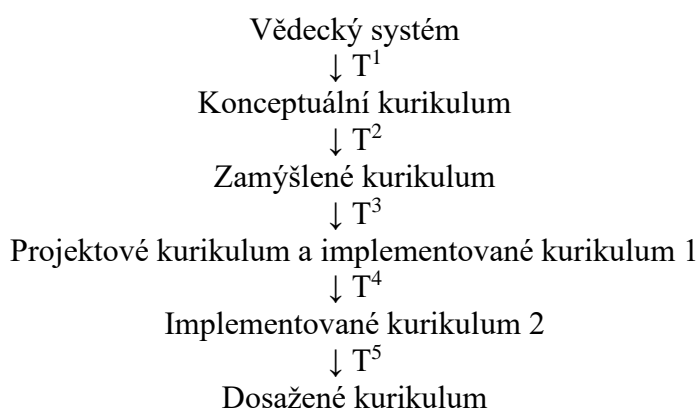
Transformace T^4 (vstup \rightarrow výstup) – Edukační transformace

Vstup T^4 : Výukový projekt fyziky a jeho učebnice a připravenost učitele na výuku jako
projektové kurikulum a implementované kurikulum 1 \rightarrow Výstup T^4 : Výsledky výuky
fyziky jako implementované kurikulum 2

Transformace T^5 (vstup \rightarrow výstup) – Aplikační transformace

Vstup T^5 : Výsledky výuky fyziky jako implementované kurikulum 2 \rightarrow Výstup T^5 :
Aplikovatelné výsledky výuky fyziky jako dosažené kurikulum“.

Fúze variantních forem kurikula a transformací



Maňák et al. (2008, s. 14) definuje kurikulum jako

„obsah vzdělání (učivo) v širším slova smyslu a proces jeho osvojování, tj. jako veškerou zkušenost žáka (učícího se), kterou získává ve školském (vzdělávacím) prostředí, a činnosti, které jsou spojeny s jeho osvojováním a hodnocením.“

Kurikulární proces tedy klade důraz i na celkové výsledky edukace – nesoustředí se pouze na obsah učiva a jeho přednes, ale i na zkušenost subjektů edukace a jejich seberealizaci.

1.2 Množiny

Množina je souborem libovolných prvků. Tyto prvky jsou sice různé, ale mají společnou určitou vlastnost. Množina je dána tehdy, pokud jsme schopni rozeznat, zda do ní daný prvek patří či ne, zda má nebo nemá onu vlastnost. Může také nastat situace, že množina nemá žádný prvek – pak ji nazýváme prázdnou množinou a značíme ji \emptyset (Vošický 2004).

K označení množiny použijeme velké písmeno, pro značení prvků množiny použijeme malá písmena abecedy. Zápis množiny bude tedy vypadat následovně: $A = \{a; b; c; d, \dots\}$ (Čermák a Červinková 2007).

Ke grafickému znázornění množin používáme **Vennovy množinové diagramy** (tab. 1):

Tabulka 1 - Vennovy množinové diagramy

Inkluze množin $A \subseteq B$	A je podmnožinou B právě tehdy, když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B.	
Rovnost množin $A = B$	Množiny A a B jsou si rovny právě tehdy, když všechny prvky množin A, B jsou tytéž.	
Ostrá inkluze množin $A \subset B$	Množina A je vlastní podmnožinou množiny B, jestliže A je podmnožinou B a přitom se množina A nerovná množině B.	
Sjednocení množin $A \cup B$	Sjednocení množin A, B je tvořeno všemi prvky, které patří alespoň do jedné množiny.	
Průnik množin $A \cap B$	Průnik množin A a B je tvořen všemi prvky, které patří do množiny A a zároveň do množiny B.	
Rozdíl množin $A - B$ nebo A / B	Rozdíl množin A a B je tvořen všemi prvky, které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B.	

Zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor, obrázky vytvořil autor

Existuje několik množin, které nazýváme **číselnými obory**. Číselné obory používáme následující:

- obor přirozených čísel $N \rightarrow N = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$,
- obor nezáporných celých čísel $N_0 \rightarrow N_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$,
- obor celých čísel $Z \rightarrow Z = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$,
- obor racionálních čísel Q ,

- obor reálných čísel \mathbb{R}
- a obor komplexních čísel \mathbb{C} (Vošický 2004).

Přirozená čísla

Tuto množinu značíme velkým písmenem N . Prvky množiny jsou následující: $N = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$. Je nutno zdůraznit, že 0 nepatří do prvků množiny přirozených čísel. Obor nezáporných celých čísel N_0 se od oboru přirozených čísel liší právě tím, že 0 do jeho výčtu prvků patří. Množinu nezáporných celých čísel zapisujeme takto: $N_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$. (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007).

S přirozenými čísly jsme schopni provádět operace. Následující věty (tab. 2) ukazují, co platí při operacích se třemi prvky množiny N .

Tabulka 2 - Operace s přirozenými čísly

Věty o uzavřenosti	Sčítání	Součet $a + b$ je přirozené číslo.
	Násobení	Součin $a \cdot b$ je přirozené číslo.
Věty o komutativnosti	Sčítání	$a + b = b + a$
	Násobení	$a \cdot b = b \cdot a$
Věty o asociativnosti	Sčítání	$(a + b) + c = a + (b + c)$
	Násobení	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Věta o neutrálnosti	Číslo 1 vzhledem k násobení	$a \cdot 1 = a$
Věta o distributivnosti	Násobení vzhledem ke sčítání	$a \cdot (b + c) = ab + ac$

Zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor

Celá čísla

Množina celých čísel je zpravidla značena velkým písmenem Z . Ke každému celému číslu existuje právě jedno číslo, které nazýváme číslem opačným. Číslo opačné můžeme najít podle tohoto vzorce: $a + (-a) = 0$. Čísla a a $-a$ jsou tedy čísla navzájem opačnými (Čermák a Červinková 2007).

Stejně jako pro přirozená čísla existují věty týkající se operací právě s touto množinou prvků (tab. 3). Ve větách vztahujících se na celá čísla najdeme ještě o dvě věty navíc oproti těm uvedeným v tabulce 2 (Bušek a Calda 2008).

Tabulka 3 - Operace s celými čísly

Věty o uzavřenosti	Sčítání	Součet $a + b$ je celé číslo.
	Násobení	Součin $a \cdot b$ je celé číslo.
	Odčítání	Rozdíl $a - b$ je celé číslo.
Věty o komutativnosti	Sčítání	$a + b = b + a$
	Násobení	$a \cdot b = b \cdot a$
Věty o asociativnosti	Sčítání	$(a + b) + c = a + (b + c)$
	Násobení	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Věty o neutrálnosti	Číslo 0 vzhledem ke sčítání	$0 + a = a$
	Číslo 1 vzhledem k násobení	$1 \cdot a = a$
Věta o distributivnosti	Násobení vzhledem ke sčítání	$a \cdot (b + c) = ab + ac$

Zdroj: podle Buška a Caldy (2008) vytvořil autor

Sudé číslo je každé celé číslo, které je dělitelné 2. Obecně je sudé číslo možné zapsat $a = 2k; k \in \mathbb{Z}$. Číslo, jež není dělitelné dvěma, nazýváme tedy číslem lichým a zapisujeme ho následujícím způsobem: $a = 2k + 1$ nebo také $a = 2k - 1; k \in \mathbb{Z}$ (Vošický 2004).

Racionální čísla

Množina racionálních čísel \mathbb{Q} je množinou všech čísel, které můžeme zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$. Prvek p patří do množiny celých čísel a nazýváme ho čitatelem. Druhý prvek q patří do čísel celých vyjma 0 a jedná se o jmenovatel. Všechna racionální čísla tedy lze zapsat souhrnně: $\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0$ (Vošický 2004).

Pro operace s racionálními čísly platí také jisté věty jako v tabulce 2 či 3. Oproti předcházejícím uvedeným číselným oborům se ale objevuje věta o uzavřenosti související s dělením, jež je uvedena společně s ostatními větami níže v tabulce 4.

Tabulka 4 - Operace s racionálními čísly

Věty o uzavřenosti	Sčítání	Součet $a + b$ je racionální.
	Násobení	Součin $a \cdot b$ je racionální.
	Odčítání	Rozdíl $a - b$ je racionální.
	Dělení	Podíl $\frac{a}{b}$, kde $b \neq 0$, je racionální číslo.
Věty o komutativnosti	Sčítání	$a + b = b + a$
	Násobení	$a \cdot b = b \cdot a$
Věty o asociativnosti	Sčítání	$(a + b) + c = a + (b + c)$
	Násobení	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Věty o neutrálnosti	Číslo 0 vzhledem ke sčítání	$0 + a = a$
	Číslo 1 vzhledem k násobení	$1 \cdot a = a$
Věta o distributivnosti	Násobení vzhledem ke sčítání	$a \cdot (b + c) = ab + ac$

Zdroj: podle Buška a Caldy (2008) vytvořil autor

Vzhledem k obsahu následujících kapitol je také vhodné uvést **základní operace se zlomky** pro $q \neq 0$; $s \neq 0$, které uvádí Čermák a Červinková (2007):

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps - qr}{qs}$$

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}; r \neq 0$$

Reálná čísla

Množinu reálných čísel \mathbb{R} tvoří čísla racionální a čísla iracionální. Iracionální čísla jsou čísla mající nekonečný a neperiodický desetinný rozvoj jako např. Ludolfovo číslo π , jež má právě nekonečný neperiodický desetinný rozvoj (Bušek a Calda 2008).

Reálná čísla můžeme definovat takto: jedná se o čísla označující velikost úseček (při zvolení vhodné jednotkové úsečky), nulu a čísla k nim opačná. Dalšími příklady reálných čísel mohou být odmocniny nebo také hodnoty goniometrických funkcí: např. $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ nebo $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Věty uvedené v Tabulce 4 platí nejen pro operace s racionálními čísly, ale také pro čísla reálná (Čermák a Červinková 2007).

Pro použití iracionálního čísla v praxi je nutno ho zaokrouhlit. Bušek a Calda (2008, s. 30) uvádí následující pravidlo pro **zaokrouhlování**:

„Číslo zaokrouhlíme na místo daného řádu tak, že vynecháme všechny číslice, které jsou vpravo od číslice na místě daného řádu, a je-li první z vynechaných číslic a) menší než 5, pak všechny ponechané číslice se nemění, b) rovna nebo větší než 5, pak k číslu tvořenému ponechanými číslicemi přičteme jednu jednotku nejmenšího ponechaného řádu“.

Jak již bylo řečeno, mezi reálná čísla patří i odmocniny. **Druhá odmocnina** z a je takové číslo x , pro které platí $x^2 = a$, kde x a a jsou reálná nezáporná čísla. Druhou odmocninu tedy zapíšeme takto: $\sqrt{a} = x$. V tomto případě a nazýváme odmocněncem či základem odmocniny a znak $\sqrt{\quad}$ je odmocník (Čermák a Červinková 2007).

Důležitou operací, jež se často používá v praxi, je **usměrnění zlomku**. Usměrnění zlomku provádíme v tom případě, že se ve jmenovateli vyskytuje odmocnina. Tento stav zlomku je pro výpočet nežádoucí. Nejprve je ale nutné se seznámit s těmito vztahy nezáporných reálných čísel a a b :

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

$$a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; b \neq 0,$$

(Čermák a Červinková, 2007).

Pro usměrnění zlomku využijeme jeho vynásobení s jiným vhodným zlomkem. Houska et al. (1991, s. 33-34) uvádí následující ilustrační příklady. Pro tyto ilustrační příklady je ale nutno si zapamatovat další vztah, a to: $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$.

„Upravte na zlomky s celočíselným jmenovatelem tyto výrazy:

$$a) \frac{4}{\sqrt{5}};$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{5}-1}; \dots$$

Řešení:

a) Zlomek $\frac{4}{\sqrt{5}}$ rozšíříme číslem $\sqrt{5}$. Dostaneme:

$$\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5} \sqrt{5}.$$

b) Užijeme vzorce $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$. Zlomek $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ rozšíříme $\sqrt{5} + 1$.

Dostaneme:

$$\frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1) \cdot (\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)“.$$

Kromě druhé odmocniny se ve výpočtech objevuje například i **třetí odmocnina**. Třetí odmocninu značíme $\sqrt[3]{a} = x$, kde platí $x^3 = a$. a a x jsou v tomto případě nezáporná reálná čísla. Následující výrazy se používají pro počítání se třetí odmocninou:

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$a \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}; b \neq 0$$

(Bušek a Calda 2008)

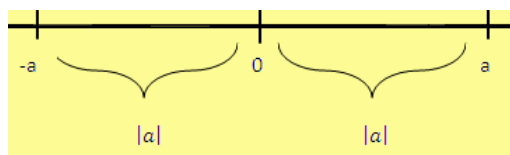
Stejně jako u druhé odmocniny lze provést usměrnění zlomku v tom případě, že se ve jmenovateli nachází třetí odmocnina. Postup je v podstatě totožný – je nutno vynásobit zlomek jiným vhodným zlomkem. Příklad uvádí Bušek a Calda (2008):

Usměrněte zlomek:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3^2}} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{2 \sqrt[3]{3}}{3}.$$

Na číselné ose právě jeden bod znázorňuje jedno reálné číslo. **Absolutní hodnota** reálného čísla $|a|$ udává jeho vzdálenost od počátku číselné osy (obr. 1). Absolutní hodnotu můžeme dle Vošického (2004) definovat následovně:

$$\text{pro } a \geq 0 \text{ je } |a| = a, \text{ pro } a < 0 \text{ je } |a| = -a.$$



Obrázek 1 – Absolutní hodnota reálného čísla a ,
zdroj: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vladimira_pavlicova_bp/Absolutni_hodnota_realneho_cisla.php

Vošický (2004) také uvádí určité výroky, jež platí pro reálná čísla a a b :

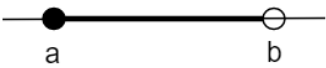
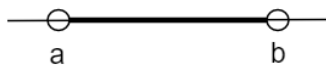
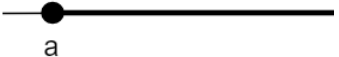
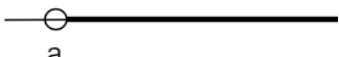
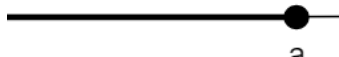
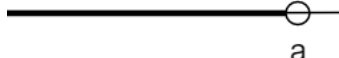
$$|a| \geq 0; |-a| = |a|; |a| \geq a; |a| \geq -a;$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|; |a + b| \leq |a| + |b|; \text{pro } b \neq 0 \text{ je } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Množiny reálných čísel můžeme znázornit jako přímky, polopřímky či úsečky. Krajní body úsečky nebo počáteční bod polopřímky do množiny může patřit, ale také nemusí. Tyto množiny reálných čísel nazýváme **intervaly** a jsme schopni je graficky zobrazit (tab. 5). Pokud lze interval znázornit úsečkou (jedná se tedy o intervaly omezené), tak s ohledem na náležitost bodů do intervalů mluvíme o intervalech otevřených, polouzavřených a uzavřených. V tom případě, že interval značíme polopřímkou či přímkou, se jedná o intervaly neomezené, v případě značení přímkou dokonce o interval oboustranně neomezený. Pro zápis neomezených intervalů také nově zavádíme dva znaky: ∞ (nekonečno) a $-\infty$ (mínus nekonečno) (Bušek a Calda 2008).

Tabulka 5 - **Intervaly**

Zápis charakteristické vlastnosti	Zápis intervalu	Znázornění na reálné ose	Název intervalu
$a \leq x \leq b$	$\langle a; b \rangle$		Uzavřený interval
$a < x \leq b$	$(a; b]$		Polouzavřený interval (zleva otevřený a zprava uzavřený)

$a \leq x < b$	$\langle a; b \rangle$		Polouzavřený interval (zleva uzavřený a zprava otevřený)
$a < x < b$	$(a; b)$		Otevřený interval
$x \geq a$	$\langle a; \infty$		Intervaly neomezené zprava
$x > a$	$(a; \infty)$		
$x \leq a$	$(-\infty; a \rangle$		Intervaly neomezené zleva
$x < a$	$(-\infty; a)$		
$x \in R$	$(-\infty; \infty)$	Sám tento interval je reálnou osou	Interval oboustranně neomezený

Zdroj: podle Buška a Caldý (2008) vytvořil autor, obrázky vytvořil autor

Komplexní čísla

Množinu C komplexních čísel bylo nutné zavést z toho důvodu, že v R není možné odmocňovat záporná čísla, avšak výpočty s čísly jako je $\sqrt{-1}$ se ukázaly jako velmi užitečné. Množinu komplexních čísel C definujeme jako množinu všech **uspořádaných dvojic** $z = [a; b]$. V tomto zápisu a značí reálnou část a b část imaginární, a i b jsou reálnými čísly. Komplexní číslo zapisujeme jako z (Byliński 1990; Čermák a Červinková 2007).

Vošický (2004, s. 18) definuje operace se dvěma komplexními čísly $a = [a_1; a_2]$ a $b = [b_1; b_2]$:

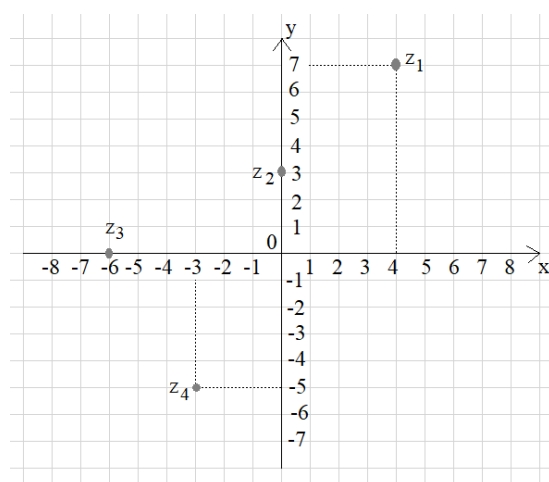
$$\text{„rovnost dvou komplexních čísel } [a_1; a_2] = [b_1; b_2] \rightarrow a_1 = b_1; a_2 = b_2,$$

$$\text{součet dvou komplexních čísel } [a_1; a_2] + [b_1; b_2] = [a_1 + b_1; a_2 + b_2],$$

$$\text{součin dvou komplexních čísel } [a_1; a_2] \cdot [b_1; b_2] = [a_1 b_1 - a_2 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1]$$

$$\text{a podíl dvou komplexních čísel } \frac{a}{b} = \left[\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2}; \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} \right], \text{ kde } b \neq 0 \text{“}.$$

Uspořádané dvojice lze znázornit graficky pomocí Gaussovy roviny (obr. 2), kde $z = [0; 0]$ značí počátek 0 kartézské soustavy souřadnic $0xy$. Obrazy čísel $z = [a; 0]$ jsou všechny body osy x , osa y obsahuje obrazy čísel $z = [0; b]$ (Čermák a Červinková 2007). Zobrazení komplexních čísel v kartézské soustavě souřadnic vypadá následovně:



Obrázek 2 – Zobrazení uspořádaných dvojic,
zdroj: vytvořil autor

$$z_1 = [4; 7]$$

$$z_2 = [0; 3]$$

$$z_3 = [-6; 0]$$

$$z_4 = [-3; -5].$$

Velmi důležitým prvkem množiny C je **imaginární číslo** $i = \sqrt{-1} = [0; 1]$. Pro imaginární číslo platí: $i^2 = i \cdot i = -1$. Komplexní čísla nezapisujeme pouze jako uspořádané dvojice, ale zapisujeme je i ve **tvaru algebraickém**: $z = a_1 + a_2 \cdot i$. Pro dvě komplexní čísla $z_1 = a + b \cdot i$ a $z_2 = c + d \cdot i$ definujeme:

$$(a + b \cdot i) \pm (c + d \cdot i) = (a \pm c) + i \cdot (b \pm d),$$

$$(a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + i \cdot (bc + ad)$$

(Čermák a Červinková 2007; Hahn 1994).

Sdruženým číslem k číslu $z = a + b \cdot i$ je číslo $\bar{z} = a - b \cdot i$. Sdružené číslo \bar{z} čteme „ z s pruhem“. Pro součet a součin libovolných z a \bar{z} platí dle Čermáka a Červinkové (2007) tyto výroky:

$$z + \bar{z} = (a + b \cdot i) + (a - b \cdot i) = 2a,$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2.$$

Také je potřeba definovat pojem **opačné číslo** k číslu z a to číslo $-z = -a - b \cdot i$. Po zavedení pojmu sdružené a opačné číslo můžeme provádět odčítání a dělení komplexních čísel v algebraickém tvaru pomocí těchto dvou čísel. Při odčítání dvou

komplexních čísel přičteme k prvnímu číslu číslo opačné k druhému číslu: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Dělení provedeme tak, že zlomek $\frac{z_1}{z_2}$ rozšíříme číslem \bar{z}_2 (Čermák a Červinková 2007).

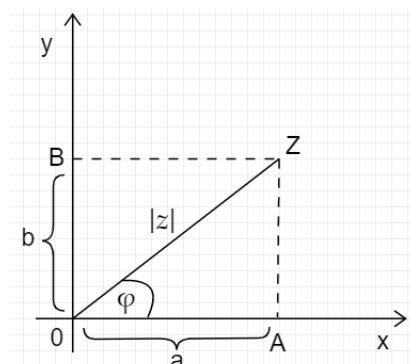
Pro nalezení **absolutní hodnoty** komplexního čísla použijeme jeho sdružené číslo následovně: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Kaňka 2010).

Komplexní čísla lze vyjádřit i ve tvaru **goniometrickém**: $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$; $\cos \varphi = \frac{a}{|z|}$, $\sin \varphi = \frac{b}{|z|}$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Úhel φ značí argument komplexního čísla (Čermák a Červinková 2007; Kaňka 2010). Grafické znázornění je popsáno na obrázku 3.

Moivreova věta je operace, pomocí které můžeme provést umocnění komplexního čísla číslem $n \in \mathbb{N}$. Tato věta zní:

$$a^n = |a|^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

(Vošický 2004).



Obrázek 3 - Goniometrický tvar komplexního čísla.
zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

1.3 Funkce

Funkce a jejich vlastnosti

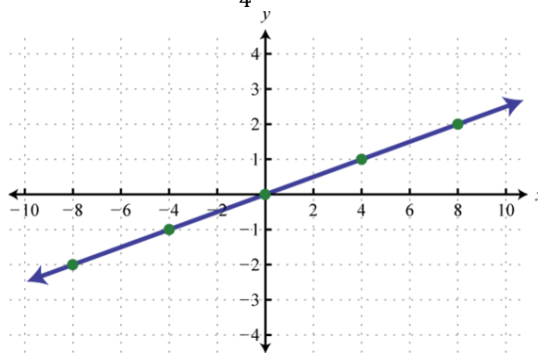
Čermák a Červinková (2007, s. 62) uvádí tuto definici pojmu funkce:

*„Nechť jsou dány dvě neprázdné množiny reálných čísel A a B. Přiřadíme-li každému číslu $x \in A$ podle nějakého předpisu právě jedno číslo $y \in B$ (které označíme $y = f(x)$) a nazveme **funkční hodnota**), pak množina f všech uspořádaných dvojic $[x; f(x)]$ se nazývá **reálná funkce reálné proměnné**. Zapisujeme $f: y = f(x)$ “.*

Velmi důležitými výrazy, jež používáme v souvislosti s popisem funkce, jsou definiční obor funkce a obor hodnot funkce. **Definiční obor** funkce f je množinou reálných čísel, kterým je přiřazeno reálné číslo funkcí f . Ve výše uvedené definici funkce je definičním

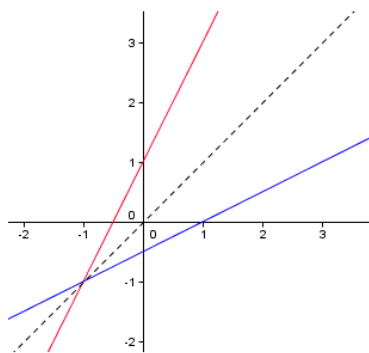
oborem množina A . Definiční obor zapisujeme jako $D(f)$. **Obor hodnot** funkce f , jenž je značen jako $H(f)$, je množinou všech reálných čísel, která získáme právě tímto přiřazením prvků množiny definičního oboru. V definici funkce se jedná o množinu B (Beránek et al. 2007; Čermák a Červinková 2007).

Závislost y na x je často velmi výhodné zobrazit pomocí grafů. K vytvoření **grafu funkce** se využívá zakreslení množiny všech bodů roviny, jejichž souřadnice jsou $[x, f(x)]$. Klasicky na vodorovnou osu (osu x) vynášíme proměnnou x a na osu svislou (osu y) vynášíme funkční hodnoty (Hughes-Hallet 1980; Vošický 2004). Na obrázku 4 níže můžeme vidět například graf funkce $y = \frac{1}{4}x$.

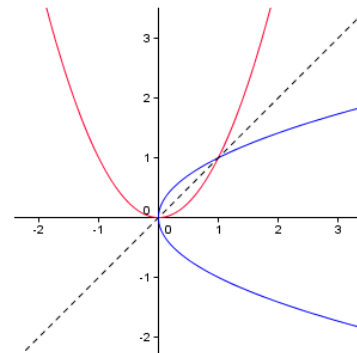


Obrázek 4 - Graf funkce $1/4x$,
zdroj: https://saylordotorg.github.io/text_intermediate-algebra/s05-02-linear-functions-and-their-gra.html

Inverzní funkce g (neboli také f^{-1}) k funkci f je funkcí, jejíž grafické zobrazení v kartézské soustavě souřadnic je souměrné k zobrazení funkce f podle přímky o rovnici $x = y$ (obr. 5 a 6) (Beránek et al. 2007; Bauer et al., 2015).



Obrázek 5 - Inverzní funkce I,
zdroj: <http://ibmathstuff.wikidot.com/inverse-function>



Obrázek 6 - Inverzní funkce II,
zdroj: <http://ibmathstuff.wikidot.com/inverse-function>

Zjednodušeně lze říci, že u inverzní funkce je „otočení“ přiřazování – tedy každému číslu y podle předpisu přiřadíme právě jedno číslo x . Pro lepší představu lze uvést tuto vlastnost navzájem inverzních funkcí f a g : $D(g) = H(f)$ a $H(g) = D(f)$ (Beránek et al. 2007).

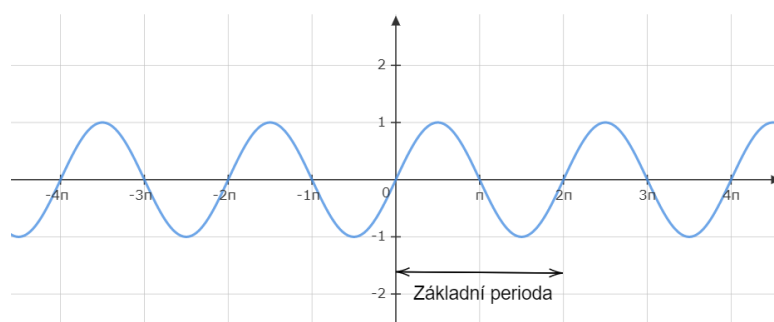
Dále existují takzvané **složené funkce**. Petrášková a Zmeškalová (2005, s. 48) uvádí tuto definici:

„Nechť jsou dány funkce f , g . Funkci h takovou, že $D(h) = \{x \in D(g); g(x) \in D(f)\}$; $h(x) = f(g(x))$, nazýváme složením funkcí g , f (v tomto pořadí) a označujeme $g \circ f$. Funkci g nazýváme vnitřní, funkci f nazýváme vnější, funkci h nazýváme složenou funkcí“.

Příkladem složené funkce může být $h: y = \sqrt{x^2 + 1}$, kde vnitřní funkcí je $g: u = x^2 + 1$ a funkcí vnější je $f: y = \sqrt{u}$. Další složenou funkcí je například $h: y = \sin 3x$, u které je vnitřní funkcí $g: u = 3x$ a vnější funkcí $f: y = \sin u$ (Vošický 2004).

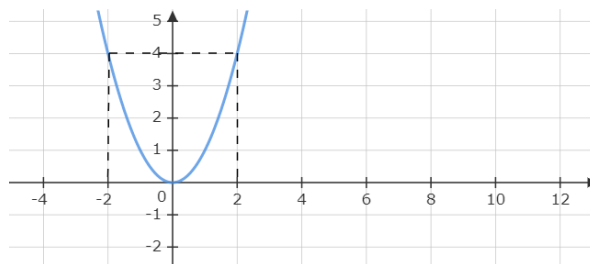
Pojmy, které je nutno znát, jsou periodičnost, lichost, sudost a omezenost funkce. Jedná se o vlastnosti funkcí, které budou popsány níže.

Funkce je periodická, pokud existuje číslo $p > 0$ a pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí, že pokud je funkce definována v bodě x , je definována i v bodech $x + kp$ a pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) = f(x + kp)$. Příklady periodické funkce mohou být například sinus či kosinus, které mají základní periodu (nejmenší periodu) $p = 2\pi$ (obr. 7) (Vošický 2004).



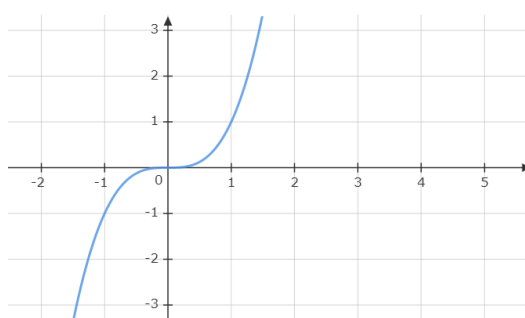
Obrázek 7 - Perioda funkce sinus, zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

Funkce je sudá, pokud $f(x) = f(-x)$. Příkladem sudé funkce může být $f: y = x^2$. Pokud za x dosadíme 2 a (-2) , funkční hodnota y bude v obou případech stejná: $f(2) = f(-2)$. Graf sudé funkce je souměrný podle osy y a je uveden na obrázku 9 (Hughes-Hallet 1980; Vošický 2004).



Obrázek 9 - Graf funkce x na druhou, zdroj: vytvořil autor

Pro **lichou funkci** platí $f(-x) = -f(x)$. Funkcí lichou je například $f: y = x^3$. Graf lichých funkcí je vždy symetrický podle počátku soustavy souřadnic (obr. 8) (Hughes-Hallet 1980; Bauer et al. 2015).

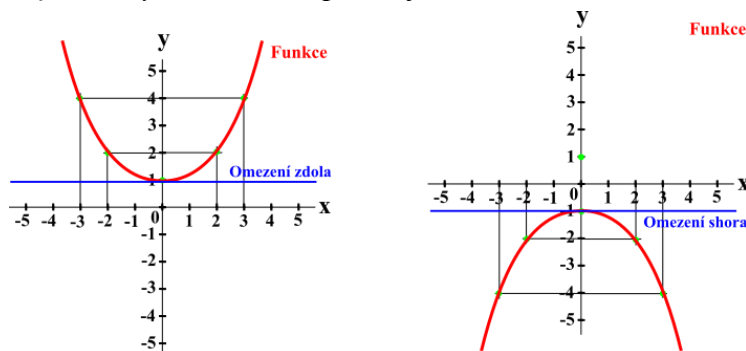


Obrázek 8 - Graf funkce x na třetí, zdroj: vytvořil autor

Funkce může být také **omezená**. Existují funkce omezené zdola, shora anebo omezené zdola i shora (obr. 10). Strnad (2013b) definuje jednotlivé omezenosti takto:

„Nechť f je daná funkce a M podmnožina jejího definičního oboru $D(f)$:

- Funkce f se nazývá funkce zdola omezená na množině M , právě když existuje číslo $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq d$.
- Funkce f se nazývá funkce shora omezená na množině M , právě když existuje číslo $h \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq h$.
- Funkce f se nazývá omezená, pokud je současně omezená shora i zdola“.

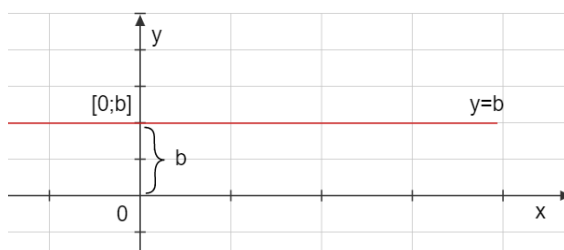


Obrázek 10 - Grafy funkcí omezených zdola nebo shora, zdroj: <http://www.x-idea.cz/matematicke-funkce/>

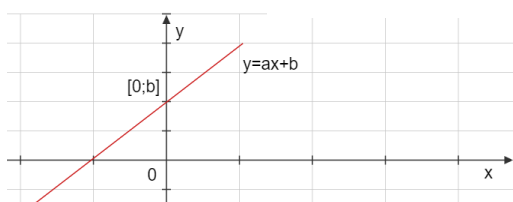
Polynomické funkce

Dle Vošického (2004) lze polynomickou funkci obecně vyjádřit ve tvaru $f: y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ a $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Mezi významné polynomické funkce patří funkce konstantní, lineární a kvadratická (Záškodný 2018).

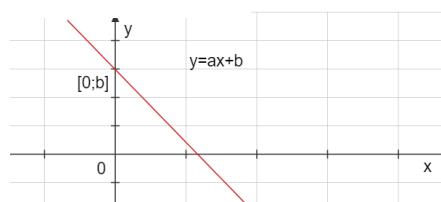
Obecný zápis **lineární funkce** je $f: y = ax + b$, kde $a; b \in \mathbb{R}$. Grafy těchto funkcí budou vždy přímkou, která je různoběžná s osou y (tzn. pro jedno x existuje pouze jedno přiřazené y – toto platí pro všechny funkce). Lineární funkce může být rostoucí, klesající nebo nerostoucí a neklesající. Pokud je funkce nerostoucí a neklesající, nazýváme ji **konstantní funkcí** (Vošický 2004). Obecné grafy lineárních funkcí jsou uvedeny níže na obrázcích 11, 12 a 13.



Obrázek 12 - Graf konstantní funkce pro $a=0$, tedy $y=b$, zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor

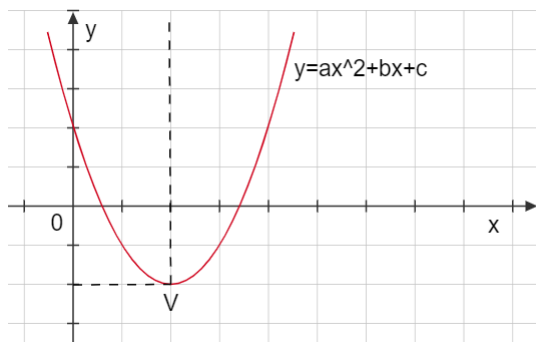


Obrázek 11 - Graf lineární funkce pro $a>0$, zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor

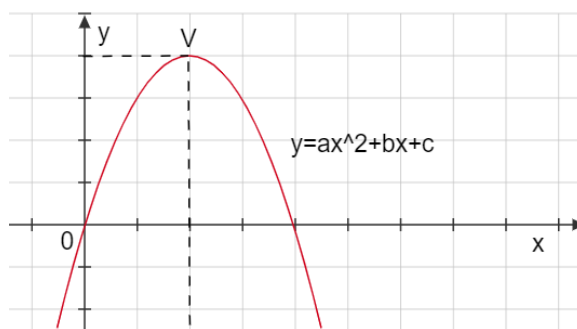


Obrázek 13 - Graf lineární funkce pro $a<0$, zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor

Obecný zápis **kvadratické funkce** je $f: y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ (tj. a je nenulové reálné číslo) a $b; c \in \mathbb{R}$. Pokud by a bylo rovno 0, vznikla by funkce $f: y = 0x^2 + bx + c = bx + c$ a jednalo by se tedy o lineární funkci. Grafem kvadratické funkce je parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou y . Vrchol paraboly V je průsečíkem její osy a samotnou parabolou (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007). Pro ilustraci paraboly budou vloženy obrázky 14 a 15.



Obrázek 14 - Graf kvadratické funkce pro $a > 0$, zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor

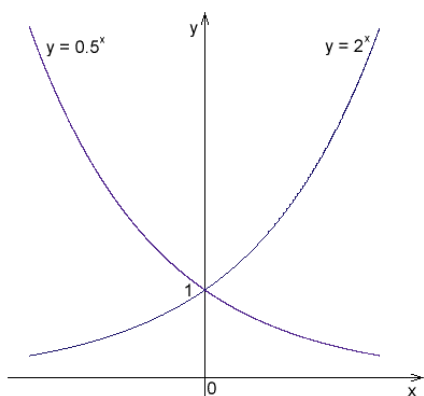


Obrázek 15 - Graf kvadratické funkce pro $a < 0$, zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor

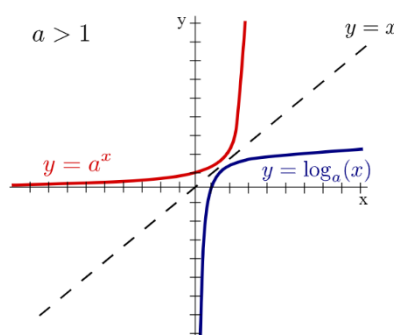
Exponenciální a logaritmická funkce

Exponenciální funkci definujeme předpisem $f: y = a^x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$. Jejím grafem je exponenciála neboli exponenciální křivka. Exponenciální křivka protíná osu y v bodě $[0; 1]$. Na obrázku 17 můžeme vidět grafy dvou exponenciálních funkcí. Graf funkce $f: y = 0,5^x$ ukazuje, jak vypadá tvar křivky pro takovéto a : $0 < a < 1$. Druhý graf znázorňuje funkci $f: y = 2^x$ a ilustruje tak tvar exponenciály pro $a > 1$ (Vošický 2004; Bauer et al. 2015).

Logaritmy jsou funkčními hodnotami **logaritmické funkce**. Logaritmus definujeme takto: $y = \log_a x \rightarrow x = a^y$. Například $\log_{10} 100 = 2$, protože $10^2 = 100$ (logaritmus se základem 10, tedy $\log_{10} x$, je dekadickým logaritmem, který lze značit také pouze jako $\log x$). Předpis logaritmické funkce je tedy $f: y = \log_a x$ pro $a > 0$; $a \neq 1$. Logaritmická funkce se základem a je inverzní k exponenciální funkci se stejným základem a . Graf logaritmické funkce nazýváme logaritmickou křivkou (obr. 16) (Vošický 2004; Bauer et al. 2015).



Obrázek 17 - Grafy dvou exponenciálních funkcí, zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_function#/media/File:Exponenciala_priklad.png



Obrázek 16 - Grafy exponenciální a logaritmické funkce se stejným základem pro $a > 1$, zdroj: https://www.sfu.ca/math-coursenotes/Math%20157%20Course%20Notes/sec_Logarithms.html

Eulerovo číslo e je konstantou s přibližnou hodnotou $e = 2,718$. Logaritmus se základem e je nazýván přirozeným logaritmem a zapisuje se $\log_e x$ nebo zkráceně $\ln x$ (Vošický 2004; Strnad 2013a).

Goniometrické funkce

Hlavními goniometrickými funkcemi, jež je nutno znát, jsou sinus, kosinus, tangens a kotangens. Objasníme si také určité vztahy mezi nimi.

Základními goniometrickými funkcemi jsou sinus a cosinus. Pomocí těchto základních funkcí definujeme funkce tangens a kotangens takto:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ pro } \cos x \neq 0 \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ pro } \sin x \neq 0$$

(Bauer et al. 2015).

x bývá nazýváno argumentem goniometrické funkce, a to platí pro všechny čtyři uvedené goniometrické funkce (Čermák a Červinková 2007).

Funkce **sinus** a **kosinus** jsou funkcemi periodickými s periodou rovnou 2π . V tabulce 6 podle Vošického (2004) budou uvedeny vybrané vlastnosti těchto dvou funkcí.

Tabulka 6 - Vlastnosti funkce sinus a kosinus

Vlastnosti	Sinus ($\sin x$)	Kosinus ($\cos x$)
Definiční obor	$x \in R$	$x \in R$
Obor hodnot	$y \in \langle -1; 1 \rangle$	$y \in \langle -1; 1 \rangle$
Sudost, lichost	Lichá $\sin(-x) = -\sin x$	Sudá $\cos(-x) = \cos x$
Omezenost	Omezená v celém definičním oboru zdola i shora	Omezená v celém definičním oboru zdola i shora
Periodičnost	Základní perioda 2π $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, kde $k \in Z$	Základní perioda 2π $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, kde $k \in Z$

Zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

Nyní budou uvedeny grafy funkcí sinus a kosinus (obr. 18) pro lepší představu těchto zmíněných vlastností.



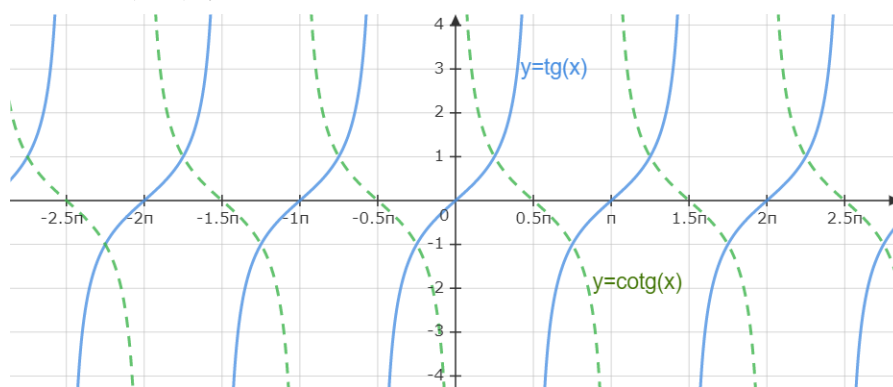
Obrázek 18 - Grafy funkcí sinus (plná čára) a kosinus (čárkovaně), zdroj: vytvořil autor

Funkce **tangens** a **kotangens** jsou tedy odvozeny od funkcí sinus a kosinus podle výše uvedených definic. Vlastnosti budou shrnuty v tabulce 7 podle Vošického (2004). Budou také uvedeny grafy těchto dvou funkcí (obr. 19).

Tabulka 7 - Vlastnosti funkce tangens a kotangens

Vlastnosti	Tangens ($\text{tg } x$)	Kotangens ($\text{cotg } x$)
Definiční obor	$x \in R - \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{2} \right\}; k \in Z$	$x \in R - \left\{ 2k \frac{\pi}{2} \right\}; k \in Z$
Obor hodnot	$y \in R$	$y \in R$
Sudost, lichost	Lichá $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$	Lichá $\text{cotg}(-x) = -\text{cotg } x$
Omezenost	Funkce není omezená ani zdola, ani shora	Funkce není omezená ani zdola, ani shora
Periodičnost	Základní perioda π	Základní perioda π

Zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor



Obrázek 19 - Grafy funkcí tangens (plná čára) a kotangens (čárkovaně), zdroj: vytvořil autor

Jak lze vidět v grafech, obě tyto funkce nejsou spojité. Znamená to tedy, že funkce nejsou definovány pro všechna x . Funkce tangens není definována pro $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$ a funkce kotangens není definována pro $x = 2k\frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$ (Vošický 2004).

Nyní budou uvedeny vzorce podle Čermáka a Červinkové (2007), kde zmíním vzájemné vztahy goniometrických funkcí a vybrané operace s nimi.

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \operatorname{cotg} x &= \frac{\cos x}{\sin x} & \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x &= 1 \end{aligned}$$

Vztahy pro součet a rozdíl argumentů:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$$

Vztahy pro dvojnásobný argument:

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

Lineárně lomená funkce

Lineární lomená funkce je každá funkce $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ na množině $R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla, $c \neq 0$ a $ad - bc \neq 0$. Definiční oborem lineárně lomené funkce je $D(f) = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Grafem lineárně lomené funkce je hyperbola (Odvárko 2008). Existují přímky, jež vymezují hyperbolu, a ty nazýváme asymptotami. Asymptoty jsou dvě, z toho jedna je rovnoběžná s osou x a druhá s osou y . Asymptoty se protínají ve středu hyperboly S , jež má souřadnice $S\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$ (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007). Vošický (2004, s. 37) uvádí tento postup sestavení grafu lineárně lomené funkce (obr. 20):

„Graf funkce $f: y = \frac{2x-5}{x-1}$ se sestrojí takto:

$$D(f) = R - \{1\}$$

Úpravou:

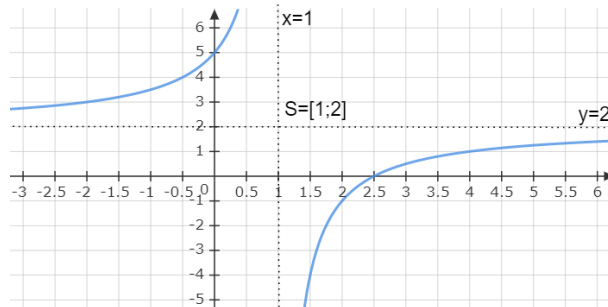
$$y = \frac{2x-5}{x-1} \rightarrow y = \frac{2(x-1)-3}{(x-1)} \rightarrow y = 2 - \frac{3}{(x-1)} \rightarrow S[1; 2]$$

Asymptoty: $x = 1; y = 2$

Průsečíky s osami:

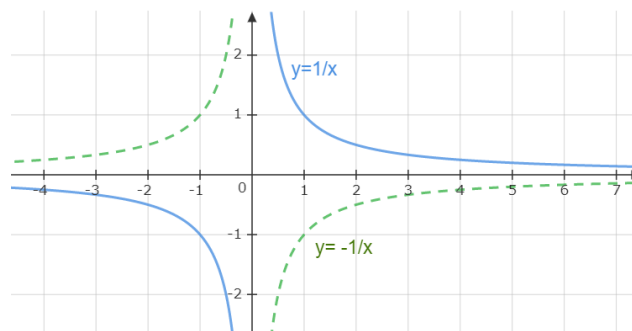
$$y = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} \dots X\left(\frac{5}{2}; 0\right)$$

$$x = 0 \rightarrow y = 5 \dots Y(0; 5)$$



Obrázek 20 - Graf funkce $y = \frac{2x-5}{x-1}$, zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

Nepřímá úměrnost je také lineárně lomenou funkcí. Obecně ji zapisujeme jako $y = \frac{k}{x}$, kde $k \in R - \{0\}$. Je tomu tak v případě, že v zápisu lineárně lomené funkce $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ je $a = 0$ a $d = 0$. Grafy dvou těchto funkcí jsou uvedeny na obrázku 21 (Odvárko 2008; Čermák a Červinková 2007).



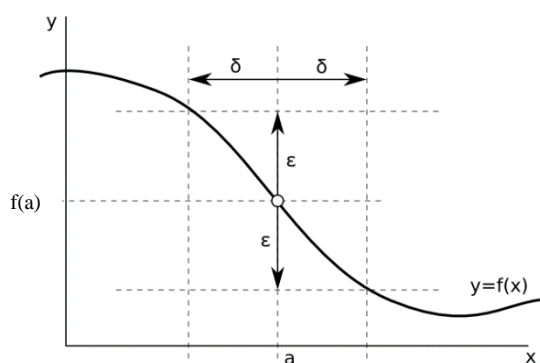
Obrázek 21 - Grafy nepřímé úměrnosti; plnou čarou graf funkce $y = 1/x$, tedy pro $k > 0$; čárkovaně graf funkce $y = -1/x$, tedy pro $k < 0$, zdroj: podle Odvárka (1993) vytvořil autor

1.4 Diferenciální počet

Před tím, než bude vysvětlena samotná podstata diferenciálního počtu, je třeba si objasnit pojmy spojitost a limita funkce.

Spojitost funkce

Spojitost funkce je definována pomocí bodu $a \in R$ a jeho okolí (tzv. δ –okolí) (obr. 22). Okolí bodu $(a - \delta; a + \delta)$ je otevřeným intervalem, kde δ je kladným reálným číslem. Středem okolí je tedy bod a a poloměrem okolí δ (delta). Okolí bodu se dále rozlišuje na levé δ –okolí bodu a $(a - \delta; a)$ a pravé δ –okolí bodu a $(a; a + \delta)$. Okolí bodu $f(a)$ nazýváme ε –okolím, kde ε (epsilon) je kladným reálným číslem. Toto okolí lze tedy zapsat otevřeným intervalem $(f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon)$ (Hrubý a Kubát 2008; Čermák 2004).



Obrázek 22 - Okolí bodu a a $f(a)$,
zdroj:https://cs.wikipedia.org/wiki/Limita_funkce#/media/Soubor:Limit.png, upravil autor

Hrubý a Kubát (2008, s. 26) tedy definují spojitost funkce.

„Funkce f je spojitá v bodě a , jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu $f(a)$ existuje takové okolí bodu a , že pro všechna x z tohoto okolí bodu a patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného okolí bodu $f(a)$ “.

Limita funkce

Limitu funkce definuje Čermák (2004, s. 7) takto:

„Funkce $y = f(x)$ má v bodě a limitu L , jestliže:

- 1. je definována pro x z nějakého okolí bodu a ,*
- 2. ke každému (libovolně malému) číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \neq a$ z δ –okolí bodu a náleží odpovídající funkční hodnoty $f(x)$ do ε –okolí bodu L “.*

Limitu funkce zapisujeme jako $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ a čteme: limita $f(x)$ pro x jdoucí (blížící se) k a je rovna L (Vošický 2004).

Limitu si lze dobře vysvětlit a představit pomocí příkladů podle Čermáka (2004, s. 7), jež budou uvedeny dále v textu.

Příklad 1:

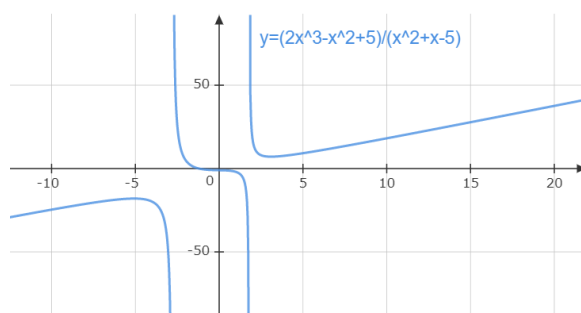
$$\text{Urči limitu: } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^7 - x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x^7 - x^2 + 1) = 3(-1)^7 - (-1)^2 + 1 = -3 - 1 + 1 = -3$$

Příklad 2 (obr. 2):

$$\text{Urči limitu: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{x^2 + x - 5} \text{ (obr. 23)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{x^2 + x - 5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}\right) = +\infty \cdot \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = +\infty \cdot 2 = +\infty \end{aligned}$$



Obrázek 23 - Graf funkce z příkladu 2, zdroj: vytvořil autor

Pro přesnější vysvětlení příkladu 2 je nutné uvést tyto vybrané limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0; n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \cotg x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tg x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tg x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(Čermák 2004).

Derivace funkce jedné proměnné

Pilecká (2004, s. 25) uvádí **definici derivace funkce** jedné proměnné:

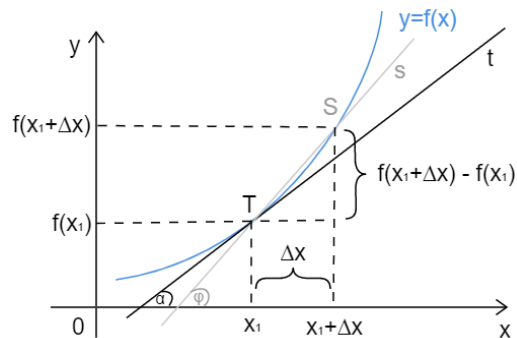
„Derivace funkce y podle nezávisle proměnné x je limita poměru přírůstků funkce a jejího argumentu, blíží-li se přírůstek argumentu bez omezení nule“.

Derivaci funkce zapisujeme $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ (Pilecká 2004).

Derivace funkce f bývá zapisována různými způsoby a to jako y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ nebo $\frac{df(x)}{dx}$.

Všechny tyto zápisy čteme stejně: derivace funkce y podle x .

Derivaci funkce lze využít pro různé výpočty, například pro nalezení tečny ke grafu funkce v jejím libovolném bodě (Čermák 2004).



Obrázek 24 - Grafické zobrazení derivace - nalezení tečny, zdroj: podle Pilecké (2004) a Čermáka (2004) vytvořil autor

Na obrázku 24 můžeme vidět tečnu t , jež se dotýká grafu funkce v bodě $T [x_1; f(x_1)]$. Dále je na obrázku sečna s , která je určena bodem T a bodem $S [x_1 + \Delta x; f(x_1 + \Delta x)]$. φ je směrový úhel sečny a α směrový úhel tečny (Čermák 2004).

Je třeba uvést **derivace elementárních funkcí**, jež je třeba znát pro výpočty i složitějších derivací funkcí (tab. 8).

Tabulka 8 - Derivace elementárních funkcí

Funkce	$y = f(x)$	Derivace funkce f	Podmínky platnosti vzorce
Konstantní funkce	$f: y = k$	$y' = 0$	$k \in R$
Lineární funkce	$f: y = x$	$y' = 1$	$x \in R$
Kvadratická funkce	$f: y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$x \in R; n \in N$
	$f: y = k \cdot x^n$	$y' = k \cdot n \cdot x^{n-1}$	x a $k \in R; n \in N$
Exponenciální funkce	$f: y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$x \in R$
Exponenciální funkce se základem e	$f: y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in R$
Logaritmická funkce	$f: y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$x \in (0; \infty)$
	$f: y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in R$
Sinus	$f: y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in R$
Kosinus	$f: y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in R$
Tangens	$f: y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$
Kotangens	$f: y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in (k\pi; (k+1)\pi)$

Zdroj: podle Čermáka (2004) a Pilecké (2004) vytvořil autor

Dále je nutno vědět, jak **derivovat součet, rozdíl, součin a podíl funkcí**. Tyto vzorce platí pro funkce f a g mající derivaci na určité množině M .

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(Vošický 2004; Došlá a Liška 2014).

Derivovat lze také **funkce složené**. Složenou funkci $f(g(x))$ derivujeme takto:

$$f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(Hrubý a Kubát 2008).

Pro lepší orientaci v této definici bude uveden příklad podle Vošického (2004) právě derivace složené funkce, v tomto případě funkce $f: y = \cos 4x$.

$$y' = (\cos 4x)' \cdot (4x)' = (-\sin 4x) \cdot 4 = -4 \sin 4x$$

Lze také určit vyšší derivace funkcí. Postup výpočtu druhé derivace je jednoduchý – zderivujeme derivaci první. Níže bude rozebrán příklad určení **druhé derivace** funkce (značíme y'') z publikace Čermáka (2004).

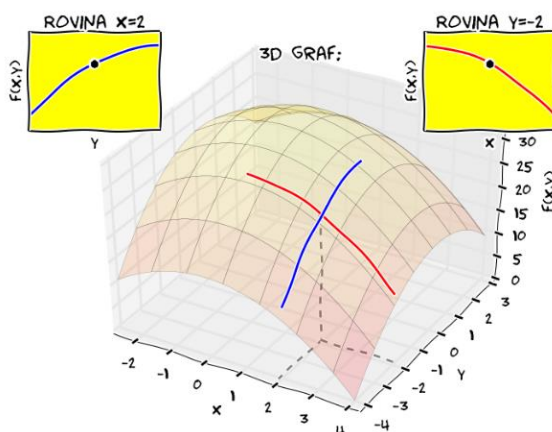
Urči derivaci funkce $y = \ln x$ pro $x > 0$.

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y'' = -1 \cdot (x^{-2}) = -\frac{1}{x^2}$$

Derivace funkce o více proměnných

Parciální derivace využíváme pro výpočty s funkcemi o více proměnných. Rozlišujeme parciální derivace podle jednotlivých proměnných. Derivujeme vždy pouze vzhledem k jedné proměnné. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ udává rychlost změny f při změnách veličiny x . Pokud parciálně derivujeme podle proměnné x , pak y považujeme za konstantu. Geometricky lze toto popsat tak, že studujeme křivku, jež vznikne na řezu grafu funkce $z = f(x, y)$ rovinou y (obr. 25) (Mařík 2014-2019b).



Obrázek 25 - Parciální derivace funkce f v bodě $[2, -2]$ jsou derivace křivek vzniklých na řezech rovinami $x=2$ a $y=-2$, zdroj: http://user.mendelu.cz/marik/wiki/am/slidy/derivace/index_h.html

Kurfürst (2017a) uvádí příklady pro výpočet parciálních derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ funkce $f(x, y) = x^2 + x - y$. Výsledky mají být následující: $2x + 1$ a -1 . Nyní si popíšeme postup, jak se dostat k těmto výsledkům.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1 - 0 = 2x + 1$$

Proměnnou x tedy klasicky zderivujeme a y je považována za konstantu, derivace y je tedy rovna 0.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 0 - 1 = -1$$

V tomto případě je konstantou x , a tedy i x^2 . Proměnnou y tentokrát derivujeme podle vzorce derivace lineární funkce $f'(x) = 1$, kde pouze místo x použijeme y .

S pojmem parciální derivace úzce souvisí **úplný diferenciál**. Úplného integrálu využíváme také u funkce více proměnných (lze ale využít i u funkce jedné proměnné). Pro funkce více proměnných jde teoreticky o výpočet, kde určujeme tečnou rovinu v určitém bodě k trojdimenzionálnímu grafu funkce. Jedná se o přírůstek na tečné rovině vzhledem k právě tomuto bodu – my tedy aproximujeme v okolí tohoto bodu graf funkce tečnou rovinou (Kuráňová a Vondra 2008). Vzorec, podle kterého počítáme úplný diferenciál, vypadá následovně:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y_0}(x_0, y_0) \cdot k$$

Prakticky lze úplného diferenciálu využívat k odhadu hodnoty složitých funkcí o dvou proměnných (Isibalo 2017). Podle Isibalo (2017) lze vypočítat přibližnou hodnotu (tzv. aproximovat) funkce $f(x, y) = \sqrt{2,95^2 + 4,02^2}$.

$$x = 2,95; y = 4,02 \rightarrow x_0 = 3; y_0 = 4$$

$$h = x - x_0 \rightarrow h = -0,05; k = y - y_0 \rightarrow k = 0,02$$

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{1}{2} \cdot (x_0^2 + y_0^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} = \frac{1}{2} \cdot (x_0^2 + y_0^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \rightarrow \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$

$$f(x, y) \approx 5 + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{100}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{100} = 5 - \frac{3}{100} + \frac{2}{125} = \frac{2500 - 15 + 8}{500} = \frac{2493}{500}$$

$$\sqrt{2,95^2 + 4,02^2} \approx \frac{2493}{500}; \frac{2493}{500} = 4,986$$

Pokud si zadáme tuto odmocninu do kalkulačky, získáme hodnotu 4,986271152. Můžeme tedy vidět, že ve výsledcích je pouze mírný rozdíl.

Průběh funkce

Velmi podstatným využitím derivací je zjišťování **průběhu funkcí**. Pomocí první a druhé derivace určíme, zda je funkce rostoucí, či klesající, její lokální minimum a maximum a také konvexnost a konkávnost funkce. Pokud je funkce konvexní nebo konkávní, lze výpočtem také najít inflexní bod (Čermák 2004).

Rostoucí a klesající funkce

Pokud je funkce spojitá v určitém uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$ a má derivaci $f'(x)$ pro každé $x \in (a; b)$, pak platí:

- a) funkce je na $\langle a; b \rangle$ **rostoucí**, pokud její derivace $f'(x) > 0$, tedy je kladná,
- b) funkce je na $\langle a; b \rangle$ **klesající**, pokud její derivace $f'(x) < 0$, tedy je záporná

(Hrubý a Kubát 2008; Vošický 2004).

Jako neklesající se označuje funkce, kde $f'(x) \geq 0$. Pro nerostoucí funkci platí $f'(x) \leq 0$ (Čermák 2004).

Extrémy funkce

Lokální maximum funkce leží v bodě, v jehož bezprostředním okolí funkce nejprve roste a potom klesá. Pro lokální minimum je to opačně, nejprve funkce v okolí bodu klesá a vzápětí roste (Pilecká 2004).

Podle Bauera et al. (2015) lze definovat lokální extrémy pomocí derivací takto: pokud má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a zároveň existuje $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.

Derivace funkce v bodě a , jež je lokálním extrémem, je rovna nule nebo derivace neexistuje. Pokud platí $f'(x_0) = 0$, bod x_0 se nazývá stacionárním bodem. Tento bod

však může i nemusí být lokálním extrémem. Pro prokázání extrému je nutno prověřit i δ –okolí bodu x_0 nebo použít druhé derivace (Čermák 2004). Pokud chceme prokázat lokální extrém pomocí druhé derivace, platí podle Vošického (2004, s. 117) toto:

„Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 hodnotu derivace $f'(x_0) = 0$ a existuje druhá derivace $f''(x_0)$, pak

- 1) Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 **lokální minimum***
- 2) Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 **lokální maximum***
- 3) Je-li $f''(x_0) = 0$, nelze o existenci extrému rozhodnout pomocí druhé derivace“.*

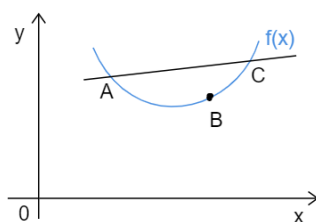
Dále jsou zavedeny pojmy jako globální extrémy – globální minimum a globální maximum. Globálním extrémem vyjádříme extrémy v celém definičním oboru funkce, a ne pouze v okolí jednoho bodu. Výpočtem je lze zjistit určením lokálních extrémů funkce v $\langle a; b \rangle$ a hodnot $f(a)$ a $f(b)$. Poté porovnáme extrémy s hodnotami $f(a)$ a $f(b)$, vybereme z nich to nejmenší, ev. největší, a to je globálním extrémem. (Hrubý a Kubát 2008; Vošický 2004).

Konvexnost a konkávnost funkce

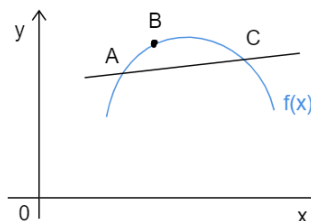
Podle Čermáka (2004, s. 25) lze konvexnost a konkávnost funkce definovat:

„Nechť je dána funkce $f(x)$, která je definována na intervalu $\langle a; b \rangle$. Nechť jsou dány tři body této funkce $A[x_1; f(x_1)]$, $B[x_2; f(x_2)]$, $C[x_3; f(x_3)]$ pro x_1, x_2, x_3 z intervalu $\langle a; b \rangle$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_3$. Nechť body A a C určují přímku. Potom:

- Leží-li jakýkoliv bod B pod každou takovou přímkou AC nebo na této přímce, pak říkáme, že funkce $f(x)$ je konvexní na intervalu $\langle a; b \rangle$.*
- Leží-li jakýkoliv bod B nad každou takovou přímkou AC nebo na této přímce, pak říkáme, že funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $\langle a; b \rangle$.*
- Leží-li jakýkoliv bod B pod každou takovou přímkou AC , pak říkáme, že funkce $f(x)$ je ryze konvexní na intervalu $\langle a; b \rangle$ (obr. 26).*
- Leží-li jakýkoliv bod B nad každou takovou přímkou AC , pak říkáme, že funkce $f(x)$ je ryze konkávní na intervalu $\langle a; b \rangle$ (obr. 27)“.*



Obrázek 26 - **Konvexní funkce**, zdroj: podle Čermáka (2004) vytvořil autor



Obrázek 27 - **Konkávni funkce**, zdroj: podle Čermáka (2004) vytvořil autor

U spojité funkce $f(x)$, pro kterou lze vypočítat druhou derivaci, jsme schopni určit její konvexnost či konkávnost právě podle hodnoty druhé derivace.

- Funkce je na $\langle a; b \rangle$ **konvexní**, pokud je $f''(x) \geq 0$.
- Funkce je na $\langle a; b \rangle$ **ryze konvexní**, pokud je $f''(x) > 0$.
- Funkce je na $\langle a; b \rangle$ **konkávni**, pokud je $f''(x) \leq 0$.
- Funkce je na $\langle a; b \rangle$ **ryze konkávni**, pokud je $f''(x) < 0$

(Čermák 2004).

Inflexní bod

Inflexním bodem se označuje bod $x_0 \in (a; b)$ funkce $f(x)$, jež je definována na intervalu $\langle a; b \rangle$, pokud v intervalu $\langle a; x_0 \rangle$ je funkce konkávni (konvexní) a v intervalu $\langle x_0; b \rangle$ je konvexní (konkávni). Jedná se tedy o bod, kde se konvexnost funkce mění v konkávnost nebo naopak. Pro inflexní bod x_0 platí $f''(x_0) = 0$ (Čermák 2004).

Taylorův a Maclaurinův rozvoj funkce

Pomocí tzv. **Taylorova polynomu** jsme schopni nahradit jakoukoliv libovolnou matematickou funkci právě tímto polynomem (Kurfürst 2017b). Mařík (2007-2012) uvádí definici Taylorova polynomu:

„Nechť $n \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo a f funkce, která je definovaná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a má zde všechny derivace do řádu n včetně. Polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se nazývá **Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě x_0** . Bod x_0 se nazývá **střed Taylorova polynomu**“.

Maclaurinův polynom je speciálním typem Taylorova polynomu. Pro Maclaurinův polynom platí, že $x_0 = 0$ (Mařík 2007-2012).

Na vzorci Taylorova polynomu, můžeme vidět, že ve jmenovatelích jednotlivých členů jsou výrazy $1!, 2!, \dots, n!$. Jedná se o **faktoriály**. Pro připomenutí, co je vlastně faktoriál, si definujeme, jaké mají tyto faktoriály hodnotu.

$$0! = 1$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$1! = 1$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

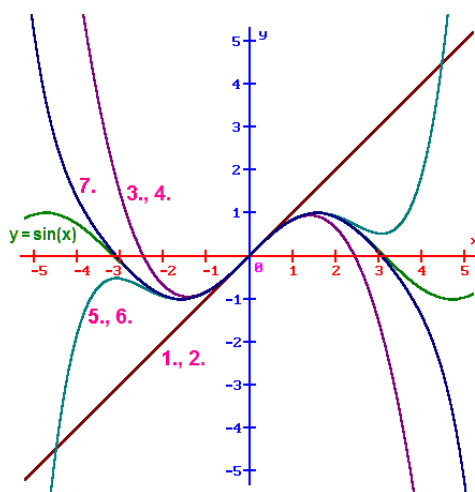
$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot (n - 4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

(Vošický 2004)

Nedvěd (2019) ukazuje, jak vypadají jednotlivé polynomy funkce $\sin(x)$ v bodě $x = 0$. Na obrázku 28 jsou zobrazeny polynomy prvního až sedmého řádu, tedy $T_1(x), T_2(x), \dots, T_7(x)$.



Obrázek 28 - Vybrané Taylorovy polynomy pro funkci $y = \sin(x)$, zdroj: http://84.242.77.122/_uc%282ebnice_CS/Matematicka_analyza/Diferencialni_pocet/Tayloruv_rozvoj/index.htm

Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice jsou rovnice, kde figuruje neznámá funkce a její derivace. Diferenciální rovnice můžeme najít například v těch případech, ve kterých rychlost růstu nebo poklesu veličiny souvisí s její velikostí. Jedná se mimo jiné o tepelnou výměnu nebo

o datování pomocí uhlíku, jež využívá rozpadu radioaktivního uhlíku ^{14}C na stabilní uhlík ^{12}C . Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu zapisujeme

$$y' = \varphi(x, y),$$

kde φ (fi) je funkce dvou proměnných (Mařík 2014-2019a).

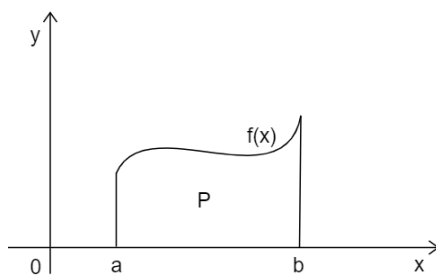
Řešení diferenciální rovnice je nekonečně mnoho, proto používáme tzv. **obecné řešení**, které spočívá v použití konstanty C . Například obecným řešením rovnice $y' = 2xy$ je $y = Ce^{x^2}$, kde $C \in R$ (Mařík 2014-2019a).

Partikulárním řešením rovnice máme na mysli vyjádření jedné libovolné funkce splňující diferenciální rovnici. Partikulárním řešením právě rovnice $y' = 2xy$ může být například $y = 5e^{x^2}$ (Mařík 2014-2019a).

1.5 Integrální počet

Integrální počet byl zaveden za tím účelem, abychom mohli spočítat **plochu pod grafem funkce** nebo plochu jakéhokoliv rovinného obrazce pomocí nekonečně mnoho malých obdélníků, jelikož je nemožné ji přímo určit. Obdélníků je nekonečně mnoho, setkáváme se tedy s pojmem „nekonečně velký“ (Došlá a Liška 2014).

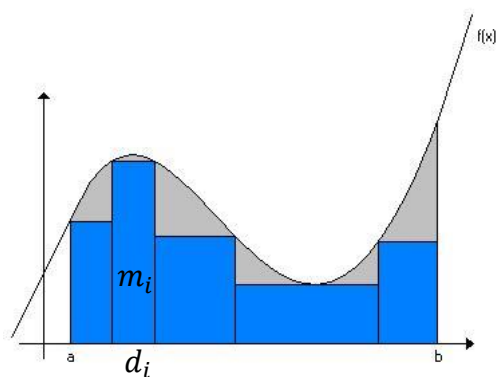
Tento výpočet pomocí nekonečně mnoha obdélníků si nyní popíšeme. Funkce f je nezáporná a omezená na intervalu $\langle a; b \rangle$ a v tomto intervalu také spojitá. Snažíme se najít obsah plochy P („podgraf“). Plocha P je ohraničena grafem funkce f , osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$ (obr. 29). Pro přesný výpočet jsou potřeba obdélníky co nejužší – tak úzké, až se mění v úsečky. Počítáme tedy s **nekonečně mnoha úsečkami**. (Došlá a Liška 2014).



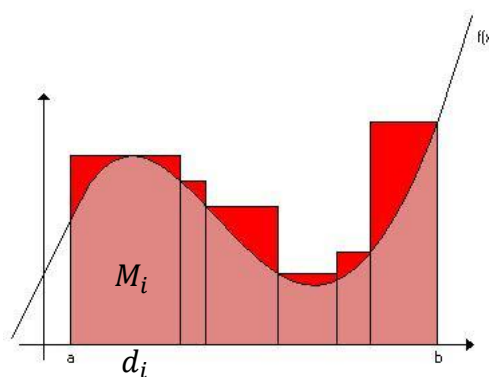
Obrázek 29 - Plocha P – „podgraf“, zdroj: podle Došlé a Lišky (2014) vytvořil autor

Vošický (2004, s. 122) popisuje, jak byl odvozen integrální počet pomocí nekonečně mnoha obdélníků.

„Interval $(a; b)$ rozdělíme na n intervalů délek d_1, d_2, \dots, d_n . Pro každý takovýto interval uvažujeme součin jeho délky d_i s minimem m_i funkce na tomto intervalu a součin jeho délky d_i s maximem M_i na daném intervalu ...“.



Obrázek 30 - **Dolní integrální součet**,
zdroj:https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AF_v_integr%C3%A1l, upravil autor podle Vošického (2004)



Obrázek 31 - **Horní integrální součet**,
zdroj:https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AF_v_integr%C3%A1l, upravil autor podle Vošického (2004)

Dostaneme tedy dolní integrální součet (obr. 30) a horní integrální součet (obr. 31). Tyto hodnoty udávají hledaný obsah obrazce. Podrobněji bude tato problematika popsána v kapitole o určitém integrálu (Vošický 2004).

Pro takzvanou **primitivní funkci** F platí rovnost $F'(x) = f(x)$, kde F a f jsou funkce definované na otevřeném intervalu J a všechna $x \in J$. Tuto skutečnost čteme tak, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f (Hrubý a Kubát 2008).

Neurčitý integrál funkce f je množina všech primitivních funkcí k funkci f . Neurčitý integrál obecně zapisujeme $\int f(x) dx = F(x) + C$, kde $C \in R$ je integrační konstantou. Symbol \int je integračním znakem, x je integrační proměnná a funkce f je v tomto případě nazývána integrandem. Výpočet k určení neurčitého integrálu nazýváme integrací funkce f (Vošický 2004). Pro urychlení integrace je vhodné znát tyto základní odvozené vzorce (tab. 9):

Tabulka 9 - Vzorce pro neurčitý integrál

Vzorec	Podmínky platnosti vzorce
$\int 0 \, dx = C$	$x \in R$
$\int dx = x + C$	$x \in R$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in N; x \in R$
$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	$r \in R - \{-1\}; x \in (0; \infty)$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$	$x \in R - \{0\}$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$x \in R$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a \in (0; \infty) - \{1\}; x \in R$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$x \in R$
$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$x \in R$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$	$x \in \left(-\frac{1}{2}\pi + k\pi; \frac{1}{2}\pi + k\pi\right); k \in Z$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$x \in (k\pi; \pi + k\pi); k \in Z$

Zdroj: podle Hrubého a Kubáta (1997) a Vošického (2004) vytvořil autor

Pro výpočty jsou také zásadní tyto věty (Čermák 2004):

$$\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx,$$

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \int f(x) \, dx.$$

Došlá a Liška (2014) nám ukazují, jak integrovat funkci $y = x^3$ a funkci $y = \frac{1}{2x-5}$:

$$\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{2x-5} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x-5} \, dx = \frac{1}{2} \ln|2x-5| + C.$$

Existují dvě hojně používané metody pro integraci funkce, a to metoda per partes a metoda integrace substitucí.

Metoda per partes (neboli integrace po částech) využívá vzorce $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$. Tato metoda je používána v případě, že k u' lze snadno nalézt u (Pilecká 2004). Níže uvedený příklad ilustruje, jak se právě tato metoda využívá k výpočtu.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= e^x \cdot x^2 - 2 \int e^x \cdot x dx = e^x \cdot x^2 - 2 \left[x e^x - \int 1 \cdot e^x dx \right] = \\ &= e^x x^2 - 2[x e^x - e^x + C] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2C = \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C_1 \end{aligned}$$

Per partes 1

- $u' = e^x \rightarrow u = e^x$
- $v = x^2 \rightarrow v' = 2x$

Per partes 2

- $u' = e^x \rightarrow u = e^x$
- $v = x \rightarrow v' = 1$

(Vošický 2004)

Druhou metodou je **substituční metoda** (neboli metoda nahrazení), která je založena na principu zavedení nové proměnné pro zjednodušení integrace funkce. Metoda substituce je odvozena od vzorce pro výpočet derivace složené funkce. Výsledkem mnoha provedených kroků při úpravě vzorce platného právě pro složenou funkci je $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt$, kde $t = g(x)$. Hledáme tedy vhodné t (Hrubý a Kubát 2008; Čermák 2004).

Úspěšný výpočet závisí na třech krocích:

1. „převedení všech veličin v původní proměnné x na veličiny v nové proměnné t ,
2. výpočet integrálu v nové proměnné t ,
3. vyjádření výsledku v původní proměnné x “.

(Pilecká 2004, s. 37).

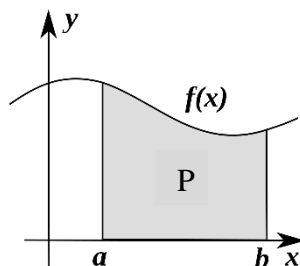
Pokud se budeme držet těchto kroků, bude náš výpočet vypadat stejně jako výpočet Vošického (2004, s. 122).

„Substituční metodou určete $\int \sin(3x + 1) dx$

Substituce: $3x + 1 = t$ derivováním: $3 dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

Pak: $\int \sin(3x + 1) dx = \int \sin t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C = -\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + C$.

Se základy teorie **určitého integrálu** jsme se již setkali na začátku této kapitoly, a to s obsahem plochy pod grafem omezeném „ze všech 4 stran“, tedy tentokrát pracujeme s určitou částí grafu v intervalu $\langle a; b \rangle$ (obr. 32). Znamená to, že zkoumáme určitý integrál funkce f od a do b .



Obrázek 32 - Určitý integrál,
zdroj: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Integr%C3%A1l>, upravil autor

Určitý integrál zapisujeme jako $\int_a^b f(x) dx$ a jedná se právě o limitu dolního a horního integrálního součtu. a je dolní mezí a b horní mezí integrálu, $f(x)$ je integrandem a \int integračním znaménkem. Pro výpočty používáme Newtonova-Leibnizova vzorce: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ (Vošický 2004). Příklad uvádí Pilecká (2004):

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Podle Newtonova-Leibnizova vzorce tedy platí:

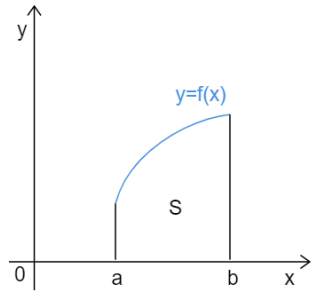
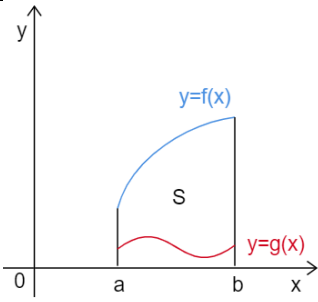
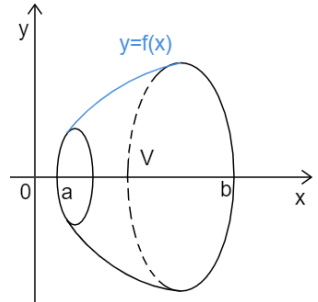
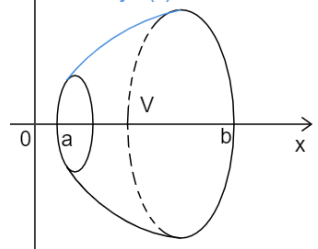
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

(Pilecká 2004).

Aplikací integrálního počtu jsme schopni najít odpovědi na spousty otázek. Výběr toho, na co lze integrace využít, bude uveden v tabulce 10.

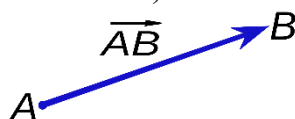
Tabulka 10 - Aplikace integrálního počtu

Co lze spočítat		Vzorec	Obrázek
Obsah rovinného obrazce	Obsah křivočarého lichoběžníku	$S = \int_a^b f(x) dx$	
	Obsah obrazce ohraničeného 2 grafy	$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$	
Objem rotačního tělesa		$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$	
Obsah pláště rotačního tělesa		$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$	
Fyzikální aplikace	Dráha přímocarého pohybu	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$	
	Práce	$A = \int_a^b F(x) dx$	

Zdroj: Podle Vošického (2004) vytvořil autor, obrázky podle Vošického (2004) vytvořil autor

1.6 Vektorový počet

Pro zavedení pojmu vektor je nutné se seznámit s tím, co je orientovaná úsečka. **Orientovaná úsečka** (obr. 33) je úsečka, která má počáteční a koncový bod. Záleží tedy na pořadí těchto bodů, tj. jeden z nich je vždy počáteční a druhý koncový, a nelze je zaměnit. Pokud je počátečním bodem A a koncovým bodem B , pak je orientovaná úsečka AB určena uspořádanou dvojicí $[A; B]$. Tuto orientovanou úsečku zapisujeme jako \overrightarrow{AB} (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007).



Obrázek 33 - Orientovaná úsečka AB ,
zdroj: [https://sk.wikipedia.org/wiki/Vektor_\(matematika\)](https://sk.wikipedia.org/wiki/Vektor_(matematika))

Vektor je množinou všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a mají stejný směr, tedy jsou rovnoběžné. Vektory zapisujeme pomocí malých písmen se šipkou. Nejčastěji vektory zapisujeme jako \vec{u}, \vec{v} nebo \vec{w} (Kočandrlle a Boček 1995; Čermák a Červinková 2007).

Vektor definujeme pomocí **souřadnic**, a to takto: $\vec{u} = (u_1; u_2)$, ev. $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, pokud vektor existuje v prostoru (kromě os x a y zavádíme novou osu z). Pokud je vektor určen orientovanou úsečkou AB , jeho souřadnice získáme výpočty $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$ (Kočandrlle a Boček 1995).

Velikost vektoru \vec{u} neboli délka orientované úsečky AB se zapisuje $|\vec{u}| = |\overrightarrow{AB}|$. Velikost vektoru $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ se vypočítá jako $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007).

Operace s vektory

S vektory (např. $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$) lze provádět spoustu **operací** (tab. 11).

Tabulka 11 - Vybrané operace s vektory

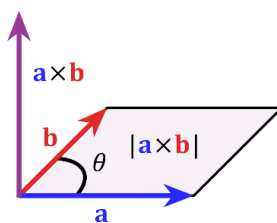
Operace	Vzorec
Součet vektorů	$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$
Rozdíl vektorů	$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$
k -násobek vektoru	$k \cdot \vec{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$

Skalární součin vektorů	$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1v_1; u_2v_2; u_3v_3)$
Vektorový součin	$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - v_2u_3; u_3v_1 - v_3u_1; u_1v_2 - v_1u_2)$

Zdroj: Podle Vošického (2004) a Čermák a Červinkové (2007) vytvořil autor

Pokud **skalární součin** dvou nenulových vektorů je roven nule, znamená to, že tyto dva vektory jsou navzájem kolmé: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$. Pro dva nenulové vektory také platí $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$. Jsme tedy schopni zjistit úhel mezi dvěma vektory pomocí skalárního součinu a jejich velikostí (Čermák a Červinková 2007).

Vektorový součin lze spočítat pouze pro vektory v prostoru. Pomocí vektorového součinu lze snadno najít vektor kolmý ke dvěma vektorům: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \rightarrow \vec{w} \perp \vec{u}; \vec{w} \perp \vec{v}$ (obr. 34). Velikost vektoru \vec{w} ($|\vec{w}| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \varphi$) odpovídá velikosti plochy rovnoběžníku, jenž je určen vektory \vec{u} a \vec{v} , proto je vektorový součin využíván právě pro výpočet obsahu rovnoběžníku.



Obrázek 34 - Vektorový součin pro vektory a a b, zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product

Vošický (2004) uvádí pomůcku k lepšímu zapamatování vzorečku pro výpočet vektorového součinu (tab. 12).

Tabulka 12 - Pomůcka k vektorovému součinu

\vec{u}	u_2	u_3	u_1	u_2
\vec{v}	v_2	v_3	v_1	v_2
$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$	$u_2v_3 - v_2u_3$	$u_3v_1 - v_3u_1$	$u_1v_2 - v_1u_2$	

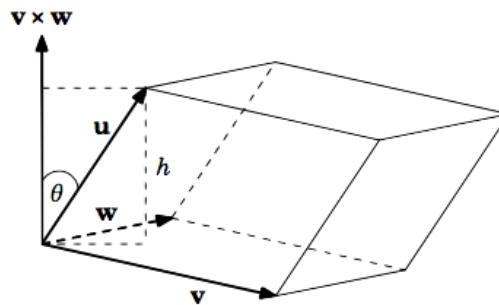
Zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

Smíšený součin tří vektorů je definován pouze pro prostorové vektory. Pokud vektory leží pouze v jedné rovině, výsledek vektorového součinu bude 0. Smíšený vektor je obvykle značen jako $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ a

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

(Kočandrle a Boček 1995; Kuben a Račková 2014).

Pomocí smíšeného součinu jsme schopni určit objem libovolného rovnoběžnostěnu, jenž je určen právě třemi vektory \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} se stejným počátečním bodem: $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot \vec{w}$ (obr. 35) (Kočandrle a Boček 1995; Krynický 2020).

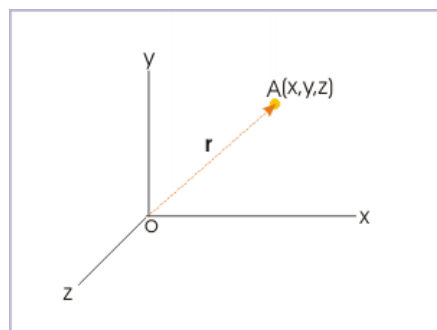


Obrázek 35 - Rovnoběžnostěn určený vektory u , v a w , zdroj: [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Vector_Calculus_\(Corral\)/01%3A_Vectors_in_Euclidean_Space/1.04%3A_Cross_Product](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Vector_Calculus_(Corral)/01%3A_Vectors_in_Euclidean_Space/1.04%3A_Cross_Product)

Speciální definované vektory

Tzv. **jednotkovým vektorem** je vektor, pro nějž platí $|\vec{u}| = 1$. **Nulový vektor** $\vec{0} = (0; 0; 0)$ je určený nulovou orientovanou úsečkou. **Opačný vektor** k vektoru $\vec{u} = B - A$ je vektor $-\vec{u} = A - B$. Opačný vektor k vektoru $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ je tedy $-\vec{u} = (-u_1; -u_2; -u_3)$ (Kočandrle a Boček 1995; Čermák a Červinková 2007).

Takzvaný **polohový vektor** má počáteční bod v počátku soustavy souřadnic (tedy v bodě $O[0; 0; 0]$) a konec v určitém daném bodě A (Rusňák 2007).



Obrázek 36 - Polohový vektor v prostoru, zdroj: <https://cnx.org/contents/MymQBhVV@175.8:0pcQShR1@7/Position-vector>

Existují také **jednotkové vektory souřadnicových os**. Jedná se o jednotkové vektory, tzn. jejich velikost je rovna 1, a zároveň „leží“ na osách x , y , z soustavy souřadnic. Tyto vektory typicky označujeme jako \vec{i} , \vec{j} a \vec{k} . Vektor \vec{i} patří k ose x , \vec{j} k ose y a \vec{k} k ose z (obr. 37).

Podle jejich polohy vypadají souřadnice následovně:

$$\vec{i} = (1; 0; 0),$$

$$\vec{j} = (0; 1; 0),$$

$$\vec{k} = (0; 0; 1).$$

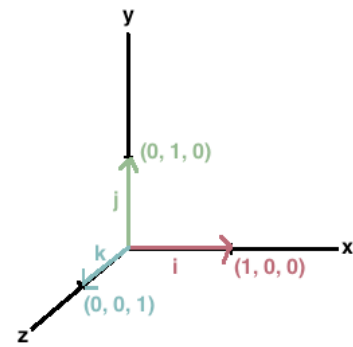
Jakýkoliv vektor z prostoru lze vyjádřit jako

$$\vec{u} = u_1\vec{i}; u_2\vec{j}; u_3\vec{k} \text{ (Kuben a Račková 2014).}$$

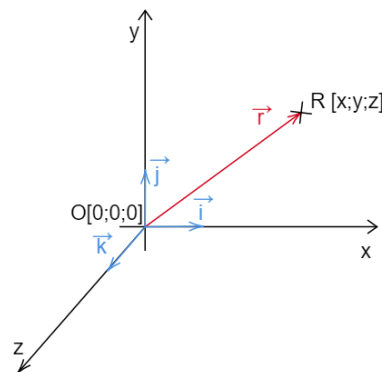
Vektorová funkce, její derivace a integrace

Vektorová funkce je funkce, jejímiž proměnnými jsou reálná čísla a hodnotami jsou vektory. Podstata derivace vektorové funkce je v derivaci jednotlivých složek funkce.

Derivace vektorové funkce vyjadřuje míru změny polohového vektoru například za určitý čas. Změna **dráhy** za určitý čas (tj. **rychlost**) je pouze jednou ze situací, kde lze použít vektorové rovnice. Derivujeme tedy vektor dráhy \vec{r} **podle času t** (obr. 38) (Zindulka 2004, Green et al. 2008).



Obrázek 37 - Jednotkové vektory souřadnicových os, zdroj: <http://mathonline.wikidot.com/standard-unit-vectors>



Obrázek 38 - Znázornění dráhy (vektor r) v soustavě souřadnic, zdroj: vytvořil autor

Je dána vektorová funkce $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Takto ji zderivujeme:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}.$$

Touto derivací tedy zjistíme vektor rychlosti a spočítáním velikosti tohoto vektoru získáme skalární (tedy bez informace o směru) velikost rychlosti (Green et al. 2008).

Stejně tak můžeme určit vektor **zrychlení** pomocí druhé derivace této funkce podle času, zrychlení je totiž určeno změnou rychlosti (první derivace dráhy) za určitý čas:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}.$$

(Green et al. 2008)

Značky v podobě jedné nebo dvou teček jsou speciálním značením první a druhé derivace podle času. Toto značení zavedl Isaac Newton (West 2012-2015).

Integrace vektorové funkce se také provádí pomocí integrace jejich jednotlivých složek – toto platí pro neurčitý i určitý integrál. Integrace je „opakem“ derivace, proto ji můžeme využít k přechodu od zrychlení nebo rychlosti k dráze (kolektiv CK12 Math 2020; Dawkins 2020).

$$\int \vec{r}(t) dt = \int x(t) dt \vec{i} + \int y(t) dt \vec{j} + \int z(t) dt \vec{k} + \vec{c}$$

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \int_a^b x(t) dt \vec{i} + \int_a^b y(t) dt \vec{j} + \int_a^b z(t) dt \vec{k}$$

(Dawkins 2020)

1.7 Analytická geometrie

Analytická geometrie úsečky

Existuje úsečka AB , kde $A[a_1; a_2]$ a $B[b_1; b_2]$. Pomocí souřadnic těchto bodů jsme schopni určit **střed úsečky**.

$$S = \frac{A+B}{2}, \text{ tedy } S \left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2} \right]$$

(Vošický 2004)

Délku úsečky AB lze také zjistit. Vypočítáme ji stejně, jako kdybychom určovali velikost orientované úsečky \overrightarrow{AB} .

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

(Vošický 2004)

Analytická geometrie přímky

Pomocí **parametrické rovnice přímky** jsme schopni určit jakýkoliv bod, který leží na této přímce. Přímka p je určena bodem $A[a_1; a_2]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1; u_2)$ (obr. 39). Právě pomocí bodu A a vektoru \vec{u} můžeme najít souřadnice libovolného bodu $X[x; y]$.

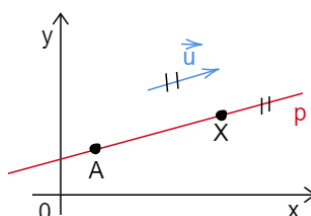
$$X = A + t\vec{u}$$

Proměnná $t \in R$ je nazývána parametrem. Pokud parametrickou rovnicí přímky rozepíšeme podle jednotlivých souřadnic, bude vypadat takto:

$$p: x = a_1 + t \cdot u_1$$

$$y = a_2 + t \cdot u_2$$

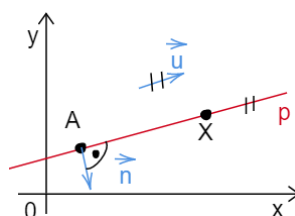
(Kočandrla a Boček 1995).



Obrázek 39 - Přímka p určená bodem A a vektorem u , zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

Přímku lze vyjádřit také **obecnou rovnicí přímky**. Tuto přímku určíme pomocí jednoho bodu ležícího na přímce a normálového vektoru přímky (obr. 40). Normálový vektor je kolmý ke směrovému vektoru přímky. Pokud je normálový vektor $\vec{n} = (a; b)$, pak směrový vektor můžeme vyjádřit jako $\vec{u} = (-b; a)$ nebo $\vec{u} = (b; -a)$. Platí $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, pokud jsou tyto dva vektory skutečně kolmé (Kočandrla a Boček 1995; Čermák a Červinková 2007).

$$p: ax + by + c$$



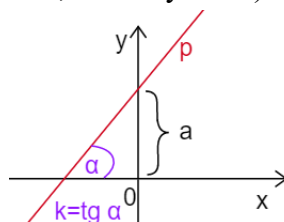
Obrázek 40 - Přímka p určená bodem A a normálovým vektorem n , zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

V obecné rovnici přímky můžeme najít souřadnice libovolného bodu $X[x; y]$ ležícího na přímce p . Koeficienty a, b a c jsou reálnými čísly, pro která musí platit $[a; b] \neq [0; 0]$. Každá přímka má nekonečně mnoho obecných rovnic. Různé rovnice pro jednu přímku můžeme získat vynásobením jedné rovnice libovolnými nenulovými čísly. Je snaha zapsat rovnici ve tvaru, kde $|a|, |b|$ a $|c|$ jsou co nejmenšími možnými čísly. Dvě přímky jsou rovnoběžné, je-li normálový vektor jedné přímky násobkem normálového vektoru přímky druhé (Kočandrla a Boček 1995; Čermák a Červinková 2007).

Při vyjádření obecné rovnice pro y , pokud je $b \neq 0$, získáme **směrnicevý tvar přímky**

$$p: y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \rightarrow p: y = kx + q.$$

Číslo k je směrnici přímky, pro kterou platí $k = \operatorname{tg} \alpha$ (obr. 41). Úhel α je úhlem mezi přímkou p a osou x . Přímky jsou rovnoběžné v tom případě, že jsou obě rovnoběžné s osou y (to platí pro $b = 0$) nebo jsou obě různoběžné s osou y a mají stejnou směrnici k (Kočandrla a Boček 1995; Vošický 2004).



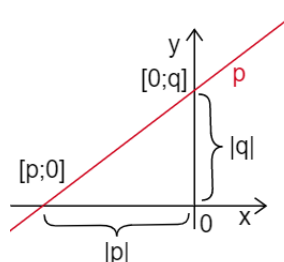
Obrázek 41 - *Směrnice přímky alfa*, zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

Přímka, která je kolmá k přímce o $k \neq 0$, má směrnici $k' = -\frac{1}{k}$ (Kočandrla a Boček 1995).

Pokud přímka vytíná na ose x a y úseky $p \neq 0$ a $q \neq 0$ (obr. 42), jsme schopni pro přímku zapsat **úsekovou rovnici**

$$p: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

(Čermák a Červinková 2007).



Obrázek 42 - *Úsek přímky*, zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor

Pro určení **odchylky dvou přímek** musíme znát normálové vektory obou přímek $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$ a $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$. Tuto odchylku spočítáme vzorcem

$$\cos \alpha = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

(Čermák a Červinková 2007).

Analytická geometrie roviny

Rovina může být v prostoru jednoznačně určena:

- a) třemi různými body, které neleží na jedné přímce,
- b) dvěma různoběžnými přímkami,
- c) dvěma různými rovnoběžnými přímkami nebo
- d) přímkou a bodem, který na ní neleží (Čermák a Červinková 2007).

Parametrickou rovnicí roviny lze zapsat souhrnně jako

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v},$$

kde $t, s \in R$ jsou parametry. Parametrická rovnice roviny ρ (ró) obsahuje informace o bodu $A[a_1; a_2; a_3]$ ležícího v rovině a o dvou nenulových různoběžných vektorech $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ určujících rovinu ρ . Parametrickou rovnicí roviny lze také takto rozepsat:

$$\rho: x = a_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1$$

$$y = a_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2$$

$$z = a_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3$$

(Vošický 2004).

Čermák a Červinková (2007, s. 166) uvádí další možnost zápisu roviny:

„Vyloučením parametrů z parametrických rovnic roviny ρ dostaneme tzv. **obecnou rovnici roviny**

$$\rho: ax + by + cz + d = 0,$$

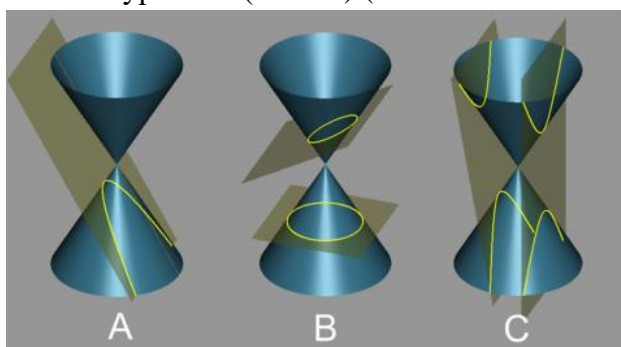
kde x, y, z jsou souřadnice libovolného bodu roviny ρ a koeficienty a, b, c, d jsou reálná čísla, pro něž platí alespoň jedna z nerovností $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ “.

Koeficienty a, b, c jsou souřadnicemi normálového vektoru roviny $\vec{n} = (a; b; c)$. Těchto normálových vektorů roviny ρ je nekonečně mnoho (Čermák a Červinková 2007).

Stejně jako pro obecnou rovnici roviny platí, že rovina má nekonečně mnoho obecných rovnic (Čermák a Červinková 2007).

Analytická geometrie kuželoseček

Kuželosečky jsou průnikem rotační kuželové plochy a roviny. Mezi kuželosečky patří kružnice, elipsa, parabola a hyperbola (obr. 43) (Kočandrle a Boček 1995).



Obrázek 43 - A-parabola, B-elipsa a kružnice, C-hyperbola,
zdroj: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Ku%C5%BEelose%C4%8Dka>

Kružnice

Pro kružnici máme definovanou **středovou rovnici kružnice**. Pokud pro tuto rovnici platí, že její střed je $S[0; 0]$ a poloměr je r , středová rovnice zní

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(Čermák a Červinková 2007).

V této rovnici jsou x a y souřadnicemi libovolného bodu $X[x; y]$ ležícího na kružnici. Výše uvedená rovnice ale platí pouze pro kružnice, jejichž střed je zároveň počátkem soustavy souřadnic. Pokud tato podmínka neplatí, střed kružnice označujeme jako $S[m; n]$ (obr. 44). Pro tento střed platí rovnice

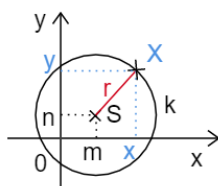
$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

(Kočandrle a Boček 1995).

Po úpravě středové rovnice získáme **obecnou rovnici kružnice**

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0,$$

$$\text{kde } p = m^2 + n^2 - r^2.$$

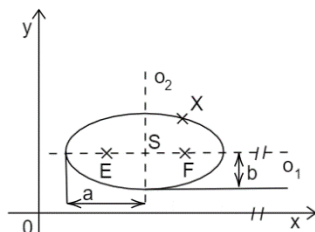


Obrázek 44 - Kružnice k ,
zdroj: podle Bočka a Kočandrleho (1995) vytvořil autor

Elipsa

Podle Kočandrleho a Bočka (1995, s. 156) definujeme elipsu (obr. 45) takto:

„V rovině jsou dány dva body E, F . Množina všech bodů X roviny, pro které se součet $|XE| + |XF|$ vzdáleností bodu X od bodů E, F rovná danému číslu většímu než $|EF|$, se nazývá **elipsa**. Body E a F se nazývají **ohniska elipsy**“.



Obrázek 45 - Elipsa,
zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

Střed elipsy S definujeme souřadnicemi $S[m; n]$. Libovolný bod ležící na elipse označujeme jako $X[x; y]$ a a, b jsou tzv. poloosami (Vošický 2004).

Následující vzorec je zápisem elipsy pomocí **středové rovnice elipsy** podle Vošického (2004):

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Tato rovnice platí pro elipsu jako na obrázku 7. Pokud je ale osa elipsy o_1 rovnoběžná s osou y (tj. elipsa připomíná vejce), středová rovnice je mírně odlišná.

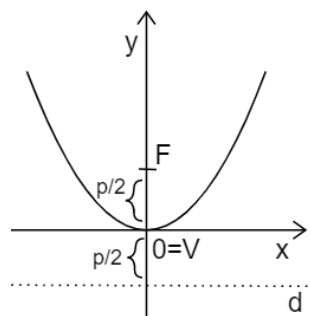
$$\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1$$

(Vošický 2004)

Pro elipsu se středem $S[0; 0]$ lze zapsat středovou rovnici jako $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
ev. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (Čermák a Červinková 2007).

Parabola

Parabolu popisujeme pomocí **vrcholové rovnice paraboly** (tab. 13). Tato rovnice je ale velmi rozdílná pro různé paraboly (Čermák a Červinková 2007).



Obrázek 46 - **Parabola**,
zdroj: podle Čermáka a Červinkové
(2007) vytvořil autor

Na obrázku 46 můžeme vidět parabolu s ohniskem F . Dále se zde objevuje řídicí přímka d . V je vrcholem paraboly a p je tzv. parametrem (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007).

Tabulka 13 - **Paraboly a jejich vrcholové rovnice**

Graf paraboly	Podmínky	Vrcholová rovnice paraboly
	$V[0; 0]; 2p > 0$ $d: x = -\frac{p}{2}; F\left[\frac{p}{2}; 0\right]$	$y^2 = 2px$
	$V[0; 0]; 2p > 0$ $d: x = \frac{p}{2}; F\left[-\frac{p}{2}; 0\right]$	$y^2 = -2px$
	$V[0; 0]; 2p > 0$ $d: y = -\frac{p}{2}; F\left[0; \frac{p}{2}\right]$	$x^2 = 2py$
	$V[0; 0]; 2p > 0$ $d: y = \frac{p}{2}; F\left[0; -\frac{p}{2}\right]$	$x^2 = -2py$

Zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor, obrázky vytvořil podle Čermáka a Červinkové (2007) autor

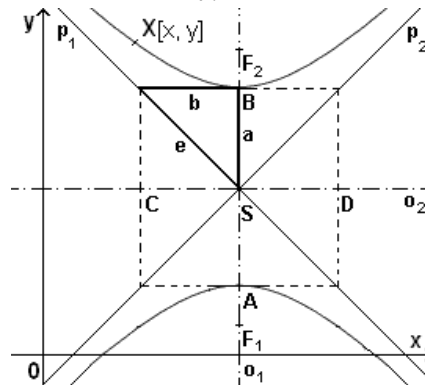
Pro parabolu s vrcholem $V[m; n]$ nahradíme ve vzorcích x a y .

$$x \rightarrow (x - m); \quad y \rightarrow (y - n)$$

(Vošický 2004)

Hyperbola

Graf hyperboly je ilustrován na obrázku 47.



Obrázek 47 - **Hyperbola I**,

zdroj: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Hyperbola>

Pro takovouto hyperbolu o středu $S[m; n]$, kde $X[x; y]$ je libovolný bod ležící na křivce hyperboly, existuje **středová rovnice hyperboly**

$$-\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1$$

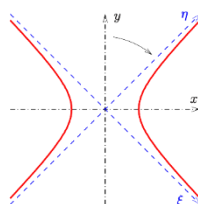
(Vošický 2004).

V tomto případě lze **asymptoty** hyperboly (na obrázku 9 značené p_1 a p_2) obecně zapsat jako $y - n = \pm \frac{a}{b}(x - m)$ (Vošický 2004).

Pro tvar hyperboly, jenž je uveden na obrázku 48, používáme středovou rovnici

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

a asymptoty zapisujeme jako $y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m)$. V případě, že je střed hyperboly $S[0; 0]$, dochází k dosazení čísla 0 za m a n . Tím je vzorec zjednodušen (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007).



Obrázek 48 - **Hyperbola II**, zdroj: <https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola>

2 Cíle práce a hypotézy

Cíle této práce jsou:

- C1 Vytvoření učebního textu a příkladových ilustrací obsahujících základy matematiky, které jsou potřebné k co neúplnějšimu pochopení fyzikálních popisů zobrazovacích metod.
- C2 Sestavení testu, který bude použit k ověření znalosti matematiky studentů oboru Radiologický asistent či jeho absolventů, a následné statistické vyjádření úrovně znalostí.

Práce také pracuje s hypotézami:

- H1 Aplikací teorie kurikulárního procesu lze popsat strukturu matematických základů zobrazovacích metod pro radiologické asistenty.
- H2a Komparací množinových struktur matematiky se složkami profilu radiologického asistenta lze popsat jednotlivé strukturní úrovně matematických základů pro radiologické asistenty.
- H2b Z hlediska potřeb a možností radiologických asistentů lze vybrat příkladové ilustrace z oblasti funkcí, diferenciálního počtu, integrálního počtu a počtu vektorového.
- H3 Znalosti respondentů v oblasti vymezených matematických základů zobrazovacích metod budou mít rozdělení blízké rozdělení normálnímu.

3 Metodika

Metodiku této práce je možné shrnout do 4 kroků:

- 1) Analýza současného vědeckého poznání v okruhu matematiky pro radiology.
- 2) Vytvoření edukačního textu a příkladových ilustrací na základě analýzy současného vědeckého systému, z hlediska teorie kurikulárního procesu vytvoření složky projektového kurikula.
 - Použité okruhy matematiky pro projektové kurikulum:
 - a) Systém elementárních funkcí
 - b) Diferenciální počet
 - c) Integrální počet
 - d) Vektorový počet
 - e) Analytická geometrie

- Z hlediska teorie kurikulárního procesu budou použity následující variantní formy kurikula:
 - a) Konceptuální kurikulum (vědecký systém matematiky elementárně sdělitelný studentům radiologické asistence)
 - b) Zamýšlené kurikulum (přizpůsobení sdělitelného systému matematiky potřebám a možnostem studentů radiologické asistence)
 - c) Projektové kurikulum (promítnutí struktury zamýšleného kurikula na strukturu edukačního textu jako výrazné složky projektového kurikula)
 - d) Implementované kurikulum 1 (příprava předkladatele bakalářské práce na zkoumání přiměřenosti vytvořeného edukačního textu vytvořením edukačního testu, který svou strukturou odráží strukturu edukačního textu)
 - e) Implementované kurikulum 2 (seznámení respondentů s edukačním textem a následná aplikace edukačního testu se statistickým vyhodnocením výsledků)
- 3) Vytvoření testu pro zjištění úrovně znalostí radiologických asistentů a studentů radiologické asistence.
- 4) Statistické vyjádření výsledků testu a jejich porovnání s normálním rozdělením.
 - Použité statistické metody:
 - a) Formulace statistického šetření
 - b) Škálování
 - c) Elementární statistické zpracování
 - d) Neparametrické testování

4 Výsledky

Aplikovaný kvantitativní výzkum, o němž podává zprávu předložená bakalářská práce, se v oblasti aplikace statistických analýz zaměřil na porovnání rozložení četnosti znalostí matematiky u radiologických asistentů a studentů oboru radiologické asistence s normálním rozdělením. V této oblasti jde o potvrzení či vyvrácení hypotézy H3: Znalosti respondentů v oblasti vymezených matematických základů zobrazovacích metod budou mít rozdělení blízké rozdělení normálnímu.

4.1 Statistické vyhodnocení testu

Tato část bakalářské práce bude statisticky vyjadřovat úroveň znalostí matematiky v rámci aplikované fyziky pro radiologickou asistenci. Hlavní otázkou, jež má být zodpovězena v této části výzkumu, je, zda lze nahradit rozložení odpovědí testu normálním Gaussovským rozdělením. Při potvrzení tohoto předpokladu bude možné přijmout hypotézu H3: Znalosti respondentů v oblasti vymezených matematických základů zobrazovacích metod budou mít rozdělení blízké rozdělení normálnímu. Vhodné statistické metody a postupy budou použity k potvrzení či zamítnutí této hypotézy.

Formulace statistického šetření

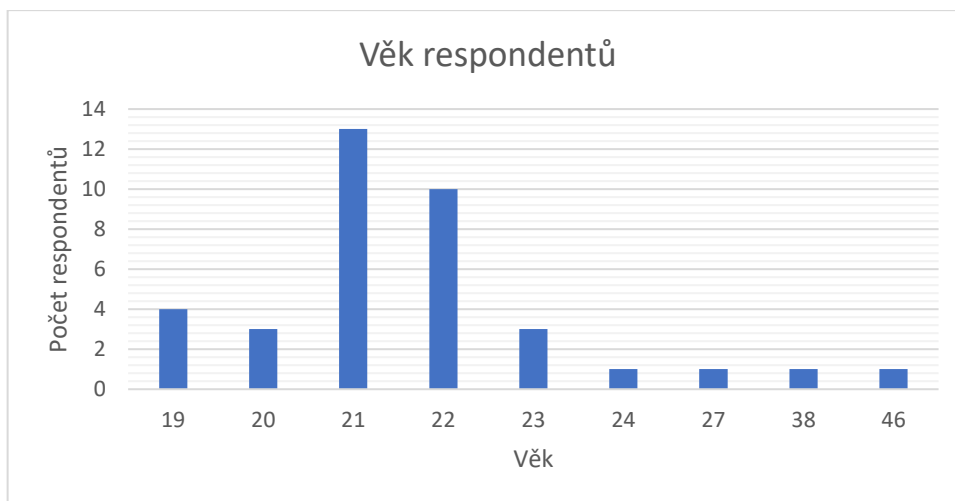
- Hromadný náhodný jev: úroveň znalostí vybraných matematických základů u radiologických asistentů a studentů oboru Radiologický asistent a Radiologická asistence.
- Statistická jednotka: radiologický asistent či student radiologické asistence.
- Statistický znak: úroveň znalostí vybraných matematických základů.
- Základní statistický soubor: radiologičtí asistenti či studenti radiologické asistence.
- Výběrový statistický soubor: 37 radiologických asistentů či studentů radiologické asistence, kteří vyplnili test.

(Záškodný a Záškodná 2016)

Grafické zobrazení odpovědí testu



Obrázek 49 - Grafické zobrazení počtu správných odpovědí respondentů, zdroj: vytvořil autor dle vlastního výzkumu



Obrázek 50 - Grafické zobrazení věku respondentů, zdroj: vytvořil autor dle vlastního výzkumu

Škálování

Vzhledem k počtu respondentů a intervalu správných odpovědí testu $\langle 4; 18 \rangle$ bylo použito kvantitativně metrické škálování a zvolené škály jsou $(-\infty; 6)$; $\langle 7; 9 \rangle$; $\langle 10; 12 \rangle$; $\langle 13; 15 \rangle$; $\langle 16; \infty \rangle$ (Záškodný a Záškodná 2016).

Elementární statistické zpracování

V tabulce 14 jsou uvedeny základní výpočty pro statistické zpracování.

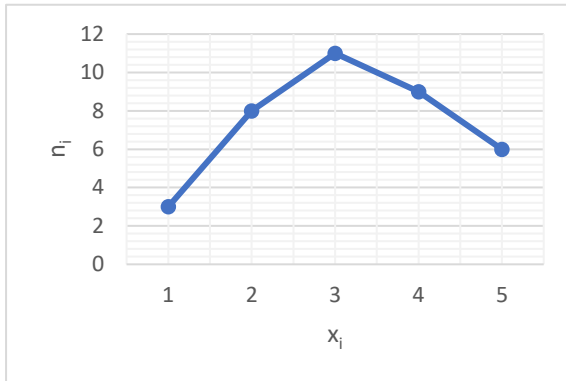
Tabulka 14 - Elementární statistické zpracování

x_i	n_i	n_i/n	$\sum n_i/n$	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$	$x_i^3 \cdot n_i$	$x_i^3 \cdot n_i$
1	3	0,08	0,08	3	3	3	3
2	8	0,22	0,30	16	32	64	128
3	11	0,30	0,60	33	99	297	891
4	9	0,24	0,84	36	144	576	2304
5	6	0,16	1	30	150	750	3750
	$\sum 37$	$\sum 1$		$\sum 118$	$\sum 428$	$\sum 1690$	$\sum 7076$

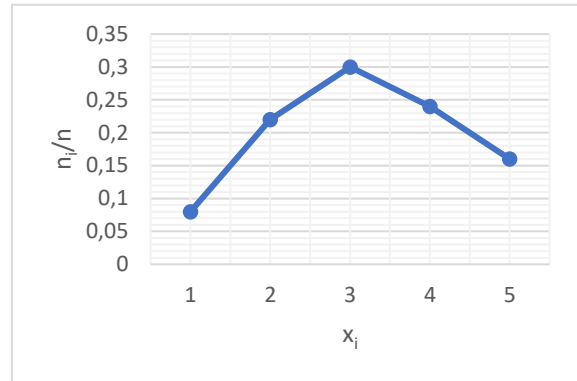
Zdroj: vytvořil autor dle vlastního výzkumu a Záškodného a Záškodné (2016)

$$x_1 = (-\infty; 6); x_2 = \langle 7; 9 \rangle; x_3 = \langle 10; 12 \rangle; x_4 = \langle 13; 15 \rangle; x_5 = \langle 16; \infty \rangle$$

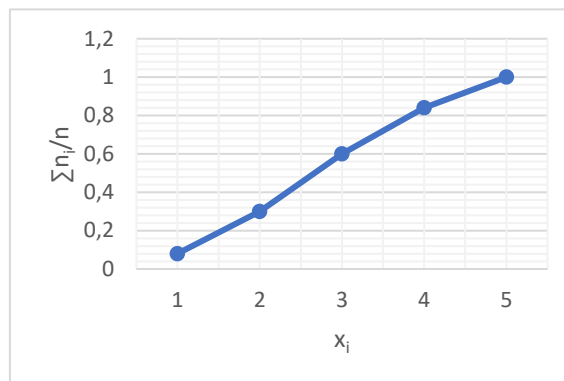
Grafické vyjádření (obr. 51, 52 a 53)



Obrázek 51 – Graf empirického rozdělení absolutních četností, zdroj: vytvořil autor dle vlastního výzkumu



Obrázek 52 – Graf empirického rozdělení relativních četností, zdroj: vytvořil autor dle vlastního výzkumu



Obrázek 53 – Graf empirického rozdělení kumulativních četností, zdroj: vytvořil autor dle vlastního výzkumu

Empirické parametry

Empirické parametry popisují povahu statistického souboru (Záškodný a Záškodná 2016).

Obecné momenty O_r :

Vztah pro obecný moment r-tého řádu: $O_r(x) = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^r$

$$O_1(x) = \frac{1}{n} \sum n_i x_i = \frac{3 \times 1 + 8 \times 2 + 11 \times 3 + 9 \times 4 + 6 \times 5}{37} = 3,19$$

Obecný moment O_1 je váženým aritmetickým průměrem (Záškodný a Záškodná 2016). Aritmetický průměr z prvků škály se rovná 3,19; tj aritmetický průměr z hodnot statistického znaku je 10,57.

$$O_2(x) = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^2 = \frac{3 \times 1 + 8 \times 2^2 + 11 \times 3^2 + 9 \times 4^2 + 6 \times 5^2}{37} = 11,57$$

$$O_3(x) = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^3 = \frac{3 \times 1 + 8 \times 2^3 + 11 \times 3^3 + 9 \times 4^3 + 6 \times 5^3}{37} = 45,68$$

$$O_4(x) = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^4 = \frac{3 \times 1 + 8 \times 2^4 + 11 \times 3^4 + 9 \times 4^4 + 6 \times 5^4}{37} = 191,24$$

(Záškodný a Záškodná 2016)

Centrální momenty C_r :

Vztah pro centrální moment r -tého řádu: $C_r(x) = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - O_1)^r$

$$C_2(x) = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - O_1)^2 = O_2 - O_1^2 = 11,57 - 3,19^2 = 1,39$$

Centrální moment C_2 je empirický rozptyl.

$$C_3(x) = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - O_1)^3 = O_3 - 3O_2O_1 + 2O_1^3 = 45,68 - 3 \times 11,57 \times 3,19 + 2 \times 3,19^3 = -0,12$$

$$C_4(x) = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - O_1)^4 = O_4 - 4O_3O_1 + 6O_2O_1^2 - 3O_1^4 = 191,24 - 4 \times 45,68 \times 3,12 + 6 \times 11,57 \times 3,12^2 - 3 \times 3,12^4 = 12,64$$

(Záškodný a Záškodná 2016)

Odmocněním empirického rozptylu získáme směrodatnou odchylku S_x , jež ukazuje, jakou výpovědní hodnotu má aritmetický průměr (Záškodný a Záškodná 2016).

$$S_x = \sqrt{C_2} = \sqrt{1,39} = 1,18$$

Pokud je variační koeficient V v intervalu $\langle 0,2; 0,9 \rangle$, můžeme předpokládat, že výsledné rozložení bude blízké Gaussově křivce. Variační koeficient v procentech udává, kolik procent z aritmetického průměru tvoří směrodatná odchylka (Záškodný a Záškodná 2016).

$$V = \frac{S_x}{O_1} = \frac{1,18}{3,12} = 0,38$$

$$\frac{S_x}{O_1} \times 100 = 38 \%$$

Normované momenty N_r :

Vztah pro normovaný moment r -tého řádu: $N_r(x) = \sum \frac{n_i}{n} \times \left(\frac{x_i - O_1}{S_x} \right)^r$

$$N_3 = \frac{C_3}{C_2 \sqrt{C_2}} = \frac{-0,12}{1,39 \times \sqrt{1,39}} = -0,07$$

Normovaný moment N_3 je koeficient šikmosti. V tomto případě je koeficient záporný a to značí, že prvky škály ležící vpravo od aritmetického průměru mají vyšší četnosti. Graf empirického rozdělení absolutních četností je tedy zešikmen doprava (Záškodný a Záškodná 2016).

$$N_4 = \frac{C_4}{C_2^2} = \frac{12,64}{1,39^2} = 6,54$$

Normovaný moment N_4 je koeficient špičatosti. Tzv. excés porovnává normované normální rozdělení s konkrétním empirickým rozdělením. Kladný excés ukazuje na špičatost větší než u normovaného normálního rozdělení. Ideální koeficient špičatosti má hodnotu 3 (Záškodný a Záškodná 2016).

$$\text{Excés: } N_4 - 3 = 6,54 - 3 = 3,54$$

(Záškodný a Záškodná 2016)

Neparametrické testování

V tabulce 15 jsou uvedeny podstatné veličiny pro neparametrické testování.

Tabulka 15 - Potřebné výsledky deskriptivní statistiky

Absolutní četnost n_i	„Úsečka“ relativní četnosti n_i
3	0,08
8	0,22
11	0,30
9	0,24
6	0,16

Zdroj: vytvořil autor dle vlastního výzkumu a Záškodného a Záškodné (2016)

$$O_1 = 3,19; S_x = 1,18$$

Intervalové rozdělení četností (tab. 16)

Tabulka 16 - Intervalové rozdělení četností

x_i	Interval	n_i
1	$(-\infty; 6)$	3
2	$\langle 7; 9 \rangle$	8
3	$\langle 10; 12 \rangle$	11

4	$\langle 13; 15 \rangle$	9
5	$\langle 16; \infty \rangle$	6

Zdroj: vytvořil autor dle vlastního výzkumu a Záškodného a Záškodné (2016)

Výpočet normovaných hodnot u_i

Normované hodnoty u_i jsou hodnoty pro horní mez x_i příslušného intervalu intervalového rozdělení četností (Záškodný a Záškodná 2016).

$$u_i = \frac{x_i - O_1}{S_x} \quad (x_1 = 1,5; x_2 = 2,5; x_3 = 3,5; x_4 = 4,5; x_5 = \infty)$$

$$u_1 = \frac{x_1 - O_1}{S_x} = \frac{1,5 - 3,19}{1,18} = -1,43$$

$$u_2 = \frac{x_2 - O_1}{S_x} = \frac{2,5 - 3,19}{1,18} = -0,58$$

$$u_3 = \frac{x_3 - O_1}{S_x} = \frac{3,5 - 3,19}{1,18} = 0,26$$

$$u_4 = \frac{x_4 - O_1}{S_x} = \frac{4,5 - 3,19}{1,18} = 1,11$$

$$u_5 = \frac{x_5 - O_1}{S_x} = \frac{\infty - 3,19}{1,18} = \infty \quad (\text{Záškodný a Záškodná 2016})$$

Přechod od integrací k Laplaceovým funkcím

Laplaceovy funkce jsou distribučními funkcemi normovaného normálního rozdělení (Záškodný a Záškodná 2016).

$$p_1 = \int_{-\infty}^{1,5} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{-1,43} \rho(u) du = F(-1,43)$$

$$p_2 = \int_{1,5}^{2,5} \rho(x) dx = \int_{-1,43}^{-0,58} \rho(u) du = F(-0,58) - F(-1,43)$$

$$p_3 = \int_{2,5}^{3,5} \rho(x) dx = \int_{-0,58}^{0,26} \rho(u) du = F(0,26) - F(-0,58)$$

$$p_4 = \int_{3,5}^{4,5} \rho(x) dx = \int_{0,26}^{1,11} \rho(u) du = F(1,11) - F(0,26)$$

$$p_5 = \int_{4,5}^{\infty} \rho(x) dx = \int_{1,11}^{\infty} \rho(u) du = F(\infty) - F(1,11) = 1 - F(1,11)$$

(Záškodný a Záškodná 2016)

Výpočet zavedených ploch p_i pod normovaným normálním rozdělením

$$p_1 = F(-1,43) = 1 - F(1,43) = 1 - 0,923\ 64 = 0,08$$

$$p_2 = F(-0,58) - F(-1,43) = 1 - F(0,58) - 1 - F(1,43) = \\ = (1 - 0,719\ 04) - (1 - 0,923\ 64) = 0,280\ 96 - 0,076\ 36 = 0,20$$

$$p_3 = F(0,26) - F(-0,58) = F(0,26) - 1 - F(0,58) = 0,602\ 57 - (1 - 0,719\ 04) = \\ = 0,32$$

$$p_4 = F(1,11) - F(0,26) = 0,866\ 50 - 0,602\ 57 = 0,26$$

$$p_5 = 1 - F(1,11) = 1 - 0,866\ 50 = 0,13$$

(Záškodný a Záškodná 2016)

Tabulkový zápis dosud vypočítaných údajů (s doplněním np_i pro rozsah $n = 37$)

Znalost hodnot p_i a np_i (tab. 17) již umožňuje použití tzv. χ^2 -testu dobré shody. χ^2 -test dobré shody označujeme také jako test normality a jeho cílem je určit, zda určité rozdělení je blízké rozdělení normovanému normálnímu (Gaussovskému) (Záškodný a Záškodná 2016).

Tabulka 17 - Vypočítané údaje s doplněním np_i

x_i	Interval	n_i	u_i	$F(u_i)$	p_i	np_i
1	$(-\infty; 6)$	3	-1,43	0,08	0,08	2,96
2	$\langle 7; 9 \rangle$	8	-0,58	0,28	0,20	7,40
3	$\langle 10; 12 \rangle$	11	0,26	0,60	0,32	11,84
4	$\langle 13; 15 \rangle$	9	1,11	0,87	0,26	9,62
5	$\langle 16; \infty \rangle$	6	∞	1	0,13	4,81

Zdroj: vytvořil autor dle vlastního výzkumu a Záškodného a Záškodné (2016)

Výpočet χ_{exp}^2

χ_{exp}^2 je experimentální hodnotou χ^2 -testu dobré shody. K výpočtu podle vzorce uvedeného níže použijeme hodnot v tabulce 18 (Záškodný a Záškodná 2016).

$$\chi_{exp}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

Tabulka 18 - Experimentální hodnoty pro jednotlivá x_i

x_i	n_i	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	3	2,96	0
2	8	7,40	0,05
3	11	11,84	0,08
4	9	9,62	0,04
5	6	4,81	0,3

Zdroj: vytvořil autor dle vlastního výzkumu a Záškodného a Záškodné (2016)

$$\chi_{exp}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 0 + 0,05 + 0,08 + 0,04 + 0,3 = 0,47$$

(Záškodný a Záškodná 2016)

Nalezení χ_{teor}^2

Pro nalezení χ_{teor}^2 uijeme k , které označuje počet intervalů intervalového rozdělení četnosti. Dále je ve vzorci uvedeno r , jež značí počet teoretických parametrů normálního rozdělení. Jako hladinu významnosti volíme $\alpha = 0,05$ (Záškodný a Záškodná 2016).

$$\chi_{teor}^2 = \chi_{k-r-1}^2$$

$$k = 5$$

$$r = 2$$

Hladina statistické významnosti $\alpha = 0,05$

$$\chi_2^2 = 5,99$$

(Záškodný a Záškodná 2016)

Přijetí hypotézy H3

Pokud experimentální hodnota χ_{exp}^2 nepatří do kritického intervalu W, je možné empirické rozdělení nahradit normálním rozdělením (na hladině statistické významnosti $\alpha = 0,05$) (Záškodný a Záškodná 2016).

$$\chi_{exp}^2 = 0,47; \chi_{teor}^2 = 5,99$$

$$\chi_{exp}^2 < \chi_{teor}^2$$

$$W = (\chi_{teor}^2(0,05); \infty) = (5,99; \infty)$$

$$\chi_{exp}^2 \notin W$$

(Záškodný a Záškodná 2016)

Na hladině statistické významnosti $\alpha = 0,05$ lze empirické rozdělení četnosti u zkoumání znalostí radiologické matematiky nahradit normálním rozdělením (Gaussovou křivkou). To znamená, že lze přijmout hypotézu H3 (Záškodný a Záškodná 2016).

Přijetí hypotéz H1, H2a, H2b

Přijetí hypotézy H3 ukázalo, že vytvořený edukační text je přiměřený potřebám a možnostem studentů radiologické asistence – aplikabilita teorie kurikulárního procesu byla potvrzena (mohla být přijata hypotéza H1). Vyhodnocení výsledků edukačního testu ukázalo, že komparace matematických struktur se strukturami složek profilu radiologického asistenta vedla v oblasti textové i příkladové k výsledkům optimálním pro studium radiologické asistence (mohly být přijaty hypotézy H2a, H2b).

5 Diskuze

5.1 Vybraná edukační teorie

Vybranou edukační teorií byla teorie kurikulárního procesu. Kurikulární proces se skládá z pěti variantních forem kurikula.

Konceptuální kurikulum je konceptem toho, co by mělo vzdělávání obsahovat.

Zamýšlené kurikulum již pojednává o plánovaném obsahu učiva a osnov. Jedná se o řešení problémů přiměřené možnostem a potřebám adresátů edukace. Pro tuto práci jsem se inspirovala osnovou Záškodného (2018) o matematickýchokruzích, které je nutno znát i pro edukaci radiologické fyziky.

- 1) Systém elementárních funkcí:
 - a) číselné množiny,
 - b) polynomičké funkce,
 - c) goniometrické funkce,
 - d) exponenciální a logaritmické funkce, Eulerovo číslo,
 - e) lineárně lomená funkce,
 - f) vlastnosti funkcí.
- 2) Diferenciální počet:
 - a) limita funkce, spojitost funkce,
 - b) definice derivace funkce jedné proměnné, derivace elementárních funkcí,
 - c) derivace součinu a podílu funkcí, derivace složené funkce,
 - d) funkce více proměnných, parciální derivace, úplný diferenciál,
 - e) průběh funkce, Taylorův a Maclaurinův rozvoj funkce, diferenciální rovnice.
- 3) Integrální počet:
 - a) plocha omezená jednoduchým grafem funkce a geometrický výpočet velikosti plochy,
 - b) neurčitý integrál a primitivní funkce, určitý integrál,
 - c) integrace elementárních funkcí,
 - d) integrace per partes, integrace substitucí,
 - e) výpočty ploch, objemů a délek křivek užitím integrálního počtu.
- 4) Vektorový počet:
 - a) definice vektoru, souřadnice a velikost vektoru, jednotkový, opačný a nulový vektor,
 - b) operace s vektory,
 - c) polohový vektor, jednotkové vektory souřadnicových os,
 - d) vektorová funkce a její derivace, derivace polohového vektoru podle času,
 - e) vektorová funkce a její integrace, integrace vektorové funkce zrychlení a vektorové funkce rychlosti podle času.
- 5) Analytická geometrie:
 - a) analytická geometrie přímky,
 - b) analytická geometrie kuželoseček.

Projektové kurikulum je v tomto případě edukační text. Jde o obsah matematiky promítnutý především do učebního textu a podložený maticovým modelem – v hlavní diagonále matice jsou v lineárním sledu obvykle umístěny kapitoly učebnice.

Implementované kurikulum 1 je obsah matematiky promítnutý do přípravy na zprostředkování poznatků obsažených v projektovém kurikulu.

Implementované kurikulum 2 odráží osvojený obsah výuky matematiky adresáty v průběhu výuky.

Dosažené kurikulum je obsahem vzdělávání fungujícího na straně subjektů edukace.

Jednotlivé části této bakalářské práce naplňují různé variantní formy kurikula:

- učební text je zprostředkován adresátům (implementované kurikulum - 1),
- vytvořen edukační test v alternativní podobě (implementované kurikulum-2),
- edukační test položen adresátům edukace (implementované kurikulum-2),
- výsledky aplikace testu zpracovány statistickými metodami (ověřování projektového kurikula),
- výzkumný cíl splněn v případě Gaussovské distribuce výsledků testu (verifikované projektové kurikulum).

5.2 Výsledky statistického zpracování testu

Pomocí použitých statistických postupů bylo zjištěno, že empirické rozdělení odpovědí testu lze nahradit normálním rozdělením. Vzhledem k epidemiologické situaci bylo nutné testy společně s upraveným edukačním textem rozeslat online – mohlo tedy dojít ke zkreslení výsledků. Pokud bychom však výsledky považovali za stoprocentně validní, vypovídaly by o tom, že matematické znalosti respondentů mají gaussovské rozdělení. Skutečností, která také mohla zásadně ovlivnit výsledky, může být doba studování edukačního textu před vyplněním testu. Tuto dobu nebylo totiž možné sjednotit z důvodu distančního testování.

Z pohledu výhrad, spojených s epidemiologickou situací, je možné připustit, že navazující výzkumy by mohly výzkumný projekt verifikovat také ve formě prezenčních aplikací.

Lze konstatovat, že distanční podoba výzkumného projektu vedla k potvrzení výzkumných hypotéz v operacionalizované podobě, tj. zkoumání souvislostí mezi

5 výzkumnými proměnnými „variantní formy kurikula“, „znalosti respondentů“, „množinové struktury matematiky“, „struktura složek studia radiologické asistence“, „typy teoretických rozdělení“. Uvedených 5 výzkumných proměnných bylo součástí implikovaných vazeb v rámci formulací jednotlivých hypotéz.

Hypotéza H1 zkoumala vazby mezi výzkumnými proměnnými „variantní formy kurikula“ a „množinové struktury matematiky“.

Hypotézy H2a a H2b zkoumaly vazby mezi výzkumnými proměnnými „množinové struktury matematiky“ a „struktura složek studia radiologické asistence“.

Hypotéza H3 zkoumala vazby mezi výzkumnými proměnnými „znalosti respondentů“ a „typy teoretických rozdělení“.

6 Závěr

V předložené bakalářské práci bylo pomocí kurikulárního procesu popsáno několik elementárních okruhů matematiky, které byly vybrány vzhledem k možnostem a potřebám radiologické asistence a také vzhledem ke struktuře aplikované fyziky pro radiologickou asistenci. Tyto okruhy byly shrnuty do edukačního textu a příkladových ilustrací. Dle tohoto edukačního textu byl vytvořen modifikovaný edukační text, jenž byl poskytnut studentům radiologické asistence a radiologickým asistentům společně s testem, který respondenti po prostudování edukačního textu vyplnili. Následně byla zkoumána úroveň matematických znalostí respondentů.

6.1 Zhodnocení splnění cílů a hypotéz

Cíle:

- C1 Vytvoření učebního textu a příkladových ilustrací obsahujících základy matematiky, které jsou potřebné k co neúplnějšimu pochopení fyzikálních popisů zobrazovacích metod.
 - Cíl C1 byl splněn vytvořením edukačního textu (viz kap. 1.2–1.7) a sestavením příkladových ilustrací (viz přílohy).
- C2 Sestavení testu, který bude použit k ověření znalosti matematiky studentů oboru Radiologický asistent či jeho absolventů, a následné statistické vyjádření úrovně znalostí.
 - Tento cíl byl naplněn. Byl sestaven test o 20 otázkách, který byl následně položen respondentům (viz přílohy).

Hypotézy:

- H1 Aplikací teorie kurikulárního procesu lze popsat strukturu matematických základů zobrazovacích metod pro radiologické asistenty.
 - Tuto hypotézu lze přijmout. K popisu struktury bylo využito kurikulárního procesu.
- H2a Komparací množinových struktur matematiky se složkami profilu radiologického asistenta lze popsat jednotlivé strukturní úrovně matematických základů pro radiologické asistenty.
 - Hypotézu H2a je možné také přijmout z důvodu sepsání edukačního textu (viz kap. 1.2-1.7).
- H2b Z hlediska potřeb a možností radiologických asistentů lze vybrat příkladové ilustrace z oblasti funkcí, diferenciálního počtu, integrálního počtu a počtu vektorového.
 - Můžeme přijmout i hypotézu H2b. Vybrané příkladové ilustrace jsou uvedeny v přílohách.
- H3 Znalosti respondentů v oblasti vymezených matematických základů zobrazovacích metod budou mít rozdělení blízké rozdělení normálnímu.
 - Vzhledem k výsledku statistického zpracování testu (viz 4.1) lze přijmout i hypotézu H3. Neparametrické testování totiž ukázalo na skutečnost, že rozdělení četností odpovědí je blízká normálnímu Gaussovskému rozdělení.

V bakalářské práci je uveden edukační text, který obsahuje elementární matematiku pro radiologickou asistenci, společně s příkladovými ilustracemi. Tyto části byly vytvořeny pomocí kurikulárního procesu analýzou současného vědeckého systému. Vědecký systém matematiky elementárně sdělitelný radiologické asistenci (uvedený v teoretické části bakalářské práce) by mohl sloužit pro budoucí lektory matematiky v rámci radiologické asistence. Edukační text a test (viz Přílohy) by mohly být použity jako návod pro výklad v rámci konkrétní prezenční nebo distanční výuky radiologické asistence.

7 Seznam použitých zdrojů

1. BAUER, Luboš. *Matematika v ekonomii a ekonomice*. Praha: Grada, 2015. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-4419-3.
2. BERÁNEK, Ladislav, Nora PILECKÁ a Jan SINGER. *Vybrané kapitoly z aplikované matematiky: (doplňkové texty pro posluchače studijního oboru "Ochrana obyvatelstva se zaměřením na CBRNE")*. České Budějovice, 2007.
3. BUŠEK, Ivan a Emil CALDA. *Matematika pro gymnázia*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-366-0.
4. BYLINSKI, Czesław. The Complex Numbers. *JOURNAL OF FORMALIZED MATHEMATICS* [online]. 1990, **1990**(2), 1 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <http://mizar.uwb.edu.pl/JFM/pdf/complex1.pdf>
5. ČERMÁK, Pavel a Petra ČERVINKOVÁ. *Odmaturuj! z matematiky 1*. Vyd. 4. Brno: Didaktis, 2007. Odmaturuj! ISBN 978-80-7358-102-2.
6. ČERMÁK, Pavel. *Odmaturuj! z matematiky 2: [základy diferenciálního a integrálního počtu]*. Brno: Didaktis, 2004. Odmaturuj! ISBN 80-86285-84-7.
7. DAWKINS, Paul. Calculus with Vector Functions. *Paul's Online Notes* [online]. 2020 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calciiii/VectorFcnsCalculus.aspx>
8. DOŠLÁ, Zuzana a Petr LIŠKA. *Matematika pro nematematické obory: s aplikacemi v přírodních a technických vědách*. Praha: Grada Publishing, 2014. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-5322-5.
9. GREEN, D. R., Martin C. HARRISON a J. P. WARD. *Differentiation of Vectors* [online]. 2008 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: https://learn.lboro.ac.uk/archive/olmp/olmp_resources/pages/workbooks_1_50_jan2008/Workbook12/12_5_diffrentiatn_vectors.pdf
10. HAHN, Liang-shin. *Complex Numbers and Geometry* [online]. Providence: MAA PRESS, 1994 [cit. 2021-04-19]. ISBN 978-1-4704-5182-0. Dostupné z: https://books.google.cz/books?hl=cs&lr=&id=eBjHDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR7&dq=complex+numbers+&ots=mPLRw0_WaI&sig=KbnRZnkHlk9RZRg3XvJc0BbAzVc&redir_esc=y#v=onepage&q=complex%20numbers&f=false

11. HESTERIC, Roman. Fyzikální význam derivace. *Priklady.eu* [online]. 2008 - 2021 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <https://www.priklady.eu/cs/matematika/derivace/fyzikalni-vyznam-derivace.alej>
12. HOUSKA, Jan. *Matematika pro 9. ročník základní školy a nižší třídy gymnázia: aritmetika a algebra : učební text*. Praha: Fortuna, 1991. ISBN 80-85298-23-6.
13. HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.
14. HUGHES-HALLETT, Deborah. *The math workshop : elementary functions*. New York: W. W. Norton & Company, 1980. ISBN 0-393-09033-7.
15. ISIBALO. 17 - Diferenciál a přibližné vyjádření (MAT - Diferenciální počet funkcí více proměnných). In: *Youtube* [online]. 2017 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=HmwMSPz8058>. (video).
16. KAŇKA, Miloš. *Matematické praktikum: sbírka řešených příkladů z matematiky pro studenty vysokých škol*. Praha: Ekopress, 2010. ISBN 978-80-86929-65-1.
17. KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-390-5.
18. KOLISKO, Pavel. *Rovnice, nerovnice a průběh funkcí: sbírka řešených příkladů pro střední školy s programem pro zobrazování funkcí*. Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-403-2.
19. KRYNICKÝ, Martin. Smíšený součin. *Realisticky.cz* [online]. 2020 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/07%20Analytick%C3%A1%20geometrie/02%20Vektory/14%20Sm%C3%AD%C5%A1en%C3%BD%20sou%C4%8Din.pdf>
20. KUBEN, Jaromír a Pavlína RAČKOVÁ. *Numerika: Vektory a analytická geometrie* [online]. 2014 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: file:///C:/Users/jelin/OneDrive/Documents/vek_n.pdf
21. KURÁŇOVÁ, Silvie a Jan VONDRA. *Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek* [online]. 2008 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps09/sbirka/web/sbirka/interaktivni-sbirka_Kap4.pdf

22. KURFÜRST, Petr. Parciální a směrové derivace, úplný diferenciál. *Počtení praktikum* [online]. Masarykova univerzita, 2017a [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js17/pocetni_praktikum/web/ch05.html
23. KURFÜRST, Petr. Rozvoj funkce jedné proměnné. *Počtení praktikum* [online]. Masarykova univerzita, 2017b [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js17/pocetni_praktikum/web/ch08.html
24. MAŇÁK, Josef, Tomáš JANÍK a Vlastimil ŠVEC. *Kurikulum v současné škole*. Brno: Paido, 2008. Pedagogický výzkum v teorii a praxi. ISBN 978-80-7315-175-1.
25. MAŘÍK, Robert. *Parciální derivace* [online]. 2006 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~pribylova/parc-der-cz.pdf>
26. MAŘÍK, Robert. Taylorův polynom. *Matematika (nejen) pro nábytkáře a krajináře* [online]. 2007-2012 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <http://user.mendelu.cz/marik/mat-web/mat-webse4.html#x9-60004>
27. MAŘÍK, Robert. *Diferenciální rovnice prvního řádu* [online]. 2014-2019a [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: http://user.mendelu.cz/marik/wiki/am/slidy/odr_1/index_h.html
28. MAŘÍK, Robert. *Parciální derivace* [online]. 2014-2019b [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: http://user.mendelu.cz/marik/wiki/am/slidy/derivace/index_h.html
29. NEDVĚD, Přemysl. *Taylorův rozvoj* [online]. 2019 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: http://84.242.77.122/_uc%282ebnice_CS/Matematicka_analyza/Diferencialni_pocet/Tayloruv_rozvoj/index.htm
30. ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-357-8.
31. PETRÁŠKOVÁ, Vladimíra a Eva ZMEŠKALOVÁ. *Algebraické funkce*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2005. ISBN 80-7040-825-1.
32. PILECKÁ, Nora. *Vybrané kapitoly z matematiky: studijní materiál pro posluchače Zdravotně sociální fakulty Jihočeské univerzity*. Praha: Manus, 2004. ISBN 80-86571-06-8.
33. RUSŇÁK, Karel. *Kinematika* [online]. 2006 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <https://kfy.zcu.cz/export/sites/kfy/dokumenty/FYI1/kin.hm.b.pdf>
34. STRNAD, Václav. Logaritmické funkce. *Matematika pro střední školy* [online]. 2013a [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <http://www.funkce.eu/logaritmicna.php>

35. STRNAD, Václav. Vlastnosti funkcí. *Matematika pro střední školy* [online]. 2013b [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <http://www.funkce.eu/vlastnosti.php>
36. VOŠICKÝ, Zdeněk. *Matematika v kostce*. 3. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2004. V kostce (Fragment). ISBN 80-7200-964-8.
37. WEST, Matthew. Calculus and vectors. *Dynamics* [online]. 2012-2015 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <https://dynref.engr.illinois.edu/rvc.html>
38. ZÁŠKODNÝ, Přemysl. *Kurikulární proces fyziky (aplikace edukačního data miningu)*. 3. vyd. Praha: Curriculum, 2015. ISBN 978-80-87894-04-0.
39. ZASKODNY, Premysl. Algorithm of Problem Solving in Educational Data Mining Approach. *Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics* [online]. 2021, **19**(1) [cit. 2021-04-19]. ISSN 1690-4524. Dostupné z: <http://www.iiisci.org/Journal/SCI/FullText.asp?var=&id=IP127LL21>
40. ZÁŠKODNÝ, Přemysl. *Přehled základů teoretické fyziky (s aplikací na radiologii)*. 3. dopl. vyd. Praha: Curriculum, 2018. ISBN 978-80-87894-17-0.
41. ZÁŠKODNÝ, Přemysl a Helena ZÁŠKODNÁ. *Vybrané aplikace statistiky a pravděpodobnosti*. Praha: Curriculum, 2018. ISBN 978-80-87894-18-7.
42. ZINDULKA, Ondřej. *Funkce více proměnných* [online]. 2004 [cit. 2021-04-19]. Dostupné z: <https://mat.fsv.cvut.cz/zindulka/texts/FceViceProm.pdf>

8 Seznam obrázků a tabulek

Obrázek 1 – Absolutní hodnota reálného čísla a	18
Obrázek 2 – Zobrazení uspořádaných dvojic.....	20
Obrázek 3 - Goniometrický tvar komplexního čísla.....	21
Obrázek 4 - Graf funkce $1/4x$	22
Obrázek 5 - Inverzní funkce I	22
Obrázek 6 - Inverzní funkce II	22
Obrázek 7 - Perioda funkce sinus	23
Obrázek 8 - Graf funkce x na třetí	24
Obrázek 9 - Graf funkce x na druhou	24
Obrázek 10 - Grafy funkcí omezených zdola nebo shora.....	24
Obrázek 11 - Graf lineární funkce pro $a>0$	25
Obrázek 12 - Graf konstantní funkce pro $a=0$, tedy $y=b$	25
Obrázek 13 - Graf lineární funkce pro $a<0$	25
Obrázek 14 - Graf kvadratické funkce pro $a>0$	26
Obrázek 15 - Graf kvadratické funkce pro $a<0$	26
Obrázek 16 - Grafy exponenciální a logaritmické funkce se stejným základem pro $a>1$	26
Obrázek 17 - Grafy dvou exponenciálních funkcí	26
Obrázek 18 - Grafy funkcí sinus (plná čára) a kosinus (čárkovaně).....	28
Obrázek 19 - Grafy funkcí tangens (plná čára) a kotangens (čárkovaně).....	28
Obrázek 20 - Graf funkce $y=(2x-5)/(x-1)$	30
Obrázek 21 - Grafy nepřímé úměrnosti; plnou čarou graf funkce $y=1/x$, tedy pro $k>0$; čárkovaně graf funkce $y= -1/x$, tedy pro $k<0$	30
Obrázek 22 - Okolí bodu a a $f(a)$	31
Obrázek 23 - Graf funkce z příkladu 2	32
Obrázek 24 - Grafické zobrazení derivace - nalezení tečny	33
Obrázek 25 - Parciální derivace funkce f v bodě $[2,-2]$ jsou derivace křivek vzniklých na řezech rovinami $x=2$ a $y=-2$	35
Obrázek 26 - Konvexní funkce.....	39
Obrázek 27 - Konkávní funkce	39
Obrázek 28 - Vybrané Taylorovy polynomy pro funkci $y=\sin(x)$	40
Obrázek 29 - Plocha P – „podgraf“	41

Obrázek 30 - Dolní integrální součet	42
Obrázek 31 - Horní integrální součet	42
Obrázek 32 - Určitý integrál	45
Obrázek 33 - Orientovaná úsečka AB.....	47
Obrázek 34 - Vektorový součin pro vektory a a b	48
Obrázek 35 - Rovnoběžnostěn určený vektory u , v a w	49
Obrázek 36 - Polohový vektor v prostoru.....	49
Obrázek 37 - Jednotkové vektory souřadnicových os	50
Obrázek 38 - Znázornění dráhy (vektor r) v soustavě souřadnic.....	50
Obrázek 39 - Přímka p určená bodem A a vektorem u	52
Obrázek 40 - Přímka p určená bodem A a normálovým vektorem n	52
Obrázek 41 - Směrnice přímky α	53
Obrázek 42 - Úsek přímky	53
Obrázek 43 - A-parabola, B-elipsa a kružnice, C-hyperbola.....	55
Obrázek 44 - Kružnice k	55
Obrázek 45 - Elipsa.....	56
Obrázek 46 - Parabola	57
Obrázek 47 - Hyperbola I.....	58
Obrázek 48 - Hyperbola II	58
Obrázek 49 - Grafické zobrazení počtu správných odpovědí respondentů.....	61
Obrázek 50 - Grafické zobrazení věku respondentů	62
Obrázek 51 - Graf empirického rozdělení absolutních četností	63
Obrázek 52 - Graf empirického rozdělení relativních četností.....	63
Obrázek 53 - Graf empirického rozdělení kumulativních četností	63
Obrázek 54 - Graf funkce z příkladu 2 a).....	82
Obrázek 55 - Graf funkce z příkladu 2 b).....	82
Obrázek 56 - Grafy funkcí z příkladu 3.....	82
Obrázek 57 - Graf funkce z příkladu 6	84
Obrázek 58 - Graf funkce z příkladu 10	86
Tabulka 1 - Vennovy množinové diagramy	12
Tabulka 2 - Operace s přirozenými čísly	13
Tabulka 3 - Operace s celými čísly	14
Tabulka 4 - Operace s racionálními čísly.....	15

Tabulka 5 - Intervaly	18
Tabulka 6 - Vlastnosti funkce sinus a kosinus	27
Tabulka 7 - Vlastnosti funkce tangens a kotangens	28
Tabulka 8 - Derivace elementárních funkcí	34
Tabulka 9 - Vzorce pro neurčitý integrál	43
Tabulka 10 - Aplikace integrálního počtu	46
Tabulka 11 - Vybrané operace s vektory	47
Tabulka 12 - Pomůcka k vektorovému součinu	48
Tabulka 13 - Paraboly a jejich vrcholové rovnice	57
Tabulka 14 - Elementární statistické zpracování	62
Tabulka 15 - Potřebné výsledky deskriptivní statistiky	65
Tabulka 16 - Intervalové rozdělení četností	65
Tabulka 17 - Vypočítané údaje s doplněním $n p_i$	67
Tabulka 18 - Experimentální hodnoty pro jednotlivá x_i	68

9 Přílohy

9.1 Příkladové ilustrace

Funkce

Příklad 1 (určení hodnoty funkce podle určitého x)

Je dána funkce $f: y = \frac{x-1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$. Určete $f(x_0)$, je-li

$$a) x_0 = 4, \quad b) x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Řešení:

$$a) f(4) = \frac{4-1}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{3}{2} + \frac{2}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\begin{aligned} b) f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} + \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2)}{2^{\frac{4}{2}}\sqrt{2}} + \frac{2^{\frac{4}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2^{\frac{4}{2}}\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \\ &= \frac{2-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2^{\frac{4}{2}}\sqrt{2}} = \frac{2}{2^{\frac{4}{2}}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}^3}{\sqrt{2}^3} = \frac{\sqrt{8}}{2} \end{aligned}$$

(Kolisko 2011)

Příklad 2 (sudost a lichost funkce)

Rozhodněte, zde je daná funkce sudá nebo lichá ve svém definičním oboru.

$$a) f: y = \frac{x^2-1}{x}, \quad b) g: y = \frac{x^2-1}{x^4+2} + 1.$$

Řešení:

$$a) f: y = \frac{x^2-1}{x}$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}; \text{ pro každé } x \in D(f): -x \in D(f)$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{-x} = -\frac{x^2-1}{x}$$

$f(x) = -f(-x) \rightarrow$ funkce f je lichá (graf je souměrný podle počátku)

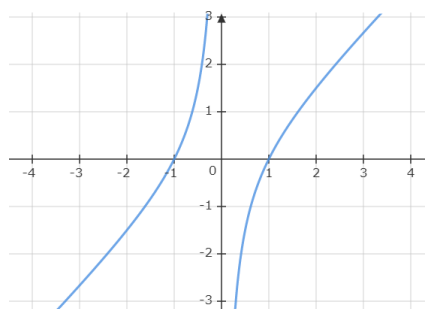
$$b) g: y = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2} + 1$$

$D(g) = \mathbb{R}$; pro každé $x \in D(g)$: $-x \in D(g)$

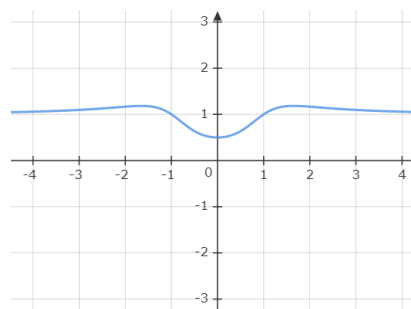
$$g(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^4 + 2} + 1 = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2} + 1$$

$g(x) = g(-x) \rightarrow$ funkce g je sudá (graf je souměrný podle osy y)

(Kolisko 2011)



Obrázek 54 - Graf funkce z příkladu 2 a), zdroj: vytvořil autor



Obrázek 55 - Graf funkce z příkladu 2 b), zdroj: vytvořil autor

Příklad 3 (inverzní funkce)

Je dána funkce $f: y = 2^x - 2$. Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci f a určete její definiční obor a obor hodnot.

Řešení:

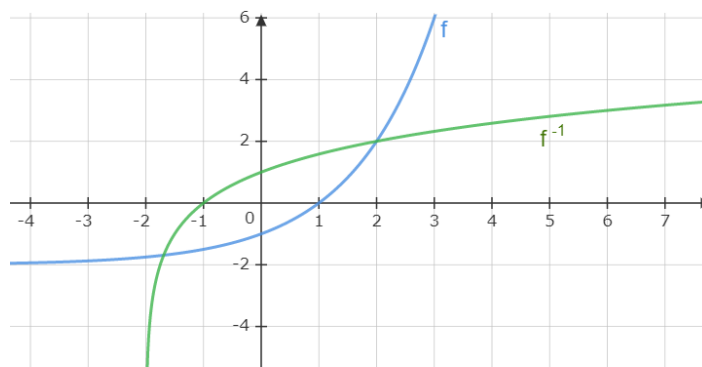
$$D(f) = \mathbb{R}; \quad H(f) = (-2; +\infty)$$

$$f^{-1}: x = 2^y - 2$$

$$x + 2 = 2^y \rightarrow y = \log_2(x + 2); \quad x + 2 > 0$$

$$D(f^{-1}) = (-2; +\infty); \quad H(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

(Kolisko 2011)



Obrázek 56 - Grafy funkcí z příkladu 3, zdroj: vytvořil autor

Limita funkce

Příklad 4 (vlastní limita funkce v bodě)

Vypočítejte limitu funkce $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 3x^2 + x)$.

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 3x^2 + x) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 16 - 12 + 2 = 6$$

(Kolisko 2011)

Příklad 5 (nevlastní limita funkce v bodě)

Vypočítejte limitu funkce $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{x^4}\right)$.

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{x^4}\right) = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \left(\frac{-2}{0+}\right) = -\infty$$

$$\text{Pozn. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

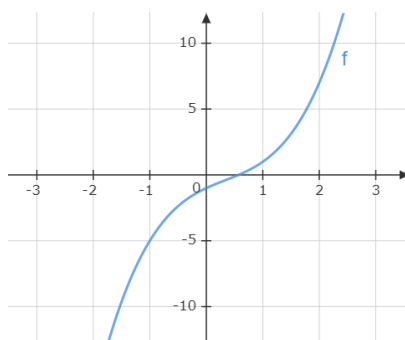
(Kolisko 2011)

Příklad 6 (limita funkce v nevlastním bodě)

Vypočítejte limitu funkce $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 1)$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 1) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot (1 - 0 + 0 - 0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty \end{aligned}$$



Obrázek 57 - Graf funkce z příkladu 6,
zdroj: vytvořil autor

(Kolisko 2011)

Diferenciální počet

Příklad 7 (první a druhá derivace)

Vypočítejte první a druhou derivaci funkce $f: y = x^5 - 4x^4 + 7x^2 + 5$.

Řešení:

$$y' = 5x^4 - 16x^3 + 14x$$

$$y'' = 20x^3 - 48x^2 + 14$$

(Kolisko 2011)

Příklad 8 (derivace složené funkce)

Určete derivaci složené funkce $f: y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Řešení:

$$y' = [(x^2 + 1)^{-1/2}]' = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$$

(Vošický 2004)

Příklad 9 (parciální derivace)

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$.

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + x \cdot 1 + 3y^2$$

(Mařík 2006)

Příklad 10 (vyšetřování průběhu funkce)

Vyšetřete průběh funkce $f: y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ a načrtněte její graf.

Řešení:

- Určíme definiční obor funkce: $D(f) = \mathbf{R}$
- Vyšetříme spojitost funkce: **Funkce f je spojitá v \mathbf{R}**
- Určíme intervaly monotónnosti a extrémů funkce:

$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

Odtud plyne: $4x^3 - 12x^2 + 8x > 0$... funkce roste

> 0 ... funkce klesá

Úpravou: $4x(x - 2)(x - 1) > 0$... funkce roste

< 0 ... funkce klesá

Jiný postup: Nutná podmínka pro extrém $f'(x_0) = 0$ je splněna pro 0; 1; 2. Snadno ověříme postačující podmínku v těchto bodech pomocí druhé derivace funkce

$$y'' = 12x^2 - 24x + 8.$$

Tedy: $y''(0) = 8 > 0 \rightarrow$ **minimum** [0; 0], $y''(1) = -4 < 0 \rightarrow$ **maximum** [1; 1],

$y''(2) = 8 > 0 \rightarrow$ **minimum** [2; 0]

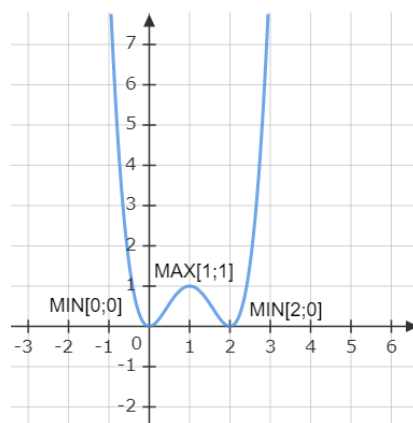
- Vypočteme hodnoty funkce ve význačných bodech a určíme další vlastnosti funkce:

Průsečíky s osou x ($y = 0$): $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0 \rightarrow P_1[0; 0]$ a $P_2[2; 0]$

Průsečíky s osou y ($x = 0$): $y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow P_1[0; 0]$

Funkce není periodická, není sudá (neboť $x^4 - 4x^3 + 4x^2 \neq (-x)^4 - 4(-x)^3 + 4(-x)^2$), není lichá (neboť $x^4 - 4x^3 + 4x^2 \neq -[(-x)^4 - 4(-x)^3 + 4(-x)^2]$), je spojitá v R , je omezená zdola, není omezená shora, není prostá.

- Sestrojíme graf funkce f :



Obrázek 58 - Graf funkce z příkladu 10, zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

(Vošický 2014)

Integrální počet

Příklad 11 (primitivní funkce)

Vypočítejte primitivní funkci k funkci $f: y = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 + 2x}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 + 2x} dx &= \int \frac{x^2(x^2 - 4)}{x(x + 2)} dx = \int \frac{x(x - 2)(x + 2)}{x + 2} dx = \int (x^2 - 2x) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + C \end{aligned}$$

(Kolisko 2011)

Příklad 12 (metoda per partes)

Integrujte metodou per partes $\int x \cdot e^x dx$.

Řešení:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x = e^x(x - 1) + C$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = e^x \quad v = e^x$$

(Kolisko 2011)

Příklad 13 (substituční metoda)

Vypočítejte substituční metodou funkci $\int \cos 3x dx$.

Řešení:

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \cdot \sin 3x + C$$

$$\text{Substituce: } t = 3x$$

$$dt = 3 dx$$

$$dx = \frac{1}{3} dt$$

(Kolisko 2011)

Příklad 14 (určitý integrál)

Vypočítejte $\int_{-1}^2 (x^3 + 3x^2 + 4) dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^3 + 3x^2 + 4) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right]_{-1}^2 = \frac{2^4}{4} - 2^3 + 4 \cdot 2 - \\ &- \left[\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 4 \cdot (-1) \right] = 4 - 8 + 8 - \frac{1}{4} - 1 + 4 = 6 \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(Kolisko 2011)

Vektorový počet

Příklad 15 (vlastnosti dvou vektorů, operace s vektory)

Pro vektory $\vec{u} = (2; -3)$, $\vec{v} = (3; 5)$ urči: **a)** velikost vektorů, **b)** zda jsou si tyto vektory rovné, **c)** součet vektorů, **d)** rozdíl vektorů, **e)** opačné vektory, **f)** $3\vec{u}$, $\sqrt{2}\vec{v}$, **g)** skalární součin vektorů, **h)** úhel, který svírají tyto vektory.

Řešení:

$$\mathbf{a)} \quad |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}; \quad |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

$$\mathbf{b)} \quad (2 \neq 3 \wedge -3 \neq 5) \rightarrow \vec{u} \neq \vec{v}$$

$$\mathbf{c)} \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{w} = (5; 2)$$

$$\mathbf{d)} \quad \vec{u} - \vec{v} = \vec{z} = (-1; -8)$$

$$\mathbf{e)} \quad -\vec{u} = (-2; 3); \quad -\vec{v} = (-3; -5)$$

$$\mathbf{f)} \quad 3\vec{u} = (6; -9); \quad \sqrt{2} \cdot \vec{v} = (3\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$$

$$\mathbf{g)} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 5 = -9$$

$$\mathbf{h)} \quad \cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}} \rightarrow \varphi \approx 115^\circ 32'$$

(Čermák a Červinková 2007)

Příklad 16 (vektorový součin)

Pro vektory $\vec{a} = (1; 3; -1)$, $\vec{b} = (2; 4; 5)$ vypočítejte vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$.

Řešení:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3 \cdot 5 - (-1) \cdot 4; (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 5; 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = (19; -7; -2)$$

(Kočandrle a Boček 1995)

Příklad 17 (význam derivace)

Určete okamžitou rychlost a okamžité zrychlení pohybu v čase t , jehož dráha je dána

$$\text{vztahem: } s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Řešení:

$$v = s' = 0 + v_0 + \frac{1}{2} \cdot 2gt \rightarrow v = v_0 + gt$$

$$a = v' = 0 + g \rightarrow a = g$$

(Hesteric 2008-2021)

9.2 Edukační text jako podklad k testu, který byl poskytnut respondentům

Vážení,

následující text obsahuje teorii, již je potřeba znát k úspěšnému zodpovězení otázek testu.

Kapitoly tohoto textu jsou následující:

- množiny,
- funkce,
- diferenciální počet,
- integrální počet,
- vektorový počet.

V textu naleznete odstavce, které jsou odlišeny od okolního textu žlutou barvou písma. Znamená to, že znalost těchto odstavců není ověřována v testu a tyto poznatky jsou uvedeny pouze z důvodu ucelenosti textu.

Velmi vám děkuji za podílení se na praktické části mé bakalářské práce, Barbora Jelínková.

Množiny

Množina je souborem navzájem odlišitelných prvků. Prvky množiny mají obvykle minimálně jednu stejnou určitou vlastnost. V množině se nevyskytuje jeden stejný prvek dvakrát. Množiny obecně značíme velkými písmeny a jejich prvky písmeny malými. Zápis množiny může tedy vypadat takto: $A = \{a; b; c\}$. Nezáleží na pořadí prvků v množině, proto můžeme množinu zapsat i jako $A = \{c; b; a\}$. Množina, která neobsahuje prvek žádný, je množinou takzvaně prázdnou a značíme ji \emptyset (Bauer et al. 2015).

Existují ustálené definované množiny, které jinak nazýváme číselnými obory. Mezi **číselné obory** patří obor přirozených čísel, nezáporných celých čísel, celých čísel, racionálních čísel, reálných čísel a komplexních čísel (Vošický 2004).

Do oboru **přirozených čísel** patří všechna kladná celá čísla. Obor přirozených čísel značíme N a zapisujeme ho jako $N = \{1; 2; 3; \dots\}$. Existuje také obor **nezáporných celých čísel**, kde najdeme prvky oboru přirozených čísel společně s nulou. Tento obor vypadá následovně: $N_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ (Houska 1991; Kaňka 2010).

Dalším oborem je obor **celých čísel** $Z = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$. Pro každé celé číslo a existuje číslo jemu opačné ($-a$) a součet dvou navzájem opačných čísel je nula, tedy $a + (-a) = 0$. Číslo opačné nule je nula (Houska 1991; Bušek a Calda 2008).

Oborem **racionálních čísel** Q nazýváme množinu všech čísel, jež obsahuje všechna čísla zapsatelná ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde p je číslo celé a q číslo celé nenulové. Pojem racionální číslo v základním tvaru značí takové racionální číslo, kde jsou p a q nesoudělná. Zlomkem v základním tvaru je například $\frac{4}{5}$. Racionální čísla lze také zapisovat jako čísla desetinná s konečným rozvojem či s nekonečným periodickým rozvojem (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007).

Sjednocením racionálních a iracionálních čísel je obor **reálných čísel** R . Je tedy nutné definovat, co jsou čísla iracionální – tato čísla nemají ukončený desetinný rozvoj a nemají periodu. Příklady iracionálních čísel můžou být například $\sqrt{3}$ nebo π (Čermák a Červinková 2007; Kaňka 2010).

Iracionálními čísly jsou tedy i odmocniny. Pro druhou odmocninu \sqrt{a} platí, že $x^2 = a$, kde a je číslo reálné a x nezáporné. Existují následující pravidla pro každá dvě reálná nezáporná čísla a, b :

$$\begin{aligned} \sqrt{a \cdot b} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, & \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ pro } b \neq 0 \\ a \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{a^2 \cdot b}, \end{aligned}$$

(Bušek a Calda 2008).

Další významnou odmocninou je odmocnina třetí $\sqrt[3]{a}$. V tomto případě platí, že $x^3 = a$, kde a a x jsou nezápornými čísly. Pro dvě reálná nezáporná čísla platí tato pravidla:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a \cdot b} &= \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}, & \sqrt[3]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \text{ pro } b \neq 0 \\ a \cdot \sqrt[3]{b} &= \sqrt[3]{a^3 \cdot b}, \end{aligned}$$

(Čermák a Červinková 2007).

Pro různé výpočty je nežádoucí odmocnina ve jmenovateli. Proto provedeme usměrnění zlomku, které je možné po seznámení s výše zmíněnými pravidly pro odmocniny. Princip usměrnění zlomku spočívá v rozšíření jiným vhodným zlomkem. Tyto ilustrační příklady usměrnění zlomku uvádí Bušek a Calda (2008):

$$a) \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2},$$

$$b) \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

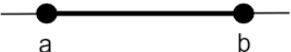
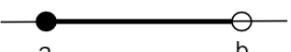
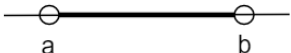
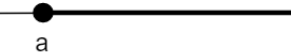
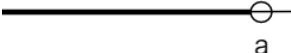
Při znázornění reálných čísel na číselné ose absolutní hodnota reálného čísla značí vzdálenost jeho obrazu od počátku právě číselné osy. Vošický (2004) uvádí definici absolutní hodnoty reálného čísla:

$$\text{pro } a \geq 0 \text{ je } |a| = a, \text{ pro } a < 0 \text{ je } |a| = -a.$$

Pro znázornění množin reálných čísel na číselné ose lze využít přímek, polopřímek nebo úseček. Tato znázornění nazýváme intervaly. Symbol \bullet na číselné ose značí to, že daný prvek do intervalu patří. Naopak pokud se vyskytuje na číselné ose \circ , znamená to, že daný prvek do intervalu nepatří.

Intervaly lze zapsat jak graficky, tak i pomocí závorek, kde kulatá závorka $($ značí, že prvek do intervalu nepatří a je pouze hraničním bodem intervalu, a hranatou závorku \langle má u sebe prvek, jenž do intervalu patří. V případě racionálních čísel je nutno začít používat znaky ∞ a $-\infty$, tj. nekonečno a minus nekonečno. V následující tabulce jsou uvedeny některé vybrané definice určitých obecných intervalů (Bušek a Calda 2008).

Vybraná znázornění intervalů

Omezenost intervalu	Zápis intervalu	Znázornění na reálné ose	Název intervalu
Omezené intervaly	$\langle a; b \rangle$		Uzavřený interval
	$\langle a; b \rangle$		Polouzavřený interval (zleva uzavřený a zprava otevřený)
	$(a; b)$		Otevřený interval
Neomezené intervaly	$\langle a; \infty)$		Zprava neomezený interval
	$(-\infty; a)$		Zleva neomezený interval

Zdroj: podle Buška a Caldy (2008) vytvořil autor

Jako poslední číselný obor bude uveden obor **komplexních čísel** \mathbb{C} . Obecný tvar komplexního čísla je tento: $z = a + bi$, kde a a b jsou reálnými čísly a pro imaginární číslo i platí rovnice $i^2 = -1$. a v tomto případě nazýváme reálnou částí komplexního

číslo z a imaginární částí je b (Kaňka 2010). Komplexní čísla jsou důležitá z toho důvodu, že v oboru reálných čísel nelze odmocňovat záporná čísla, avšak výpočty s čísly jako například $\sqrt{-1}$ jsou často velmi užitečné. Výše uvedený tvar komplexního čísla $z = a + bi$ je tvarem algebraickým. Tento způsob zápisu lze nahradit také zápisem pomocí uspořádané dvojice reálných čísel $z = [a; b]$. Uspořádané dvojice lze zobrazit v Gaussově rovině, kde $z = [0; 0]$ je počátkem soustavy souřadnic. Právě imaginární číslo lze zapsat jako $i = [0; 1]$. Pro rychlé výpočty s komplexními čísly je dobré si zapamatovat následující rovnice:

$$\begin{aligned} i^1 &= i & i^4 &= 1 \\ i^2 &= -1 & & (\text{Čermák a Červinková 2007}). \\ i^3 &= -1 \cdot i = -i \end{aligned}$$

Funkce

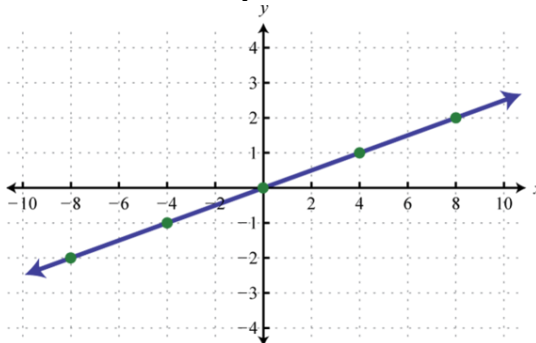
Funkce a jejich vlastnosti

Čermák a Červinková (2007) uvádí tuto definici pojmu funkce:

*Nechť jsou dány dvě neprázdné množiny reálných čísel A a B . Přiřadíme-li každému číslu $x \in A$ podle nějakého předpisu právě jedno číslo $y \in B$ (které označíme $y = f(x)$ a nazveme funkční hodnota), pak množina f všech uspořádaných dvojic $[x; f(x)]$ se nazývá reálná funkce reálné proměnné. **Zapisujeme $f: y = f(x)$.***

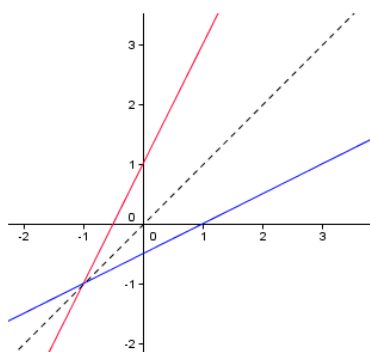
Velmi důležitými výrazy, jež používáme v souvislosti s popisem funkce, jsou definiční obor funkce a obor hodnot funkce. **Definiční obor** funkce f je množinou reálných čísel, kterým je přiřazeno reálné číslo funkcí f . Ve výše uvedené definici funkce je definičním oborem množina A . Definiční obor zapisujeme jako $D(f)$. **Obor hodnot** funkce f , jenž je značen jako $H(f)$, je množinou všech reálných čísel, která získáme právě tímto přiřazením prvků množiny definičního oboru. V definici funkce se jedná o množinu B (Beránek et al. 2007; Čermák a Červinková 2007).

Závislost y na x je často velmi výhodné zobrazit pomocí grafů. K vytvoření **grafu funkce** se využívá zakreslení množiny všech bodů roviny, jejichž souřadnice jsou $[x, f(x)]$. Klasicky na vodorovnou osu (osu x) vynášíme proměnnou x a na osu svislou (osu y) vynášíme funkční hodnoty (Hughes-Hallet 1980; Vošický 2004). Na obrázku níže můžeme vidět například graf funkce $y = \frac{1}{4}x$.

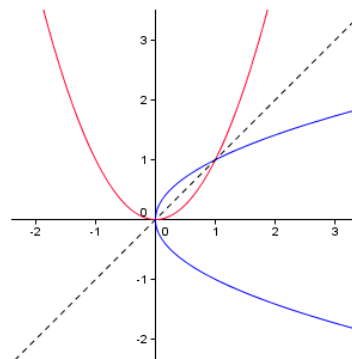


Graf funkce $y = 1/4x$, zdroj:
https://saylordotorg.github.io/text_intermediate-algebra/s05-02-linear-functions-and-their-gra.html

Inverzní funkce g (neboli také f^{-1}) k funkci f je funkcí, jejíž grafické zobrazení v kartézské soustavě souřadnic je souměrné k zobrazení funkce f podle přímky o rovnici $x = y$ (Beránek et al. 2007; Bauer et al., 2015).



Inverzní funkce I, zdroj:
<http://ibmathstuff.wikidot.com/inverse-function>



Inverzní funkce II, zdroj:
<http://ibmathstuff.wikidot.com/inverse-function>

Zjednodušeně lze říci, že u inverzní funkce je „otočeno“ přiřazování – tedy každému číslu y podle předpisu přiřadíme právě jedno číslo x . Pro lepší představu lze uvést tuto vlastnost navzájem inverzních funkcí f a g : $D(g) = H(f)$ a $H(g) = D(f)$ (Beránek et al. 2007).

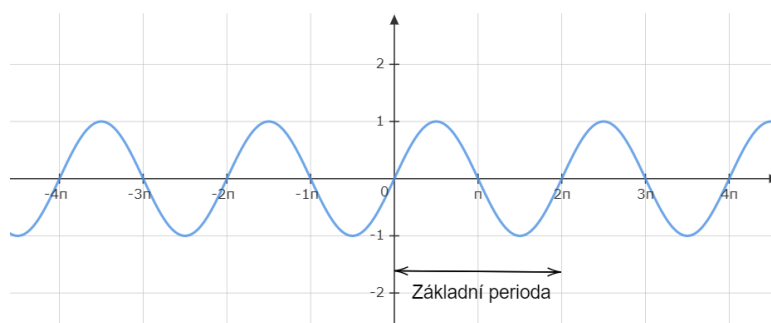
Dále existují takzvané **složené funkce**. Petrášková a Zmeškalová (2005) uvádí tuto definici:

Nechť jsou dány funkce f , g . Funkci h takovou, že $D(h) = \{x \in D(g); g(x) \in D(f)\}$; $h(x) = f(g(x))$, nazýváme složením funkcí g , f (v tomto pořadí) a označujeme $g \circ f$. Funkci g nazýváme vnitřní, funkci f nazýváme vnější, funkci h nazýváme složenou funkcí.

Příkladem složené funkce může být $h: y = \sqrt{x^2 + 1}$, kde vnitřní funkcí je $g: u = x^2 + 1$ a funkcí vnější je $f: y = \sqrt{u}$. Další složenou funkcí je například $h: y = \sin 3x$, u které je vnitřní funkcí $g: u = 3x$ a vnější funkcí $f: y = \sin u$ (Vošický 2004).

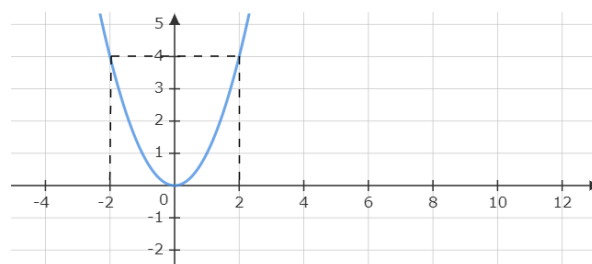
Pojmy, které je nutno znát, jsou periodičnost, lichost, sudost a omezenost funkce. Jedná se o vlastnosti funkcí, které budou popsány níže.

Funkce je periodická, pokud existuje číslo $p > 0$ a pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí, že pokud je funkce definována v bodě x , je definována i v bodech $x + kp$, a pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) = f(x + kp)$. Příklady periodické funkce mohou být například sinus či kosinus, které mají základní periodu (nejmenší periodu) $p = 2\pi$ (Vošický 2004).



Perioda funkce sinus, zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

Funkce je sudá, pokud $f(x) = f(-x)$. Příkladem sudé funkce může být $f: y = x^2$. Pokud za x dosadíme 2 a (-2) , funkční hodnota y bude v obou případech stejná: $f(2) = f(-2)$. Graf sudé funkce je souměrný podle osy y (Hughes-Hallet 1980; Vošický 2004).



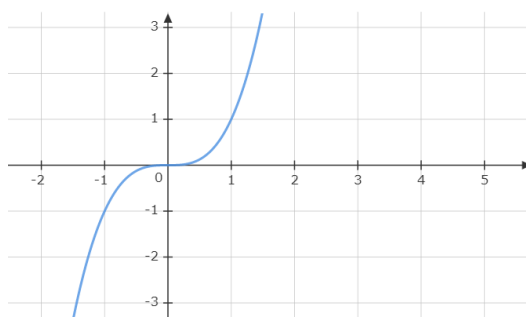
Graf funkce x na druhou, zdroj: vytvořil autor

Pro **lichou funkci** platí $f(-x) = -f(x)$. Funkcí lichou je například $f: y = x^3$. Graf lichých funkcí je vždy symetrický podle počátku soustavy souřadnic (Hughes-Hallet 1980; Bauer et al. 2015).

Funkce může být také **omezená**. Existují funkce omezené zdola, shora anebo omezené zdola i shora. Strnad (2013) definuje jednotlivé omezenosti takto:

Nechť f je daná funkce a M podmnožina jejího definičního oboru $D(f)$:

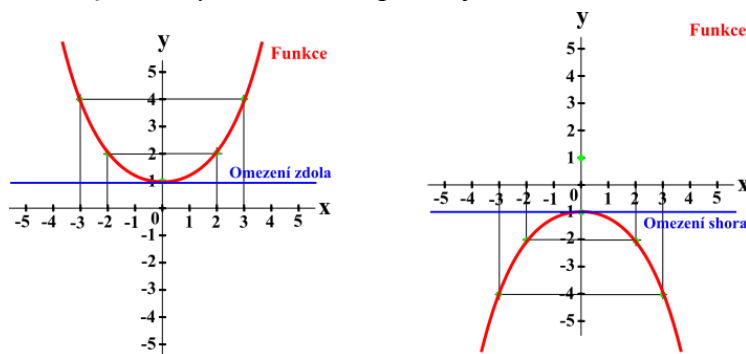
- *Funkce f se nazývá funkce zdola omezená na množině M , právě když existuje*



Graf funkce x na třetí, zdroj: vytvořil autor

číslo $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq d$.

- *Funkce f se nazývá funkce shora omezená na množině M , právě když existuje číslo $h \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq h$.*
- *Funkce f se nazývá omezená, pokud je současně omezená shora i zdola.*

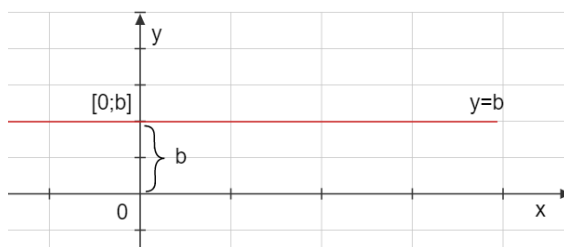


Grafy funkcí omezených zdola nebo shora, zdroj: <http://www.x-idea.cz/matematicke-funkce/>

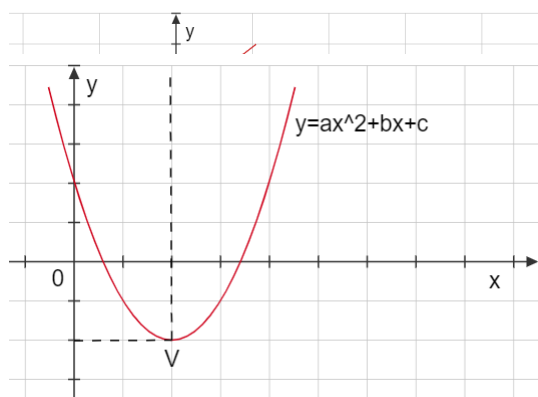
Polynomické funkce

Dle Vošického (2004) lze polynomickou funkci obecně vyjádřit ve tvaru $f: y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ a $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Mezi významné polynomické funkce patří funkce konstantní, lineární a kvadratická (Záškodný 2018).

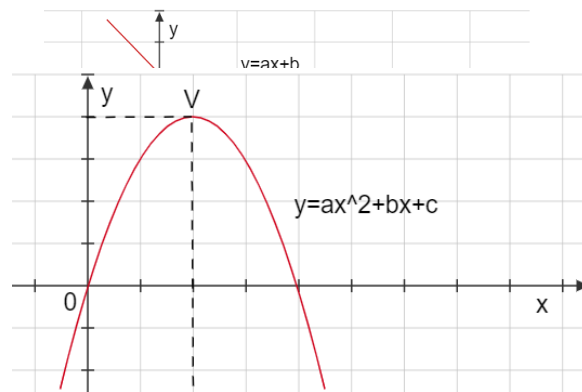
Obecný zápis **lineární funkce** je $f: y = ax + b$, kde $a; b \in R$. Grafy těchto funkcí budou vždy přímkou, která je různoběžná s osou y (tzn. pro jedno x existuje pouze jedno přiřazené y – toto platí pro všechny funkce). Lineární funkce může být rostoucí, klesající nebo nerostoucí a neklesající. Pokud je funkce nerostoucí a neklesající, nazýváme ji **konstantní funkcí** (Vošický 2004). Obecné grafy lineárních funkcí jsou uvedeny níže.



Graf konstantní funkce pro $a=0$, tedy $y=b$, zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor



Graf kvadratické funkce pro $a>0$, zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor

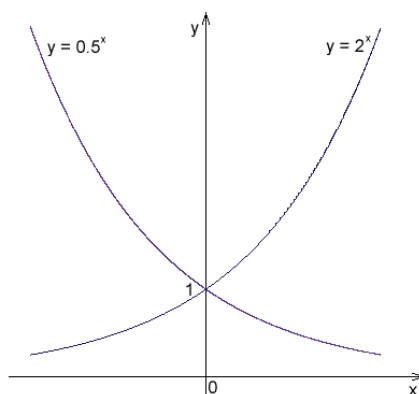


Graf kvadratické funkce pro $a<0$, zdroj: podle Čermáka a Červinkové (2007) vytvořil autor

Obecný zápis **kvadratické funkce** je $f: y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in R - \{0\}$ (tj. a je nenulové reálné číslo) a $b; c \in R$. Pokud by a bylo rovno 0, vznikla by funkce $f: y = 0x^2 + bx + c = bx + c$ a jednalo by se tedy o lineární funkci. Grafem kvadratické funkce je parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou y . Vrchol paraboly V je průsečíkem její osy a samotnou parabolou (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007). Pro ilustraci paraboly budou vloženy obecné grafy kvadratických funkcí.

Exponenciální a logaritmická funkce

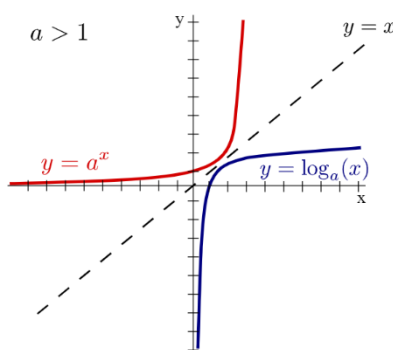
Exponenciální funkci definujeme předpisem $f: y = a^x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$. Jejím grafem je exponenciála neboli exponenciální křivka. Exponenciální křivka protíná osu y v bodě $[0; 1]$. Na obrázku můžeme vidět grafy dvou exponenciálních funkcí. Graf funkce $f: y = 0,5^x$ ukazuje, jak vypadá tvar křivky pro takovéto a : $0 < a < 1$. Druhý graf znázorňuje funkci $f: y = 2^x$ a ilustruje tak tvar exponenciály pro $a > 1$ (Vošický 2004; Bauer et al. 2015).



Grafy dvou exponenciálních funkcí, zdroj:

https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_function#/media/File:Exponenciala_priklad.png

Logaritmy jsou funkčními hodnotami **logaritmické funkce**. Logaritmus definujeme takto: $y = \log_a x \rightarrow x = a^y$. Například $\log_{10} 100 = 2$, protože $10^2 = 100$ (logaritmus se základem 10, tedy $\log_{10} x$, je dekadickým logaritmem, který lze značit také pouze jako $\log x$). Předpis logaritmické funkce je tedy $f: y = \log_a x$ pro $a > 0$; $a \neq 1$. Logaritmická funkce se základem a je inverzní k exponenciální funkci se stejným základem a . Graf logaritmické funkce nazýváme logaritmickou křivkou (Vošický 2004; Bauer et al. 2015).



Grafy exponenciální a logaritmické funkce se stejným základem pro

$a > 1$, zdroj: https://www.sfu.ca/math-coursenotes/Math%20157%20Course%20Notes/sec_Logarithms.html

Eulerovo číslo e je konstantou s přibližnou hodnotou $e = 2,718$. Logaritmus se základem e je nazýván přirozeným logaritmem a zapisuje se $\log_e x$ nebo zkráceně $\ln x$ (Vošický 2004; Strnad 2013).

Goniometrické funkce

Hlavními goniometrickými funkcemi, jež je nutno znát, jsou sinus, kosinus, tangens a kotangens. Objasníme si také určité vztahy mezi nimi.

Základními goniometrickými funkcemi jsou sinus a cosinus. Pomocí těchto základních funkcí definujeme funkce tangens a kotangens takto:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ pro } \cos x \neq 0 \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ pro } \sin x \neq 0$$

(Bauer et al. 2015).

x bývá nazýváno argumentem goniometrické funkce, a to platí pro všechny čtyři uvedené goniometrické funkce (Čermák a Červinková 2007).

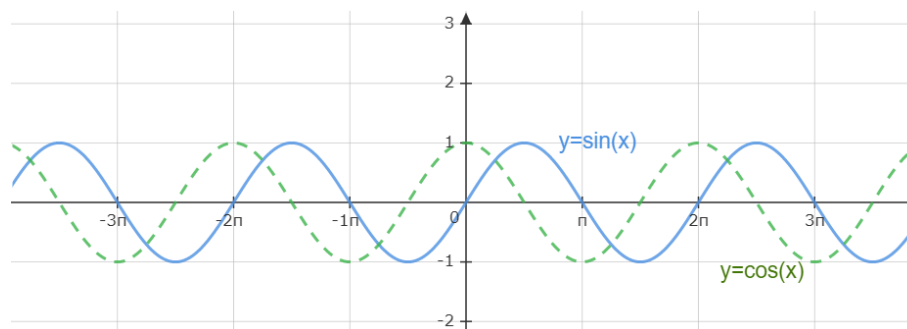
Funkce **sinus** a **kosinus** jsou funkcemi periodickými s periodou rovnou 2π . V tabulce podle Vošického (2004) budou uvedeny vybrané vlastnosti těchto dvou funkcí.

Vlastnosti funkce sinus a kosinus

Vlastnosti	Sinus ($\sin x$)	Kosinus ($\cos x$)
Definiční obor	$x \in R$	$x \in R$
Obor hodnot	$y \in \langle -1; 1 \rangle$	$y \in \langle -1; 1 \rangle$
Sudost, lichost	Lichá $\sin(-x) = -\sin x$	Sudá $\cos(-x) = \cos x$
Omezenost	Omezená v celém definičním oboru zdola i shora	Omezená v celém definičním oboru zdola i shora
Periodičnost	Základní perioda 2π $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, kde $k \in Z$	Základní perioda 2π $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, kde $k \in Z$

Zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

Nyní budou uvedeny grafy funkcí sinus a kosinus pro lepší představu těchto zmíněných vlastností.



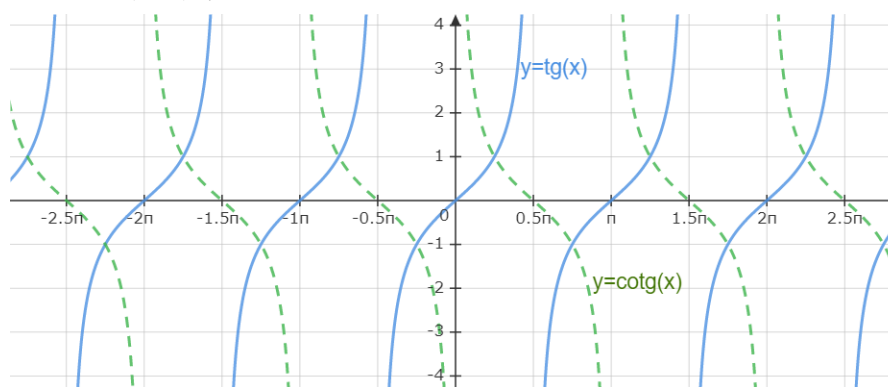
Grafy funkcí sinus (plná čára) a kosinus (čárkovaně), zdroj: vytvořil autor

Funkce **tangens** a **kotangens** jsou tedy odvozeny od funkcí sinus a kosinus podle výše uvedených definic. Vlastnosti budou shrnuty v tabulce podle Vošického (2004). Budou také uvedeny grafy těchto dvou funkcí.

Vlastnosti funkce tangens a kotangens

Vlastnosti	Tangens ($\operatorname{tg} x$)	Kotangens ($\operatorname{cotg} x$)
Definiční obor	$x \in R - \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{2} \right\}; k \in Z$	$x \in R - \left\{ 2k \frac{\pi}{2} \right\}; k \in Z$
Obor hodnot	$y \in R$	$y \in R$
Sudost, lichost	Lichá $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	Lichá $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$
Omezenost	Funkce není omezená ani zdola, ani shora	Funkce není omezená ani zdola, ani shora
Periodičnost	Základní perioda π	Základní perioda π

Zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor



Grafy funkcí tangens (plná čára) a kotangens (čárkovaně), zdroj: vytvořil autor

Jak lze vidět v grafech, obě tyto funkce nejsou spojitě. Znamená to tedy, že funkce nejsou definovány pro všechna x . Funkce tangens není definována pro $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$ a funkce kotangens není definována pro $x = 2k \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$ (Vošický 2004).

Nyní budou uvedeny vzorce podle Čermáka a Červinkové (2007), kde zmíním vzájemné vztahy goniometrických funkcí a vybrané operace s nimi.

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Vztahy pro součet a rozdíl argumentů:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

Vztahy pro dvojnásobný argument:

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Lineárně lomená funkce

Lineární lomenou funkcí je každá funkce $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ na množině $R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla, $c \neq 0$ a $ad - bc \neq 0$. Definičním oborem lineárně lomené funkce je $D(f) = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Grafem lineárně lomené funkce je hyperbola (Odvárko 2008). Existují přímky, jež vymezují hyperbolu, a ty nazýváme asymptotami. Asymptoty jsou dvě, z toho jedna je rovnoběžná s osou x a druhá s osou y . Asymptoty se protínají ve středu hyperboly S , jež má souřadnice $S\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$ (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007). Vošický (2004) uvádí tento postup sestavení grafu lineárně lomené funkce:

Graf funkce $f: y = \frac{2x-5}{x-1}$ se sestrojí takto:

$$D(f) = R - \{1\}$$

Úpravou:

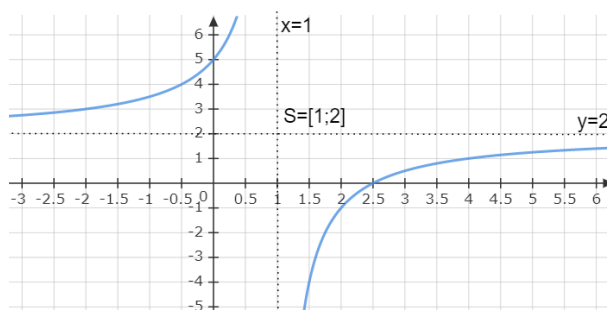
$$y = \frac{2x-5}{x-1} \rightarrow y = \frac{2(x-1)-3}{(x-1)} \rightarrow y = 2 - \frac{3}{(x-1)} \rightarrow S[1; 2]$$

Asymptoty: $x = 1; y = 2$

Průsečíky s osami:

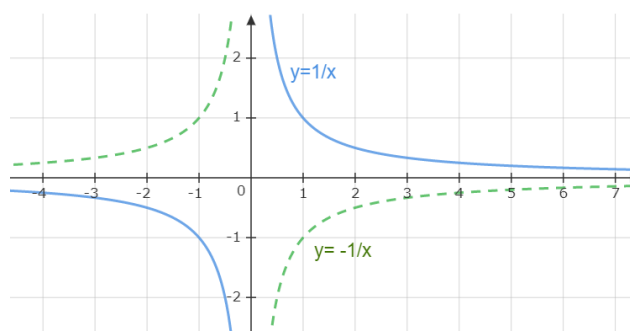
$$y = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} \dots X\left(\frac{5}{2}; 0\right)$$

$$x = 0 \rightarrow y = 5 \dots Y(0; 5)$$



Graf funkce $y=(2x-5)/(x-1)$, zdroj: podle Vošického (2004) vytvořil autor

Nepřímá úměrnost je také lineárně lomenou funkcí. Obecně ji zapisujeme jako $y = \frac{k}{x}$, kde $k \in R - \{0\}$. Je tomu tak v případě, že v zápisu lineárně lomené funkce $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ je $a = 0$ a $d = 0$ (Odvárko 2008; Čermák a Červinková 2007).

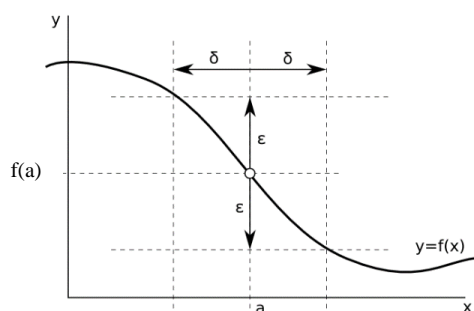


Grafy nepřímé úměrnosti; plnou čarou graf funkce $y=1/x$, tedy pro $k>0$; čárkovaně graf funkce $y=-1/x$, tedy pro $k<0$, zdroj: podle Odvárka (1993) vytvořil autor

Diferenciální počet

Předtím, než bude vysvětlena samotná podstata diferenciálního počtu, je třeba si objasnit pojmy spojitost a limita funkce.

Spojitosť funkce je definována pomocí bodu $a \in R$ a jeho okolí (tzv. δ –okolí). Okolí bodu $f(a)$ nazýváme ε –okolím. Funkce je spojitá v bodě a , pokud pro x z okolí bodu a existují hodnoty $f(x)$ z okolí bodu $f(a)$. (Hrubý a Kubát 2008; Čermák 2004).



Okolí bodu a a $f(a)$, zdroj:
https://cs.wikipedia.org/wiki/Limita_funkce#/media/Soubor:Limit.png, upraveno autorem

Limitu funkce definuje Čermák (2004) takto:

funkce $y = f(x)$ má v bodě a limitu L , jestliže:

- *je definována pro x z nějakého okolí bodu a ,*
- *ke každému (libovolně malému) číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \neq a$ z δ –okolí bodu a náleží odpovídající funkční hodnoty $f(x)$ do ε –okolí bodu L .*

Limitu funkce zapisujeme jako $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ a čteme: limita $f(x)$ pro x jdoucí (blížící se) k a je rovna L (Vošický 2004).

Limitu si lze dobře vysvětlit a představit pomocí příkladů, jež budou uvedeny dále v textu.

Příklad 1:

$$\text{Urči limitu: } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^7 - x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x^7 - x^2 + 1) = 3(-1)^7 - (-1)^2 + 1 = -3 - 1 + 1 = -3$$

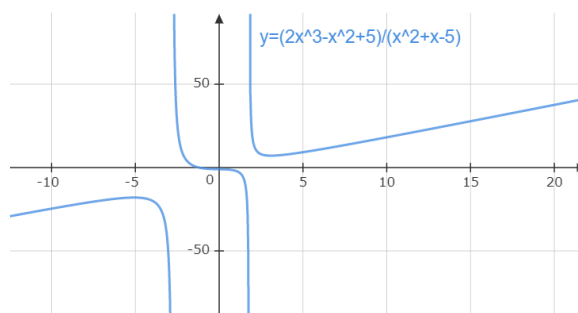
(Čermák 2004).

Příklad 2:

$$\text{Urči limitu: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{x^2 + x - 5}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{x^2 + x - 5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}\right) = +\infty \cdot \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = +\infty \cdot 2 = +\infty \end{aligned}$$

(Čermák 2004).



Graf funkce z příkladu 2, zdroj: vytvořil autor

Pro přesnější vysvětlení příkladu 2 je nutné uvést tyto vybrané limity:

$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ neexistuje	$\lim_{x \rightarrow 0_-} \cotg x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ neexistuje	$\lim_{x \rightarrow 0_+} \cotg x = \infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ neexistuje	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ neexistuje	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0; n \in \mathbb{N}$	$\lim_{x \rightarrow \pi/2_-} \tg x = \infty$	
	$\lim_{x \rightarrow \pi/2_+} \tg x = -\infty$	

(Čermák 2004).

Pilecká (2004) uvádí **definici derivace funkce** jedné proměnné:

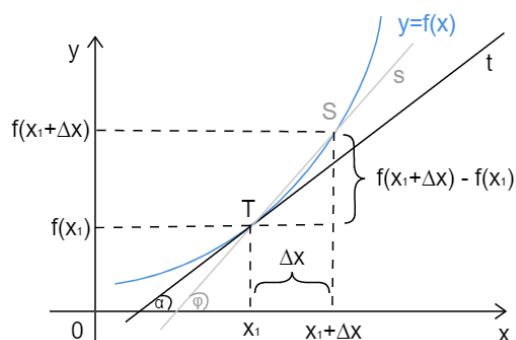
Derivace funkce y podle nezávisle proměnné x je limita poměru přírůstků funkce a jejího argumentu, blíží-li se přírůstek argumentu bez omezení nule.

Derivaci funkce zapisujeme $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ (Pilecká 2004).

Derivace funkce f bývá zapisována různými způsoby, a to jako y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ nebo $\frac{df(x)}{dx}$.

Všechny tyto zápisy čteme stejně: derivace funkce y podle x .

Derivaci funkce lze využít pro různé výpočty, například pro nalezení tečny ke grafu funkce v jejím libovolném bodě (Čermák 2004).



Grafické zobrazení derivace - nalezení tečny, zdroj: podle Pilecké (2004) a Čermáka (2004) vytvořil autor

Na obrázku můžeme vidět tečnu t , jež se dotýká grafu funkce v bodě $T [x_1; f(x_1)]$. Dále je na obrázku sečna s , která je určena bodem T a bodem $S [x_1 + \Delta x; f(x_1 + \Delta x)]$. φ je směrový úhel sečny a α směrový úhel tečny (Čermák 2004).

Je třeba uvést **derivace elementárních funkcí**, jež je třeba znát pro výpočty i složitějších derivací funkcí.

Derivace elementárních funkcí

Funkce	$y = f(x)$	Derivace funkce f	Podmínky platnosti vzorce
Konstantní funkce	$f: y = k$	$y' = 0$	$k \in R$
Lineární funkce	$f: y = x$	$y' = 1$	$x \in R$
Kvadratická funkce	$f: y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$x \in R; n \in N$
	$f: y = k \cdot x^n$	$y' = k \cdot n \cdot x^{n-1}$	x a $k \in R; n \in N$
Exponenciální funkce	$f: y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$x \in R$
Exponenciální funkce se základem e	$f: y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in R$
Logaritmická funkce	$f: y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$x \in (0; \infty)$
	$f: y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in R$
Sinus	$f: y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in R$

Kosinus	$f: y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in R$
Tangens	$f: y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$
Kotangens	$f: y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in (k\pi; (k+1)\pi)$

Zdroj: podle Čermáka (2004) a Pilecké (2004) vytvořil autor

Dále je nutno vědět, jak **derivovat součet, rozdíl, součin a podíl funkcí**. Tyto vzorce platí pro funkce f a g mající derivaci na určité množině M .

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(Vošický 2004; Došlá a Liška 2014).

Derivovat lze také **funkce složené**. Složenou funkci $f(g(x))$ derivujeme takto:

$$f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(Hrubý a Kubát 2008).

Pro lepší orientaci v této definici bude uveden příklad podle Vošického (2004) právě derivace složené funkce, v tomto případě funkce $f: y = \cos 4x$.

$$y' = (\cos 4x)' \cdot (4x)' = (-\sin 4x) \cdot 4 = -4 \sin 4x$$

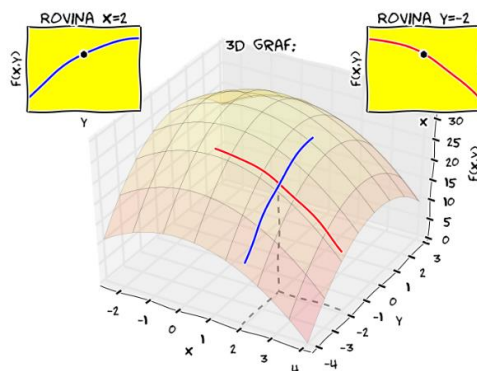
Lze také určit vyšší derivace funkcí. Postup výpočtu druhé derivace je jednoduchý – zderivujeme derivaci první. Níže bude rozebrán příklad určení **druhé derivace** funkce (značíme y'') z publikace Čermáka (2004).

Urči derivaci funkce $y = \ln x$ pro $x > 0$.

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y'' = -1 \cdot (x^{-2}) = -\frac{1}{x^2}$$

Parciální derivace využíváme pro výpočty s funkcemi o více proměnných. Rozlišujeme parciální derivace podle jednotlivých proměnných. Derivujeme vždy pouze vzhledem k jedné proměnné. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ udává rychlost změny f při změnách veličiny x . Pokud parciálně derivujeme podle proměnné x , pak y považujeme za konstantu.



Parciální derivace funkce f v bodě $[2, -2]$ jsou derivace křivek vzniklých na řezech rovinami $x=2$ a $y=-2$, zdroj: http://user.mendelu.cz/marik/wiki/am/slidy/derivace/index_h.html

Geometricky lze toto popsat tak, že studujeme křivku, jež vznikne na řezu grafu funkce $z = f(x, y)$ rovinou y (Mařík 2014-2019).

Kurfürst (2017a) uvádí příklady pro výpočet parciálních derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ funkce $f(x, y) = x^2 + x - y$. Výsledky mají být následující: $2x + 1$ a -1 . Nyní si popíšeme postup, jak se dostat k těmto výsledkům.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1 - 0 = 2x + 1$$

Proměnnou x tedy klasicky zderivujeme a y je považována za konstantu, derivace y je tedy rovna 0.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 0 - 1 = -1$$

V tomto případě je konstantou x , a tedy i x^2 . Proměnnou y tentokrát derivujeme podle vzorce derivace lineární funkce $f'(x) = 1$, kde pouze místo x použijeme y .

Velmi podstatným využitím derivací je zjišťování **průběhu funkcí**. Pomocí první a druhé derivace určíme, zda je funkce rostoucí či klesající, její lokální minimum a maximum a také konvexnost a konkávnost funkce. Pokud je funkce konvexní nebo konkávní, lze výpočtem také najít inflexní bod (Čermák 2004).

Rostoucí a klesající funkce

Pokud je funkce spojitá v určitém uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$ a má derivaci $f'(x)$ pro každé $x \in (a; b)$, pak platí:

- c) funkce je na $\langle a; b \rangle$ **rostoucí**, pokud její derivace $f'(x) > 0$, tedy je kladná,
- d) funkce je na $\langle a; b \rangle$ **klesající**, pokud její derivace $f'(x) < 0$, tedy je záporná

(Hrubý a Kubát 2008; Vošický 2004).

Jako neklesající se označuje funkce, kde $f'(x) \geq 0$. Pro nerostoucí funkci platí $f'(x) \leq 0$ (Čermák 2004).

Extrémy funkce

Lokální maximum funkce leží v bodě, v jehož bezprostředním okolí funkce nejprve roste a potom klesá. Pro lokální minimum je to opačně, nejprve funkce v okolí bodu klesá a vzápětí roste (Pilecká 2004). Podle Bauera et al. (2015) lze definovat lokální extrémy pomocí derivací takto: pokud má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a zároveň existuje $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.

Derivace funkce v bodě a , jenž je lokálním extrémem, je rovna nule nebo derivace neexistuje. Pokud platí $f'(x_0) = 0$, bod x_0 se nazývá stacionárním bodem. Tento bod však může i nemusí být lokálním extrémem. Pro prokázání extrému je nutno prověřit i δ –okolí bodu x_0 nebo použít druhé derivace (Čermák 2004). Pokud chceme prokázat lokální extrém pomocí druhé derivace, platí podle Vošického (2004) toto:

Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 hodnotu derivace $f'(x_0) = 0$ a existuje druhá derivace $f''(x_0)$, pak

- 1) *Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 **lokální minimum***
- 2) *Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 **lokální maximum***
- 3) *Je-li $f''(x_0) = 0$, nelze o existenci extrému rozhodnout pomocí druhé derivace.*

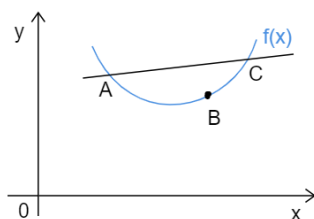
Dále jsou zavedeny pojmy jako globální extrémy – globální minimum a globální maximum. Globálním extrémem vyjádříme extrémy v celém definičním oboru funkce, a ne pouze v okolí jednoho bodu. Výpočtem je lze zjistit určením lokálních extrémů funkce v $\langle a; b \rangle$ a hodnot $f(a)$ a $f(b)$. Poté porovnáme extrémy s hodnotami $f(a)$ a $f(b)$, vybereme z nich to nejmenší, ev. největší, a to je globálním extrémem. (Hrubý a Kubát 2008; Vošický 2004).

Konvexnost a konkávnost funkce

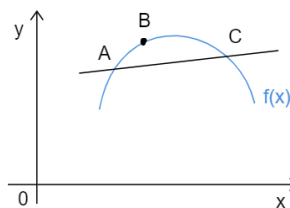
Podle Čermáka (2004) lze konvexnost a konkávnost funkce definovat:

Nechť je dána funkce $f(x)$, která je definována na intervalu $\langle a; b \rangle$. Nechť jsou dány tři body této funkce $A[x_1; f(x_1)]$, $B[x_2; f(x_2)]$, $C[x_3; f(x_3)]$ pro x_1, x_2, x_3 z intervalu $\langle a; b \rangle$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_3$. Nechť body A a C určují přímku. Potom:

- Leží-li jakýkoliv bod B pod každou takovou přímkou AC nebo na této přímce, pak říkáme, že funkce $f(x)$ je konvexní na intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Leží-li jakýkoliv bod B nad každou takovou přímkou AC nebo na této přímce, pak říkáme, že funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Leží-li jakýkoliv bod B pod každou takovou přímkou AC, pak říkáme, že funkce $f(x)$ je ryze konvexní na intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Leží-li jakýkoliv bod B nad každou takovou přímkou AC, pak říkáme, že funkce $f(x)$ je ryze konkávní na intervalu $\langle a; b \rangle$.



Konvexní funkce, zdroj: podle Čermáka (2004) vytvořil autor



Konkávní funkce, zdroj: podle Čermáka (2004) vytvořil autor

U spojitě funkce $f(x)$, pro kterou lze vypočítat druhou derivaci, jsme schopni určit její konvexnost či konkávnost právě podle hodnoty druhé derivace.

- Funkce je na $\langle a; b \rangle$ **konvexní**, pokud je $f''(x) \geq 0$.
- Funkce je na $\langle a; b \rangle$ **ryze konvexní**, pokud je $f''(x) > 0$.
- Funkce je na $\langle a; b \rangle$ **konkávní**, pokud je $f''(x) \leq 0$.
- Funkce je na $\langle a; b \rangle$ **ryze konkávní**, pokud je $f''(x) < 0$

(Čermák 2004).

Inflexní bod

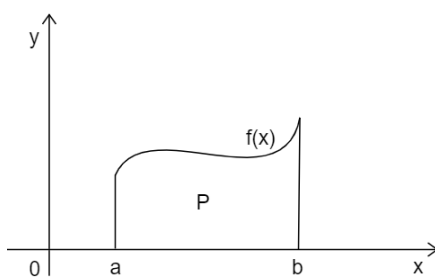
Inflexním bodem se označuje bod $x_0 \in (a; b)$ funkce $f(x)$, jež je definována na intervalu $\langle a; b \rangle$, pokud v intervalu $\langle a; x_0 \rangle$ je funkce konkávní (konvexní) a v intervalu

$\langle x_0; b \rangle$ je konvexní (konkávní). Jedná se tedy o bod, kde se konvexnost funkce mění v konkávnost nebo naopak. Pro inflexní bod x_0 platí $f''(x_0) = 0$ (Čermák 2004).

Integrální počet

Integrální počet byl zaveden za tím účelem, abychom mohli spočítat **plochu pod grafem funkce** nebo plochu jakéhokoliv rovinného obrazce pomocí nekonečně mnoha malých obdélníků, jelikož je nemožné ji přímo určit. Obdélníků je nekonečně mnoho, setkáváme se tedy s pojmem „nekonečně velký“ (Došlá a Liška 2014).

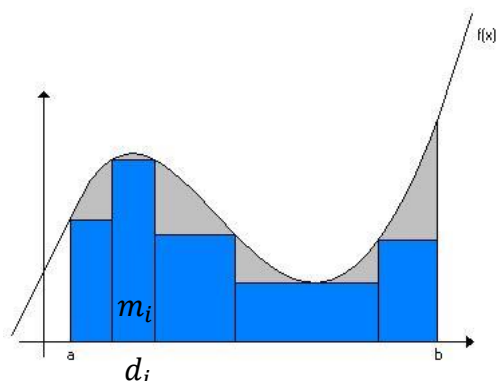
Tento výpočet pomocí nekonečně mnoha obdélníků si nyní popíšeme. Funkce f je nezáporná a omezená na intervalu $\langle a; b \rangle$ a v tomto intervalu také spojitá. Snažíme se najít obsah plochy P („podgraf“). Plocha P je ohraničena grafem funkce f , osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$. Pro přesný výpočet jsou potřeba obdélníky co nejužší – tak úzké, až se mění v úsečky. Počítáme tedy s **nekonečně mnoha úsečkami**. (Došlá a Liška 2014).



Plocha P - "podgraf", zdroj: podle Došlé a Lišky (2014) vytvořil autor

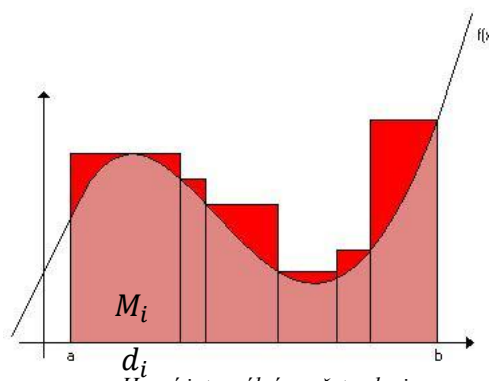
Vošický (2004) popisuje, jak byl odvozen integrální počet pomocí nekonečně mnoha obdélníků:

interval $\langle a; b \rangle$ rozdělíme na n intervalů délek d_1, d_2, \dots, d_n . Pro každý takovýto interval uvažujeme součin jeho délky d_i s minimem m_i funkce na tomto intervalu a součin jeho délky d_i s maximem M_i na daném intervalu.



Dolní integrální součet, zdroj:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AFv_integr%C3%A1l, upravil autor podle Vošického (2004)



Horní integrální součet, zdroj:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AFv_integr%C3%A1l, upravil autor podle Vošického (2004)

Dostaneme tedy dolní integrální součet a horní integrální součet. Tyto hodnoty udávají hledaný obsah obrazce. Podrobněji bude tato problematika popsána v kapitole o určitém integrálu (Vošický 2004).

Pro takzvanou **primitivní funkci** F platí rovnost $F'(x) = f(x)$, kde F a f jsou funkce definované na otevřeném intervalu J a všechna $x \in J$. Tuto skutečnost čteme tak, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f (Hrubý a Kubát 2008).

Neurčitý integrál funkce f je množina všech primitivních funkcí k funkci f . Neurčitý integrál obecně zapisujeme $\int f(x) dx = F(x) + C$, kde $C \in R$ je integrační konstantou. Symbol \int je integračním znakem, x je integrační proměnná a funkce f je v tomto případě nazývána integrandem. Výpočet k určení neurčitého integrálu nazýváme integrací funkce f (Vošický 2004). Pro urychlení integrace je vhodné znát tyto základní odvozené vzorce:

Vzorce pro neurčitý integrál

Vzorec	Podmínky platnosti vzorce
$\int 0 dx = C$	$x \in R$
$\int dx = x + C$	$x \in R$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in N; x \in R$
$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	$r \in R - \{-1\}; x \in (0; \infty)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$x \in R - \{0\}$
$\int e^x dx = e^x + C$	$x \in R$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a \in (0; \infty) - \{1\}; x \in R$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$x \in R$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$x \in R$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$x \in \left(-\frac{1}{2}\pi + k\pi; \frac{1}{2}\pi + k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$x \in (k\pi; \pi + k\pi); k \in \mathbb{Z}$

Zdroj: podle Hrubého a Kubáta (1997) a Vošického (2004) vytvořil autor

Pro výpočty jsou také zásadní tyto věty (Čermák 2004):

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$\int c \cdot f(x) = c \int f(x) dx.$$

Došlá a Liška (2014) nám ukazují, jak integrovat funkci $y = x^3$ a funkci $y = \frac{1}{2x-5}$:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{2x-5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x-5} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-5| + C.$$

Existují dvě hojně používané metody pro integraci funkce, a to metoda per partes a metoda integrace substitucí.

Metoda per partes (neboli integrace po částech) využívá vzorce $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$. Tato metoda je používána v případě, že k u' lze snadno nalézt u (Pilecká 2004). Níže uvedený příklad ilustruje, jak se právě tato metoda využívá k výpočtu.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= e^x \cdot x^2 - 2 \int e^x \cdot x dx = e^x \cdot x^2 - 2 \left[x e^x - \int 1 \cdot e^x dx \right] = \\ &= e^x x^2 - 2[x e^x - e^x + C] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2C = \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C_1 \end{aligned}$$

Per partes 1

- $u' = e^x \rightarrow u = e^x$
- $v = x^2 \rightarrow v' = 2x$

Per partes 2

- $u' = e^x \rightarrow u = e^x$
- $v = x \rightarrow v' = 1$

(Vošický 2004)

Druhou metodou je **substituční metoda** (neboli metoda nahrazení), která je založena na principu zavedení nové proměnné pro zjednodušení integrace funkce. Metoda substituce je odvozena od vzorce pro výpočet derivace složené funkce. Výsledkem mnoha provedených kroků při úpravě vzorce platného právě pro složenou funkci je $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt$, kde $t = g(x)$. Hledáme tedy vhodné t (Hrubý a Kubát 2008; Čermák 2004). Úspěšný výpočet závisí na třech krocích:

- 1) převedení všech veličin v původní proměnné x na veličiny v nové proměnné t ,
- 2) výpočet integrálu v nové proměnné t ,
- 3) vyjádření výsledku v původní proměnné x

(Pilecká 2004).

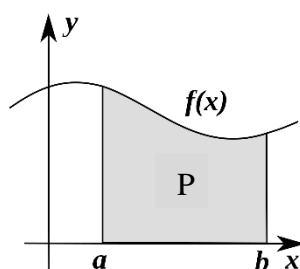
Pokud se budeme držet těchto kroků, bude náš výpočet vypadat stejně jako výpočet Vošického (2004):

substituční metodou určete $\int \sin(3x + 1) dx$

Substituce: $3x + 1 = t$ derivováním: $3 dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

Pak: $\int \sin(3x + 1) dx = \int \sin t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C = -\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + C$

Se základy teorie **určitého integrálu** jsme se již setkali na začátku této kapitoly, a to s obsahem plochy pod grafem omezeném „ze všech 4 stran“, tedy tentokrát pracujeme s určitou částí grafu v intervalu $\langle a; b \rangle$. Znamená to, že zkoumáme určitý integrál funkce f od a do b .



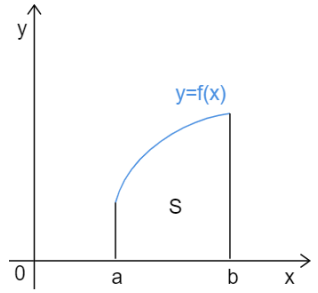
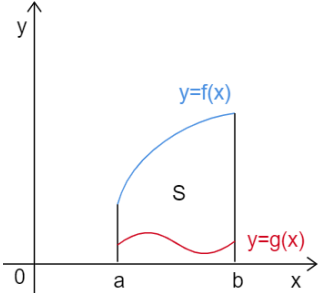
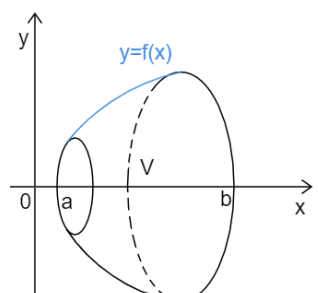
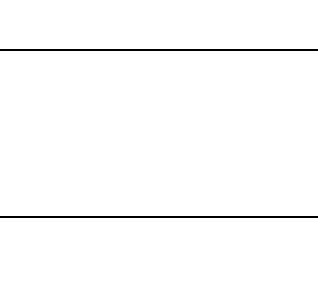
Určitý integrál, zdroj:
<https://cs.wikipedia.org/wiki/Integr%C3%A1l>,
 upravil autor

Určitý integrál zapisujeme jako $\int_a^b f(x) dx$ a jedná se právě o limitu dolního a horního integrálního součtu. a je dolní mezí a b horní mezí integrálu, $f(x)$ je integrandem a \int integračním znaménkem. Pro výpočty používáme Newtonova-Leibnizova vzorce: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ (Vošický 2004). Příklad uvádí Pilecká (2004):

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Aplikací integrálního počtu jsme schopni najít odpovědi na spousty otázek. Výběr toho, na co lze integrace využít, bude uveden v tabulce.

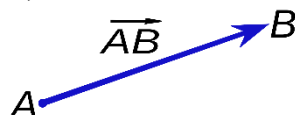
Aplikace integrálního počtu

Co lze spočítat		Vzorec	Obrázek
Obsah rovinného obrazce	Obsah křivočarého lichoběžníku	$S = \int_a^b f(x) dx$	
	Obsah obrazce ohraňovaného 2 grafy	$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$	
Objem rotačního tělesa		$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$	
Obsah pláště rotačního tělesa		$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$	
Fyzikální aplikace	Dráha přímocarého pohybu	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$	
	Práce	$A = \int_a^b F(x) dx$	

Zdroj: Podle Vošického (2004) vytvořil autor, obrázky podle Vošického (2004) vytvořil autor

Vektorový počet

Pro zavedení pojmu vektor je nutné se seznámit s tím, co je orientovaná úsečka. **Orientovaná úsečka** je úsečka, která má počáteční a koncový bod. Záleží tedy na pořadí těchto bodů, tj. jeden z nich je vždy počáteční a druhý koncový a nelze je zaměnit. Pokud je počátečním bodem A a koncovým bodem B , pak je orientovaná úsečka AB určena uspořádanou dvojicí $[A; B]$. Tuto orientovanou úsečku zapisujeme jako \overrightarrow{AB} (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007).



Orientovaná úsečka AB , zdroj:

[https://sk.wikipedia.org/wiki/Vektor_\(matematika\)](https://sk.wikipedia.org/wiki/Vektor_(matematika))

Vektor je množinou všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a mají stejný směr, tedy jsou rovnoběžné. Vektory zapisujeme pomocí malých písmen se šipkou. Nejčastěji vektory zapisujeme jako \vec{u}, \vec{v} nebo \vec{w} (Kočandrle a Boček 1995; Čermák a Červinková 2007).

Vektor definujeme pomocí **souřadnic**, a to takto: $\vec{u} = (u_1; u_2)$, ev. $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ pokud vektor existuje v prostoru (kromě os x a y zavádíme novou osu z). Pokud je vektor určen orientovanou úsečkou AB , jeho souřadnice získáme výpočty $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$ (Kočandrle a Boček 1995).

Velikost vektoru \vec{u} neboli délka orientované úsečky AB se zapisuje $|\vec{u}| = |\overrightarrow{AB}|$. Velikost vektoru $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ se vypočítá jako $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ (Vošický 2004; Čermák a Červinková 2007).

Tzv. **jednotkovým vektorem** je vektor pro nějž platí $|\vec{u}| = 1$. **Nulový vektor** $\vec{0} = (0; 0; 0)$ je určený nulovou orientovanou úsečkou. **Opačným vektorem** k vektoru $\vec{u} = B - A$ je vektor $-\vec{u} = A - B$. Opačný vektor k vektoru $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ je tedy $-\vec{u} = (-u_1; -u_2; -u_3)$ (Kočandrle a Boček 1995; Čermák a Červinková 2007).

S vektory (např. $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$) lze provádět spoustu **operací**.

Vybrané operace s vektory

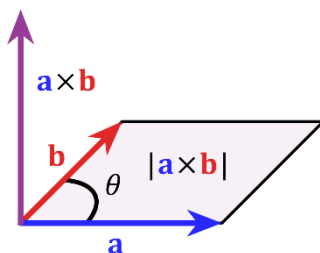
Operace	Vzorec
Součet vektorů	$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$
Rozdíl vektorů	$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$

k-násobek vektoru	$k \cdot \vec{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$
Skalární součin vektorů	$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1v_1; u_2v_2; u_3v_3)$
Vektorový součin	$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - v_2u_3; u_3v_1 - v_3u_1; u_1v_2 - v_1u_2)$

Zdroj: Podle Vošického (2004) a Čermák a Červinkové (2007) vytvořil autor

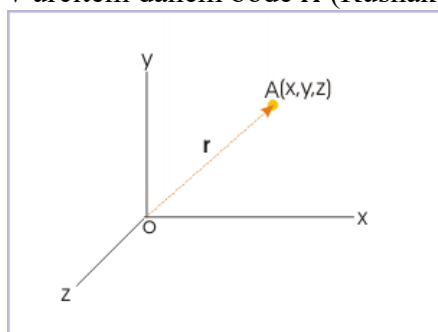
Pokud **skalární součin** dvou nenulových vektorů je roven nule, znamená to, že tyto dva vektory jsou navzájem kolmé: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$. Pro dva nenulové vektory také platí $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$. Jsme tedy schopni zjistit úhel mezi dvěma vektory pomocí skalárního součinu a jejich velikostí (Čermák a Červinková 2007).

Vektorový součin lze spočítat pouze pro vektory v prostoru. Pomocí vektorového součinu lze snadno najít vektor kolmý ke dvěma vektorům: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \rightarrow \vec{w} \perp \vec{u}; \vec{w} \perp \vec{v}$. Velikost vektoru \vec{w} ($|\vec{w}| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \varphi$) odpovídá velikosti plochy rovnoběžníku, jenž je určen vektory \vec{u} a \vec{v} , proto je vektorový součin využíván právě pro výpočet obsahu rovnoběžníku.



Vektorový součin pro vektory a a b, zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product

Takzvaný **polohový vektor** má počáteční bod v počátku soustavy souřadnic (tedy v bodě $O[0; 0; 0]$) a konec v určitém daném bodě A (Rusňák 2007).



Polohový vektor v prostoru, zdroj: <https://cnx.org/contents/MymQBhVV@175.8:0pcQShR1@7/Position-vector>

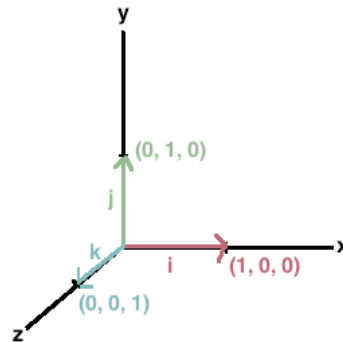
Existují také **jednotkové vektory souřadnicových os**. Jedná se o jednotkové vektory, tzn. jejich velikost je rovna 1, a zároveň „leží“ na osách x, y, z soustavy souřadnic. Tyto vektory typicky označujeme jako \vec{i}, \vec{j} a \vec{k} . Vektor \vec{i} patří k ose x , \vec{j} k ose y a \vec{k} k ose z .

Podle jejich polohy souřadnice vypadají následovně:

$$\vec{i} = (1; 0; 0),$$

$$\vec{j} = (0; 1; 0),$$

$$\vec{k} = (0; 0; 1)$$

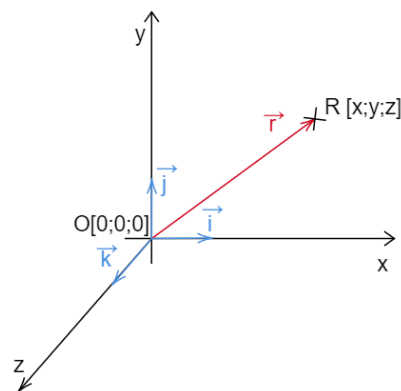


Jednotkové vektory souřadnicových os, zdroj:
<http://mathonline.wikidot.com/standard-unit-vectors>

Jakýkoliv vektor z prostoru lze vyjádřit jako $\vec{u} = u_1\vec{i}; u_2\vec{j}; u_3\vec{k}$ (Kuben a Račková 2014).

Vektorová funkce je funkce, jejímiž proměnnými jsou reálná čísla a hodnotami jsou vektory. Podstata derivace vektorové funkce je v derivaci jednotlivých složek funkce.

Derivace vektorové funkce vyjadřuje míru změny polohového vektoru například za určitý čas. Změna **dráhy** za určitý čas (tj. **rychlost**) je pouze jednou ze situací, kde lze použít vektorové rovnice. Derivujeme tedy vektor dráhy \vec{r} **podle času t** (Zindulka 2004, Green et al. 2008).



Znázornění dráhy (vektor r) v soustavě souřadnic, zdroj: vytvořil autor

Je dána vektorová funkce $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Takto ji zderivujeme:

$$\vec{r}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}.$$

Touto derivací tedy zjistíme vektor rychlosti a spočítáním velikosti tohoto vektoru získáme skalární (tedy bez informace o směru) velikost rychlosti (Green et al. 2008).

Stejně tak můžeme určit vektor **zrychlení** pomocí druhé derivace této funkce podle času, zrychlení je totiž určeno změnou rychlosti (první derivace dráhy) za určitý čas:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}.$$

(Green et al. 2008)

Značky v podobě jedné nebo dvou teček jsou speciálním značením první a druhé derivace podle času. Toto značení zavedl Isaac Newton (West 2012-2015).

Integrace vektorové funkce se také provádí pomocí integrace jejích jednotlivých složek – toto platí pro neurčitý i určitý integrál. Integrace je „opakem“ derivace, proto ji můžeme využít k přechodu od zrychlení nebo rychlosti k dráze (kolektiv CK12 Math 2020; Dawkins 2020).

$$\int \vec{r}(t) dt = \int x(t) dt \vec{i} + \int y(t) dt \vec{j} + \int z(t) dt \vec{k} + \vec{c}$$
$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \int_a^b x(t) dt \vec{i} + \int_a^b y(t) dt \vec{j} + \int_a^b z(t) dt \vec{k}$$

(Dawkins 2020)

9.3 Test

Vážení,

tento test slouží ke zjištění úrovně matematických znalostí (budoucích) radiologických asistentek/asistentů. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Test je plně anonymní.

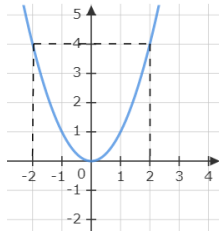
1) Do které množiny čísel patří imaginární číslo i ?

- a) přirozená čísla,
- b) celá čísla,
- c) reálná čísla,
- d) komplexní čísla.

2) Definiční obor funkce popisuje:

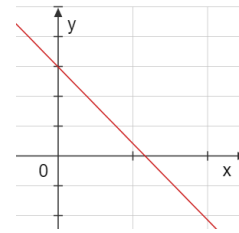
- a) jakých hodnot y nabývá funkce,
- b) jakých hodnot x nabývá funkce,
- c) zda je funkce omezená shora,
- d) zda je funkce omezená zdola.

3) Vyberte, který graf je grafem exponenciální funkce.



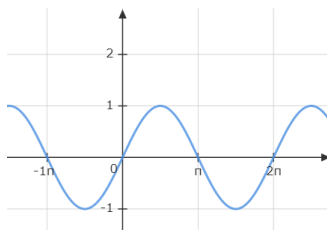
a)

Zdroj: vytvořil autor



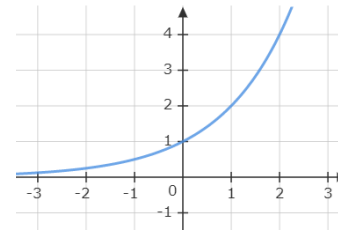
c)

Zdroj: vytvořil autor



b)

Zdroj: vytvořil autor



d)

Zdroj: vytvořil autor

4) Které tvrzení neplatí pro funkci sinus?

- a) $H(f) = R$,
- b) funkce sinus je periodická,
- c) funkce sinus je spojitá,
- d) funkce sinus je omezená.

5) Přibližná hodnota Eulerova čísla je:

- a) 2,718
- b) 3,140
- c) 8,319
- d) -273,15

6) Derivaci funkce y podle x zapisujeme jako:

- a) x' ,
- b) $\frac{dy}{dx}$,
- c) $f(x')$,
- d) $\ln y$.

7) Derivace funkce $y = x^n$ se rovná:

- a) x^{2n} ,
- b) $n \cdot x$,
- c) $n \cdot x^{n-1}$,
- d) 0.

8) Jakou vlastnost grafu funkce nelze najít pomocí derivace funkce?

- a) inflexní bod,
- b) růst nebo pokles,
- c) konvexnost nebo konkávnost,
- d) nejmenší periodu.

9) Zderivujte funkci $y = 4 \cdot x^2$.

- a) $y' = 0$,
- b) $y' = 8x$,
- c) $y' = x$,
- d) $y' = 4 \cdot x^4$.

10) Lokální minimum je:

- a) bod, v jehož okolí funkce nejprve klesá a poté roste,
- b) bod, v jehož okolí funkce nejprve roste a poté klesá,
- c) interval, v jehož okolí funkce nejprve klesá a poté roste,
- d) interval, v jehož okolí funkce nejprve roste a poté klesá.

11) Pomocí integrálního počtu počítáme:

- a) směrnici tečny ke grafu funkce,
- b) lokální extrémy,
- c) obsah plochy pod grafem funkce,
- d) periodičnost funkce.

12) Geometrická podstata integrálního počtu spočívá v:

- a) souřadnicích hraničních bodů funkce vymezené určitým intervalem,
- b) úhlu mezi tečnou grafu a osou x ,
- c) nekonečně mnoha úsečkách,
- d) co nejmenších rovnostranných trojúhelnících.

13) Integrujte funkci $y = x^6$.

- a) $\int x^6 dx = 6 \cdot x^5$,
- b) $\int x^6 dx = \frac{x^7}{7}$,
- c) $\int x^6 dx = 7 \cdot x^7$,
- d) $\int x^6 dx = \frac{x^5}{5}$.

14) Podstatou integrační metody per partes je:

- a) integrace po částech, kde zavádíme novou proměnnou t ,
- b) integrace po částech, kde volíme vhodné funkce u' a v ,
- c) metoda nahrazení, kde zavádíme novou proměnnou t ,
- d) metoda nahrazení, kde volíme vhodné funkce u' a v .

15) Určitý integrál lze zapsat jako:

- a) $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(a) - F(b) = P$,
- b) $\int f(x) dx = F(x) = P$,
- c) $\int f(x) dx = F(x) + C = P$,
- d) $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = P$.

16) Určete souřadnice vektoru \vec{u} určeného orientovanou úsečkou \overline{AB} pro $A[4; 2]$ a $B[3; 7]$.

- a) $\vec{u} = (7; 9)$,
- b) $\vec{u} = (-1; 5)$,
- c) $\vec{u} = (1; -5)$,
- d) $\vec{u} = (12; 14)$.

17) Pomocí derivace vektoru jsme schopni „přejít“:

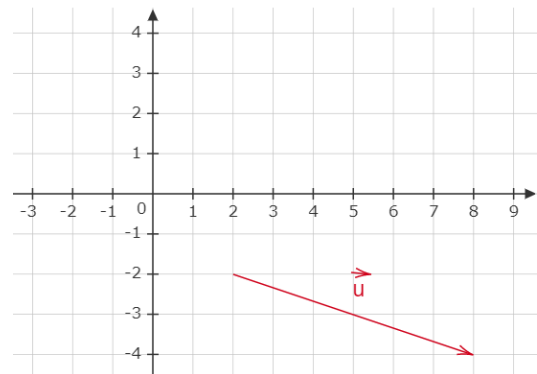
- a) od dráhy k rychlosti,
- b) od zrychlení k dráze,
- c) od rychlosti k dráze,
- d) od zrychlení k rychlosti.

18) Vektor o souřadnicích $(0; 0; 1)$ je vektorem:

- a) nulovým,
- b) jednotkovým na ose x ,
- c) jednotkovým na ose y ,
- d) jednotkovým na ose z .

19) Určete souřadnice vektoru \vec{u} z obrázku.

- a) $\vec{u} = (-4; -36)$,
- b) $\vec{u} = (12; 8)$,
- c) $\vec{u} = (6; -2)$,
- d) $\vec{u} = (10; -6)$.



Obrázek k 19. otázce, zdroj: vytvořil autor

20) Pomocí vektorového součinu vektorů \vec{u} a \vec{v} určíme:

- a) zda jsou tyto vektory navzájem kolmé,
- b) jaký je opačný vektor k těmto vektorům,
- c) součet velikostí obou vektorů,
- d) vektor kolmý na oba tyto vektory.

Nakonec vás poprosím o zodpovězení závěrečné otázky.

21) Kolik je Vám let?

Velmi vám děkuji za vyplnění testu, a tedy podílení se na výzkumu, jenž bude součástí mé bakalářské práce.

Barbora Jelínková.