Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

Katedra algebry a geometrie

Reprezentace některých algeber v kladném kuželu ℓ-grupy

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.

Autor práce: Bc. Šárka Dosoudilová

Studijní obor: Učitelství pro střední školy F-M

2010

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Ve Šternberku dne

....

Děkuji vedoucímu diplomové práce doc. RNDr. Janu Kührovi za cenné rady, připomínky a metodické vedení práce.

Obsah:

1 Úvod

Některé algebraické struktury, které se v posledních letech intenzivně studují zejména v souvislosti s logikou, lze reprezentovat pomocí svazově uspořádaných grup. Nejtypičtějším příkladem jsou *MV-algebry*: podle dnes již klasické věty D. Mundiciho [11] je (až na izomorfismus) každá MV-algebra $(A,\oplus,\neg,0,1)$ izomorfní s MV-algebrou $\Gamma(G,u)=([0,u],\oplus,\neg,0,u)$, kde $[0,u]$ je interval v kladném kuželu vhodné komutativní ℓ-grupy G a operace na $[0,u]$ jsou dány předpisem $x\oplus y=(x+y)\wedge u$ a $\neg x=u-x$.

MV-algebry zavedl C. C. Chang [5] jako algebraický model *Łukasiewiczovy logiky*, což je vícehodnotová (*many-valued*, odtud MV) výroková logika $\mathscr{L}$ se spojkami $\to$ a $\neg$, axiomy jsou formule ve tvaru

$$\alpha\to(\beta\to\alpha),$$
$$(\alpha\to\beta)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma)),$$
$$((\alpha\to\beta)\to\beta)\to((\beta\to\alpha)\to\alpha),$$
$$(\neg\alpha\to\neg\beta)\to(\beta\to\alpha)$$

a jediným odvozovacím pravidlem je modus ponens. Disjunkce $\alpha\oplus\beta$ a konjunkce $\alpha\odot\beta$ jsou definovány jako $\neg\alpha\to\beta$ a $\neg(\alpha\to\neg\beta)$. Lindenbaumova algebra této logiky je potom MV-algebra. Opravdu, označíme-li $[\alpha]$ třídu formulí ekvivalentních s formulí α a na množině L všech těchto tříd zavedeme operace $\oplus$, $\neg$ a konstanty 0, 1 takto: $[\alpha]\oplus[\beta]=[\alpha\oplus\beta]$, $\neg[\alpha]=[\neg\alpha]$, $0=[\alpha]$, když formule $\neg\alpha$ je dokazatelná v $\mathscr{L}$, a $1=[\alpha]$, když formule α je dokazatelná v $\mathscr{L}$, pak $(L,\oplus,\neg,0,1)$ je MV-algebra. Strukturou pravdivostních hodnot je tzv. standardní MV-algebra $[0,1]_{MV}$, tj. reálný interval $[0,1]$ s operacemi $x\oplus y=\min\{x+y,1\}$, $\neg x=1-x$ a $x\to y=\neg x\oplus y=\min\{1-x+y,1\}$. Na rozdíl od klasické dvouhodnotové výrokové logiky, jejímž algebraickým modelem jsou Booleovy algebry, disjunkce a konjunkce nejsou idempotentní. Tomu odpovídá skutečnost, že Booleovy algebry jsou ekvivalentní s MV-algebrami, které splňují identitu $x\oplus x=x$.

Výše citovaný Mundiciho výsledek popisující vztah mezi MV-algebrami a komutativními ℓ-grupami odstartoval nový zájem o MV-algebry a jejich zobecnění. Na konci 90. let se objevily nekomutativní MV-algebry, tzv. *pseudo-MV-algebry* (G. Georgescu a A. Iorgulescu [9]) a *GMV-algebry* (J. Rachůnek [12]): sčítání $\oplus$ v tomto případě není komutativní a každý prvek x má obecně dvě různé negace x^{-} a $x^{\sim}$. A. Dvurečenskij [7] dokázal, že podobně jako MV-algebry lze i pseudo-MV-algebry/GMV-algebry vždy reprezentovat jako algebry $\Gamma(G,u)$, kde G je ℓ-grupa (nyní obecně nekomutativní) a pro negace platí $x^{-} = u - x$ a $x^{\sim} = -x + u$.

Text je v podstatě rozdělen do tří částí.

V úvodní kapitole jsou vysvětleny základní pojmy, uvedeny některé příklady (svazově) uspořádaných grup a charakterizovány kladné kužely (svazově) uspořádaných grup.

Druhá část (kapitoly 3 a 4) je věnována MV-algebrám. Je dokázáno, že každá MV-algebra je subdirektním součinem lineárně uspořádaných MV-algeber. Mundiciho metoda tzv. dobrých posloupností je použita k důkazu toho, že až na izomorfismus jsou všechny MV-algebry ve tvaru $\Gamma(G,u)$.

Třetí část se zabývá *kuželovými algebrami*, které definoval B. Bosbach [3] jako algebry $(A,*,:,0)$ splňující identity $(x*y)*(x*z) = (y*x)*(y*z)$, $(z:y):(x:y) = (z:x):(y:x)$, $x*(y:z) = (x*y):z$, $x:(y*x) = (y:x)*y$, $x:0 = 0*x = x$ a $x*x = y:y = 0$. Typickým příkladem je kladný kužel G^{+} libovolné ℓ-grupy G s operacemi $x:y = (x-y)\vee 0$ a $y*x = (-y+x)\vee 0$. Rovněž každou (pseudo-) MV-algebru můžeme chápat jako kuželovou algebru, definujeme-li $x:y = \left(y \oplus x^{\sim}\right)^{-}$ a $y*x = \left(x^{-} \oplus y\right)^{\sim}$. Bosbach ukázal, že pro každou kuželovou algebru $(A,*,:,0)$ existuje ℓ-grupa G_A taková, že $(A,*,:,0)$ lze izomorfně vnořit do kuželové algebry $\left(G_A^{+},*,:,0\right)$. Jako důsledek pak snadno dostaneme Mundiciho a Dvurečenského věty o reprezentaci MV- a pseudo-MV-algeber jako intervalů ℓ-grup.

2 Uspořádané grupy

Cílem této úvodní kapitoly je zopakovat základní pojmy teorie svazově uspořádaných grup a dokázat dvě základní věty popisující vztah svazově uspořádaných grup a jejich kladných kuželů. Uvedeme také několik příkladů.

Pro svazově uspořádané grupy se užívá aditivní i multiplikativní zápis. Zde budeme používat aditivní zápis, ale to neznamená, že všechny uvedené grupy jsou abelovské.

Definice: *Kompatibilním uspořádáním* na grupoidu $(G,+)$ rozumíme uspořádání $\leq$ takové, že pro každé $x, y, z \in G$ platí

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x+z &\leq y+z\,, \\ z+x &\leq z+y\,. \end{aligned}$$

Definice: *Uspořádanou grupou* rozumíme grupu, na které je definováno kompatibilní uspořádání, tj. strukturu $(G,+,\leq)$, kde $(G,+)$ je grupa a $\leq$ kompatibilní uspořádání. Je-li $(G,\leq)$ svaz, pak $(G,+,\leq)$ se nazývá *svazově uspořádaná grupa* nebo stručně *ℓ-grupa*.

Neutrální prvek ℓ-grupy budeme značit 0.

Nechť G je svazově uspořádaná grupa a f, $g_i \in G$ ($i \in I$). Jestliže existuje $\bigvee\{g_i : i \in I\}$, pak existují také $\bigwedge\{-g_i : i \in I\}$, $\bigvee\{f+g_i : i \in I\}$, $\bigvee\{f \wedge g_i : i \in I\}$ a platí

(a) $\bigwedge\{-g_i : i \in I\} = -\bigvee\{g_i : i \in I\}$,

(b) $\bigvee\{f+g_i : i \in I\} = f + \bigvee\{g_i : i \in I\}$,

(c) $\bigvee\{f \wedge g_i : i \in I\} = f \wedge \bigvee\{g_i : i \in I\}$.

Duální tvrzení platí také, tj. když existuje $\bigwedge\{g_i : i \in I\}$, potom existují $\bigvee\{-g_i : i \in I\}$, $\bigwedge\{f+g_i : i \in I\}$ a $\bigwedge\{f \vee g_i : i \in I\}$ a platí duální rovnosti.
Poznamenejme, že existence nekonečných spojení či průseků napravo nemusí implikovat existenci spojení a průseků nalevo.

Navíc platí: Uspořádaná grupa G je svazově uspořádaná právě tehdy, když v G existuje $f \vee 0 = \sup\{f, 0\}$ (resp. $f \wedge 0 = \inf\{f, 0\}$) pro všechny $f \in G$. Spojení a průsek dvou libovolných prvků $f, g \in G$ pak můžeme psát ve tvaru

$$f \vee g = \big((f-g) \vee 0\big) + g\,,$$
$$f \wedge g = \big((f-g) \wedge 0\big) + g\,.$$

Podívejme se na některé základní příklady uspořádaných grup:

Příklad 2.1: Aditivní grupy celých čísel $(\mathbb{Z},+,\le)$, racionálních čísel $(\mathbb{Q},+,\le)$ a reálných čísel $(\mathbb{R},+,\le)$ jsou lineárně uspořádané grupy s přirozeným uspořádáním. Grupa $(\mathbb{C},+)$ se dá uspořádat např. takto:

(i) $a+bi \le c+di \;\Leftrightarrow\; a \le c \;\&\; b \le d$;

(ii) $a+bi \le c+di \;\Leftrightarrow\; a < c$ nebo $(a = c \;\&\; b \le d)$;

(iii) $a+bi \le c+di \;\Leftrightarrow\; a+bi = c+di$ nebo $(a < c \;\&\; b < d)$.

V prvním případě dostaneme svaz, který není řetězec, ve druhém řetězec a ve třetím uspořádanou grupu, která není svaz – spojení a průseky zde existují jen pro srovnatelné prvky.

Příklad 2.2: Nechť $C[0,1]$ je množina všech reálných spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$. Definujme na $C[0,1]$ uspořádání
$$f \le g \;\Leftrightarrow\; f(x) \le g(x) \text{ pro všechny } x \in [0,1].$$
Potom $(C[0,1],+,\le)$ je uspořádaná abelovská grupa, kde $+$ je obvyklé sčítání funkcí po bodech.

Příklad 2.3: Nechť
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}.$$
Pak G je vzhledem k násobení matic nekomutativní grupa. Na G definujme uspořádání takto:
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; (i)\;\; a_1 < a_2, \text{ nebo}$$
$$(ii)\;\; a_1 = a_2 \;\&\; b_1 \le b_2.$$
Potom $(G,\cdot,\le)$ je lineárně uspořádaná grupa.

Příklad 2.4: Nechť $(T,\le)$ je libovolná lineárně uspořádaná množina. Označme $\mathrm{Aut}(T)$ množinu všech automorfismů na $(T,\le)$, tj. bijekcí $f : T \to T$, které splňují podmínku

$$\forall x, y \in T: \ x \leq y \ \Leftrightarrow \ f(x) \leq f(y).$$

Definujeme-li na $\operatorname{Aut}(T)$ uspořádání takto:

$$f \leq g \ \Leftrightarrow \ f(x) \leq g(x) \text{ pro všechny } x \in T,$$

potom $(\operatorname{Aut}(T), \circ, \leq)$, kde $\circ$ značí obvyklé skládání zobrazení, je nekomutativní svazově uspořádaná grupa, ve které

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Poznámka: Tento příklad je velmi důležitý, protože podle Hollandovy věty lze každou ℓ-grupu vnořit do ℓ-grupy $\operatorname{Aut}(T)$ pro některý řetězec T.

Příklad 2.5: Nechť $\{G_i : i \in I\}$ je systém uspořádaných grup. Uspořádáme-li direktní součin $\prod_{i \in I} G_i$ grup G_i po bodech, tj. $f \leq g \ \Leftrightarrow \ f(i) \leq g(i)$ pro každé $i \in I$, potom dostáváme uspořádanou grupu. Když G_i jsou ℓ-grupy, pak i $\prod_{i \in I} G_i$ je ℓ-grupa.

Nyní předpokládejme, že indexová množina I je dobře uspořádaná, a na $\prod_{i \in I} G_i$ definujme uspořádání takto: $f \leq g \ \Leftrightarrow \ f = g$ nebo $f(i) < g(i)$, kde i je nejmenší prvek v I takový, že $f(i) \neq g(i)$. Tato uspořádaná grupa se nazývá lexikografický součin uspořádaných grup G_i.

Příklad 2.6: Nechť $\mathbb{Z} \operatorname{Wr} \mathbb{Z}$ je množina všech uspořádaných dvojic (β, a), kde β je zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a $a \in \mathbb{Z}$. Definujme:

$$(\beta_1, a_1) + (\beta_2, a_2) = (\gamma, a_1 + a_2), \text{ kde } \gamma(x) = \beta_1(x) + \beta_2(x + a_1) \ \ \forall x \in \mathbb{Z},$$

$$(\beta_1, a_1) \leq (\beta_2, a_2) \ \Leftrightarrow \ a_1 < a_2, \text{ nebo}$$

$$a_1 = a_2 \ \& \ \beta_1(x) \leq \beta_2(x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{Z}.$$

Potom $(\mathbb{Z} \operatorname{Wr} \mathbb{Z}, +, \leq)$ je ℓ-grupa s nulovým prvkem $(\varsigma, 0)$, kde $\varsigma(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$, a opačným prvkem k (β, a) je $(\gamma, -a)$, kde $\gamma(x) = -\beta(-a + x)$ pro všechny $x \in \mathbb{Z}$. Tato konstrukce se nazývá *věncový součin*.

Nechť $G = \mathbb{Z} \operatorname{Wr} \mathbb{Z}$. Pro $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \{(\beta, a) \in G : x \equiv y \,(\operatorname{mod} n) \Rightarrow \beta(x) = \beta(y)\}.$$

Pak S_n je ℓ-podgrupa G (tj. podgrupa i podsvaz) a nazývá se *Scrimgerova n-grupa*.

Např. S_2 můžeme reprezentovat takto: Když $(\beta,a)\in S_2$, pak $\beta(x)=\beta(y)$ pro $x\equiv y(\operatorname{mod} 2)$, tedy β nabývá pouze dvou hodnot, a to $\beta(0)$ pro sudá x a $\beta(1)$ pro lichá. Místo (β,a) můžeme tedy psát $(\beta(0),\beta(1),a)$. Potom

$$(\beta_1(0),\beta_1(1),a_1)+(\beta_2(0),\beta_2(1),a_2)=$$

$$=\left\langle\begin{array}{ll}(\beta_1(0)+\beta_2(0),\beta_1(1)+\beta_2(1),a_1+a_2) & \text{pro } a_1 \text{ sudé,}\\ (\beta_1(0)+\beta_2(1),\beta_1(1)+\beta_2(0),a_1+a_2) & \text{pro } a_1 \text{ liché.}\end{array}\right.$$

Pro uspořádání dostaneme:

$$(\beta_1(0),\beta_1(1),a_1)\leq(\beta_2(0),\beta_2(1),a_2) \iff a_1<a_2, \text{ nebo}$$
$$a_1=a_2 \;\&\; \beta_1(0)\leq\beta_2(0) \;\&\; \beta_1(1)\leq\beta_2(1).$$

Pro každou podmnožinu $\varnothing\neq X\subseteq G$ budeme používat zápis

$$-X=\{-x : x\in X\}.$$

Definice: Jestliže G je uspořádaná grupa, potom řekneme, že $x\in G$ je

- ◦ *kladný prvek*, jestliže $x\geq 0$,
- ◦ *záporný prvek*, jestliže $x\leq 0$.

Podmnožinu G^+ kladných prvků grupy G nazýváme *kladný kužel* grupy G, podmnožinu G^- záporných prvků nazýváme *záporný kužel* grupy G.

Z definice uspořádané grupy plyne důležitý důsledek: Nechť $x,y\in G$. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:

$$x\leq y \iff x-y\in G^- \iff -y+x\in G^- \iff -x+y\in G^+ \iff y-x\in G^+ \iff -y\leq -x.$$

Tedy uspořádání na G je jednoznačně dáno jedním z kuželů.

Vraťme se nyní k uspořádaným grupám z příkladů 2.3, 2.4 a 2.6 a podívejme se, jak vypadají jejich kladné kužely:

Příklad 2.7: Nechť $(G,\cdot,\leq)$ je lineárně uspořádaná grupa z příkladu 2.3. Její kladný kužel je ve tvaru

$$G^+=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}, a>1\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} : b\in\mathbb{R}, b\geq 0\right\}.$$

Nechť $(\operatorname{Aut}(T),\circ,\leq)$ je ℓ-grupa z příkladu 2.4. Její kladný kužel je tvořen takovými automorfismy $f\in\operatorname{Aut}(T)$, pro které platí: $x\leq f(x)$ pro každé $x\in T$.

Nechť $(\mathbb{Z}\,\mathrm{Wr}\,\mathbb{Z},+,\leq)$ je ℓ-grupa z příkladu 2.6. Jejím kladným kuželem je množina dvojic (β,a) takových, že

(i) $a>0$, nebo

(ii) $a=0$ a $\beta(x)\geq 0$ pro každé $x\in\mathbb{Z}$.

Kladný kužel Scrimgerovy 2-grupy S_2 z příkladu 2.7 je množina

$$S_2^{+}=\{(\beta(0),\beta(1),a):a>0\}\cup\{(\beta(0),\beta(1),0):\beta(0),\beta(1)\geq 0\}.$$

Nyní dokážeme dvě klasické věty, které lze najít např. v [1]:

Věta 2.1: *Podmnožina P grupy G je kladný kužel některého kompatibilního uspořádání na G právě tehdy, když*

(1) $P\cap -P=\{0\}$,

(2) $P+P=P$,

(3) $\forall x\in G:\ x+P-x=P$.

Navíc toto uspořádání je lineární uspořádání, právě když $P\cup -P=G$.

Důkaz $\Rightarrow$: Nechť $\leq$ je kompatibilní uspořádání na G a nechť G^{+} je přidružený kladný kužel. Jestliže $x\in G^{+}\cap -G^{+}$, pak na jedné straně $x\geq 0$ a na druhé $x=-y$ pro některé $y\geq 0$. To dává $0\geq -y=x$. Odtud $x=0$ a část (1) je dokázána. Jestliže nyní $x,y\in G^{+}$, pak $x\geq 0$ a $y\geq 0$, tedy $x+y\geq 0$, a proto $G^{+}+G^{+}\subseteq G^{+}$. Potom (2) vyplývá z toho, že $G^{+}=G^{+}+0\subseteq G^{+}+G^{+}$. Jestliže $y\in G^{+}$, potom pro každé $x\in G$ platí $x+y-x\geq x+0-x=0$, a tak $x+y-x\in G^{+}$. Tedy $x+G^{+}-x\subseteq G^{+}$. Jelikož toto platí pro všechny $x\in G$, můžeme zaměnit x za $-x$, abychom získali $-x+G^{+}+x\subseteq$ $\subseteq G^{+}$, což dává opačnou inkluzi $G^{+}\subseteq x+G^{+}-x$.

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že P je podmnožina G, která splňuje vlastnosti (1), (2), (3). Definujme na G relaci $\leq$:

$$x\leq y \iff y-x\in P.$$

Zřejmě $\leq$ je reflexivní. Jestliže $x\leq y$ a $y\leq x$, pak $y-x\in P$ a $-(y-x)=x-y\in P$. Z (1) vyplývá, že $y-x=0$, odkud $y=x$, a proto $\leq$ je antisymetrická. Nechť $x\leq y$ a $y\leq z$. Potom $y-x\in P$ a $z-y\in P$ a ze (2) vyplývá, že $z-x=z-y+y-x\in P$, odkud $x\leq z$. Tudíž $\leq$ je uspořádání na G. Ukažme, že je kompatibilní. Nechť $x\leq y$. Pak $y-x\in P$ a ze (3) vyplývá, že pro všechna $a,b\in G$,

$$a+y+b-(a+x+b)=a+y+b-b-x-a=a+y-x-a\in P,$$

což ukazuje, že $a+x+b \leq a+y+b$. Odtud plyne, že $\leq$ je kompatibilní. Konečně $0 \leq y$ právě tehdy, když $y \in P$, tedy P je kladný kužel odpovídající zavedenému uspořádání $\leq$.

Nyní předpokládejme, že $P \cup -P = G$. Pak pro všechna $x, y \in G$ buď $x-y \in P$, nebo $x-y \in -P$, takže $x-y \geq 0$ nebo $x-y \leq 0$. Tedy $x \geq y$ nebo $x \leq y$. Proto G je lineárně uspořádaná. Obráceně, jestliže G je lineárně uspořádaná, pak pro všechna $x \in G$ dostáváme buď $x \geq 0$, nebo $x \leq 0$, tedy $x \in P$ nebo $x \in -P$, odkud $G = P \cup -P$. □

Z předchozího vidíme, že kladný kužel G^+ uspořádané grupy G je podpologrupa grupy G. O tom, která pologrupa může být kladným kuželem uspořádané grupy, pojednává další věta.

Věta 2.2: *Pologrupa P je kladným kuželem některé uspořádané grupy právě tehdy, když*

(*1*) *v P platí pravidla krácení,*

(*2*) *P má nulový prvek 0,*

(*3*) $\forall x, y \in P: \ x+y=0 \ \Rightarrow \ x=y=0$,

(*4*) $\forall x \in P: \ P+x = x+P$.

Důkaz: Nutnost podmínek vyplývá přímo z věty 2.1. Naopak ukážeme, že pologrupa P s uvedenými vlastnostmi může být vnořena do grupy jako kladný kužel. Pro tento účel si všimněme, že pro libovolné prvky $a, x \in P$ existuje podle (1) a (4) právě jeden prvek $x_a \in P$ takový, že $x+a = a+x_a$. Potom máme

(A) $a_a = a$.

Opravdu, podle definice $a+a = a+a_a$, a tak díky krácení $a = a_a$.

(B) $\forall x, y \in P: \ (x+y)_a = x_a + y_a$.

Toto plyne z $a+(x+y)_a = x+y+a = x+a+y_a = a+x_a+y_a$.

(C) $\forall x \in P: \ (x_a)_b = x_{a+b}$.

Tato vlastnost vyplývá z $a+b+x_{a+b} = x+a+b = a+x_a+b = a+b+(x_a)_b$.

Uvažujme nyní kartézský součin $P \times P$ a definujme na něm sčítání takto:

$$(a,b)+(c,d) = (a+c_b, d+b).$$

Potom $(P \times P, +)$ je pologrupa. Skutečně,

$$\left[(a,b)+(c,d)\right]+(g,h) = (a+c_b, d+b)+(g,h) = (a+c_b+g_{d+b}, h+d+b) =$$
$$= \left(a+(c+g_d)_b, h+d+b\right) = (a,b)+(c+g_d, h+d) = (a,b)+\left[(c,d)+(g,h)\right].$$

Uvažujme relaci $\equiv$ definovanou na $P \times P$ takto:

$$(a,b)\equiv(c,d) \ \Leftrightarrow \ a+d_b=c+b .$$

Nejprve ukážeme, že je to relace ekvivalence:

(α) $(a,a)\equiv(a,a) \ \Leftrightarrow \ a+a_a=a+a$, reflexivita tedy plyne přímo z (A).

(β) Jestliže $(a,b)\equiv(c,d)$, pak $a+d_b=c+b$, a tak $a+d_b+d=c+b+d$. Podle (C) dostaneme $d_b+d=d+(d_b)_d=d+d_{b+d}$ a podle (B) máme $b+d=$ $=(b+d)_{b+d}=b_{b+d}+d_{b+d}$. Proto $a+d+d_{b+d}=c+b_{b+d}+d_{b+d}$, a tak díky krácení $a+$ $+d=c+b_{b+d}=c+(b_b)_d=c+b_d$. Tedy $(c,d)\equiv(a,b)$ a $\equiv$ je symetrická.

(γ) Nechť $(c,d)\equiv(a,b)$ a $(a,b)\equiv(g,h)$. Potom $a+h_b=g+b$ dává $a+$ $+h_b+d_b=g+b+d_b$. Pravá strana je $g+d+b$, zatímco levá strana je

$$a+d_b+(h_b)_{d_b}=a+d_b+h_{b+d_b}=a+d_b+h_{d+b}=c+b+(h_d)_b=c+h_d+b .$$

Tedy $c+h_d+b=g+d+b$ a po zkrácení dostáváme $c+h_d=g+d$, tj. $(c,d)\equiv(g,h)$.

Dále ukážeme, že $\equiv$ je kongruence. Jestliže $(a,b)\equiv(c,d)$, pak pro všechny $(g,h)\in P\times P$ požadujeme, aby $(a,b)+(g,h) \ \equiv \ (c,d)+(g,h)$ a $(g,h)+(a,b) \ \equiv$ $\equiv(g,h)+(c,d)$, tedy

$$(a+g_b,h+b)\equiv(c+g_d,h+d) \text{ a } (g+a_h,b+h)\equiv(g+c_h,d+h).$$

Pro první vztah musíme ověřit

(δ) $a+g_b+(h+d)_{h+b}=c+g_d+h+b .$

Všimněme si, že z $a+d_b=c+b$ dostaneme $a+d_b+g_{d+b}+h_b=c+b+g_{d+b}+h_b$. Pravá strana je $c+g_d+b+h_b=c+g_d+h+b$, což odpovídá pravé straně (δ). Levá strana je $a+(d+g_d+h)_b=a+(g+d+h)_b=a+g_b+d_b+h_b=a+g_b+h_b+(d_b)_{h_b}=$ $=a+g_b+h_b+d_{b+h_b}=a+g_b+h_b+d_{h+b}= \ a+g_b+(h_h)_b+d_{h+b}= \ a+g_b+h_{h+b}+d_{h+b}=$ $=a+g_b+(h+d)_{h+b}$, což je levá strana (δ).

Tedy vidíme, že $\equiv$ je kompatibilní se sčítáním zprava. Stejným způsobem bychom ukázali, že je kompatibilní se sčítáním zleva, a proto se jedná o kongruenci.

Uvažujme dále faktorovou pologrupu $(P\times P,+)/\equiv$, jejíž prvky budeme značit $[a,b]$. Existuje nulový prvek, a sice $[a,a]$ pro každý prvek $a\in P$. Skutečně, $[a,a]+$ $+[c,d]=[a+c_a,d+a]=[c+a,d+a]=[c,d]$, kde poslední rovnost je důsledkem toho, že $(c,d)\equiv(c+a,d+a) \ \Leftrightarrow \ c+(d+a)_d=c+a+d$, což je splněno: $c+$ $+(d+a)_d=c+d_d+a_d=c+d+a_d=c+a+d$. Podobně $[c,d]+[a,a]=[c,d]$. Navíc každý prvek $[a,b]$ této faktorové pologrupy má prvek opačný, a to $[b,a]$:

$$[a,b]+[b,a]=[a+b_b,a+b]=[a+b,a+b].$$

Vidíme tedy, že $(P \times P,+)/\equiv$ je grupa. Navíc $\varphi : a \mapsto [a,0]$ je vnoření P do této grupy. Zobrazení φ je injektivní. Abychom ukázali, že φ je homomorfismus, stačí položit $a=0$ v rovnosti $x+a=a+x_a$. Dostaneme $x=x_0$ pro každý prvek $x \in P$, takže $[x,0]+[y,0]=[x+y_0,0+0]=[x+y,0]$.

Jestliže ztotožníme P s $\{[x,0]: x \in P\}$, pak z vlastnosti (3) vyplývá, že P splňuje vlastnost (1) věty 2.1. Navíc okamžitě dostáváme vlastnost (2) věty 2.1. Dál platí:

$$[a,b]+[x,0]-[a,b]=[a+x_b,b]+[b,a]=[a+x_b+b,a+b].$$

Z vlastnosti (4) však plyne: pro $a,b,x \in P$ existuje $y \in P$ tak, že $a+x_b=y+a$. Potom $[a+x_b+b,a+b]=[y+a+b,a+b]=[y,0]$. Proto P splňuje také vlastnost (3) věty 2.1 a důkaz je hotov. □

Poznámka: Pokud je $(P,+)$ komutativní, pak grupa $(P \times P,+)/\equiv$ je také komutativní.

Poznámka: Jestliže pologrupu P vnoříme do sestrojené grupy, tj. ztotožníme s $\{[a,0]: a \in P\}$, pak definice ekvivalence $\equiv$ má následující význam:

$$[a,b]=[c,d] \;\Leftrightarrow\; a-b=c-d\,.$$

Opravdu, když $a-b=c-d$, pak $a+d_b=a-b+b+d_b=a-b+d+b=c-d+d+$ $+b=c+b$. Naopak, když $a+d_b=c+b$, pak $c+b=a-b+b+d_b=a-b+d+b$, odkud $c=a-b+d$, tj. $a-b=c-d$.

V každé grupě také platí $(a-b)+(c-d)=a-b+c+b-b-d=a-b+b+$ $+c_b-b-d=a+c_b-(d+b)$, což objasňuje zavedení sčítání na $P \times P$.

Poznámka: Nechť P splňuje podmínky věty 2.2. Pak na P existuje přirozené uspořádání, které je definováno takto:

$$(2.1) \quad a \le b \quad \Leftrightarrow \quad b=x+a \text{ pro některé } x \in P$$
$$\Leftrightarrow \quad b=a+y \text{ pro některé } y \in P\,.$$

Ověříme, že relace $\le$ je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní:

(*reflexivita*) $a \le a \;\Leftrightarrow\; a=a+0$.

(*antisymetrie*) $a \le b \;\&\; b \le a \;\Rightarrow\; b=x+a \;\&\; a=y+b \;\Rightarrow\; b=x+y+b$ $\Rightarrow\; 0=x+y \overset{2.2\ (3)}{\Rightarrow} x=y=0 \;\Rightarrow\; a=b$.

(*tranzitivita*) $a \le b \;\&\; b \le c \;\Rightarrow\; b=x+a \;\&\; c=y+b \;\Rightarrow\; c=y+x+a$ $\Rightarrow\; a \le c$.

Toto uspořádání odpovídá uspořádání, které určuje P jako kladný kužel uspořádané grupy $\left(P\times P,+\right)/\equiv$, tj.

$$a\le b \iff [a,0]\le[b,0].$$

Důkaz: Nejprve si všimněme, že pro libovolné prvky $a,b,x\in P$ platí:

$$[a,b]=[x,0] \iff a+0_b=x+b \iff a=x+b.$$

Potom $[a,0]\le[b,0] \iff [b,0]-[a,0]\in\{[x,0]:x\in P\}$. Ale $[b,0]-[a,0]=$ $=[b,a]$, tedy $[b,a]=[x,0]$ pro některé $x\in P$. To platí, právě když $b=x+a$ pro některé $x\in P$.

Analogicky: $[a,0]\le[b,0] \iff -[a,0]+[b,0]=[y,0]$ pro některé $y\in P$. Tedy $[b_a,a]=[y,0]$. To platí, právě když $b_a=y+a$. Odtud $a+b_a=a+y+a$, tj. $b+a=$ $=a+y+a$, tedy $b=a+y$ pro některé $y\in P$. □

Nyní popíšeme uspořádání na grupě $\left(P\times P,+\right)/\equiv$:

$$[a,b]\le[c,d] \iff [c,d]-[a,b]=[x,0] \text{ pro některé } x\in P.$$

Ale $[c,d]-[a,b]=-[d,c]-[a,b]=-\left([a,b]+[d,c]\right)=-[a+d_b,c+b]=[c+b,a+d_b]$. Tedy $[a,b]\le[c,d]$, právě když $c+b=x+a+d_b$, tj. $a+d_b\le c+b$ v P. Jinak: $[c,d]-[a,b]=[c,d]+[b,a]=[c+b_d,a+d]$. Tedy $[a,b]\le[c,d]$, právě když $c+b_d=$ $=x+a+d$, tj. $a+d\le c+b_d$ v P. Celkem dostáváme

$$[a,b]\le[c,d] \iff a+d_b\le c+b \iff a+d\le c+b_d.$$

Je-li P vzhledem k přirozenému uspořádání řetězec, potom grupa $\left(P\times P,+\right)/\equiv$ je lineárně uspořádaná.

Nyní předpokládejme, že pologrupa P je vzhledem ke svému přirozenému uspořádání horní polosvaz. Ukážeme, že sestrojená grupa je svazově uspořádaná. Stačí ověřit, že existuje $[a,b]\vee[0,0]$ pro každý prvek $[a,b]$. Ukážeme, že

$$[a,b]\vee[0,0]=[a\vee b,b].$$

Důkaz: (1) $[a,b]\le[a\vee b,b] \iff a+b_b\le(a\vee b)+b \iff (a\vee b)+b=x+a+b$ $\iff a\vee b=x+a \iff a\le a\vee b$, což je splněno. Dále $[0,0]\le[a\vee b,b] \iff 0+b_0\le$ $\le(a\vee b)+0 \iff b\le a\vee b$. Tedy $[a\vee b,b]$ je společná horní závora $[a,b]$ a $[0,0]$.

(2) Nechť $[a,b]$, $[0,0] \leq [c,d]$, tj. $a+d_b \leq c+b$ & $d \leq c$. Potom $(a \vee b)+d_b = (a+d_b) \vee (b+d_b) = (a+d_b) \vee (d+b) \leq c+b$, tedy $[a \vee b, b] \leq [c,d]$.

□

Svazové operace v ℓ-grupě $(P \times P, +)/\equiv$ jsou obecně dány takto:

$$
\begin{aligned}
[a,b] \vee [c,d] &= \big(([a,b]-[c,d]) \vee [0,0]\big)+[c,d] = \big(([a,b]+[d,c]) \vee [0,0]\big)+[c,d] = \\
&= \big([a+d_b, c+b] \vee [0,0]\big)+[c,d] = \big[(a+d_b) \vee (c+b), c+b\big]+[c,d] = \\
&= \big[\big((a+d_b) \vee (c+b)\big)+c_{c+b}, d+c+b\big] = \big[\big((a+d_b) \vee (c+b)\big)+c_b, d+b+c_b\big] = \\
&= \big[(a+d_b) \vee (c+b), d+b\big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[a,b] \wedge [c,d] &= \big(([a,b]-[c,d]) \wedge [0,0]\big)+[c,d] = \big(([a,b]+[d,c]) \wedge [0,0]\big)+[c,d] = \\
&= \big([a+d_b, c+b] \wedge [0,0]\big)+[c,d] = \big[(a+d_b) \wedge (c+b), c+b\big]+[c,d] = \\
&= \big[\big((a+d_b) \wedge (c+b)\big)+c_{c+b}, d+c+b\big] = \big[\big((a+d_b) \wedge (c+b)\big)+c_b, d+b+c_b\big] = \\
&= \big[(a+d_b) \wedge (c+b), d+b\big].
\end{aligned}
$$

Předchozí poznatky tedy můžeme shrnout:

Pologrupa P je kladným kuželem ℓ-grupy, právě když splňuje podmínky (1) až (4) z věty 2.2 a vzhledem k přirozenému uspořádání, které je definováno dle (2.1), je P horní polosvaz (nebo ekvivalentně dolní polosvaz).

3 MV-algebry

V této části uvedeme nejdůležitější vlastnosti MV-algeber; zvláštní pozornost zaměříme na lineárně uspořádané MV-algebry.

MV-algebry zavedl C. C. Chang v [5] jako algebraický model Łukasiewiczovy logiky. Definice, kterou uvedeme zde, je převzata z monografie [4]. Původní Changova definice obsahovala 20 axiomů.

Definice: *MV-algebra* je algebra $(A, \oplus, \neg, 0, 1)$ taková, že $(A, \oplus, 0)$ je komutativní monoid s unární operací $\neg$ a konstantou 1 splňující následující identity:

(*MV1*) $x \oplus 1 = 1$,

(*MV2*) $\neg 0 = 1$,

(*MV3*) $\neg\neg x = x$,

(*MV4*) $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

Příklad 3.1: Tzv. standardní MV-algebra $[0,1]_{MV}$ je MV-algebra $([0,1], \oplus, \neg, 0, 1)$, kde

$$x \oplus y = \min\{x + y, 1\},$$

$$\neg x = 1 - x.$$

Pro každé $n \geq 2$ je

$$Ł_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$$

podalgebra standardní MV-algebry (n-prvkový MV-řetězec).

Standardní MV-algebra je nejdůležitější příklad, protože v MV-algebrách má stejný význam jako dvouprvková Booleova algebra pro Booleovy algebry: $[0,1]_{MV}$ totiž generuje varietu MV-algeber, tj. identita platí ve všech MV-algebrách, právě když platí ve standardní MV-algebře $[0,1]_{MV}$.

Poznámka: V následujícím textu budeme používat operace $\odot$ a $\ominus$, které definujeme takto:

$$x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y),$$

$$x \ominus y = \neg(\neg x \oplus y).$$

Ve standardní MV-algebře budou operace $\odot$ a $\ominus$ vypadat následovně:

$$x \odot y = \max\{x + y - 1, 0\},$$

$$x \ominus y = \max\{x - y, 0\}.$$

V MV-algebře $(A,\oplus,\neg,0,1)$ definujme uspořádání takto:

(*3.1*) $\quad a \le b \;\Leftrightarrow\; \neg a \oplus b = 1$.

Pak $(A,\le)$ je ohraničený distributivní svaz, kde:

$$x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = (x \odot \neg y) \oplus y = (x \ominus y) \oplus y,$$

$$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = \neg(\neg(x \oplus \neg y) \oplus \neg y) = \neg(\neg x \odot y) \odot y.$$

Poznámka: Jestliže $(A,\oplus,\neg,0,1)$ je MV-algebra, potom $(A,\oplus,\le)$ i $(A,\odot,\le)$ jsou uspořádané pologrupy.

Pokud je uspořádání definované vztahem (3.1) lineární, říkáme, že algebra $(A,\oplus,\neg,0,1)$ je MV-řetězec. Zajímavým příkladem MV-řetězce je následující MV-algebra, viz [5]:

Příklad 3.2: Uvažujme nekonečný řetězec

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < b_2 < b_1 < b_0 = 1.$$

Definujeme-li na $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}_0\} \cup \{b_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ operace $\oplus$ a $\neg$ následujícím způsobem, dostaneme MV-řetězec:

$$a_i \oplus a_j = a_{i+j},$$

$$b_i \oplus b_j = 1,$$

$$a_i \oplus b_j = b_j \oplus a_i = \left\langle \begin{array}{l} 1 \text{ pro } i \ge j, \\ \\ b_{j-i} \text{ pro } i < j, \end{array} \right.$$

$$\neg a_i = b_i,$$

$$\neg b_i = a_i.$$

MV-algebry zobecňují Booleovy algebry v následujícím smyslu:

Nechť $(A,\vee,\wedge,',0,1)$ je Booleova algebra. Položíme-li $x \oplus y = x \vee y$ a $\neg x = x'$, pak $(A,\oplus,\neg,0,1)$ je MV-algebra. Navíc $x \odot y = x \wedge y$ a $x \ominus y$ je komplement prvku $x \wedge y$ v intervalu $[0,x]$.

Naopak, když $(A,\oplus,\neg,0,1)$ je MV-algebra taková, že $x \oplus x = x$ pro každé $x \in A$, pak $x \vee y = x \oplus y$, $x \wedge y = x \odot y$ a $\neg x$ je komplement x ve svazu $(A,\le)$.

Nechť G je komutativní ℓ-grupa, $u \in G^+$. Na intervalu

$$[0,u] = \{x \in G : 0 \le x \le u\}$$

definujme operace

$$x \oplus y = u \wedge (x+y),$$
$$\neg x = u - x.$$

Strukturu $([0,u], \oplus, \neg, 0, u)$ značíme $\Gamma(G,u)$.

Věta 3.1: $\Gamma(G,u)$ *je MV-algebra.*

Důkaz: Přímým výpočtem se ověří, že $\Gamma(G,u)$ splňuje axiomy MV-algebry. $\square$

Vraťme se k příkladu 3.1:

Příklad 3.3: Algebra $\Gamma(\mathbb{R},1)$ odpovídá standardní MV-algebře $[0,1]_{MV}$. Pro každé $n \geq 2$

$$Ł_n = \Gamma\left(\mathbb{Z}\tfrac{1}{n-1},1\right), \text{ kde } \mathbb{Z}\tfrac{1}{n-1} = \left\{\frac{z}{n-1} : z \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Speciálně, nechť $Ł_2 = \{0,1\}$ (Boolova algebra). Potom $Ł_2 = \Gamma(\mathbb{Z},1)$.

Lemma 3.2: *Nechť G je ℓ-grupa, $u \in G^+$. Nechť $A = \Gamma(G,u)$.*

(i) *Pro všechny $a,b \in A$, $a+b = (a \oplus b) + (a \odot b)$;*

(ii) *Pro všechny $x_1,\dots,x_n \in A$, $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = u \wedge (x_1 + \cdots + x_n)$;*

(iii) *Přirozené uspořádání MV-algebry A odpovídá uspořádání na interval $[0,u] \subseteq G$.*

Důkaz: (i) Snadno získáme $(a \odot b) = \neg(\neg a \oplus \neg b) = u - (u \wedge ((u-a)+(u-b))) =$ $= u + (-u \vee (b-u+a-u)) = 0 \vee (a+b-u)$, máme tedy $a+b-(a \odot b) = a+b-$ $-(0 \vee (a+b-u)) = (a+b) \wedge (a+b+u-b-a) = (a+b) \wedge u = a \oplus b$.

(ii) Indukcí podle n: Pro $n=2$ platnost plyne přímo z definice operací na $\Gamma(G,u)$. Předpokládejme, že $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = u \wedge (x_1 + \cdots + x_n)$ pro každé $x_1,\dots,x_n \in A$. Pak

$$x_1 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus x_{n+1} = (u \wedge (x_1 + \cdots + x_n)) \oplus x_{n+1} =$$
$$= u \wedge ((u \wedge (x_1 + \cdots + x_n)) + x_{n+1}) = u \wedge ((u + x_{n+1}) \wedge (x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1})) =$$
$$= u \wedge (u + x_{n+1}) \wedge (x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}) = u \wedge (x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}).$$

Spojením indukčních kroků získáme platnost (ii).

(iii) Nechť $x, y \in [0,u]$. Pak $x \leq y$ v $\Gamma(G,u)$, právě když $\neg x \oplus y = u$. Pravou stranu ekvivalence můžeme přepsat $\neg x \oplus y = u \wedge (u - x + y) = u$, tj. $u \leq u - x + y$ v G. Po úpravě dostáváme, že $x \leq y$ v G. □

Naším hlavním cílem bude dokázat, že každou MV-algebru A lze reprezentovat jako $\Gamma(G,u)$ pro některou komutativní ℓ-grupu G a kladný prvek $u \in G^+$. Důkaz, který zde uvádíme, je převzat z [11] (je možné jej najít i v [4]) a je založen na tom, že každá MV-algebra je subdirektní součin MV-řetězců (věta 3.3).

V článku [6] je ukázáno, že taková reprezentace existuje pro MV-řetězce, tj. každý MV-řetězec je (až na izomorfismus) ve tvaru $\Gamma(G,u)$ pro některou lineárně uspořádanou komutativní grupu G.

Podívejme se na Changovu konstrukci (z [6]):

Nechť $(A, \oplus, \neg, 0, 1)$ je MV-řetězec. Nechť G je množina všech uspořádaných dvojic $(m, x) \in \mathbb{Z} \times A$, přičemž identifikujeme dvojice $(m,1)$ a $(m+1,0)$ pro každé $m \in \mathbb{Z}$. Na G definujeme operace $+$ a $-$ takto:

$$(m,x)+(n,y) = \begin{cases} (m+n, x \oplus y), \text{ jestliže } x \oplus y < 1, \\ \\ (m+n+1, x \odot y), \text{ jestliže } x \oplus y = 1, \end{cases}$$

$$-(m,x) = (-m-1, \neg x).$$

Potom $(G,+)$ je komutativní grupa s nulovým prvkem $(0,0)$, kterou lze lineárně uspořádat takto:

$$(m,x) \leq (n,y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} m < n \text{, nebo} \\ m = n \;\&\; x \leq y. \end{array}$$

Pak zobrazení $x \mapsto (0,x)$ je izomorfismus původní MV-algebry A na $\Gamma(G,(0,1))$.

Je známé, že každá algebra je subdirektní součin subdirektně ireducibilních algeber, které jsou navíc homomorfními obrazy původní algebry. Tedy speciálně každá MV-algebra je subdirektní součin subdirektně ireducibilních MV-algeber.

Věta 3.3: *Subdirektně ireducibilní MV-algebra je lineárně uspořádaná. Proto každá MV-algebra je subdirektní součin MV-řetězců.*

Poznámka: Lineárně uspořádaná MV-algebra nemusí být subdirektně ireducibilní, např. MV-řetězec z příkladu 3.2 není subdirektně ireducibilní.

K důkazu věty 3.3 potřebujeme následující vlastnosti ideálů MV-algeber:

Definice: *Ideál* v MV-algebře $(A,\oplus,\neg,0,1)$ je neprázdná množina $I\subseteq A$ taková, že

(i) $\forall x,y\in I:\ x\oplus y\in I$,

(ii) $\forall x\in I\ \ \forall y\in A:\ x\geq y\ \Rightarrow\ y\in I$.

Ideály tvoří algebraický distributivní svaz $Id(A)$, který je izomorfní se svazem kongruencí $Con(A)$; izomorfismus je dán vzájemně inverzními přiřazeními

$$\Theta\mapsto[0]_\Theta=\{a\in A:(a,0)\in\Theta\},$$

$$I\mapsto\Theta_I=\{(a,b)\in A\times A:(a\ominus b)\oplus(b\ominus a)\in I\}.$$

Pro každou neprázdnou podmnožinu $B\subseteq A$ je

$$I(B)=\{a\in A:a\leq b_1\oplus\ldots\oplus b_n\ \text{pro některá}\ b_1,\ldots,b_n\in B,\ n\in\mathbb{N}\}$$

ideál generovaný množinou B.

Před následujícím lemmatem si všimněme, že platí:

(3.2) $mx\wedge ny\leq mn(x\wedge y)$

pro každé $x,y\in A$, $m,n\in\mathbb{N}$. Opravdu, indukcí se snadno ověří, že platí

$$\forall x,y\in A,\ \forall n\in\mathbb{N}:\ x\wedge ny\leq n(x\wedge y),$$

a proto $mx\wedge ny\leq n(mx\wedge y)\leq nm(x\wedge y)$.

Lemma 3.4: *Pro každé $x,y\in A$ platí*

$$I(x)\cap I(y)=I(x\wedge y).$$

Důkaz: Inkluze $I(x\wedge y)\subseteq I(x)\cap I(y)$ je jasná. Naopak, nechť $a\in I(x)\cap I(y)$, tj. $a\leq mx$ & $a\leq ny$ pro některé $m,n\in\mathbb{N}$. Potom podle (3.2) dostáváme

$$a\leq mx\wedge ny\leq mn(x\wedge y),$$

což znamená, že $a\in I(x\wedge y)$. □

Nyní můžeme dokázat větu 3.3:

Důkaz: Nechť $(A,\oplus,\neg,0,1)$ je subdirektně ireducibilní MV-algebra. Předpokládejme, že A není lineárně uspořádaná. Potom existují prvky $a,b \in A$ takové, že $a \ominus b \neq \neq 0 \neq b \ominus a$, protože $a \leq b \iff \neg a \oplus b = 1 \iff a \ominus b = \neg(\neg a \oplus b) = 0$. Jistě

$$I(a \ominus b) \neq \{0\} \neq I(b \ominus a).$$

Platí ovšem $(a \ominus b) \wedge (b \ominus a) = 0$, a tedy podle lemmatu 3.4

$$I(a \ominus b) \cap I(b \ominus a) = I((a \ominus b) \wedge (b \ominus a)) = I(0) = \{0\}.$$

Označíme-li Θ a Φ kongruence určené ideály $I(a \ominus b)$ a $I(b \ominus a)$, pak tedy platí $\Theta \neq \omega_A \neq \Phi$ & $\Theta \cap \Phi = \omega_A$. To ovšem znamená, že algebra A není subdirektně ireducibilní (A je subdirektně ireducibilní $\iff$ $\omega_A \neq \bigcap\{\Theta \in Con(A) : \Theta \neq \omega_A\}$). □

Lemma 3.5: *V každém MV-řetězci A platí následující vlastnosti:*

(*i*) *jestliže $x \oplus y < 1$, pak $x \odot y = 0$;*

(*ii*) *jestliže $x \oplus y = x \oplus z$ a $x \odot y = x \odot z$, pak $y = z$;*

(*iii*) *jestliže $x \oplus y = x \oplus z < 1$, pak $y = z$;*

(*iv*) *jestliže $x \odot y = x \odot z > 0$, pak $y = z$;*

(*v*) *$x \oplus y = x$, právě když $x = 1$ nebo $y = 0$;*

(*vi*) *$x \oplus y = x$, právě když $\neg x \oplus \neg y = \neg y$;*

(*vii*) *jestliže $x \oplus y = 1$ a $x \oplus z < 1$, pak $(x \odot y) \oplus z = (x \oplus z) \odot y$.*

Důkaz: (i) Dle definice $\neg x \leq y \iff x \oplus y = 1$. Z předpokladu tedy vyplývá, že $\neg x \not\leq y$, čili $y < \neg x$. Odtud $\neg y \oplus \neg x = 1$ a $x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y) = \neg 1 = 0$.

(ii) $\neg x \vee y = \neg x \oplus (x \odot y) = \neg x \oplus (x \odot z) = \neg x \vee z$,

$y \wedge \neg x = \neg(\neg(y \oplus x) \oplus x) = \neg(\neg(z \oplus x) \oplus x) = z \wedge \neg x$, odkud $y = z$.

(iii) Přímý důsledek (i) a (ii).

(iv) Platí $x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y)$ a $x \odot z = \neg(\neg x \oplus \neg z)$, tedy podle předpokladu $\neg(\neg x \oplus \neg y) = \neg(\neg x \oplus \neg z) > 0$. Z toho plyne $\neg x \oplus \neg y = \neg x \oplus \neg z < 1$ a dle (iii) dostáváme $\neg y = \neg z$, tj. $y = z$.

(v) $\Rightarrow$: Jestliže $x < 1$, pak $x \oplus y = x \oplus 0 < 1$ a dle (iii) $y = 0$. Pokud $x \geq 1$, dostáváme $x \oplus \neg 1 = 1$ a $x = 1$.

$\Leftarrow$: Naopak pokud $x = 1$ nebo $y = 0$, pak $x \oplus y = 1 \oplus y = 1 = x$ nebo $x \oplus y = x \oplus 0 = x$.

(vi) $\Rightarrow$: Pokud $x \oplus y = x$, potom dle (v) $x = 1$ nebo $y = 0$, tudíž $\neg x \oplus \oplus \neg y = 0 \oplus \neg y = \neg y$ nebo $\neg x \oplus \neg y = \neg x \oplus 1 = 1 = \neg y$.

$\Leftarrow$: Opačnou implikaci získáme záměnou x, y za $\neg y, \neg x$.

(vii) Z předpokladu plyne, že $\neg y \le x$. Pak $\neg y \oplus (x \odot y) \oplus z = (\neg y \vee x) \oplus$ $\oplus z = x \oplus z < 1$. Podobně $\neg y \oplus (y \odot (x \oplus z)) = \neg y \vee (x \oplus z) = x \oplus z < 1$. Tedy $\neg y \oplus$ $\oplus (x \odot y) \oplus z = \neg y \oplus (y \odot (x \oplus z)) < 1$ a podle (iii) $(x \odot y) \oplus z = (x \oplus z) \odot y$. □

Poznámka: Z věty 3.3 vyplývá, že každá MV-algebra splňuje podmínky (ii) a (vi) z lemmatu 3.5.

Lemma 3.6: *Prvek $\neg a$ je jediný prvek x takový, že $a \oplus x = 1$ a zároveň $a \odot x = 0$.*

Důkaz: Jestliže $a \oplus x = 1$, pak $\neg a \le x$. Jestliže $0 = a \odot x = \neg(\neg a \oplus \neg x)$, potom $1 =$ $= \neg a \oplus \neg x$, odkud $a \le \neg x$, tj. $\neg a \ge x$. Dohromady $x = \neg a$. □

Věta 3.7: *V každé MV-algebře A platí následující rovnosti:*

(*1*) $x \oplus y \oplus (x \odot y) = x \oplus y$,

(*2*) $(x \ominus y) \oplus ((x \oplus \neg y) \odot y) = x$,

(*3*) $(x \odot y) \oplus ((x \oplus y) \odot z) = (x \odot z) \oplus ((x \oplus z) \odot y)$.

Důkaz: Podle věty 3.3 můžeme předpokládat, že A je řetězec. Jestliže $x \oplus y = 1$, potom (1) vyplývá z MV1. Jestliže $x \oplus y < 1$, potom (1) plyne z lemmatu 3.5 (i).

Všimněme si, že jestliže $x \le y$, potom $x \ominus y = \neg 1 = 0$ a

$$(x \ominus y) \oplus ((x \oplus \neg y) \odot y) = (x \oplus \neg y) \odot y = x \wedge y = x.$$

Jestliže na druhé straně $y < x$, pak

$$(x \ominus y) \oplus ((x \oplus \neg y) \odot y) = (x \ominus y) \oplus (x \wedge y) = (x \ominus y) \oplus y = x \vee y = x,$$

tedy (2) platí.

Pro důkaz (3) nejprve dokážeme následující rovnost:

(4) $(x \odot y) \oplus ((x \oplus y) \odot z) = (x \oplus y) \odot ((x \odot y) \oplus z)$.

Skutečně, jestliže $x \oplus y = 1$, oba členy (4) se shodují s $(x \odot y) \oplus z$, protože $x \odot 1 =$ $= \neg(\neg x \oplus \neg 1) = x$. Jestliže $x \oplus y < 1$, pak podle lemmatu 3.5 (i) se oba členy shodují s $(x \oplus y) \odot z$. Tudíž (4) platí pro všechny MV-algebry.

Ze (4) a definice MV-algebry získáme:

(5) $\neg((x \odot y) \oplus ((x \oplus y) \odot z)) = (\neg x \odot \neg y) \oplus ((\neg x \oplus \neg y) \odot \neg z)$.

Levou stranu rovnosti (5) získáme negací levé strany rovnosti (4). Negace pravé strany (4) je $\neg((x \oplus y) \odot ((x \odot y) \oplus z)) = \neg(x \oplus y) \oplus \neg((x \odot y) \oplus z) = (\neg x \odot \neg y) \oplus$

$\oplus\left(\neg\left(x\odot y\right)\odot\neg z\right)=\left(\neg x\odot\neg y\right)\oplus\left(\left(\neg x\oplus\neg y\right)\odot\neg z\right)$, což je pravá strana rovnosti (5).

Pro dokončení důkazu (3) prozkoumáme následující případy:

(A) $x\oplus y\oplus z<1$. Z předpokladu dostaneme (podle lemmatu 3.5 (i)), že $x\odot y=0$, $x\odot z=0$, ale také $\left(x\oplus y\right)\odot z=0$ a $\left(x\oplus z\right)\odot y=0$. Obě strany (3) jsou tedy rovny 0.

(B) $\neg x\oplus\neg y\oplus\neg z<1$. Stejně jako v případě (A) $\neg x\odot\neg y=0$, $\neg x\odot$ $\odot\neg z=0$ a $\left(\neg x\oplus\neg y\right)\odot\neg z=0$, $\left(\neg x\oplus\neg z\right)\odot\neg y=0$. S využitím rovnosti (5) získáme, že obě strany (3) jsou rovny 1.

(C) $x\oplus y\oplus z=1$ a $\neg x\oplus\neg y\oplus\neg z=1$. V tomto případě mohou nastat následující možnosti:

(α) $x\oplus y=1$ a $x\oplus z<1$, nebo $x\oplus y<1$ a $x\oplus z=1$. Pak díky symetrii stačí uvažovat případ $x\oplus y=1$ a $x\oplus z<1$. Potom dle lemmatu 3.5 (i) $x\odot z=0$ a levá strana (3) je $\left(x\odot y\right)\oplus\left(1\odot z\right)=\left(x\odot y\right)\oplus z$ a pravá strana (3) je $0\oplus$ $\oplus\left(\left(x\oplus z\right)\odot y\right)=\left(x\oplus z\right)\odot y$. Z lemmatu 3.5 (vii) plyne $\left(x\odot y\right)\oplus z=\left(x\oplus z\right)\odot y$.

(β) $x\oplus y=x\oplus z=1$. Pak rovnost (3) přechází v rovnost

(6) $\left(x\odot y\right)\oplus z=\left(x\odot z\right)\oplus y$.

Nejprve ukážeme, že rovnost (6) platí v případě, že $x\odot y=0$ nebo $x\odot z=0$. Předpokládejme, že $x\odot y=0$. Poněvadž $x\oplus y=1$, vyplývá z lemmatu 3.6, že $x=\neg y$, tudíž z $y=\neg x\le z$ obdržíme $\left(x\odot y\right)\oplus z=z=y\vee z=\left(\neg y\odot z\right)\oplus y=\left(x\odot z\right)\oplus y$. Díky symetrii platí (6) i za podmínky $x\odot z=0$.

Dále si všimněme, že jestliže jedna ze stran (6) je rovna 1, pak také druhá je rovna 1. Předpokládejme, že $\left(x\odot y\right)\oplus z=1$. Protože $x\odot y\odot z=\neg\left(\neg x\oplus\neg y\oplus\neg z\right)$ a $\neg x\oplus\neg y\oplus\neg z=1$, je $x\odot y\odot z=0$ a z lemmatu 3.6 vyplývá, že $z=\neg\left(x\odot y\right)=$ $=\neg x\oplus\neg y$. Odtud

$$\left(x\odot z\right)\oplus y=\left(x\odot\left(\neg x\oplus\neg y\right)\right)\oplus y=\left(x\wedge\neg y\right)\oplus y=\left(x\oplus y\right)\wedge\left(\neg y\oplus y\right)=1\wedge 1=1.$$

Tedy k dokončení (β) se můžeme omezit na případ, kdy $\left(x\odot y\right)\oplus z<1$, $\left(x\odot z\right)\oplus y<1$, $x\odot y>0$, $x\odot z>0$. Za tohoto předpokladu podle lemmatu 3.5 (vii) dostaneme:

$$x\odot\left(z\oplus\left(x\odot y\right)\right)=\left(x\odot z\right)\oplus\left(x\odot y\right)>0,$$
$$x\odot\left(y\oplus\left(x\odot z\right)\right)=\left(x\odot y\right)\oplus\left(x\odot z\right)>0,$$

tedy $x\odot\left(z\oplus\left(x\odot y\right)\right)=x\odot\left(y\oplus\left(x\odot z\right)\right)>0$, což potvrzuje (6) podle lemmatu 3.5 (iv).

(γ) $x \oplus y < 1$ a $x \oplus z < 1$. Pak podle lemmatu 3.5 (i) $x \odot y = 0$ a $x \odot z = 0$, tj. $\neg x \oplus \neg y = 1$ a $\neg x \oplus \neg z = 1$. Pak podle (5) a důkazu (β) (s $\neg x$, $\neg y$, $\neg z$ namísto x, y, z) dostáváme, že (3) platí i v tomto případě. □

Na závěr této kapitoly připomeňme pseudo-MV-algebry:

Pseudo-MV-algebra je algebra $\left(A, \oplus, ^-, ^\sim, 0, 1\right)$ taková, že $\left(A, \oplus, 0\right)$ je monoid se dvěma unárními operacemi $^-$ a $^\sim$ a konstantou 1 splňující rovnosti:

(*PMV1*) $x \oplus 1 = 1 = 1 \oplus x$,

(*PMV2*) $1^- = 0 = 1^\sim$,

(*PMV3*) $x^{-\sim} = x$,

(*PMV4*) $\left(x^- \oplus y^-\right)^\sim = \left(x^\sim \oplus y^\sim\right)^-$,

(*PMV5*) $x \oplus \left(y \odot x^\sim\right) = y \oplus \left(x \odot y^\sim\right) = \left(y^- \odot x\right) \oplus y = \left(x^- \odot y\right) \oplus x$,

(*PMV6*) $\left(x^- \oplus y\right) \odot x = y \odot \left(x \oplus y^\sim\right)$,

kde binární operace $\odot$ je definována takto:

$$x \odot y = \left(x^- \oplus y^-\right)^\sim .$$

Lze snadno ověřit, že operace $\odot$ je asociativní.

Pseudo-MV-algebry zavedli G. Georgescu a A. Iorgulescu v [9]. Nezávisle na nich J. Rachůnek v [12] zavedl GMV-algebry, které jsou s pseudo-MV-algebrami ekvivalentní. Pseudo-MV-algebry jsou nekomutativním zobecněním MV-algeber (nepředpokládá se komutativnost operace $\oplus$). MV-algebry jsou ekvivalentní s pseudo-MV-algebrami, pro které je sčítání $\oplus$ komutativní: jestliže $\left(A, \oplus, ^-, ^\sim, 0, 1\right)$ je pseudo-MV-algebra splňující identitu $x \oplus y = y \oplus x$, potom obě negace $^-$ a $^\sim$ splývají a $\left(A, \oplus, ^-, 0, 1\right)$ je MV-algebra.

Stejně jako MV-algebry nesou pseudo-MV-algebry přirozené svazové uspořádání, které je definováno následujícím způsobem:

$$a \le b \iff a^- \oplus b = 1 \iff b \oplus a^\sim = 1 .$$

Vztah pseudo-MV-algeber a (nekomutativních) ℓ-grup je podobný jako vztah MV-algeber a komutativních ℓ-grup:

Když $(G,+,\leq)$ je ℓ-grupa a $u \in G^{+}$, pak na intervalu $[0,u]$ lze definovat operace $\oplus$, $^{-}$, $^{\sim}$ takto:

$$x \oplus y = (x+y) \wedge u ,$$

$$x^{-} = u - x ,$$

$$x^{\sim} = -x + u .$$

Potom $\Gamma(G,u) = \left([0,u], \oplus, ^{-}, ^{\sim}, 0, u\right)$ je pseudo-MV-algebra.

Naopak, A. Dvurečenskij v [7] dokázal, že pro každou pseudo-MV-algebru $\left(A, \oplus, ^{-}, ^{\sim}, 0, 1\right)$ existuje ℓ-grupa $(G,+,\leq)$ a kladný prvek $u \in G^{+}$ tak, že A je izomorfní s $\Gamma(G,u)$.

Důkaz v článku [7] vychází z Bosbachovy práce [2], alternativní konstrukci lze najít např. v [8]. V kapitole 6 ukážeme, že každou pseudo-MV-algebru je možné reprezentovat jako $\Gamma(G,u)$. Důkaz bude založen na skutečnosti, že pseudo-MV-algebry jsou ekvivalentní s ohraničenými kuželovými algebrami.

4 Vnoření MV-algeber do ℓ-grupy

V této části si ukážeme, jakým způsobem lze každou MV-algebru reprezentovat jako kladný kužel některé ℓ-grupy.

Definice: O posloupnosti $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ...)$ prvků libovolné MV-algebry A řekneme, že je *dobrá*, právě když pro každé $i = 1, 2, ...$ platí

$$a_i \oplus a_{i+1} = a_i$$

a existuje přirozené číslo n takové, že $a_r = 0$ pro všechna $r > n$. Namísto $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$ budeme stručně zapisovat

$$\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n).$$

Tedy jestliže 0^m označuje m po sobě jdoucích nul, můžeme dobré posloupnosti zapisovat ve tvaru

(*4.1*) $\quad (a_1, ..., a_n) = (a_1, ..., a_n, 0^m).$

Poznamenejme, že dobrá posloupnost $(1^m, a_1, ..., a_n)$, kde 1^m je sled po sobě jdoucích jedniček, se liší od $(a_1, ..., a_n)$. Pro každý prvek $a \in A$ budeme dobrou posloupnost $(a, 0, ..., 0, ...)$ značit (a).

Dobré posloupnosti Boolovy algebry A jsou nerostoucí posloupnosti prvků z A, které mají konečný počet nenulových členů.

Pro lineárně uspořádané MV-algebry máme následující charakteristiku dobrých posloupností:

Věta 4.1: *Jestliže A je MV-řetězec, pak každá dobrá posloupnost řetězce A má tvar $(1^p, a)$ pro některé celé číslo $p \geq 0$ a $a \in A$.*

Důkaz: Plyne okamžitě z lemmatu 3.5 (v). □

Lemma 4.2: *Předpokládejme, že $A \subseteq \prod_{i \in I} A_i$ je subdirektní součin MV-algeber $\{A_i : i \in I\}$. Posloupnost $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n, ...)$ prvků z A je dobrá posloupnost, právě když pro každé $i \in I$ je posloupnost*

$$\mathbf{a}_i = (\pi_i(a_1), ..., \pi_i(a_n), ...)$$

dobrá posloupnost v A_i *a existuje celé číslo* $n_0 \geq 0$ *takové, že pro každé* $n > n_0$ *je* $\pi_i(a_n) = 0$ *pro všechna* $i \in I$. *(*π_j *je projekce* $\prod_{i \in I} A_i$ *na* A_j*).*

Důkaz: Stačí si všimnout, že $a_n \oplus a_{n+1} = a_n$ znamená, že $\pi_i(a_n) \oplus \pi_i(a_{n+1}) = \pi_i(a_n \oplus a_{n+1}) = \pi_i(a_n)$ pro každé $i \in I$. □

Výše uvedené lemma 4.2 a věta 4.1 spolu s větou 3.3 dávají velmi užitečný nástroj pro práci s dobrými posloupnostmi. Jako příklad uveďme důkaz následujícího lemmatu:

Lemma 4.3: *Nechť* A *je MV-algebra. Jestliže* $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n, ...)$ *a* $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n, ...)$ *jsou dobré posloupnosti MV-algebry* A, *potom také posloupnost* $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_n, ...)$, *kde* $c_n = a_n \vee b_n$ *pro každé* n, *je dobrá posloupnost.*

Důkaz: Poněvadž $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jsou dobré posloupnosti, existuje celé číslo n_0 takové, že $c_n = 0$ pro všechna $n > n_0$. Podle věty 3.3 je A subdirektním součinem MV-řetězců $\{C_i : i \in I\}$. Pro každé $i \in I$ jsou posloupnosti $\mathbf{a}_i = (\pi_i(a_1), ..., \pi_i(a_n), ...)$ a $\mathbf{b}_i = (\pi_i(b_1), ..., \pi_i(b_n), ...)$ dobré posloupnosti algeber C_i. Odtud podle věty 4.1 $\mathbf{a}_i = (1^p, \alpha_i)$ a $\mathbf{b}_i = (1^q, \beta_i)$, kde α_i a β_i jsou z C_i. Tudíž $\pi_i(c_n) = 1$, jestliže $n \leq \max\{p, q\}$, a $\pi_i(c_n) = 0$, jestliže $n > \max\{p, q\} + 1$. Pro $n = \max\{p, q\} + 1$ máme $\pi_i(c_n) = \alpha_i$, jestliže $p > q$, $\pi_i(c_n) = \beta_i$, jestliže $p < q$, a $\pi_i(c_n) = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, pokud $p = q$. Proto $\mathbf{c}_i = (\pi_i(c_1), ..., \pi_i(c_n), ...)$ je dobrá posloupnost pro každé $i \in I$, odkud plyne, že $\mathbf{c}$ je dobrá posloupnost MV-algebry A. □

Pro lepší představu významu dobrých posloupností uvedeme následující příklad:

Příklad: Pro každé reálné číslo $\alpha \geq 0$ nechť $\lfloor \alpha \rfloor$ značí dolní celou část čísla α a $\langle \alpha \rangle = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$. Potom můžeme psát α ve tvaru

$$\alpha = 1 + ... + 1 + \langle \alpha \rangle + 0 + 0 + ...,$$

kde počet po sobě jdoucích jedniček je $\lfloor \alpha \rfloor$. Uvažujeme-li prvky MV-algebry $[0,1]$, výše uvedené sčítance $\alpha_1, \alpha_2, ...$ čísla α vyhovují identitě $\alpha_i \oplus \alpha_{i+1} = \alpha_i$ pro každé celé číslo $i \geq 1$. Nechť podobně pro $0 \leq \beta \in \mathbb{R}$

$$\beta = \beta_1 + ... + \beta_{m-1} + \langle \beta \rangle + 0 + ...,$$

kde $\beta_1 = \ldots = \beta_{m-1} = 1 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1}$, $0 = \alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \ldots$ a $0 = \beta_{m+1} = \beta_{m+2} = \ldots$. Nechť $\gamma = \alpha + \beta$. Potom $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$, kde $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{n+m-2} = 1$, $\gamma_{n+m-1} = \langle\alpha\rangle \oplus \langle\beta\rangle$, $\gamma_{n+m} = \langle\alpha\rangle \odot \langle\beta\rangle$ a $0 = \gamma_{n+m+1} = \gamma_{n+m+2} = \ldots$. Zkráceně: pro každé $i = 1, 2, \ldots$ je sčítanec γ_i dán

(*4.2*) $\quad \gamma_i = \alpha_i \oplus (\alpha_{i-1} \odot \beta_1) \oplus (\alpha_{i-2} \odot \beta_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_2 \odot \beta_{i-2}) \oplus (\alpha_1 \odot \beta_{i-1}) \oplus \beta_i$.

Díky (4.2) a (4.1) můžeme nyní uvést následující definici:

Definice: Pro libovolné dvě dobré posloupnosti $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ a $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ definujme jejich *součet* $\mathrm{c} = (c_1, c_2, \ldots)$ jako $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, kde pro všechna $i = 1, 2, \ldots$

(*4.3*) $\quad c_i = a_i \oplus (a_{i-1} \odot b_1) \oplus \ldots \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus b_i$.

Poněvadž $a_p = b_q = 0$ pro $p > n$ a $q > m$, také $c_j = 0$ pro každé $j > m + n$. Zapisujeme $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_{n+m}) = (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)$.

Následující přímý důsledek (4.3) budeme často využívat pro výpočet součtu dvou dobrých posloupností v MV-řetězci:

(*4.4*) $\quad (1^p, a) + (1^q, b) = (1^{p+q}, a \oplus b, a \odot b)$.

Jelikož podle rovnosti 3.7 (1) je $(a \oplus b, a \odot b)$ dobrá posloupnost, využitím věty 3.3 a lemmatu 4.2 spolu s (4.4) okamžitě dostaneme, že součet dvou dobrých posloupností je dobrá posloupnost.

Označme M_A množinu dobrých posloupností MV-algebry A.

Věta 4.4: *Nechť A je MV-algebra. Potom $(M_A, +, (0))$ je komutativní monoid s následujícími aditivními vlastnostmi:*

(*i*) (krácení) *Pro libovolné dobré posloupnosti* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *platí: jestliže* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, *pak* $\mathbf{b} = \mathbf{c}$*;*

(*ii*) *Jestliže* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (0)$, *pak* $\mathbf{a} = \mathbf{b} = (0)$.

Důkaz: Podle (4.3) $\mathbf{a} + (0) = \mathbf{a}$: $a_i \oplus (a_{i-1} \odot 0) \oplus \ldots \oplus (a_1 \odot 0) \oplus 0 = a_i \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0 = $ $= a_i$. (0) je tedy nulový prvek a sčítání je komutativní. (ii) zřejmě platí. K důkazu asociativity můžeme podle věty 3.3 bezpečně předpokládat, že A je lineárně uspořádaná. Nechť $\mathbf{a}=\left(1^p,a\right)$, $\mathbf{b}=\left(1^q,b\right)$ a $\mathbf{c}=\left(1^r,c\right)$. Podle věty 4.1 a rovnosti 3.7 (3) máme rovnosti

$$\left(\mathbf{b}+\mathbf{a}\right)+\mathbf{c}=\left(1^{p+q},a\oplus b,a\odot b\right)+\left(1^r,c\right)=$$
$$=\left(1^{p+q+r},a\oplus b\oplus c,\left(a\odot b\right)\oplus\left(\left(a\oplus b\right)\odot c\right)\oplus 0,0\oplus\left(\left(a\odot b\right)\odot c\right)\oplus\left(\left(a\oplus b\right)\odot 0\right)\oplus 0\right)=$$
$$=\left(1^{p+q+r},a\oplus b\oplus c,\left(a\odot b\right)\oplus\left(\left(a\oplus b\right)\odot c\right),a\odot b\odot c\right)=$$
$$=\left(1^{p+q+r},a\oplus b\oplus c,\left(a\odot c\right)\oplus\left(\left(a\oplus c\right)\odot b\right),a\odot b\odot c\right)=$$
$$=\left(1^q,b\right)+\left(1^{p+r},a\oplus c,a\odot c\right)=\mathbf{b}+\left(\mathbf{a}+\mathbf{c}\right).$$

Podobně pro důkaz krácení předpokládejme, že a,b,c jsou různé od 1 (vynecháme triviální případy). Rovnost $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$ je ekvivalentní s $\left(1^{p+q},a\oplus b,a\odot b\right)=$ $=\left(1^{p+r},a\oplus c,a\odot c\right)$.

(A) Jestliže $q=r$, potom dle lemmatu 3.5 (ii) $b=c$.

(B) Jestliže $q<r-1$, pak dostaneme $a\odot b=1$, tj. $a=b=1$, což je spor.

(C) Jestliže $q=r-1$, potom $a\oplus b=1$, a protože $a\geq a\odot b=a\oplus c\geq a$, platí $a\odot b=a$, což není možné, protože by muselo platit $b=1$.

Podobně lze ukázat, že případy odpovídající $r<q$ vedou ke sporu. □

Věta 4.5: *Nechť* $\mathbf{a}=\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ *a* $\mathbf{b}=\left(b_1,\ldots,b_m\right)$ *jsou dobré posloupnosti. (Podle* (*4.1*) *můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že* $m=n$*.) Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(*i*) *Existuje dobrá posloupnost* $\mathbf{c}$ *taková, že* $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}$*;*

(*ii*) $b_i\leq a_i$ *pro všechny* $i=1,\ldots,n$.

Důkaz: (i) $\Rightarrow$ (ii): Okamžitě plyne z (4.3).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Všimněme si, že podle poznámky za lemmatem 3.4 je $\left(\neg b_n,\ldots,\neg b_1\right)$ dobrá posloupnost. Označme $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ dobrou posloupnost získanou vynecháním prvních n výrazů v $\left(a_1,\ldots,a_n\right)+\left(\neg b_n,\ldots,\neg b_1\right)$. Ukážeme, že $\mathbf{c}+\mathbf{b}=\mathbf{a}$. Díky větě 3.3 můžeme bezpečně předpokládat, že A je lineárně uspořádaná, takže podle věty 4.1 $\mathbf{a}=\left(1^p,a\right)$ a $\mathbf{b}=\left(1^q,b\right)$. Vynecháme triviální případy a budeme předpokládat, že a i b jsou různé od 0 a 1. Dále nechť $q\leq p$. Přepíšeme $\mathbf{b}$ do tvaru $\mathbf{b}=\left(1^q,b,0^{p-q}\right)$. Protože $n=p+1$, dostaneme $\left(\neg b_n,\ldots,\neg b_1\right)=\left(1^{p-q},\neg b,0^q\right)$ a $\mathbf{c}$ získáme z $\left(1^p,a\right)+\left(1^{p-q},\neg b\right)=\left(1^{2p-q},a\oplus\neg b,a\odot\neg b\right)=\left(1^{2p-q},a\oplus\neg b,a\ominus b\right)$ vynecháním prvních $p+1$ výrazů.

(1) $b \le a$: Pak $a \oplus \neg b = 1$, $\mathbf{c} = \left(1^{2p-q-(p+1)+1}, a \ominus b\right) = \left(1^{p-q}, a \ominus b\right)$ a $\mathbf{c} +$ $+\mathbf{b} = \left(1^{p-q+q}, (a \ominus b) \oplus b, (a \ominus b) \odot b\right) = \left(1^{p}, a \vee b, \neg(\neg a \oplus b \oplus \neg b)\right) = \left(1^{p}, a, 0\right) = \mathbf{a}$.

(2) $b > a$: Pak $p > q$, $a \ominus b = 0$, $\mathbf{c} = \left(1^{2p-q-(p+1)}, a \oplus \neg b\right) = \left(1^{p-q-1}, a \oplus \neg b\right)$ a $\mathbf{c} + \mathbf{b} = \left(1^{p-q-1+q}, a \oplus \neg b \oplus b, (a \oplus \neg b) \odot b\right) = \left(1^{p-1}, 1, a \wedge b\right) = \left(1^{p}, a\right) = \mathbf{a}$. □

Mějme libovolné dvě dobré posloupnosti $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ MV-algebry A. Píšeme:

(*4.5*) $\mathbf{b} \le \mathbf{a}$, právě když $\mathbf{b}$ a $\mathbf{a}$ splňují ekvivalentní podmínky věty 4.5.

Věta 4.6: *Nechť* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *jsou dobré posloupnosti.*

(*i*) *Jestliže* $\mathbf{b} \le \mathbf{a}$, *pak existuje jediná dobrá posloupnost* $\mathbf{c}$ *taková, že* $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$. *Tuto posloupnost značíme* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *a je dána* $\mathbf{c} = (a_1, \ldots, a_n) + (\neg b_n, \ldots, \neg b_1)$ *vynecháním prvních* n *výrazů.*

(*ii*) *Pro každý prvek* $a \in A$ *máme* $(\neg a) = (1) - (a)$.

(*iii*) *Jestliže* $\mathbf{b} \le \mathbf{a}$, *potom* $\mathbf{b} + \mathbf{d} \le \mathbf{a} + \mathbf{d}$ *pro každou dobrou posloupnost* $\mathbf{d}$.

Důkaz: Úpravou důkazu věty 4.5 spolu s větou 4.4 (i). □

Věta 4.7: *Nechť* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ *a* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ *jsou dobré posloupnosti MV-algebry* A.

(*i*) *Posloupnost*

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = (a_1 \vee b_1, \ldots, a_n \vee b_n, \ldots)$$

je dobrá a je supremem $\mathbf{a}$ *a* $\mathbf{b}$ *vzhledem k uspořádání definovaném podle (4.5).*

(*ii*) *Analogicky, dobrá posloupnost*

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1 \wedge b_1, \ldots, a_n \wedge b_n, \ldots)$$

je infimem $\mathbf{a}$ *a* $\mathbf{b}$.

(*iii*) *Pro všechny* $a, b, c \in A$: $\left((a) + (b)\right) \wedge (1) = (a \oplus b)$.

Důkaz: Podle lemmatu 4.3 spolu s větou 4.5 (ii) a (4.3). □

Podle věty 4.4 má monoid M_A vlastnosti z věty 2.2. Navíc vzhledem k jeho přirozenému uspořádání je svazem, tedy M_A lze vnořit do komutativní ℓ-grupy $G_A = (M_A \times M_A, +, \le)/\equiv$ jako kladný kužel. Tato ℓ-grupa G_A se nazývá *Changova* *ℓ-grupa* MV-algebry A.

Definice: *Silná jednička* u ℓ-grupy G je prvek $0 \le u \in G$ takový, že pro každý prvek $x \in G$ existuje celé číslo $n \ge 0$ tak, že platí $|x| \le nu$, kde $|x| = x \vee -x$ je absolutní hodnota prvku x.

Věta 4.8: *Prvek* $u_A = [(1),(0)]$ *je silná jednička* ℓ-*grupy* G_A.

Důkaz: Skutečně, libovolný prvek G_A^+ lze reprezentovat prvkem $[\mathbf{a},(0)]$, kde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ...)$ je některá dobrá posloupnost v A. Zvolme celé číslo $m \ge 1$ tak, že $a_n = 0$ pro všechna $n \ge m$. Podle definice je $mu_A = [(1^m, 0, ...),(0)] \ge [\mathbf{a},(0)]$, odkud ihned vyplývá požadovaný závěr. □

Věta 4.9: *Zobrazení* $a \mapsto \varphi_A(a) = [(a),(0)]$ *je izomorfismus MV-algebry* A *na MV-algebru* $\Gamma(G_A, u_A)$.

Důkaz: Podle definice $[(0),(0)] \le [\mathbf{a},\mathbf{b}] \le u_A$ právě tehdy, když existuje $c \in A$ tak, že $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ je ekvivalentní s $((c),(0))$. Tedy φ_A zobrazuje A na jednotkový interval $[[(0),(0)], u_A] \subseteq G_A$. Lze snadno vidět, že toto zobrazení je prosté. Podle věty 4.7 (iii) $\varphi_A(a \oplus b) = (\varphi_A(a) + \varphi_A(b)) \wedge u_A$ a podle věty 4.6 (ii) $\varphi_A(\neg a) = u_A - \varphi_A(a)$. Proto φ_A je homomorfismus A do $\Gamma(G_A, u_A)$. □

Poznámka: MV-algebra A je řetězec, právě když G_A je lineárně uspořádaná. Opravdu, jestliže A je lineárně uspořádaná, potom z věty 4.5 (i) plyne, že monoid M_A je lineárně uspořádaný, a to implikuje, že G_A je lineárně uspořádaná grupa. Opačná implikace je bezprostřední důsledek výše uvedené věty 4.9. Tedy tato konstrukce je zobecněním Changovy konstrukce z [6].

5 Kuželové algebry

V této kapitole se seznámíme s kuželovými algebrami a některými jejich vlastnostmi, které budeme potřebovat pro důkazy v následující kapitole.

Definice: *Kuželová algebra* je algebra $(R,*,:,0)$, kde $0\in R$ a $*$, $:$ jsou binární operace takové, že pro všechna $a,b,c\in R$ platí:

(*CA1*) $(a*b)*(a*c)=(b*a)*(b*c)$ & $(c:b):(a:b)=(c:a):(b:a)$,

(*CA2*) $a*(b:c)=(a*b):c$,

(*CA3*) $a:(b*a)=(b:a)*b$,

(*CA4*) $a:0=0*a=a$ & $a*a=b:b=0$.

Kuželové algebry (cone algebras) zavedl v článku [3] B. Bosbach. Originální definice obsahuje axiomy (CA1), (CA2) a (CA3); místo konstanty 0 uvažuje axiomy

$$(a*a)*b=b=b:(a:a).$$

Ukazuje se, že každé a,b platí

$$a*a=b:b,$$

a tedy konstantu 0 lze zavést jako $0=a*a$.

Typický příklad kuželové algebry dostaneme z kladného kuželu ℓ-grupy tak, že definujeme

(*5.1*) $a:b=(a-b)\vee 0$ & $b*a=(-b+a)\vee 0$.

Proto používáme název kuželová algebra.

Uveďme některé vlastnosti kuželových algeber:

Lemma 5.1: *Nechť* $(R,*,:,0)$ *je kuželová algebra,* $a,b,c\in R$. *Potom*

(*i*) $a*0=0$ & $0:a=0$;

(*ii*) $a*b=0 \Leftrightarrow b:a=0$, a *relace* $\le$ *definovaná předpisem* $b\le a \Leftrightarrow a*b=0$ *je uspořádání na* R;

(*iii*) $b\le a \Rightarrow a*c\le b*c$ & $c:a\le c:b$;

(*iv*) $b\le a \Rightarrow c*b\le c*a$ & $b:c\le a:c$;

(*v*) $a:(b*a)=\inf\{a,b\}=a\wedge b$;

(*vi*) $a:(b*a)=(b:a)*b=(a:b)*a=b:(a*b)$.

Důkaz: (i) $a*0 \overset{(CA4)}{=} (0*a)*(0*0) \overset{(CA1)}{=} (a*0)*(a*0) \overset{(CA4)}{=} 0$ a $0:a \overset{(CA4)}{=} (0:0):$ $:(a:0) \overset{(CA1)}{=} (0:a):(0:a) \overset{(CA4)}{=} 0$.

(ii) $a*b=0 \;\Rightarrow\; b=b:(a*b) \overset{(CA3)}{=} (a:b)*a$. Potom $b:a=((a:b)*a):$ $:a \overset{(CA2)}{=} (a:b)*(a:a) \overset{(CA4),\,(i)}{=} 0$. A analogicky $b:a=0 \;\Rightarrow\; a*b=0$.

Platí $a*a=0$, tj. $a\le a$, tedy relace $\le$ je reflexivní.

Nechť $a\le b$ & $b\le a$, tj. $a:b=0$ & $a*b=0$. Pak $a=0*a=(a:b)*a \overset{(CA3)}{=}$ $=b:(a*b)=b:0=b$, tedy relace $\le$ je antisymetrická.

Nechť $a\le b$ & $b\le c$, tj. $b*a=0$ & $c*b=0$. Pak $0\overset{(i)}{=}(b*c)*(b*a) \overset{(CA1)}{=}$ $=(c*b)*(c*a) \overset{(CA4)}{=} c*a$, tedy $a\le c$ a relace $\le$ je tranzitivní. Dohromady $\le$ je uspořádání na R.

(iii) Podle předpokladu $a*b=0$. Potom platí $(a*c):(b*c) \overset{(CA4)}{=} (a*b)*$ $*((a*c):(b*c)) \overset{(CA2)}{=} (a*b)*(a*(c:(b*c))) \overset{(CA1)}{=} (b*a)*(b*(c:(b*c))) \overset{(CA2)}{=} (b*a)*$ $*((b*c):(b*c)) \overset{(CA4),\,(i)}{=} 0$. Tedy podle (ii) $a*c\le b*c$.

(iv) Podle předpokladu $a*b=0$. Potom $(c*a)*(c*b) \overset{(CA1)}{=} (a*c)*$ $*(a*b)\overset{(i)}{=}0$, tedy podle (ii) $c*b\le c*a$.

(v) Platí $a*(a:(b*a)) \overset{(CA2)}{=} (a*a):(b*a) \overset{(CA4),\,(i)}{=} 0$ a $b*(a:(b*a)) \overset{(CA2)}{=}$ $=(b*a):(b*a) \overset{(CA4)}{=} 0$, tedy podle (ii) $a:(b*a)\le a,b$. Dále nechť $x\le a,b$. Pak podle (iii) platí $b*a\le x*a$ a $a:(x*a)\le a:(b*a)$. Ale protože podle předpokladu $x:a=0$, máme $x \overset{(CA4)}{=} (x:a)*x \overset{(CA3)}{=} a:(x*a)$. Tedy $x\le a:(b*a)$ a $a:(b*a)=$ $=\inf\{a,b\}$.

(vi) Platí $a:(b*a)=\inf\{a,b\}$ a $b:(a*b)=\inf\{b,a\}$. Tedy $a:(b*a)=$ $=b:(a*b)$. Ostatní rovnosti platí podle (CA3). □

Poznámka: Kuželová algebra $(R,*,:,0)$ s uspořádáním definovaným dle 5.1 (ii) je dolní polosvaz s nejmenším prvkem 0, kde průsek $a\wedge b$ je určen dle 5.1 (vi). Když má R největší prvek 1, pak $(R,*,:,0,1)$ nazýváme *ohraničenou kuželovou algebrou*.

Poznámka: MV-algebry lze charakterizovat jako ohraničené kuželové algebry, které splňují identitu

(*5.2*) $x : y = y * x$.

(Tyto kuželové algebry se také nazývají ohraničené komutativní BCK-algebry, viz [4].) Opravdu, když $(R, \oplus, \neg, 0, 1)$ je MV-algebra a definujeme

$$x : y = y * x = x \ominus y \text{ (jako v kapitole 3),}$$

pak $(R, *, :, 0, 1)$ je ohraničená kuželová algebra.

Naopak, když v kuželové algebře $(R, *, :, 0, 1)$ splňující identitu (5.2) položíme

$$x \oplus y = ((1 : y) : x) * 1,$$

$$\neg x = x * 1,$$

potom $(R, \oplus, \neg, 0, 1)$ je MV-algebra, ve které $x \ominus y = x : y = y * x$.

Poznámka: Připomeňme vztah, který existuje mezi kuželovými algebrami a pseudo-MV-algebrami:

Nechť $(R, *, :, 0, 1)$ je ohraničená kuželová algebra. Definujme operace $\oplus$, $^-$, $^\sim$ takto:

$$x \oplus y = ((1 : y) : x) * 1 = 1 : (y * (x * 1)),$$

$$x^- = 1 : x \quad \text{a} \quad x^\sim = x * 1.$$

Potom $(R, \oplus, ^-, ^\sim, 0, 1)$ je pseudo-MV-algebra.

Dokonce platí: jestliže $(R, *, :, 0)$ je kuželová algebra a $a \in R$, potom algebra $([0, a], \oplus_a, ^{-_a}, ^{\sim_a}, 0, a)$ je pseudo-MV-algebra, kde

$$x \oplus_a y = ((a : y) : x) * a = a : (y * (x * a)),$$

$$x^{-_a} = a : x \quad \text{a} \quad x^{\sim_a} = x * a.$$

Naopak, nechť $(R, \oplus, ^-, ^\sim, 0, 1)$ je pseudo-MV-algebra. Potom $(R, *, :, 0, 1)$ je kuželová algebra, kde

$$x : y = (y \oplus x^\sim)^- = y^- \odot x,$$

$$y * x = (x^- \oplus y)^\sim = x \odot y^\sim.$$

Lemma 5.2: *Nechť R je algebra, která splňuje axiomy (CA1), (CA2) a (CA4). Pak R je kuželová algebra, právě když navíc splňuje podmínky*

(*i*) $a * b = 0 \Leftrightarrow b : a = 0$,

(*ii*) $(a : b) * a = (b : a) * b$,

(iii) $a:(b*a)=b:(a*b)$.

Důkaz: $\Rightarrow$: Plyne přímo z předchozího lemmatu.

$\Leftarrow$: Z předpokladů vyplývá, že R splňuje 5.1 (i). Na R zavedeme relaci $\le$ dle 5.1 (ii). Ihned vidíme, že $\le$ je reflexivní a tranzitivní. Jestliže $a \le b$ & $b \le a$, tj. $b*a=0$ & $a*b=0$, pak $b=b:0=b:(a*b)\overset{(iii)}{=}a:(b*a)=a:0=a$. Tedy $\le$ je uspořádání na R.

Algebra R také splňuje 5.1 (iii) a (iv). Dále platí $a:(b*a)\le a,b$. Předpokládejme, že $x \le a,b$, tj. $a*x=0$ & $b*x=0$. Potom podle 5.1 (iii) platí $b*a \le x*a$ a $a:(x*a)\le a:(b*a)$. Tedy $a:(b*a)\ge a:(x*a)\overset{(iii)}{=}x:(a*x)=x:0=x$.

Ukázali jsme, že $a:(b*a)=a\wedge b$. Analogicky podle 5.1 (iii) platí $a:b\le a:x$ a $(a:b)*a\ge(a:x)*a\overset{(ii)}{=}(x:a)*x=0*x=x$, tj. $(a:b)*a=a\wedge b$. Dohromady tedy $a:(b*a)=(b:a)*b$ a axiom (CA3) je splněn.

Tedy algebra R je kuželová algebra. □

Nyní dokážeme technické lemma, které budeme potřebovat v následující kapitole:

Lemma 5.3: *Nechť* $(R,*,:,0)$ *je kuželová algebra,* $a,b,c,d,u,v,x,y,z\in R$. *Potom*

(i) $a\wedge b=0 \;\Rightarrow\; a*b=b \;\;\&\;\; b:a=b$;

(ii) $(a*b)\wedge(b*a)=0=(b:a)\wedge(a:b)$;

(iii) $a\wedge b=0 \;\Rightarrow\; (c*d)*b=((c:a)*d)*b \;\;\&\;\; b:(d:c)=b:(d:(a*c))$;

(iv) $x\wedge z=0=y\wedge z \;\Rightarrow\; (((b:x):y)*b):z=((b:x):y)*b$;

(v) $(a:b)*c=((c*a):b)*(((a:(c*a)):(b:(c*a)))*c)$;

(vi) $(u:x):(v:y)=((u:(y*x)):(v:(x*y))):((y:v):((x*y):v))$.

Důkaz: (i) $0=a\wedge b\overset{5.1\,(v)}{=}a:(b*a)\overset{5.1\,(vi)}{=}(b:a)*b=b:(a*b)$, tj. $b\le b:a$ a $b\le$ $\le a*b$. Ale $b:a\le b$ a $a*b\le b$, tedy nutně $b:a=b$ a $a*b=b$.

(ii) $(a*b)\wedge(b*a)\overset{5.1\,(v),\,(vi)}{=}((a*b):(b*a))*(a*b)\overset{(CA2)}{=}(a*(b:(b*a)))*$ $*(a*b)\overset{(CA1)}{=}((b:(b*a))*a)*((b:(b*a))*b)$. Platí

$$((b:(b*a))*a)*((b:(b*a))*b)=((b:(b*a))*a)*(b\wedge(b*a))=$$

$= \left(\left(b : (b * a)\right) * a\right) * (b * a) = 0$,

protože $b : (b * a) \le b \;\Rightarrow\; \left(b : (b * a)\right) * a \ge (b * a)$. Analogicky $(b : a) \wedge (a : b) = 0$.

(iii) Nejprve dokážeme následující implikaci:

(1) $a \wedge b = 0 \;\Rightarrow\; c * b = (a * c) * b = (c : a) * b$.

Protože $b \wedge (a \wedge c) = 0$, platí $(a \wedge c) * b \overset{(i)}{=} b$. Také $(a \wedge c) * c \overset{5.1\,(v)}{=} \left(c : (a * c)\right) * c \overset{5.1\,(v)}{=}$ $= c \wedge (a * c) = a * c$. Proto $(a * c) * b \overset{(i)}{=} \left((a \wedge c) * c\right) * \left((a \wedge c) * b\right) \overset{(CA1)}{=} \left(c * (a \wedge c)\right) *$ $* (c * b) \overset{a \wedge c \le c}{=} 0 * (c * b) = c * b$. Dále $(c : a) * b \le b$, proto $\left((c : a) * b\right) \wedge (a \wedge c) = 0$, a tedy podle (i) $(c : a) * b = (a \wedge c) * \left((c : a) * b\right) \overset{5.1\,(v),\,(vi)}{=} \left((c : a) * c\right) * \left((c : a) * b\right) \overset{(CA1)}{=}$ $= \left(c * (c : a)\right) * (c * b) \overset{c:a \le c}{=} 0 * (c * b) = c * b$.

Nyní můžeme (1) využít k důkazu (iii). Protože $b \wedge c \wedge a = 0$, podle (1) máme $\left((c \wedge a) * \left((c : a) * d\right)\right) * b = \left((c : a) * d\right) * b$. Ale také $\left((c \wedge a) * \left((c : a) * d\right)\right) * b \overset{5.1\,(v),\,(vi)}{=}$ $= \left(\left((c : a) * c\right) * \left((c : a) * d\right)\right) * b \overset{(CA1)}{=} \left(\left(c * (c : a)\right) * (c * d)\right) * b \overset{c:a \le c}{=} (c * d) * b$.

(iv) Nejprve dokážeme následující rovnost:

(2) $(a * b) * (a * c) = a * \left((b : a) * c\right)$.

Platí

$$(a * b) * (a * c) \overset{(CA1)}{=} (b * a) * (b * c) = (b * a) * \left(0 * (b * c)\right) = (b * a) *$$

$$* \left(\left(b * (b : a)\right) * (b * c)\right) \overset{(CA1)}{=} (b * a) * \left(\left((b : a) * b\right) * \left((b : a) * c\right)\right) \overset{5.1\,(v)}{=}$$

$$= \left((a \wedge b) * a\right) * \left((a \wedge b) * \left((b : a) * c\right)\right) \overset{(CA1)}{=} \left(a * (a \wedge b)\right) * \left(a * \left((b : a) * c\right)\right) \overset{a \wedge b \le a}{=}$$

$$= 0 * \left(a * \left((b : a) * c\right)\right) = a * \left((b : a) * c\right).$$

Teď už můžeme dokázat vlastnost (iv). Platí $x * \left(y * \left(\left((a : x) : y\right) * a\right)\right) \overset{(2)}{=} x *$ $* \left(\left(y * (a : x)\right) * (y * a)\right) \overset{(CA2)}{=} x * \left(\left((y * a) : x\right) * (y * a)\right) \overset{5.1\,(vi),\,(v)}{=} x * \left((y * a) \wedge x\right) \le x * x = 0.$ Označme $b = \left(\left((a : x) : y\right) * a\right) \wedge z$. Potom $x * (y * b) \le x * \left(y * \left(\left((a : x) : y\right) * a\right)\right) = 0$, tedy $y * b \le x$. Ale $y * b \le b \le z$, tj. $y * b \le x \wedge z = 0$, tedy $y * b = 0$, tj. $b \le y$. Zároveň $b \le z$, a proto $b \le y \wedge z = 0$, tj. $b = 0$. Potom podle (i) dostaneme

$$z * \left(\left((a : x) : y\right) * a\right) = \left((a : x) : y\right) * a.$$

Poznamenejme, že samozřejmě platí i duální rovnost

(iv‘) $\left(a : \left(y * (x * a)\right)\right) : z = a : \left(y * (x * a)\right)$.

(v) Označme $z = \big((c*a):b\big)$, $x = c*a$, $y = b:(c*a)$. Potom $z \wedge x =$ $= \big((c*a):b\big) \wedge (a*c) \leq (c*a) \wedge (a*c) \overset{(ii)}{=} 0$ a $z \wedge y = \big((c*a):b\big) \wedge \big(b:(c*a)\big) \overset{(ii)}{=} 0$. Máme tedy $\big((c*a):b\big) * \Big(\big(\big(a:(c*a)\big):\big(b:(c*a)\big)\big)*c\Big) \overset{5.1\ (vi)}{=} z * \Big(\big((c:x):y\big)*c\Big) \overset{(iv)}{=}$ $= \big((c:x):y\big)*c \overset{5.1\ (vi)}{=} \big(\big(a:(c*a)\big):\big(b:(c*a)\big)\big)*c \overset{(CA1)}{=} \Big((a:b):\big((c*a):b\big)\Big)*c \overset{(CA2)}{=}$ $= \Big((a:b):\big(c*(a:b)\big)\Big)*c \overset{5.1\ (v)}{=} \big((a:b)\wedge c\big)*c = (a:b)*c$.

(vi) Díky (CA1) platí $\Big(\big(u:(y*x)\big):\big(v:(x*y)\big)\Big):\Big((y:v):\big((x*y):v\big)\Big) =$ $= \Big(\big(u:(y*x)\big):\big(v:(x*y)\big)\Big):\Big(\big(y:(x*y)\big):\big(v:(x*y)\big)\Big) = \Big(\big(u:(y*x)\big):\big(y:(x*y)\big)\Big):$ $:\Big(\big(v:(x*y)\big):\big(y:(x*y)\big)\Big) \overset{5.1\ (vi)}{=} \Big(\big(u:(y*x)\big):\big(x:(y*x)\big)\Big):\Big(\big(v:(x*y)\big):\big(y:(x*y)\big)\Big) =$ $= \Big((u:x):\big((y*x):x\big)\Big):\Big((v:y):\big((x*y):y\big)\Big) \overset{(CA2),\ (CA4)}{=} (u:x):(v:y)$. □

6 Vnoření kuželové algebry do $\ell-$grupy

V této kapitole ukážeme, že každou kuželovou algebru je možné reprezentovat v kladném kuželu některé ℓ-grupy, kde operace $*$ a $:$ jsou definovány vztahem (5.1). Konstrukce, kterou zde ukážeme, je převzata z článku [3]. Jinou konstrukci pro tzv. zobecněné pseudo-efektové algebry lze najít v práci [8].

Na závěr jako důsledek dostaneme alternativní důkaz věty, která tvrdí, že každá (pseudo-) MV-algebra je izomorfní s $\Gamma(G,u)$ pro některou ℓ-grupu G a silnou jedničku $u \in G$.

Nechť $(R,*,:,0)$ je kuželová algebra. Uvažujme algebru $(R\times R,*,:,(0,0))$, kde operace $*$ a $:$ definujeme takto:

(*6.1*) $\quad (a,b)*(c,d)=\big(b*(a*c),((a*c)*b)*((c*a)*d)\big),$

$$(a,b):(c,d)=\big((a:(d:b)):(c:(b:d)),(b:d):c\big).$$

Operace $*$, $:$ na $R\times R$ jsou zavedeny tímto způsobem, protože v kladném kuželu ℓ-grupy vždy platí:

$$(a+b)*(c+d)=\big(b*(a*c)\big)+\big(((a*c)*b)*((c*a)*d)\big)$$

a analogicky pro $:$. Tedy (a,b) reprezentuje součet $a+b$.

Okamžitě dostaneme, že algebra $(R\times R,*,:,(0,0))$ splňuje axiomy (CA1) a (CA4). Ověříme axiom (CA1).

Důkaz: $\big((e,f):(c,d)\big):\big((a,b):(c,d)\big)=$

$=\big((e:(d:f)):(c:(f:d)),(f:d):c\big):\big((a:(d:b)):(c:(b:d)),(b:d):c\big)=(A,B),$

kde

$$A=\Big(\big((e:(d:f)):(c:(f:d))\big):\big(((b:d):c):((f:d):c)\big)\Big):$$
$$:\Big(\big((a:(d:b)):(c:(b:d))\big):\big(((f:d):c):((b:d):c)\big)\Big)$$

a

$$B=\big(((f:d):c):((b:d):c)\big):\big((a:(d:b)):(c:(b:d))\big).$$

Dále

$\big((e,f):(a,b)\big):\big((c,d):(a,b)\big)=$

$=\big((e:(b:f)):(a:(f:b)),(f:b):a\big):\big((c:(b:d)):(a:(d:b)),(d:b):a\big)=(C,D),$

kde

$$C=\Big(\big((e:(b:f)):(a:(f:b))\big):\big(((d:b):a):((f:b):a)\big)\Big):$$

$$:\Big(\big((c:(b:d)):(a:(d:b))\big):\big(((f:b):a):((d:b):a)\big)\Big)$$

a

$$D=\big(((f:b):a):((d:b):a)\big):\big((c:(b:d)):(a:(d:b))\big).$$

Výrazy C a D můžeme dále upravovat využitím rovnosti (CA1) v R:

$$C=\Big(\big((e:(b:f)):(a:(f:b))\big):\big(((d:b):(f:b)):(a:(f:b))\big)\Big):$$

$$:\Big(\big((c:(b:d)):(a:(d:b))\big):\big(((f:b):(d:b)):(a:(d:b))\big)\Big)=$$

$$=\Big(\big((e:(b:f)):((d:b):(f:b))\big):\big((a:(f:b)):((d:b):(f:b))\big)\Big):$$

$$:\Big(\big((c:(b:d)):((f:b):(d:b))\big):\big((a:(d:b)):((f:b):(d:b))\big)\Big)=$$

$$=\Big(\big((e:(b:f)):((d:f):(b:f))\big):\big((a:(d:b)):((f:b):(d:b))\big)\Big):$$

$$:\Big(\big((c:(b:d)):((f:d):(b:d))\big):\big((a:(d:b)):((f:b):(d:b))\big)\Big)=$$

$$=\Big(\big((e:(d:f)):((b:f):(d:f))\big):\big((c:(b:d)):((f:d):(b:d))\big)\Big):$$

$$:\Big(\big((a:(d:b)):((f:b):(d:b))\big):\big((c:(b:d)):((f:d):(b:d))\big)\Big)=$$

$$=\Big(\big((e:(d:f)):((b:d):(f:d))\big):\big((c:(f:d)):((b:d):(f:d))\big)\Big):$$

$$:\Big(\big((a:(d:b)):((f:d):(b:d))\big):\big((c:(b:d)):((f:d):(b:d))\big)\Big)=$$

$$=\Big(\big((e:(d:f)):(c:(f:d))\big):\big(((b:d):(f:d)):(c:(f:d))\big)\Big):$$

$$:\Big(\big((a:(d:b)):(c:(b:d))\big):\big(((f:d):(b:d)):(c:(b:d))\big)\Big)=$$

$$=\Big(\big((e:(d:f)):(c:(f:d))\big):\big(((b:d):c):((f:d):c)\big)\Big):$$

$$:\Big(\big((a:(d:b)):(c:(b:d))\big):\big(((f:d):c):((b:d):c)\big)\Big)=A$$

a

$$D=\big(((f:b):(d:b)):(a:(d:b))\big):\big((c:(b:d)):(a:(d:b))\big)=$$

$$=\big(((f:d):(b:d)):(a:(d:b))\big):\big((c:(b:d)):(a:(d:b))\big)=$$

$$=\big(((f:d):(b:d)):(c:(b:d))\big):\big((a:(d:b)):(c:(b:d))\big)=$$

$$=\big(((f:d):c):((b:d):c)\big):\big((a:(d:b)):(c:(b:d))\big)=B.$$

Pro operaci $*$ by se postupovalo duálně. $\square$

Nyní ukážeme, že v $\left(R\times R,*,:,(0,0)\right)$ platí také (CA2).

Důkaz: Platí

$$\left((a,0)*(u,v)\right):(c,0)\overset{(6.1)}{=}$$

$$=\left(0*(a*u),\left((a*u)*0\right)*\left((u*a)*v\right)\right):(c,0)=\left(a*u,(u*a)*v\right):(c,0)\overset{(6.1)}{=}$$

$$=\left(\left((a*u):\left(0:\left((u*a)*v\right)\right)\right):\left(c:\left(\left((u*a)*v\right):0\right)\right),\left(\left((u*a)*v\right):0\right):c\right)=$$

$$=\left((a*u):\left(c:\left((u*a)*v\right)\right),\left((u*a)*v\right):c\right).$$

Protože podle 5.3 (ii) platí $(a*u)\wedge(u*a)=0$, využitím 5.3 (iii) a (CA2) dostaneme

$$\left((a*u):\left(c:\left((u*a)*v\right)\right),\left((u*a)*v\right):c\right)=\left((a*u):(c:v),(u*a)*(v:c)\right).$$

Z druhé strany

$$(a,0)*\left((u,v):(c,0)\right)\overset{(6.1)}{=}$$

$$=(a,0)*\left(\left(u:(0:v)\right):\left(c:(v:0)\right),(v:0):c\right)=(a,0)*\left(u:(c:v),v:c\right)\overset{(6.1)}{=}$$

$$=\left(0*\left(a*\left(u:(c:v)\right)\right),\left(\left(a*\left(u:(c:v)\right)\right)*0\right)*\left(\left(\left(u:(c:v)\right)*a\right)*(v:c)\right)\right)=$$

$$=\left(a*\left(u:(c:v)\right),\left(\left(u:(c:v)\right)*a\right)*(v:c)\right).$$

Podle 5.3 (ii) platí $(c:v)\wedge(v:c)=0$ a využitím 5.3 (iii) a (CA2) tedy dostaneme

$$\left(a*\left(u:(c:v)\right),\left(\left(u:(c:v)\right)*a\right)*(v:c)\right)=\left((a*u):(c:v),(u*a)*(v:c)\right).$$

Dále platí

$$(b,0)*\left((a,0)*(u,v)\right)=(b,0)*\left(a*u,(u*a)*v\right)=$$

$$=\left(0*\left(b*(a*u)\right),\left(\left(b*(a*u)\right)*0\right)*\left(\left((a*u)*b\right)*\left((u*a)*v\right)\right)\right)=$$

$$=\left(b*(a*u),\left((a*u)*b\right)*\left((u*a)*v\right)\right)=(a,b)*(u,v).$$

Podobně $(u,v):(c,d)=\left((u,v):(d,0)\right):(c,0)$.

Díky tomu můžeme vypočítat

$$\left((a,b)*(u,v)\right):(c,d)=\left(\left((b,0)*\left((a,0)*(u,v)\right)\right):(d,0)\right):(c,0)=$$

$$=\left((b,0)*\left(\left((a,0)*(u,v)\right):(d,0)\right)\right):(c,0)=$$

$$=\left((b,0)*\left((a,0)*\left((u,v):(d,0)\right)\right)\right):(c,0)=$$

$$=(b,0)*\left(\left((a,0)*\left((u,v):(d,0)\right)\right):(c,0)\right)=$$

$$=(b,0)*\Big((a,0)*\big(((u,v):(d,0)):(c,0)\big)\Big)=$$

$$=(b,0)*\big((a,0)*((u,v):(c,d))\big)=(a,b)*((u,v):(c,d)).$$

Tedy $(R\times R,*,:,(0,0))$ splňuje (CA2). □

Naším dalším cílem bude sestrojit algebru $(R\times R,*,:,(0,0))$, která by splňovala i (CA3). Uvažujme ekvivalence Θ_1 a Θ_2 definované

(*6.2*) $\quad (a,b)\Theta_1(c,d) \iff (a,b)*(c,d)=(0,0)=(c,d)*(a,b),$

$\quad (a,b)\Theta_2(c,d) \iff (a,b):(c,d)=(0,0)=(c,d):(a,b).$

Ekvivalence Θ_1 a Θ_2 se rovnají, což plyne ze vztahu (6.3), který nyní dokážeme:

(*6.3*) $\quad (a,b)*(c,d)=(0,0) \iff (c,d):(a,b)=(0,0).$

Důkaz: Ukážeme, že $(a,b)*(c,d)=(0,0)$ je ekvivalentní s $a*c\le b:d$ & $c*a\ge$ $\ge d:b$.

$\Rightarrow$: Předpokládejme, že $(a,b)*(c,d)=(0,0)$. Potom platí následující vztahy:

(*6.4*) $\quad b*(a*c)=0$ (tj. $a*c\le b$),

$\quad (c*a)*d\le(a*c)*b,$

což plyne z (6.1) a 5.1 (ii). Nyní předpokládejme, že vztahy (6.4) jsou splněny. Dále máme $(d:b)*\big(d:((c*a)*d)\big)\le d:((c*a)*d)\overset{5.1\,(v)}{=}d\wedge(c*a)\le c*a$. Odtud

$(a*c)\wedge\Big((d:b)*\big(d:((c*a)*d)\big)\Big)\le(a*c)\wedge(c*a)\overset{5.3\,(ii)}{=}0$. Tedy

$$a*c\overset{5.3\,(i)}{=}(a*c):\Big((d:b)*\big(d:((c*a)*d)\big)\Big)\overset{(CA2)}{=}(a*c):\big(((d:b)*d):((c*a)*d)\big)\le$$

$$\overset{5.1\,(vi),\,(6.4)}{\le}(a*c):\big(((b:d)*b):((a*c)*b)\big)\overset{(CA2)}{=}(a*c):\Big((b:d)*\big(b:((a*c)*b)\big)\Big)\overset{5.1\,(v)}{=}$$

$$=(a*c):\big((b:d)*(b\wedge(a*c))\big)\overset{(6.4)}{=}(a*c):((b:d)*(a*c))\overset{5.1\,(vi)}{=}$$

$$=(b:d):((a*c)*(b:d))\overset{(CA2)}{=}(b:d):\big(((a*c)*b):d\big)\overset{(6.4),\,5.1\,(iv),\,(iii)}{\le}$$

$$\le(b:d):\big(((c*a)*d):d\big)\overset{(CA2)}{=}(b:d):((c*a)*(d:d))=(b:d):((c*a)*0)=b:d,$$

tj. $a*c\le b:d$. Dále

$$(c*a)*(d:b)\overset{(CA2)}{=}((c*a)*d):b\overset{(6.4),\,5.1\,(iv)}{\le}((a*c)*b):b\overset{(CA2)}{=}(a*c)*(b:b)=0,$$

což znamená, že $c*a\ge d:b$.

$\Leftarrow$: Nyní předpokládejme, že $a*c \le b:d$ & $c*a \ge d:b$. Pak (6.4) vyplývá ze vztahů $b*(a*c) \overset{5.1\,(iv)}{\le} b*(b:d) \overset{(CA2)}{=} (b*b):d = 0$ a $(a*c)*b \overset{5.1\,(iii)}{\ge} (b:d)*b = \overset{5.1\,(vi)}{=} (d:b)*d \overset{5.1\,(iii)}{\ge} (c*a)*d$.

Podobně $(c,d):(a,b)=(0,0) \overset{(6.1),\,5.1\,(ii)}{\Leftrightarrow} c:(b:d) \le a:(d:b)$ & $d:b \le a$. Platí $(c*a)\wedge(d:b) = ((d:b):(c*a))*(d:b) = (((d:b)\wedge a):(c*a))*(d:b) = = (((a:(d:b))*a):(c*a))*(d:b) \ge (((c:(b:d))*a):(c*a))*(d:b) \overset{(CA2)}{=} = ((c:(b:d))*(a:(c*a)))*(d:b) \overset{5.1\,(vi)}{=} ((c:(b:d))*(c:(a*c)))*(d:b) \overset{(CA2)}{=} = (((c:(b:d))*c):(a*c))*(d:b) = ((c\wedge(b:d)):(a*c))*(d:b) = (d:b)$, protože $(c\wedge(b:d)):(a*c) \le c\wedge(b:d) \le b:d$, tedy $((c\wedge(b:d)):(a*c))\wedge(d:b) \le (b:d)\wedge \wedge(d:b) = 0$. Tedy $d:b \le c*a$. Dále platí $(a*c):(b:d) \overset{(CA2)}{=} a*(c:(b:d)) \le a* *(a:(d:b)) \overset{(CA2),\,5.1\,(i)}{=} 0$, tedy $a*c \le b:d$.

Naopak, když $d:b \le c*a$ & $a*c \le b:d$, potom $(d:b):a \le (c*a):a \overset{(CA2)}{=} 0$, $c:(b:d) \overset{5.1\,(iii)}{\le} c:(a*c) \overset{5.1\,(vi)}{=} a:(c*a) \overset{5.1\,(iii)}{\le} a:(d:b)$.

Celkem tedy $(a,b)*(c,d)=(0,0) \Leftrightarrow (c,d):(a,b)=(0,0)$. □

Označíme-li $\Theta = \Theta_1 = \Theta_2$, pak ze vztahů (6.2) a důkazu (6.3) vyplývá:

(6.5) $(a,b)\Theta(c,d) \Leftrightarrow a*c = b:d$ & $c*a = d:b$.

Lemma 6.1: *Nechť $(A,*,:,0)$ je algebra splňující (CA1), (CA4) a 5.1 (i). Potom relace*

$$\Theta_1 = \{(a,b):\ a*b = 0 = b*a\} \ \text{a}$$

$$\Theta_2 = \{(a,b):\ a:b = 0 = b:a\}$$

jsou relace kongruence na $(A,*)$, resp. na $(A,:)$.

Důkaz: Pro Θ_1: Reflexivita a symetrie jsou jasné. Dokážeme tranzitivitu: Jestliže $a*b = 0 = b*a$ & $b*c = 0 = c*b$, potom

$$a*c = 0*(a*c) = (a*b)*(a*c) \overset{(CA1)}{=} (b*a)*(b*c) = 0,$$

$$c*a = 0*(c*a) = (c*b)*(c*a) \overset{(CA1)}{=} (b*c)*(b*a) = 0.$$

Tedy $(a,c)\in\Theta_1$.

(*kompatibilita*) Nechť $a*b=0=b*a$. Potom $a*c=0*(a*c)=(a*b)*$ $*(a*c)\overset{(CA1)}{=}(b*a)*(b*c)=0*(b*c)=b*c$, a tedy

$$(a*c)*(b*c)=0=(b*c)*(a*c),$$

tj. $(a*c,b*c)\in\Theta_1$. Také

$$(c*a)*(c*b)\overset{(CA1)}{=}(a*c)*(a*b)=0,$$

$$(c*b)*(c*a)\overset{(CA1)}{=}(b*c)*(b*a)=0,$$

tj. $(c*a,c*b)\in\Theta_1$. Nyní použijeme tranzitivitu: Nechť $(a,b)\in\Theta_1$ & $(c,d)\in\Theta_1$. Pak $(a*c,b*c)\in\Theta_1$ & $(b*c,b*d)\in\Theta_1$, odkud $(a*c,b*d)\in\Theta_1$. □

Víme, že $(R\times R,*,:,(0,0))$ splňuje podmínky lemmatu 6.1, a proto relace Θ_1, Θ_2 definované předpisy (6.2) jsou ekvivalence kompatibilní s $*$, resp. $:$. Ovšem podle (6.3) platí $\Theta_1=\Theta_2$, a tedy $\Theta=\Theta_1=\Theta_2$ je kongruence na $(R\times R,*,:,(0,0))$.

$(R\times R,*,:,(0,0))/\Theta$ potom splňuje (CA1), (CA2) a (CA4); zbývá ukázat, že splňuje (CA3). Podle lemmatu 5.2 stačí ověřit, že

$$((a,b):((c,d)*(a,b)))\Theta((c,d):((a,b)*(c,d))).$$

Důkaz: Označme $(a,b):((c,d)*(a,b))=(A,B)$. Užitím (6.1) dostaneme

$$\begin{aligned}
A&=\Big(a:\big(\big(((c*a)*d)*((a*c)*b)\big):b\big)\Big):\\
&:\Big((d*(c*a)):\big(b:\big(((c*a)*d)*((a*c)*b)\big)\big)\Big)\overset{(CA2)}{=}\\
&=\Big(a:\big(((c*a)*d)*(((a*c)*b):b)\big)\Big):\\
&:\Big((d*(c*a)):\big(b:\big(((c*a)*d)*((a*c)*b)\big)\big)\Big)\overset{(CA2)}{=}\\
&=\Big(a:\big(((c*a)*d)*((a*c)*(b:b))\big)\Big):\\
&:\Big((d*(c*a)):\big(b:\big(((c*a)*d)*((a*c)*b)\big)\big)\Big)=\\
&=a:\Big((d*(c*a)):\big(b:\big(((c*a)*d)*((a*c)*b)\big)\big)\Big)
\end{aligned}$$

a

$$B=\big(b:\big(((c*a)*d)*((a*c)*b)\big)\big):(d*(c*a)).$$

Protože $\left((c*a)*d\right)\wedge\left(d*(c*a)\right)\overset{5.3\ (ii)}{=}0$, podle 5.3 (iii) je

$$A=a:\left(\left(d*(c*a)\right):\left(b:\left((a*c)*b\right)\right)\right).$$

Dále $\left(b:\left((a*c)*b\right)\right)\wedge\left(d*(c*a)\right)\overset{5.1\ (v)}{=}b\wedge(a*c)\wedge\left(d*(c*a)\right)\le(a*c)\wedge(c*a)\overset{5.3\ (ii)}{=}$ $=0$, tedy podle 5.3 (i)

$$A=a:\left(d*(c*a)\right).$$

Pro B máme $(a*c)\wedge\left(d*(c*a)\right)\overset{5.3\ (ii)}{=}0$ a $\left((c*a)*d\right)\wedge\left(d*(c*a)\right)\overset{5.3\ (ii)}{=}0$, tedy dle 5.3 (iv‘) dostaneme

$$B=b:\left(\left((c*a)*d\right)*\left((a*c)*b\right)\right).$$

V druhém kroku dokážeme, že

$$\left((a,b):\left((c,d)*(a,b)\right)\right)\Theta\left((c,d):\left((a,b)*(c,d)\right)\right).$$

Analogicky $(c,d):\left((a,b)*(c,d)\right)=(C,D)$, kde

$$C=c:\left(b*(a*c)\right) \text{ a}$$

$$D=d:\left(\left((a*c)*b\right)*\left((c*a)*d\right)\right).$$

Nyní využijeme (6.5). Díky symetrii stačí ověřit první rovnost. Tedy

$$A*C=\left(a:\left(d*(c*a)\right)\right)*\left(c:\left(b*(a*c)\right)\right)\overset{(CA2)}{=}$$

$$=\left(\left(a:\left(d*(c*a)\right)\right)*c\right):\left(b*(a*c)\right)\overset{5.3\ (v)}{=}$$

$$=\left(\left((c*a):\left(d*(c*a)\right)\right)*\left(\left(\left(a:(c*a)\right):\left(\left(d*(c*a)\right):(c*a)\right)\right)*c\right)\right):$$

$$:\left(b*(a*c)\right)\overset{5.1\ (v),\ (ii)}{=}$$

$$=\left(\left((c*a)\wedge d\right)*\left(\left(\left(a:(c*a)\right):0\right)*c\right)\right):\left(b*(a*c)\right)\overset{(CA4),\ 5.1\ (v)}{=}$$

$$=\left(\left((c*a)\wedge d\right)*\left((a\wedge c)*c\right)\right):\left(b*(a*c)\right)\overset{(CA2)}{=}$$

$$=\left((c*a)\wedge d\right)*\left((a*c):\left(b*(a*c)\right)\right)\overset{5.1\ (v)}{=}$$

$$=\left((c*a)\wedge d\right)*\left((a*c)\wedge b\right)=E.$$

Poněvadž platí $\left((c*a)\wedge d\right)\wedge\left((a*c)\wedge b\right)=(c*a)\wedge d\wedge(a*c)\wedge b\overset{5.3\ (ii)}{\le}0$, dostaneme podle 5.3 (i)

$$E=(a*c)\wedge b.$$

Dále $\left((a*c)\wedge b\right)\wedge\left(d\wedge(c*a)\right)\overset{5.3\ (ii)}{\le}0$, tedy dle 5.3 (i)

$$E=\big(b:((a*c)*b)\big):\big(d:((c*a)*d)\big).$$

Využijeme vztah 5.3 (vi), kde $u=b$, $x=(a*c)*b$, $v=d$ a $y=(c*a)*d$. Potom

$$E=\Big(\big(b:(((c*a)*d)*((a*c)*b))\big):\big(d:(((a*c)*b)*((c*a)*d))\big)\Big):$$

$$:\Big(\big(((c*a)*d):d\big):\big((((a*c)*b)*((c*a)*d)):d\big)\Big)=F:G,$$

kde $G\overset{(CA2)}{=}\big((c*a)*(d:d)\big):\big((((a*c)*b)*((c*a)*d)):d\big)\overset{(CA4),\ 5.1\ (i)}{=}0$. Což znamená, že

$$E=\big(b:(((c*a)*d)*((a*c)*b))\big):\big(d:(((a*c)*b)*((c*a)*d))\big)=B:D.$$

Tedy $(A,B)\Theta(C,D)$. Celkem jsme ukázali, že $\big(R\times R,*,:,(0,0)\big)/\Theta$ je kuželová algebra. □

Věta 6.2: *Zobrazení* $\varphi:a\mapsto[(a,0)]_\Theta$ *je vnoření kuželové algebry* $(R,*,:,0)$ *do kuželové algebry* $\big(R\times R,*,:,(0,0)\big)/\Theta$.

Důkaz: Když $(a,0)\Theta(c,0)$, potom $a*c=0:0=0$ & $c*a=0:0=0$, tedy $a=c$. Tj. φ je injekce. Navíc $\varphi:a\mapsto[(a,0)]_\Theta$ je homomorfismus, protože

$$\varphi(a)*\varphi(c)=[(a,0)]_\Theta*[(c,0)]_\Theta=[(a,0)*(c,0)]_\Theta=[(a*c,0)]_\Theta=\varphi(a*c)$$

a podobně

$$\varphi(c):\varphi(a)=[(c,0)]_\Theta:[(a,0)]_\Theta=[(c,0):(a,0)]_\Theta=[(c:a,0)]_\Theta=\varphi(c:a).\quad □$$

Definice: Nechť $(R,*,:,0)$ je kuželová algebra. *Součtem prvků* $a,b\in R$ rozumíme prvek $x\in R$ takový, že

(*6.6*) $x\geq a$ & $a*x=b$.

Všimněme si, že pokud tento prvek existuje, pak je jediný. Opravdu, pokud $y\geq a$ & $a*y=b$, potom $0=b*b=(a*x)*(a*y)\overset{(CA1)}{=}(x*a)*(x*y)=0*(x*y)=$ $=x*y$, tj. $y\leq x$. Analogicky bychom dostali $x\leq y$, tedy $x=y$.

Podmínka (6.6) je ekvivalentní s podmínkou

(*6.7*) $x\geq b$ & $x:b=a$.

Důkaz: Když $x\geq a$ & $a*x=b$, pak jistě $x\geq b$ a platí $x:b=x:(a*x)\overset{5.1\ (v)}{=}x\wedge a=a$. Implikace (6.7) $\Rightarrow$ (6.6) se ověří podobně. □

Pokud součet prvků $a,b\in R$ existuje, budeme ho značit $a+b$, tj. $(a+b):b=a\ \&\ a*(a+b)=b$.

Poznámka: V $(R\times R,*,:,(0,0))/\Theta$ třída $[(a,b)]_\Theta$ reprezentuje součet $a+b$, který obecně nemusí existovat v $(R,*,:,0)$.

Důkaz: Ukážeme, že $[(a,b)]_\Theta$ odpovídá definici součtu: Platí $[(b,0)]_\Theta\le[(a,b)]_\Theta$ a $[(a,0)]_\Theta\le[(a,b)]_\Theta$. Dále

$$(a,b):(b,0)=((a:(0:b)):(b:(b:0)),(b:0):b)=((a:0):(b:b),b:b)=$$

$=(a,0)$, tj. $[(a,b)]_\Theta:[(b,0)]_\Theta=[(a,0)]_\Theta$ a

$$(a,0)*(a,b)=(0*(a*a),((a*a)*0)*((a*a)*b))=(a*a,(0*0)*(0*b))=$$

$=(0,b)$, tj. $[(a,0)]_\Theta*[(a,b)]_\Theta=[(0,b)]_\Theta$. Zbývá ověřit, že $[(0,b)]_\Theta=[(b,0)]_\Theta$, tj. $(0,b)\Theta(b,0)$. Podle (6.5) platí

$$(0,b)\Theta(b,0)\ \Leftrightarrow\ 0*b=b:0\ \&\ b*0=0:b,$$

což je okamžitě vidět. □

Věta 6.3: *Nechť* $(R,*,:,0)$ *je kuželová algebra taková, že* $a+b$ *existuje pro každé* $a,b\in R$. *Potom* $(R,+,0)$ *je monoid s krácením, který splňuje následující podmínky:*

(*i*) $\forall a,b\in R:\ a+b=0\ \Rightarrow\ a=b=0$;

(*ii*) $\forall a\in R:\ R+a=a+R$.

Důkaz: Jistě platí $a+0=a=0+a$ pro každé $a\in R$, neboť $a\ge a\ \&\ a*a=0\ \&\ a:a=0$.

Označme $x=(a+b)+c$. Potom $(a*x):c\overset{(CA2)}{=}a*(x:c)=a*(a+b)=b$, přičemž $a*x\ge(a+b)*x=c$, tedy $a*x=b+c$. Ovšem $x\ge a+b\ge a$, a proto z rovnosti $a*x=b+c$ plyne $x=a+(b+c)$.

(i) Důkaz je triviální, protože $a+b\ge a,b$.

(ii) Nejprve ukážeme, že pro všechny prvky $a,b\in R$ existuje prvek $c\in R$ takový, že $a+b=c+a$. Stačí vzít $c=(a+b):a$. Potom jistě $c+a=a+b$, protože

$(a+b):a=c$ & $a+b\geq a$. Analogicky, položíme-li $d=a*(b+a)$, pak $a+d=$ $=b+a$.

Zbývá ověřit krácení: Nechť $x+a=x+b$. Pak $a=x*(x+a)=x*(x+b)=b$.

$\square$

Lemma 6.4: *V kuželové algebře* $(R,*,:,0)$ *platí:*

$$a\leq b \quad \Leftrightarrow \quad b=a+x \text{ pro nějaký prvek } x\in R$$
$$\Leftrightarrow \quad b=y+a \text{ pro nějaký prvek } y\in R.$$

Důkaz: Když $a\leq b$, pak podle definice operace $+$ platí $b=a+(a*b)=(b:a)+a$. Naopak, když $b=a+x$ nebo $b=y+a$ pro některé $x,y\in R$, pak ihned podle definice $+$ dostaneme, že $b\geq a$. $\square$

Z věty 6.3 vyplývá, že když součet $a+b$ existuje pro všechny prvky $a,b\in R$, pak $(R,+,0)$ je kladný kužel uspořádané grupy. Podle lemmatu 6.4 původní uspořádání $(R,*,:,0)$ splývá s přirozeným uspořádáním $(R,+,0)$, a tedy tato grupa je svazově uspořádaná.

Nechť R je kuželová algebra. Označme $s(R)$ kuželovou algebru $(R\times R,*,:,(0,0))/\Theta$ sestrojenou ve větě 6.2 a identifikujme R s příslušnou podmnožinou $s(R)$. Potom pro každé $a,b\in R$ existuje $a+b$ v $s(R)$ (pokud součet existuje už v R, je stejný). Nyní definujme

$$R_1=R,$$
$$R_i=s(R_{i-1}) \text{ pro } i\geq 2,$$
$$\overline{R}=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}R_i.$$

Potom $\overline{R}$ je kuželová algebra, ve které existuje součet libovolných dvou prvků. Proto $\overline{R}$ je kladným kuželem ℓ-grupy G_R. Z konstrukce $\overline{R}$ je evidentní, že každý prvek $g\in\overline{R}=G_R^+$ lze psát jako součet konečně mnoha prvků z R, tj. $g=a_1+...+a_n$ pro některé $a_i\in R$, $n\in\mathbb{N}$. Navíc R je konvexní podmnožina $\overline{R}=G_R^+$. Toto plyne ze skutečnosti, že R je konvexní podmnožina $s(R)$.

Důkaz: Prvky $s(R)$ jsou ve tvaru $[(a,b)]_\Theta$, prvky R ve tvaru $[(c,0)]_\Theta$. Předpokládejme, že $[(a,b)]_\Theta\leq[(c,0)]_\Theta$, tj.

$$\left[(0,0)\right]_\Theta = \left[(c,0)\right]_\Theta * \left[(a,b)\right]_\Theta = \left[(c*a,(a*c)*b)\right]_\Theta,$$

což je ekvivalentní s podmínkami $c*a=0$ & $(a*c)*b=0$, tj. $a\le c$ & $b\le a*c$. Ukážeme, že $\left[(a,b)\right]_\Theta = \left[\left(c:\left(b*(a*c)\right),0\right)\right]_\Theta$, tj. $(a,b)\Theta\left(c:\left(b*(a*c)\right),0\right)$, tedy $a*\left(c:\left(b*(a*c)\right)\right)=b:0$ & $\left(c:\left(b*(a*c)\right)\right)*a=0:b$. První rovnost platí, neboť $b:0=b$ & $a*\left(c:\left(b*(a*c)\right)\right)\overset{(CA2)}{=}(a*c):\left(b*(a*c)\right)=b\wedge(a*c)=b$. Druhá rovnost platí, protože $0:b=0$ a současně $a=a\wedge c=c:(a*c)\le c:\left(b*(a*c)\right)$, neboť $a*c\ge$ $\ge b*(a*c)$. Celkem tedy $\left[(a,b)\right]_\Theta=\left[(d,0)\right]_\Theta$, kde $d=c:\left(b*(a*c)\right)$. □

Je-li R lineárně uspořádaná, pak i $s(R)$ je lineárně uspořádaná.

Důkaz: V $s(R)$ platí: $\left[(c,d)\right]_\Theta\le\left[(a,b)\right]_\Theta \Leftrightarrow \left[(a,b)\right]_\Theta*\left[(c,d)\right]_\Theta=\left[(0,0)\right]_\Theta \Leftrightarrow$ $(a,b)*(c,d)=(0,0) \Leftrightarrow a*c\le b:d$ & $c*a\ge d:b$.

Předpokládejme, že $\left[(a,b)\right]_\Theta\not\le\left[(c,d)\right]_\Theta$, tj. $c*a\not\le d:b$ nebo $a*c\not\ge b:d$. V prvním případě $c*a>d:b$, což ale znamená, že $c*a\ne0$, a tedy $a*c=0$, tj. $a*c\le b:d$. Dohromady tedy $\left[(c,d)\right]_\Theta\le\left[(a,b)\right]_\Theta$. Ve druhém případě analogicky $a*c<b:d$. Tedy $b:d\ne0$, což implikuje $d:b=0$, tj. $c*a\ge d:b$. Proto $\left[(c,d)\right]_\Theta\le\left[(a,b)\right]_\Theta$. □

Odtud plyne, že když R je lineárně uspořádaná, pak také $\overline{R}$ je řetězec, což znamená, že i ℓ-grupa G_R je lineárně uspořádaná.

Jestliže R splňuje identitu (5.2), potom i $s(R)$ splňuje (5.2).

Důkaz: Dle (6.1) platí $(a,b)*(c,d)=\left(b*(a*c),\left((a*c)*b\right)*\left((c*a)*d\right)\right)$ a $(d,c):$ $:(b,a)=\left(\left(d:(a:c)\right):\left(b:(c:a)\right),(c:a):b\right)$. Tedy $(a,b)*(c,d)=(d,c):(b,a)$. Navíc $(a,b)\Theta(b,a)$. Platí $(a,b)\Theta(b,a) \Leftrightarrow a*b=b:a$ & $b*a=a:b$. Tedy v $\left(R\times R,*,:,(0,0)\right)/\Theta$ dostaneme

$$\left[(a,b)\right]_\Theta*\left[(c,d)\right]_\Theta=\left[(a,b)*(c,d)\right]_\Theta=\left[(d,c):(b,a)\right]_\Theta=$$
$$=\left[(d,c)\right]_\Theta:\left[(b,a)\right]_\Theta=\left[(c,d)\right]_\Theta:\left[(a,b)\right]_\Theta.$$

Tedy $s(R)$ splňuje (5.2). □

Z předchozího plyne, že $\overline{R}$ splňuje (5.2), a tedy ℓ- grupa G_R je komutativní.

Vnoření kuželové algebry do ℓ- grupy přenáší řadu vlastností, např. kongruence na R odpovídají kongruencím na G_R. Jelikož mezi kongruencemi a homomorfismy existuje vzájemně jednoznačný vztah, stačí ukázat, že homomorfismus $\varphi : A \to B$ kuželových algeber $A \subseteq G_A$, $B \subseteq G_B$ lze rozšířit na homomorfismus $\overline{\varphi} : G_A \to G_B$ ℓ- grup G_A a G_B.

Důkaz: (1) Mějme kuželové algebry $(A,*,:,0)$, $(B,*,:,0)$, které vnoříme do příslušných algeber $s(A) = (A \times A,*,:,(0,0))/\Theta_A$, $s(B) = (B \times B,*,:,(0,0))/\Theta_B$, tj.

$$a \mapsto [(a,0)]_{\Theta_A},$$

$$b \mapsto [(b,0)]_{\Theta_B}.$$

Nechť je dán homomorfismus $\varphi : A \to B$. Zobrazení φ zachovává součty, které existují v A, tj.:

jestliže $x + y = z$ v A, pak $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(z)$ v B.

To platí, protože $x + y = z \iff z : y = x \ \& \ z \geq y$. Odtud $\varphi(x) = \varphi(z) : \varphi(y)$ & $\varphi(z) \geq \varphi(y)$, a tedy $\varphi(z) = \varphi(x) + \varphi(y)$ v B.

(2) Definujme zobrazení $\overline{\varphi} : s(A) \to s(B)$ předpisem

(6.8) $\overline{\varphi} : [(a,b)]_{\Theta_A} \mapsto [(\varphi(a),\varphi(b))]_{\Theta_B}$.

Ukážeme, že zobrazení $\overline{\varphi}$ je definováno korektně a že je to homomorfismus.

Restrikce $\overline{\varphi}|_A$ je φ, protože $\overline{\varphi}\left([(a,0)]_{\Theta_A}\right) = [(\varphi(a),0)]_{\Theta_B}$.

Platí $[(a,b)]_{\Theta_A} = [(c,d)]_{\Theta_A} \iff a * c = b : d \ \& \ c * a = d : b$. Protože φ je homomorfismus, dostaneme $\varphi(a) * \varphi(c) = \varphi(b) : \varphi(d)$ & $\varphi(c) * \varphi(a) = \varphi(d) : \varphi(b)$, odkud $[(\varphi(a),\varphi(b))]_{\Theta_B} = [(\varphi(c),\varphi(d))]_{\Theta_B}$. Tedy definice $\overline{\varphi}$ je korektní.

Dále $\overline{\varphi}\left([(a,b)]_{\Theta_A} * [(c,d)]_{\Theta_A}\right) = \overline{\varphi}\left([(a,b)*(c,d)]_{\Theta_A}\right) \overset{(6.1)}{=}$

$$= \overline{\varphi}\left(\left[\left(b*(a*c),((a*c)*b)*((c*a)*d)\right)\right]_{\Theta_A}\right) \overset{(6.8)}{=}$$

$$= \left[\left(\varphi(b*(a*c)),\varphi(((a*c)*b)*((c*a)*d))\right)\right]_{\Theta_B} =$$

$$= \left[\left(\varphi(b)*(\varphi(a)*\varphi(c)),((\varphi(a)*\varphi(c))*\varphi(b))*((\varphi(c)*\varphi(a))*\varphi(d))\right)\right]_{\Theta_B} =$$

$=\left[\left(\varphi(a),\varphi(b)\right)*\left(\varphi(c),\varphi(d)\right)\right]_{\Theta_B}=\left[\left(\varphi(a),\varphi(b)\right)\right]_{\Theta_B}*\left[\left(\varphi(c),\varphi(d)\right)\right]_{\Theta_B}\overset{(6.8)}{=}$

$=\overline{\varphi}\left(\left[(a,b)\right]_{\Theta_A}\right)*\overline{\varphi}\left(\left[(c,d)\right]_{\Theta_A}\right)$. Analogicky by se dokázalo

$$\overline{\varphi}\left(\left[(a,b)\right]_{\Theta_A}:\left[(c,d)\right]_{\Theta_A}\right)=\overline{\varphi}\left(\left[(a,b)\right]_{\Theta_A}\right):\overline{\varphi}\left(\left[(c,d)\right]_{\Theta_A}\right).$$

Tedy $\overline{\varphi}$ je homomorfismus $s(A)$ do $s(B)$.

Od homomorfismu mezi algebrami A a B můžeme tedy přejít k homomorfismu kuželových algeber $s(A)$ a $s(B)$ atd. až k homomorfismu kladných kuželů ℓ-grup $\overline{\varphi}:G_A^+\to G_B^+$ (protože $\overline{\varphi}$ je homomorfismus kuželových algeber a zachovává operaci $+$), tj.

$$A_2=s(A_1)\to s(B_1)=B_2,$$
$$A_3\to B_3,$$
$$\vdots$$
$$G_A^+=\bigcup_i A_i\to G_B^+=\bigcup_i B_i .$$

(3) Nyní nás zajímá, zda můžeme homomorfismus $\overline{\varphi}$ rozšířit také na ℓ-grupy G_A a G_B.

Poznamenejme, že v každé ℓ-grupě platí: Pro $g\in G$, *kladná část* g^+ prvku g je $g\vee 0$; *záporná část* g^- je $-g\vee 0$. Potom $g=g^+-g^-=-g^-+g^+$.

Pro $g\in G_A$ položme $\overline{\varphi}(g)=\overline{\varphi}(g^+)-\overline{\varphi}(g^-)$.

Ověříme, že zobrazení $\overline{\varphi}:G_A\to G_B$ je definováno korektně. Nechť $g\in G_A$, $g=x-y=-g^-+g^+$, tj. $g^-+x=g^++y$. To jsou kladné prvky, a proto platí $\overline{\varphi}(g^-)+\overline{\varphi}(x)=\overline{\varphi}(g^+)+\overline{\varphi}(y)$. To můžeme dále upravit: $\overline{\varphi}(x)-\overline{\varphi}(y)=-\overline{\varphi}(g^-)+$ $+\overline{\varphi}(g^+)=\overline{\varphi}(g^+)-\overline{\varphi}(g^-)$. Analogicky, jestliže $g=-y+x=g^+-g^-$, tj. $x+g^-=$ $=y+g^+$, potom $\overline{\varphi}(x)+\overline{\varphi}(g^-)=\overline{\varphi}(y)+\overline{\varphi}(g^+)$, odkud $-\overline{\varphi}(y)+\overline{\varphi}(x)=\overline{\varphi}(g^+)-$ $-\overline{\varphi}(g^-)$.

Tedy $\overline{\varphi}$ je homomorfismus ℓ-grup G_A a G_B. □

Poznámka: Na závěr ukážeme, jak při vnoření MV-algebry nebo pseudo-MV-algebry do ℓ-grupy můžeme využít konstrukci pro kuželové algebry:

Nechť $(A,\oplus,\neg,0,1)$ je MV-algebra. Víme, že když definujeme $a:b=b*a=$ $=a\ominus b$, pak $(A,*,:,0,1)$ je ohraničená kuželová algebra.

Když G_A je ℓ-grupa, která reprezentuje kuželovou algebru $(A,*,:,0,1)$, pak G_A je komutativní ℓ-grupa, protože A splňuje identitu (5.2), a platí

$$a:b=b*a=(a-b)\vee 0 .$$

Proto

$$\neg a=1:a=1-a ,$$

$$a\oplus b=((1:b):a)*1=1-(((1-b)-a)\vee 0)=(a+b)\wedge 1 .$$

Tedy $(A,\oplus,\neg,0,1)$ je izomorfní s $\Gamma(G_A,1)$. Navíc 1 je silná jednička ℓ-grupy G_A.

Podobně můžeme postupovat také pro pseudo-MV-algebry:

Nechť $(A,\oplus,^-,^\sim,0,1)$ je pseudo-MV-algebra. Víme, že když definujeme

$$a:b=(b\oplus a^\sim)^- ,$$

$$b*a=(a^-\oplus b)^\sim ,$$

pak $(A,*,:,0,1)$ je ohraničená kuželová algebra.

Nechť G_A je ℓ-grupa reprezentující kuželovou algebru $(A,*,:,0,1)$. Pak 1 je silná jednička, $a:b=(a-b)\vee 0$ a $b*a=(-b+a)\vee 0$, a tedy

$$a^-=1:a=1-a ,$$

$$a^\sim=a*1=-a+1 ,$$

$$a\oplus b=((1:b):a)*1=-(((1-b)-a)\vee 0)+1=(a+b)\wedge 1 .$$

Pak $(A,\oplus,^-,^\sim,0,1)$ je izomorfní s $\Gamma(G_A,1)$.

Literatura:

[1] T. S. Blyth: Lattice and Ordered Algebraic Structures, Springer, London 2005.

[2] B. Bosbach: Concerning semiclans, Arch. Math. 37 (1981), 316-324.

[3] B. Bosbach: Concerning cone algebras, Algebra Universalis 15 (1982), 58-66.

[4] R. L. O. Ciognoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici: Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[5] C. C. Chang: Algebraic analysis of many valued logics, Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), 467-490.

[6] C. C. Chang: A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 74-80.

[7] A. Dvurečenskij: Pseudo MV-algebras are intervals in ℓ-groups, J. Aust. Math. Soc. 72 (2002), 427-445.

[8] A. Dvurečenskij, T. Vetterlein: Generalized pseudo-effect algebras in: Lectures on Soft Computing and Fuzzy Logic (A. DiNola, G. Gerla, eds.) Physica-Verlag, Heidelberg, 2001

[9] G. Georgescu a A. Iorgulescu: Pseudo-MV-algebras, Mult.-Valued Log. 6 (2001), 95-135.

[10] A. M. W. Glas: Partially Ordered Groups, World Scientific, Singapore, 1999.

[11] D. Mundici: Interpretation of AFC*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus, J. Funct. Anal. 65 (1986), 15-63.

[12] J. Rachůnek: A non-commutative generalization of MV-algebras, Czechoslovak Math. J. 52 (2002), 255-273.