

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA OPTIKY

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Separabilita částí postačující pro  
provázanost celku



Vypracovala:	<b>Olga Leskovjanová</b>
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	1701R027 Obecná fyzika a matematická fyzika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	doc. Mgr. Ladislav Mišta, PhD.
Termín odevzdání práce:	květen 2018



### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením doc. Mgr. Ladislava Mišty, PhD. a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 21. května 2018

.....  
Olga Leskovjanová



## Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Olga Leskovjanová
Název práce	Separabilita částí postačující pro provázanost celku
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra optiky
Vedoucí práce	doc. Mgr. Ladislav Mišta, PhD.
Rok obhajoby práce	2018
Abstrakt	Cílem této práce je teoretický návrh a následná analýza výsledků experimentu ověřujícího existenci skutečně multipartitně kvantově provázaného stavu, jehož provázanost lze potvrdit pouze ze separabilních redukováných matic hustoty tohoto stavu. Pro experiment jsme nejprve navrhli logický obvod generující stav tří qubitů s uvedenou vlastností, který byl nalezen v práci [N. Miklin, T. Moroder, and O. Gühne, Phys. Rev. A <b>93</b> ,020104( <i>R</i> )(2016)]. Analýza separability redukováných stavů byla provedena pomocí kritéria částečné transpozice. Přítomnost skutečné multipartitní kvantové provázanosti byla potvrzena numerickým nalezením úplně rozložitelného svědka provázanosti, který působí pouze na dvouqubitové redukované matice hustoty. Experimentální data potvrzují úspěšnou přípravu stavu s požadovanými vlastnostmi.
Klíčová slova	kvantová fyzika, provázanost, skutečná multipartitní provázanost, svědek kvantové provázanosti
Počet stran	32
Počet příloh	1
Jazyk	český

# Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Olga Leskovjanová
Title	Separability of parts as a sufficiency for entanglement of the whole
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Optics
Supervisor	doc. Mgr. Ladislav Mišta, PhD.
The year of presentation	2018
Abstract	<p>The aim of this paper is the theoretical design and consecutive analysis of the results of the experiment verifying the existence of a genuine multipartite entangled state whose entanglement can be confirmed only by separable reduced density matrices of this state. For the experiment, we first designed a logical circuit generating a state of three qubits with the specified property, which was found in paper [N. Miklin, T. Moroder, and O. Gühne, Phys. Rev. A <b>93</b>,020104(<i>R</i>)(2016)]. The analysis of the separability of the reduced states was made using the partial transpose criterion. The presence of genuine multipartite entanglement was confirmed by the numerical finding of a fully decomposable entanglement witness, which only acts on two-qubit reduced density matrices. Experimental data confirms the successful preparation of the state with the desired properties.</p>
Keywords	quantum physics, entanglement, genuine multipartite entanglement, entanglement witness
Number of pages	32
Number of appendices	1
Language	czech

# Obsah

<b>1</b>	<b>Kvantová provázanost</b>	<b>11</b>
1.1	Základní formalismus . . . . .	11
1.2	Bipartitní kvantová provázanost . . . . .	12
1.3	Multipartitní kvantová provázanost . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Kritéria kvantové provázanosti</b>	<b>15</b>
2.1	Kritérium Peréze-Horodeckých . . . . .	15
2.2	Svědék provázanosti . . . . .	16
2.2.1	Rozložitelný svědek provázanosti . . . . .	17
2.2.2	Úplně rozložitelný svědek provázanosti . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Globální vlastnosti plynoucí z redukovaných stavů</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Studium zadaného stavu</b>	<b>21</b>
4.1	Vlastnosti teoretického stavu . . . . .	21
4.2	Návrh logického obvodu . . . . .	22
4.3	Analýza experimentálních dat . . . . .	23





# Úvod

Současná společnost se dá charakterizovat jako informační společnost. Informace je totiž hlavním hybatelem současné doby. S tím přichází stále větší nároky na její zpracování. Zvětšují se požadavky na množství informace nutné ke zpracování. Je potřeba práci s ní neustále zrychlovat a udělat ji bezpečnější. Ruku v ruce s tím jde i energetická náročnost zpracování informace. Nosiči informace jsou fyzikální systémy, způsoby zacházení s informacemi jsou tedy podřízeny fyzikálním zákonům. O tom se zmiňuje již Rolf Landauer svým výrokem: "information is physical". Díky tlaku na úsporu energie a samotné zefektivnění práce s informacemi jsme nuceni pracovat se stále menšími nosiči informace. Stálým zmenšováním se dostáváme až k objektům z mikrosvěta. Manipulace s informací kódovanou do těchto objektů se řídí zákony kvantové mechaniky. Tyto zákony jsou velmi odlišné od zákonů klasického světa, jež můžeme pozorovat svými smysly. Popisem zákonitostí, jimiž se tato tak zvaná kvantová informace řídí, se zabývá kvantová teorie informace. Ta stojí na pomezí mezi kvantovou mechanikou a klasickou teorií informace a vedla k objevení nových modelů počítačů (kvantové počítače). Stimulovala také objev nových způsobů komunikace (kvantová komunikace), kam například patří kvantová teleportace [1] nebo kvantová kryptografie [2] a další.

Jedním ze základních nástrojů kvantové informatiky je kvantová provázanost. Je to vlastnost složených kvantových objektů a je důsledkem kvantového principu superpozice a kvantového popisu těchto objektů. Z matematického pohledu stavový vektor popisuje provázaný stav, pokud ho nelze zapsat jako produkt stavových vektorů jednotlivých podsystémů. V opačném případě se jedná o separabilní stav. Z méně abstraktního úhlu pohledu je provázanost synonymum pro korelace, jež nelze vysvětlit v rámci lokálně-realistické teorie [3]. Tato definice provázanosti se vztahuje na čisté stavy, jež obsahují veškerou dostupnou informaci. Čisté stavy jsou idealizací, protože v praxi máme vždy v důsledku nedokonalostí k dispozici menší informaci a správný popis pak poskytují tzv. smíšené stavy. Kvantová provázanost smíšených stavů je definována jako nemožnost připravit daný provázaný smíšený stav jen pomocí lokálních operací a klasické komunikace. Kvantová provázanost hraje důležitou roli při testech tzv. kvantové nelokality, jakou je například narušení Bellových nerovností [4], a v aplikacích jako třeba kvantová teleportace či některé protokoly pro kvantovou distribuci klíče [4].

Pojem kvantové provázanosti lze zobecnit na více než dva kvantové systémy. Zatímco u dvou systémů je situace jednoduchá, jsou buďto provázané nebo separabilní, u tří kvantových systémů rozlišujeme několik typů kvantové provázanosti. Nejčastěji se v praxi využívají stavy skutečně multipartitně provázané [5], jež nejde vytvořit směšováním stavů separabilních vzhledem k některému bipartitnímu dělení [6]. Tyto stavy vykazující nový typ kvantové provázanosti jsou základem jednocestného kvantového počítání [7] či sdílení kvantového tajemství [8].

Jednou ze zajímavých vlastností kvantové provázanosti je vztah mezi globálním stavem a jeho redukcemi. Čisté provázané stavy jsou charakteristické tím, že ačkoliv

globální stav je čistý a máme o něm tedy veškerou informaci, neobsahuje veškerou dostupnou informaci o jeho částech, neboť lokální stavy podsystémů jsou smíšené. Toto chování provázaných stavů bylo inspirací pro mnoho otázek o vztahu mezi globálním kvantovým stavem a jeho redukcemi. Jednou z aktuálních otázek, jež je v tomto kontextu analyzována, je, zda-li můžeme usuzovat něco o vlastnostech neznámého složeného kvantového systému pouze ze znalosti jeho částí. Jako příklad situace, kdy tomu tak skutečně je, můžeme uvést čisté bipartitní stavy, kde smíšenost redukovaných matic hustoty implikuje přítomnost kvantové provázanosti. Podobně je tomu i u větších systémů. Pokud je nějaký bipartitní redukovaný stav kvantově provázaný, pak musí být provázaný vzhledem k příslušnému dělení i každý globální stav, jehož částí daný bipartitní stav je. Existují ale také separabilní bipartitní stavy, jež jsou slučitelné pouze s provázanými globálními stavy. Navíc z některých separabilních redukovaných stavů dokonce přímo plyne skutečná multipartitní provázanost globálního stavu, jehož jsou součástí.

V této bakalářské práci se zabýváme právě posledním typem stavů. Konkrétně se zabýváme stavem navrženým v článku [9], který je skutečně multipartitně provázaný, přičemž tato vlastnost jde ukázat z jeho redukovaných stavů, jež jsou separabilní.

Pro tento stav odvozujeme schéma pro jeho experimentální přípravu. Protože redukované separabilní stavy leží blízko množiny provázaných stavů, uvažujeme stav [9] s optimální příměsí bílého šumu tak, aby byl demonstrován efekt co nejzřetelnější. Podle schématu byl stav připraven experimentálně pomocí lineárně-optického obvodu a my jsme se podíleli na vyhodnocení experimentálních dat. Práce je strukturována následovně. V Kapitole 1 se podrobněji podíváme na kvantovou provázanost a kvantové systémy, s nimiž pracujeme. V Kapitole 2 ukážeme hlavní způsoby jak ověřit, zda je daný kvantový stav separabilní či obsahuje určitý typ provázanosti. Kapitola 3 se věnuje vztahu mezi globálním stavem a jeho redukcemi, kde se také podrobněji podíváme na některé vlastnosti studovaného stavu. V poslední Kapitole 4 pak uvedeme výsledky analýzy experimentální přípravy studovaného stavu.

# Kapitola 1

## Kvantová provázanost

Pojem kvantové provázanosti do světa kvantové fyziky poprvé zavedl Erwin Schrödinger v článku [10]. Ještě dříve se kvantová provázanost objevuje v práci Einsteina, Podolskyho a Rosena [11] v souvislosti s diskuzí o úplnosti kvantové mechaniky. Od té doby se kvantová provázanost stala nedílnou součástí kvantového světa a je jednou z nejdůležitějších složek většiny kvantově-informatických experimentů. Než se vrhneme do prozkoumávání tajů kvantové provázanosti, vyložíme základy formalismu kvantové mechaniky.

### 1.1 Základní formalismus

Na rozdíl od klasické fyziky jsou stavy kvantového systému popsány vektorem ze separabilního komplexního Hilbertova prostoru. Hilbertův prostor je úplný lineární vektorový prostor se skalárním součinem. Úplnost je zde brána vzhledem ke vzdálenosti indukované skalárním součinem, linearita prostoru je potřeba pro zaručení principu superpozice. Prostor potřebuje být komplexní, protože v kvantové fyzice relativní fáze mezi vektory v superpozici hraje významnou roli. Pokud je prostor navíc i separabilní, můžeme pracovat se spočetnou ortogonální bází. Každému kvantovému systému přísluší určitý stavový prostor  $\mathcal{H}$ . Danému systému ve stavovém prostoru odpovídá jednorozměrný podprostor v  $\mathcal{H}$ , tj. paprsek.

Kvantový systém můžeme popsat pomocí stavového vektoru  $|\psi\rangle$  z  $\mathcal{H}$ . Stavové vektory obsahují veškerou dostupnou informaci o daném systému. O stavech systémů popsaných pomocí stavových vektorů mluvíme jako o čistých stavech. Čistý stav je idealizace, v důsledku různých nedokonalostí experimentálních zařízení a interakcí systémů s okolím nemáme veškerou dostupnou informaci o stavu studovaného systému. O těchto stavech mluvíme jako o smíšených stavech. Jsou popsány pomocí matice hustoty  $\rho$ , což je pozitivní semidefinitní hermitovský operátor, tzv.  $\rho \geq 0$  a  $\rho = \rho^\dagger$  s jednotkovou stopou, tj.  $\text{Tr}(\rho) = 1$ . Matici hustoty můžeme obecně zapsat ve tvaru

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|,$$

kde  $p_i$  jsou pravděpodobnosti, s nimiž se daný systém nachází ve stavu  $|\psi_i\rangle$ .

Pokud pracujeme se systémem, jež je složený z více podsystémů se stavovými prostory  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ , stavový prostor celého systému je tenzorovým součinem stavových prostorů jednotlivých podsystémů

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n.$$

Nejjednodušším kvantovým systémem je tzv. kvantový bit, též zvaný *qubit*. Stavový prostor jednoho qubitu je  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  s bázovými stavy  $|0\rangle$  a  $|1\rangle$ . Qubit lze realizovat pomocí horizontální a vertikální polarizace fotonu či pomocí prostorových stupňů volnosti fotonu.

## 1.2 Bipartitní kvantová provázanost

O systémech složených ze dvou částí, například dvou qubitů, mluvíme jako o bipartitních systémech [12]. Tyto systémy jsou nejjednoduššími systémy, u nichž pozorujeme kvantovou provázanost. Bipartitní systém může být pouze separabilní nebo provázaný. Separabilní bipartitní stavy lze zapsat ve tvaru

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)}, \quad (1.1)$$

kde  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $\sum_i p_i = 1$  jsou pravděpodobnosti a  $\rho_A$ , resp.  $\rho_B$ , je matice hustoty podsystemu  $A$ , resp.  $B$ .

## 1.3 Multipartitní kvantová provázanost

Pokud je systém složen z více jak dvou částí, mluvíme již o multipartitních systémech. Protože se v práci dále zabýváme tripartitním systémem, budeme se již při vysvětlování multipartitní provázanosti věnovat pouze třem kvantovým systémům označovaným jako  $A, B$  a  $C$ . Tento případ je také nejjednodušším příkladem multipartitního systému.

Rozdělení stavů podle separability se s přibývajícím počtem podsystemů komplikuje. Tripartitní stavy rozdělujeme do pěti *tříd separability* [13]. Při tomto rozdělení hraje důležitou roli dělení tří kvantových systémů do dvou částí, kdy nám vznikají tři možná dělení a to  $A|BC$ ,  $B|AC$  a  $C|AB$ . Vzhledem k těmto dělením pak rozlišujeme následující třídy separability.

### 1. Úplně neseperabilní stavy

Tyto stavy jsou provázané vzhledem ke všem třem dělením.

### 2. Jedno-qubitově biseperabilní stavy

Třída těchto stavů se dá jednoduše také popsat jako třída stavů separabilních vzhledem k jednomu dělení a provázaných vzhledem ke zbylým dvěma dělením. Tyto stavy se tedy dají zapsat v jednom z těchto tvarů v závislosti na tom, vůči kterému dělení jsou separabilní:

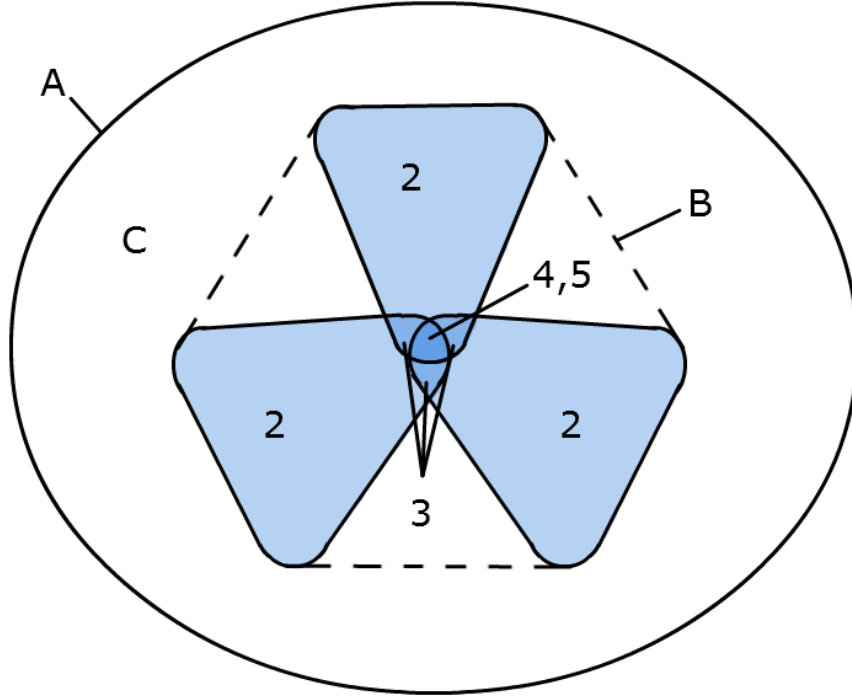
$$\rho_{A|BC} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_{BC}^{(i)} \quad (1.2)$$

nebo

$$\rho_{B|AC} = \sum_i p_i \rho_B^{(i)} \otimes \rho_{AC}^{(i)} \quad (1.3)$$

nebo

$$\rho_{C|AB} = \sum_i p_i \rho_C^{(i)} \otimes \rho_{AB}^{(i)}. \quad (1.4)$$



Obrázek 1.1: Znázornění rozdělení množiny všech tripartitních kvantových systémů (A) na jednotlivé třídy separability. Bílou oblast vyplňují úplně neseparabilní stavy. Stavy v barevných oblastech pak spadají postupně do třídy jedno-qubitově biseparabilních (2), dvou-qubitově biseparabilních (3), tří-qubitově biseparabilních (4) a úplně separabilních stavů (5). Dále jsou tripartitní kvantové systémy rozděleny také na skutečně multipartitní (C) a biseparabilní stavy (B).

3. *Dvou-qubitově biseparabilní stavy*

Dvou-qubitově biseparabilní stavy jsou separabilní vzhledem ke dvěma dělením. Stav patřící do této třídy může být separabilní vzhledem k dělení  $A - (BC)$  a  $B - (AC)$ , ale je provázaný vzhledem k dělení  $C - (AB)$ .

4. *Tří-qubitově biseparabilní stavy*

Do třídy těchto stavů patří stavy, jež jdou zapsat pomocí vztahů (1.2), (1.3) a (1.4), ale nelze je zapsat pomocí vztahu

$$\rho_{ABC} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)} \otimes \rho_C^{(i)}, \quad (1.5)$$

kde  $\rho_j^{(i)}$ ,  $j = A, B, C$  je stav jednoho podsystému.

5. *Úplně separabilní stavy*

Stavy patřící do této třídy lze zapsat ve tvaru (1.5).

V praxi se nejčastěji využívají jen určité úplně neseparabilní stavy, tzv. skutečně multipartitně provázané stavy. Toto označení pochází z jiného rozdělení tripartitních systémů do dvou skupin. Dělení je opět podle separability. První skupina obsahuje biseparabilní stavy [14], [15], které se dají zapsat jako směs stavů separabilních vzhledem k jednotlivým dělením, tj.

$$\rho_{ABC}^{bisep.} = p_1 \rho_{A|BC} + p_2 \rho_{B|AC} + p_3 \rho_{C|AB}, \quad (1.6)$$

kde  $p_i$ ,  $i = 1,2,3$  jsou pravděpodobnosti směšování stavů separabilních vzhledem k jednotlivým dělením. Druhou skupinou jsou pak stavy, jež nelze zapsat ve tvaru (1.6). Nazýváme je skutečně multipartitně provázané. Podíváme-li se na třídu úplně neseperabilních stavů, najdeme zde stavy biseperabilní, ale také stavy skutečně multipartitně provázané. Rozdělení kvantových stavů do jednotlivých tříd separability i do obou skupin je graficky znázorněno na Obrázku 1.1.

# Kapitola 2

## Kritéria kvantové provázanosti

Rozhodnout o separabilitě daného stavu nám pomáhají tzv. *kritéria separability*. Podle toho, jak stav splní různá kritéria, můžeme usuzovat o jeho separabilitě. Co se týče provázanosti, dokážeme často pouze usoudit na přítomnost určitého typu provázanosti ve stavu. Mezi nejčastěji používaná kritéria separability patří kritérium Peréze a Horodeckých, svědek provázanosti a Bellovy nerovnosti. První dvě možnosti si podrobněji rozebereme, protože je následně použijeme při analýze studovaného stavu.

### 2.1 Kritérium Peréze-Horodeckých

Prvním kritériem, jež si rozebereme, je *kritérium separability Peréze-Horodeckých*, též označované jako *PPT kritérium* či *Kritérium positivity částečné transpozice*. Myšlenka tohoto kritéria vzešla od A. Peréze [16]. Zjistil, že separabilní stavy si zachovávají pozitivitu i po částečné transpozici. Operace částečné transpozice přes první podsystém  $A$  je pro stav  $\rho_{AB}$  definována předpisem

$$(\rho^{TA})_{ij,kl} = \langle ij|\rho^{TA}|kl\rangle \equiv \langle kj|\rho|il\rangle = \rho_{kj,il}.$$

Povedeme-li tuto částečnou transpozici na separabilním stavu, tj.

$$\rho_{jk}^{T_j} = \sum_i p_i \rho_j^{(i)T} \otimes \rho_k^{(i)}$$

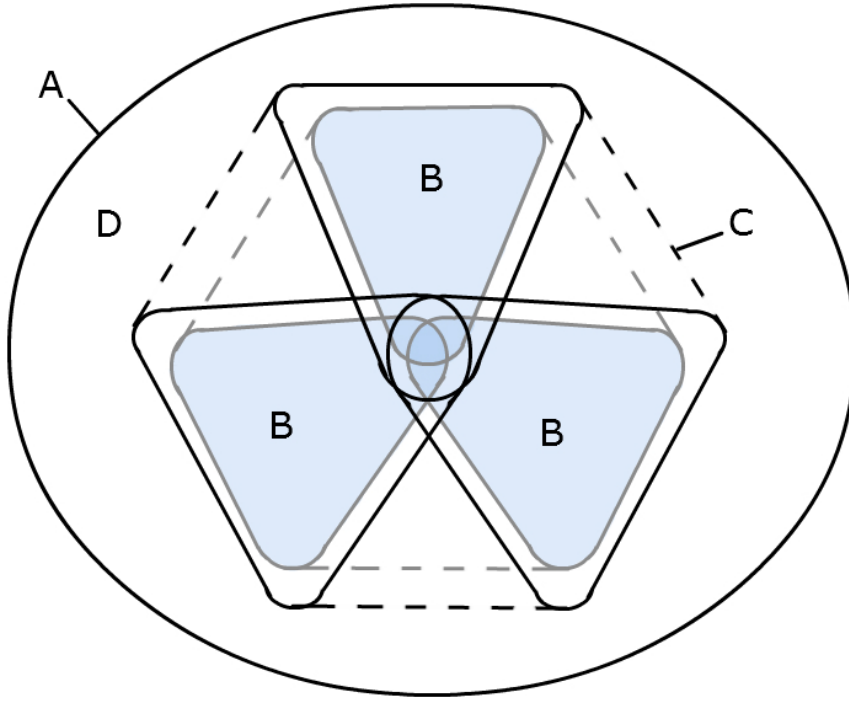
zjistíme, že protože matice hustoty po transpozici je opět matice hustoty, je  $\rho_{AB}^{TA} \geq 0$ . Tím Perez vytvořil nutnou podmínku separability: Je-li  $\rho_{AB}$  separabilní, pak  $\rho_{AB}^{TA} \geq 0$ . Obrácené tvrzení však obecně neplatí. Je to také podmínka postačující [17] pro systémy typu qubit-qubit a qubit-qutrit (systém s dimenzí Hilbertova prostoru o velikosti 3).

Kritérium částečné transpozice lze snadno zobecnit i na systém tří kvantových bitů, kde je stále nutnou, nikoliv však postačující podmínkou pro separabilitu. Je to z důvodu existence PPT provázaných stavů, tedy provázaných stavů s pozitivní částečnou transpozicí. Nicméně i zde mohou PPT stavy hrát významnou roli a to při detekci skutečně multipartitně provázaných stavů. Řekneme, že daný stav  $\rho_{ABC}$  je PPT vzhledem k dělení  $A|BC$  a píšeme  $\rho_{A|BC}^{PPT}$ , jestliže

$$\rho_{ABC}^{TA} \geq 0.$$

V analogii s biseparabilními stavy (1.6) můžeme definovat i PPT směsi [15] ve tvaru

$$\rho_{ABC}^{PPT} = p_1 \rho_{A|BC}^{PPT} + p_2 \rho_{B|AC}^{PPT} + p_3 \rho_{C|AB}^{PPT}. \quad (2.1)$$



Obrázek 2.1: Znázornění množiny všech tří kvantových systémů (A) rozdělených na skutečně multipartitně provázané stavy (D) a PPT směsi (C). Množina stavů ve tvaru PPT směsi se dále dělí na stavy s pozitivní částečnou transpozicí vůči jednotlivým dělením (B).

Zobrazení těchto nově zavedených množin je na Obrázku 2.1. PPT stavy se takto podrobně zabýváme, protože jsou jednodušeji detekovatelné než separabilní stavy a je tedy výhodnější s nimi pracovat.

V práci studujeme tripartitní systém složený z qubitů. Při jeho bipartitním dělení vzniká systém typu  $2 \times 4$ , na nějž PPT kritérium není stavěno. Při analýze jeho dvou-qubitových redukcí již bude možno PPT kritérium použít, ale pro ověření provázanosti celku je potřeba jiné kritérium, které je vysvětleno v následující sekci.

## 2.2 Svědek provázanosti

Druhým způsobem jak detekovat provázanost je pomocí tzv. *svědek provázanosti*. Tento pojem zavedl do světa kvantové fyziky B. M. Terhal [19]. Jedná se o hermitovský operátor  $\mathcal{W}$ , jež má alespoň jedno negativní vlastní číslo a  $\text{Tr}(\mathcal{W}) = 1$ . Pokud máme separabilní stav popsáný pomocí  $\rho^{sep}$ , pak  $\text{Tr}(\rho^{sep}\mathcal{W}) \geq 0$  pro každý takový stav. Je-li tedy  $\text{Tr}(\rho\mathcal{W}) < 0$ , pak je stav  $\rho$  provázaný. Svědci provázanosti jsou měřitelné veličiny, takže jsou využívány pro zjišťování provázanosti v experimentech. Pro každý provázaný stav existuje svědek provázanosti, jež jej detekuje. Problém ovšem může nastat při jeho nalezení.

Rozlišujeme několik typů svědků provázanosti a to nerozložitelné, rozložitelné a úplně rozložitelné. Druhý a třetí typ svědka si rozebereme podrobněji, protože jsou důležité pro analýzu studovaného stavu. Nerozložitelný svědek provázanosti se od nich liší několika zásadními věcmi. Jednou z nich je jeho detekce provázaných stavů s pozitivní



částečnou transpozicí, tj. PPT provázaných stavů. Navíc tento svědek nelze zapsat jako součet dvou semidefinitních matic.

### 2.2.1 Rozložitelný svědek provázanosti

Rozložitelný svědek provázanosti se dá zapsat ve tvaru

$$\mathcal{W}_{AB} = aP + (1 - a) Q^{TA},$$

kde  $0 \leq a \leq 1$  a pro  $P$  a  $Q$  platí  $P, Q \geq 0$ . Tento svědek dokáže detekovat pouze provázané stavy, které nejsou PPT provázané [18]. Používá se pro detekci bipartitní provázanosti.

### 2.2.2 Úplně rozložitelný svědek provázanosti

Při rozhodování o multipartitní provázanosti se používají úplně rozložitelní svědci provázanosti [15]. Mějme  $M$  jako podmnožinu množiny všech podsystémů a  $\tilde{M}$  její doplněk. Úplně rozložitelného svědka provázanosti pak můžeme zapsat jako

$$\mathcal{W} = P_M + Q_M^{T_M},$$

kde  $P_M, Q_M \geq 0$ . Toto platí pro všechny možné podmnožiny  $M$ . Pokud tímto svědkem zapůsobíme na PPT směs zapsanou ve tvaru (2.1), vyjde nám  $\text{Tr}(\rho_{ABC}^{PPT} \mathcal{W}) \geq 0$ . Z toho vyplývá, že pokud pro nějaký stav platí  $\text{Tr}(\rho \mathcal{W}) < 0$ , pak je tento stav skutečně multipartitně provázaný.



# Kapitola 3

## Globální vlastnosti plynoucí z redukovaných stavů

V této práci se zabýváme tím, zda se lze dozvědět něco o vlastnostech neznámého stavu celku pouze na základě znalosti jeho částí. Přesněji se jedná o to, že máme k dispozici pouze redukované stavy a zajímá nás, zda z nich lze zjistit nějakou vlastnost globálního stavu celého systému. Tento problém se objevuje v mnoha úlohách kvantové teorie informace. Příkladem je tzv. kvantový marginální problém [20]. V něm v termínech spekter zjišťujeme, jaké globální stavy jsou slučitelné s danými redukovanými stavy. Redukované stavy jsou slučitelné s čistým globálním stavem, pouze pokud mají stejná spektra. Dalším příkladem jsou kritéria separability pro spinové stlačení [6] nebo existence rozšíření kvantových stavů [21]. V neposledním řadě se s diskutovaným problémem setkáváme při výpočtu některých měr kvantové provázanosti. Konkrétně jde o tzv. "squashed entanglement" [22], při jehož výpočtu optimalizujeme přes všechna rozšíření daného stavu  $\rho_{AB}$ , tj. přes všechny stavy  $\rho_{ABE}$  takové, že  $\text{Tr}_E(\rho_{ABE}) = \rho_{AB}$ .

Studium našeho stavu by se dalo brát jako speciální případ kvantového marginálního problému. Ovšem je zde jedna zásadní odlišnost, tento globální stav je známý. Ověřujeme, na něm zda jde ze speciálních redukcí ukázat na skutečnou multipartitní provázanost globálního stavu.

Pokud bipartitní redukovaný stav tripartitního systému má určitou vlastnost, jakou může být třeba kvantová provázanost, pak ji obsahuje i globální stav. To znamená, že pokud je  $\rho_{AB}$  provázané, pak je provázané i  $\rho_{ABC}$  vzhledem k dělením  $A|BC$  a  $B|AC$ . Provázanost části je pouze postačující podmínkou k provázanosti celku. Můžeme totiž najít separabilní redukované stavy, jež jsou částmi globálních stavů, které jsou provázané vzhledem k odpovídajícím dělením. Obecně z lokálních stavů nelze usoudit na přítomnost kvantové provázanosti. Může to být v důsledku jejich slučitelnosti s více různými globálními stavy. Dobrým příkladem je stav  $\rho_{AB} = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|$ . Tento stav může být redukovaným stavem jak stavu  $\rho = \frac{1}{2}|000\rangle\langle 000| + \frac{1}{2}|111\rangle\langle 111|$  tak také stavu  $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$  [23]. První jmenovaný stav patří do třídy úplně separabilních stavů a druhý naopak do třídy skutečně multipartitně provázaných stavů.

Zcela obecně tedy můžeme s jistotou tvrdit pouze následující. Z provázaných redukovaných stavů plyne určitý typ provázanosti globálního stavu, s nímž jsou slučitelné. Najdeme však separabilní redukované stavy, z nichž také plyne provázanost globálního stavu. Ve speciálních případech z nich plyne přímo skutečná multipartitní provázanost.



# Kapitola 4

## Studium zadaného stavu

V předkládané práci se věnujeme vytvoření teoretického základu potřebného pro experimentální realizaci stavu tří kvantových bitů, jehož skutečnou multipartitní kvantovou provázanost lze potvrdit pouze z jeho separabilních dvouqubitových redukci. První příklad tohoto stavu byl nalezen v práci [5]. Tento stav však není příliš robustní a proto zde uvažujeme odolnější stav nalezený v práci [9]. Jedná se o stav složený ze tří qubitů, jež má tvar

$$\sigma = \frac{2}{3}|\xi\rangle\langle\xi| + \frac{1}{3}|\bar{W}\rangle\langle\bar{W}|, \quad (4.1)$$

kde

$$|\xi\rangle = \frac{1}{3}(e^{i\frac{\pi}{3}}|001\rangle + e^{-i\frac{\pi}{3}}|010\rangle - |100\rangle) + \sqrt{\frac{2}{3}}|111\rangle \quad (4.2)$$

a

$$|\bar{W}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle) \quad (4.3)$$

Uvedený stav má separabilní redukované stavy, z nichž vyplývá skutečná multipartitní provázanost celého stavu.

### 4.1 Vlastnosti teoretického stavu

Stav (4.1) byl nalezen pomocí tzv. semidefinitního programu (SDP) o dvou krocích. Přesný popis postupu práce je popsán v článku [9], zde je uvedena pouze zjednodušená verze. Nejprve se zvolí náhodný stav  $\rho_0$ , na který se aplikuje kritérium pro PPT směsi využívající pouze jeho redukci. Za tímto účelem je nutné řešit SDP ve tvaru

$$\min_{\mathcal{W}, P_M, Q_M} \text{Tr}(\mathcal{W}\rho_0),$$

s vazbami

$$\text{Tr}(\mathcal{W}) = 1,$$

$$\mathcal{W} = \sum_{ij} w_{ij}^{\alpha,\beta} \sigma_i^\alpha \otimes \sigma_j^\beta \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-2)} + \text{permutace}$$

a

$$\mathcal{W} = P_M + Q_M^{T_M}, \quad Q_M, P_M \geq 0.$$

Tímto způsobem je pro stav  $\rho_0$  nalezen optimální rozložitelný svědek provázanosti pro všechna bipartitní dělení  $M|\bar{M}$ . Pokud je  $\text{Tr}(\mathcal{W}\rho_0) < 0$ , pak  $\rho_0$  je skutečně multipartitně provázaný stav. První vazba týkající se stopy tohoto svědka provázanosti maximalizuje toleranci detekce provázanosti na bílý šum. Druhá vazba zaručuje, že svědek

provázanosti obsahuje pouze bipartitní korelace a skutečnou multipartitní provázanost detekujeme pouze z dvouqubitových redukcí. Je potřeba ukázat, že náš stav je skutečně multipartitně provázaný, pouze z jeho dvouqubitových redukcí. Tato druhá vazba je doplňkem k původnímu problému PPT směsi a je jedním z hlavních rysů tohoto způsobu hledání daných stavů.

Ve druhém kroku hledání stavu se určí stav, který pro svědka provázanosti  $\mathcal{W}$  z prvního kroku má negativní hodnotu s největší absolutní hodnotou. Navíc je zde požadavek na separabilitu dvouqubitových redukcí, což je možné zformulovat jako jednoduchý SDP. Hledá se tedy

$$\min_{\rho} \text{Tr}(\mathcal{W}\rho)$$

tak, aby

$$\rho \geq 0, \quad \text{Tr}(\rho) = 1$$

a pro všechny  $i, j$  platí  $\rho_{ij}^{T_i} \geq 0$ , kde  $\rho_{ij}^{T_i}$ ,  $i, j = A, B, C$  jsou dvouqubitové redukce stavu  $\rho$  po částečné transpozici.

Tím získáme stav  $\rho$  jakožto výsledek druhého kroku a zároveň vstupní parametr prvního kroku při další iteraci. Když některá z iterací dá ve druhém kroku negativní hodnotu, získali jsme stav, jež má separabilní dvouqubitové redukce, z nichž plyne provázanost celku. Stav nalezený při větším počtu iterací vykazuje větší odolnost vůči přidávání bílého šumu při zachování potřebných vlastností.

Právě tolerance stavu k bílému šumu je velmi důležitou vlastností pro jeho experimentální přípravu. Při experimentech totiž není možné vždy zcela přesně připravit daný stav ať již z důvodu nedokonalostí experimentálních zařízení či kvůli interakci stavu s okolím.

Studovaný stav je co se týče bílého šumu dosti robustní, jak bylo ukázáno v práci [9]. Provázanost stavu lze najít pouze z jeho dvouqubitových redukcí až do 13.7% přidaného bílého šumu a skutečná multipartitní provázanost se zachovává až do přidání 28.6% bílého šumu.

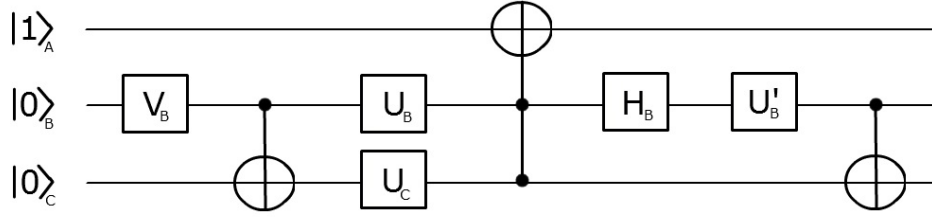
První věcí, již jsem u stavu (4.1) studovala, byla jeho vlastní čísla a vlastní čísla jeho dvouqubitových redukcí po částečné transpozici. Z tvaru stavu  $\sigma$  a díky ortogonalitě vektorů  $|\xi\rangle$  a  $|\bar{W}\rangle$  plyne, že tento stav má pouze dvě nenulová vlastní čísla  $\frac{1}{3}$  a  $\frac{2}{3}$ . Nachází se tedy blízko hranice množiny kvantových stavů. Vlastní čísla redukovaných stavů po částečné transpozici  $\rho_{AB}^{T_A}$ ,  $\rho_{BC}^{T_B}$  a  $\rho_{AC}^{T_A}$  jsou stejná a jsou rovna 0.0037, 0.0549, 0.3667 a 0.5747. Tyto stavy se nachází blízko hranice množiny provázaných stavů. Obě tyto skutečnosti mohou při experimentu dělat problémy, ale díky robustnosti vůči přidanému bílému šumu stavu jsou snadno opravitelné tím, že připravíme stav, který je směsí původního stavu a bílého šumu, tj.

$$\rho(p) = p\sigma + \frac{(1-p)}{8}\mathbb{1}, \quad (4.4)$$

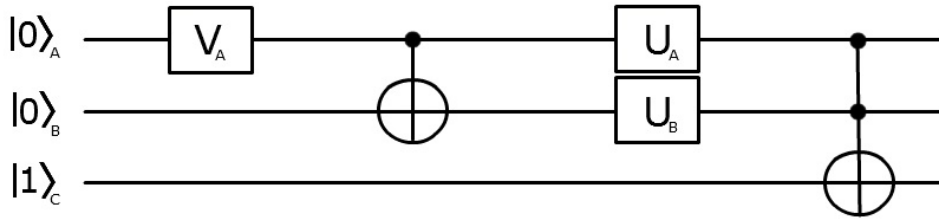
kde  $0 \leq p \leq 1$  a  $\sigma$  je stav z rovnice (4.1) a  $\mathbb{1}$  je jednotková matice o velikosti  $8 \times 8$ . Při vhodné volbě směšovacího parametru  $p$  dojde k posunu výše zmiňovaných stavů od hranice při zachování vlastností globálního stavu.

## 4.2 Návrh logického obvodu

Dalším krokem při práci se stavem (4.1) bylo najít logický obvod, podle kterého by bylo možno experimentálně připravit stav  $\sigma$  daný v rovnici (4.1). Tento úkol měl pouze



Obrázek 4.1: Schéma logického obvodu pro stav  $|\xi\rangle$ .



Obrázek 4.2: Schéma logického obvodu pro stav  $|\bar{W}\rangle$ .

dvě podmínky a těmi byl co nejjednodušší obvod vycházející ze základních stavů  $|1\rangle$  a  $|0\rangle$  a použití Toffoliho brány, jež se nachází v laboratoři na Katedře optiky.

Protože stav je konvexní směsí stavů  $|\xi\rangle$  a  $|\bar{W}\rangle$  uvedených v rovnicích (4.2), resp. (4.3), lze jej připravit náhodným střídáním přípravy stavu  $|\xi\rangle$  s pravděpodobností  $\frac{2}{3}$  a stavu  $|\bar{W}\rangle$  s pravděpodobností  $\frac{1}{3}$ . Příslušné logické obvody pro přípravu stavu  $|\xi\rangle$ , resp.  $|\bar{W}\rangle$ , lze nalézt na Obrázku 4.1, resp. 4.2. Kromě lokálních unitárních transformací  $U_i$ ,  $V_j$  a  $H_k$  obsahují také dvouqubitovou operaci kontrolované negace (CNOT) realizující transformaci

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle, & |01\rangle &\rightarrow |01\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow |11\rangle, & |11\rangle &\rightarrow |10\rangle, \end{aligned}$$

kde první qubit se nazývá kontrolní a druhý cílový. Obvody obsahují dále tříqubitovou operaci nazvanou Toffoliho brána, která realizuje transformaci

$$\begin{aligned} |000\rangle &\rightarrow |000\rangle, & |100\rangle &\rightarrow |100\rangle \\ |001\rangle &\rightarrow |001\rangle, & |101\rangle &\rightarrow |101\rangle \\ |010\rangle &\rightarrow |010\rangle, & |110\rangle &\rightarrow |111\rangle \\ |011\rangle &\rightarrow |011\rangle, & |111\rangle &\rightarrow |110\rangle. \end{aligned}$$

Explicitní tvar všech použitých operací se nachází v Příloze.

### 4.3 Analýza experimentálních dat

Schémat na Obrázcích 4.1 a 4.2 posloužila jako základ experimentální realizace stavu (4.1). Po přizpůsobení schémat experimentální aparatuře využívané na Katedře

optiky byl navržen a postaven Mgr. M. Mičudou, PhD. a Mgr. R. Stárkem lineárně optický obvod realizující přípravu stavu (4.1). Jako nosiče jednotlivých qubitů byly využity ortogonálně polarizované páry fotonů generované v procesu spontánní sestupné frekvenční konverze v nelineárním krystalu čerpaném laserovou diodou. Qubity  $A$  a  $B$  byly kódovány do prostorového, resp. polarizačního, stupně volnosti signálního fotonu, zatímco qubit  $C$  byl kódován do polarizačního stupně volnosti jalového fotonu.

Jádrem experimentálního zařízení pro přípravu obou stavů  $|\xi\rangle$  a  $|\bar{W}\rangle$  byla modifikovaná tzv. Fredkinova brána [24]. Uvedená zařízení jsou pravděpodobnostní a pracují v koincidenční bázi, kdy je úspěch operace ohlášen detekcí koincidencí na příslušných detektorech. Na obou připravených stavech  $|\xi\rangle$  a  $|\bar{W}\rangle$  bylo provedeno tříqubitové tomografické měření založené na měření šesti bázevých stavů  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$ ,  $|R\rangle$  a  $|L\rangle$  na každém qubitu na výstupu, čímž byly obdrženy relativní frekvence. Relativní frekvence cílového stavu (4.4) byly obdrženy smícháním relativních frekvencí stavů  $|\xi\rangle$ ,  $|\bar{W}\rangle$  a jednotkové matice v počítači s příslušnými vahami a stav byl zrekonstruován pomocí estimačního algoritmu maximální věrohodnosti. Pro stanovení statistické neurčitosti použitých veličin byla využita standardní Monte Carlo simulace.

U zrealizované experimentální matice hustoty ( $\equiv \rho_{exp,p}$ ) jsem jako první zjišťovala, zda její dvouqubitové redukce jsou separabilní. To jsem ověřovala pomocí PPT kriteria, protože v tomto případě je PPT kritérium nutnou a postačující podmínkou separability. Vlastní čísla dvouqubitových redukcí experimentálního stavu jsou uvedena v Tabulce 4.1.

Tabulka 4.1: Nejmenší vlastní čísla dvouqubitových redukcí experimentálního stavu  $\rho_{exp,p}$  s  $p = 1$  ( $\equiv \sigma_{exp}$ ).

$\sigma_{AB}^{TA}$	$\sigma_{BC}^{TB}$	$\sigma_{AC}^{TA}$
-0.0091	-0.0229	0.0044

Z Tabulky 4.1 je vidět, že první dvě nejmenší vlastní čísla jsou slabě negativní a tedy redukované matice hustoty  $\sigma_{AB}$  a  $\sigma_{BC}$  jsou provázané. Tento problém lze vyřešit přidáním vhodného množství bílého šumu tak, aby byla nejmenší vlastní čísla kladná a dostatečně vzdálená od nuly, takže příslušné redukované stavy jsou separabilní. Současně musí být množství přidaného šumu dostatečně malé na to, aby globální stav stále obsahoval skutečnou multipartitní kvantovou provázanost zjištělnou z dvouqubitových redukovaných stavů.

K tomu je nutné pro experimentální stav  $\rho_{exp,p}$  nalézt úplně rozložitelného svědka provázanosti pracujícího pouze na dvouqubitových redukovaných maticích hustoty. Tohoto svědka lze nalézt použitím SDP, který je možné vytvořit modifikací programu PPTMIXER uvedeném v článku [15] a dostupném z [25]. Uvedenou modifikací programu provedl Mgr. J. Provazník a já jsem jej následně použila pro hledání výše zmíněného svědka provázanosti.

Analýzou vlastních hodnot redukovaných matic hustoty po částečné transpozici a středních hodnot nalezeného svědka provázanosti pro experimentální matice hustoty  $\rho_{exp,p}$  s různými hodnotami  $p$  byla nalezena optimální hodnota  $p = 0.868$ . Pro tuto hodnotu jsme pak obdrželi minimální vlastní hodnoty shrnuté v následující Tabulce 4.2.

Pro střední hodnotu svědka provázanosti jsme obdrželi následující hodnotu

$$\text{Tr}(\mathcal{W}\rho_{0.868}^{exp}) = (-3 \pm 2) \cdot 10^{-3}.$$



Tabulka 4.2: Nejmenší vlastní čísla dvouqubitových redukcí experimentálního stavu po přidání 13.2% bílého šumu ( $p = 0.868$ ), včetně odchylky.

$jk$	AB	BC	AC
$\min \left[ \text{eig} \left( \rho_{exp,jk}^{T_j} \right) \right] \cdot 10^2$	$2.4 \pm 0.7$	$.9 \pm 0.6$	$2.1 \pm 0.6$

Díky negativě této stopy je možné soudit, že experimentální stav v sobě nese skutečnou multipartitní provázanost. Experiment tedy ukázal, že daný teoretický stav lze připravit a zachovat požadovanou vlastnost, jíž je skutečná multipartitní provázanost vyplývající ze separabilních dvouqubitových redukovaných stavů. Cílový stav byl připraven s fide-

litou o velikosti  $F \equiv \left\{ \text{Tr} \left[ \left( \rho_{exp}^{1/2} \rho \rho_{exp}^{1/2} \right)^{1/2} \right] \right\}^2 = 0.939 \pm 0.008$ .



# Závěr

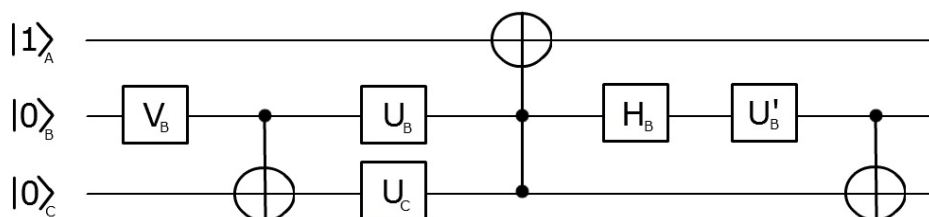
Cílem této bakalářské práce bylo ověřit možnost určení skutečné multipartitní provázanosti stavu ze separability jeho redukcí. K tomu byl experimentálně vytvořen stav s těmito vlastnostmi. Analýza vytvořeného stavu dokázala skutečnou multipartitní provázanost pouze z jeho dvouqubitových separabilních redukcí.

Problematicke vyvozování závěrů o vlastnostech globálního stavu ze znalosti absence vlastnosti u jeho redukcí bych se ráda i nadále věnovala, ale v kontextu gaussovských stavů.



# Příloha

Stav  $|\xi\rangle$ :



Obrázek 4.3: Schéma logického obvodu pro stav  $|\xi\rangle$ .

Pro přípravu stavu  $|\xi\rangle$  je potřeba kromě dvou operací kontrolované negace a Toffoliho brány také provést několik operací spojených se Schmidtovým rozkladem. Ten bylo nutné udělat, protože jedním z požadavků na logické obvody bylo, aby vycházely z co nejjednodušších stavů. Operátory použité při Schmidově rozkladu jsou postupně:

$$V_B = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix},$$

$$U_B = \begin{pmatrix} a & a \\ c_- & c_+ \\ b_- & b_+ \\ c_- & c_+ \end{pmatrix},$$

a

$$U_C = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} \frac{ac_-}{s_1 b_- (b_- - b_+)} & -\frac{ac_+}{s_2 b_+ (b_- - b_+)} \\ \frac{c_-}{s_1 (b_- - b_+)} & -\frac{c_+}{s_2 (b_- - b_+)} \end{pmatrix},$$

kde  $s_1, s_2, a, b_{\pm}$  a  $c_{\pm}$  mají tvar

$$a = \sqrt{6} - 1 + i(3\sqrt{2} + \sqrt{3}),$$

$$b_{\pm} = 5 \pm \sqrt{53 + 4\sqrt{6}},$$

$$c_{\pm}^2 = 106 + 8\sqrt{6} \pm 10\sqrt{53 + 4\sqrt{6}}$$

a

$$s_{1,2} = \sqrt{\frac{9 \pm \sqrt{53 + 4\sqrt{6}}}{18}}.$$

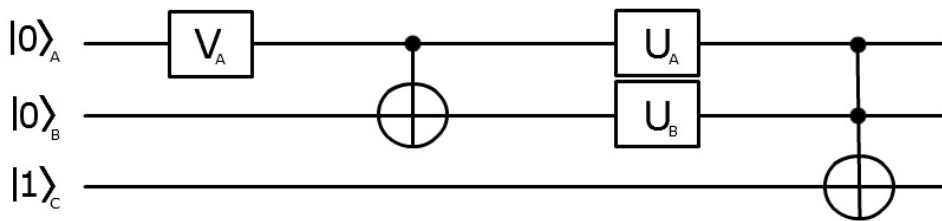
Po Toffoliho bráně byly použity ještě tři operace včetně operace kontrolované notace, jimiž bylo docíleno potřebného tvaru  $|\xi\rangle$ . Zbylé dvě operace mají tvar

$$H_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$U'_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2}{3}\pi} \end{pmatrix}.$$

**Stav  $|\bar{W}_3\rangle$ :**



Obrázek 4.4: Schéma logického obvodu pro stav  $|\bar{W}\rangle$ .

Logické obvod pro stav  $|\bar{W}\rangle$  je již mnohem jednodušší. Kromě Toffoliho brány a jedné operace kontrolované negace jsou zde použity pouze tři další operace, jež všechny souvisí se Schmidtovým rozkladem. Tyto operace se dají zapsat ve tvaru

$$V_A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}} & -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} \\ \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} & \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}} \end{pmatrix},$$

$$U_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} & -\frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} \end{pmatrix}$$

a

$$U_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} & -\frac{1}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} \end{pmatrix}.$$

# Literatura

- [1] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Perez, and W. K. Wothers, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [2] C. H. Bennett, Phys. Rev. Lett. **68**, 3121 (1992).
- [3] J. S. Bell, Physics **1**, 195 (1964).
- [4] A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
- [5] L. Chen, O. Gittsovich, K. Modi, and M. Piani, Phys. Rev. A **90**, 042314 (2014).
- [6] G. Tóth, Ch. Knapp, O. Gühne, and H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. **99**, 250405 (2007).
- [7] R. Raussendorf and H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. **86**, 5188 (2001).
- [8] R. Cleve, D. Gottesman, and H.-K. Lo, Phys. Rev. Lett. **83**, 648 (1999).
- [9] N. Miklin, T. Moroder, and O. Gühne, Phys. Rev. A **93**, 020104(R) (2016).
- [10] E. Schrödinger, Naturwissenschaften **23**, 807 (1935); **23**, 823 (1935); **23**, 844 (1935).
- [11] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [12] R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
- [13] W. Dür, J. I. Cirac, and R. Tarrach, Phys. Rev. Lett. **83**, 3562 (1999).
- [14] A. Acín, D. Bruß, M. Lewenstein, and A. Sanpera, Phys. Rev. Lett. **87**, 040401 (2001).
- [15] B. Jungnitsch, T. Moroder, and O. Gühne, Phys. Rev. Lett. **106**, 190502(4) (2011).
- [16] A. Perez, Phys. Rev. Lett **77**, 1413 (1996).
- [17] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [18] M. Lewenstein, B. Kraus, J. I. Cirac, and P. Horodecki, Phys. Rev. A **62**, 052310 (2000).
- [19] B. M. Terhal, Phys. Lett. A **271**, 319 (2000).
- [20] A. Klyachko, quant-ph/0409113.
- [21] J. Chen, Z. Ji, D. Kribs, N. Lütkenhaus, and B. Zeng, Phys. Rev. A **90**, 032318 (2014).

- [22] M. Christandl and A. Winter, *J. Math. Phys.* **45**, 829 (2004).
- [23] D. M. Greenberger, M. Horne, and A. Zeilinger, in *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, edited by M. Kafatos (Kluwer, Dordrecht, 1989), p. 69.
- [24] R. Stárek, M. Mičuda, M. Miková, I. Straka, M. Dušek, P. Marek, M. Ježek, and J. Fiurášek, 2017 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC), Munich, Germany, 25–29 June 2017.
- [25] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/30968>.