



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**INTERPOLACE BODŮ V PROJEKTIVNÍM PROSTORU**

POINT INTERPOLATION IN PROJECTIVE SPACE

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**KLÁRA BUREŠOVÁ**

**VEDOUcí PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. PAVEL ŠTARHA, Ph.D.**

BRNO 2020

# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Studentka: **Klára Burešová**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.**  
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Interpolace bodů v projektivním prostoru

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V mnoha praktických aplikacích se setkáváme s nutností interpolovat body ve trojrozměrném euklidovském prostoru. V případě, že známe pouze polohy těchto bodů, řešení této úlohy není jednoznačné. Je tedy nutné pro jednoznačnost si stanovit další podmínky, které jsou zpravidla závislé na konkrétní řešené úloze. Pro další navazující aplikace je vhodné využít rozšířeného euklidovského prostoru (projektivního prostoru).

### Cíle bakalářské práce:

Nastudovat a popsat základní interpolační metody.  
Zobecnit interpolační metody pro trojrozměrný euklidovský a projektivní prostor.  
Vytvořit jednoúčelovou aplikaci pro interpolaci bodů.

### Seznam doporučené literatury:

MARTIŠEK, Dalibor. Matematické principy grafických systémů. Brno: Littera, 2002, 278 s. ISBN 80-857-6319-2.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## Abstrakt

Cílem této práce je popis interpolačních křivek v rovině, prostoru a s přechodem do projektivního prostoru. Součástí je definování projektivního prostoru, ve kterém budeme pracovat, a také dalších pojmů, jako jsou vektorový prostor, derivace, křivka atd. V druhé části je popis různých druhů aproximace křivek. Hlavní část je program pro rekonstrukci kinematické křivky, která popisuje trajektorii pohybujícího se tělesa. Dílčí metody byly programovány pomocí vývojového nástroje Matlab.

## Abstract

The aim of this work is to describe interpolation curves in the plane and space. Part of it is the definition of the projective space in which we will work and also other concepts such as vector space, derivation, curve, etc. The second part is a description of different types of approximation of curves. The main part is a program for the reconstruction of a kinematic curve, which describes the trajectory of a moving body. Sub-methods were programmed using the Matlab development tool.

## Klíčová slova

Interpolační polynomy, interpolační splajn, Hermitova interpolace, interpolace trojrozměrného pohybu, interpolace s různými parametry, projektivní prostor, projektivní geometrie.

## Keywords

Polynomial interpolation, spline interpolation, Hermite interpolation, interpolation of three-dimensional motion, interpolation with various parameters, projective space, projective geometry.

## Citace

BUREŠOVÁ, Klára. *Interpolace bodů v projektivním prostoru*. Brno, 2020. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.

# Interpolace bodů v projektivním prostoru

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením pana doc. ing. Pavla Štarhy Ph.D. Uvedla jsem všechny literární prameny, publikace a další zdroje, ze kterých jsem čerpala.

.....  
Klára Burešová  
25. června 2020

## Poděkování

Chtěla bych poděkovat hlavně doc. Ing. Pavlu Štarhovi Ph.D. za vedení a poznámky k práci, také doc. RNDr. Liboru Čermákovi, CSc. za pomoc z oblasti numerických metod, doc. Ing. Róbertu Jankových, CSc. za návrh na téma práce, Ing. Pavlu Loučkovi za připomínky k programování interpolačních polynomů a doc. Ing. Františku Svobodovi, Ph.D. za gramatickou korekturu.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Matematické prostory</b>	<b>3</b>
1.1 Vektorový prostor . . . . .	3
1.2 Unitární prostor . . . . .	7
1.3 Afinní prostor . . . . .	8
1.4 Euklidovský prostor . . . . .	8
1.5 Projektivní prostor . . . . .	10
<b>2 Matematický základ k aproximaci</b>	<b>13</b>
2.1 Křivky a funkce . . . . .	13
2.1.1 Funkce reálné proměnné . . . . .	13
2.1.2 Křivky . . . . .	14
2.2 Řešení soustav lineárních rovnic . . . . .	16
2.2.1 Gaussova eliminační metoda . . . . .	17
2.2.2 Gaussova eliminační metoda pro pásové matice . . . . .	17
<b>3 Aproximace funkcí</b>	<b>19</b>
3.1 Metoda nejmenších čtverců . . . . .	19
3.2 Interpolace . . . . .	20
3.2.1 Interpolace polynomem . . . . .	20
3.2.2 Interpoláční splajny . . . . .	25
3.2.3 Interpolace s různými parametry . . . . .	31
3.2.4 Interpolace s různými zadanými derivacemi v bodech. . . . .	34
3.3 Shrnutí pro konkr�tn� aplikaci . . . . .	36
<b>Závěr</b>	<b>37</b>
<b>Literatura</b>	<b>38</b>
<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>40</b>
<b>A Pomocn� funkce</b>	<b>41</b>
<b>B Hlavn� zdrojov� kód</b>	<b>43</b>
<b>C Zdrojov� k�dy pro obrázky</b>	<b>44</b>

# Úvod

Tato práce vznikla v návaznosti na bakalářskou práci Zuzany Mikušové z roku 2018 [9], která se zabývala rekonstrukcí prostorové křivky při sebeobránném tasení zbraně. Cílem této práce je zobecnit matematický základ a vytvořit program v Matlabu, který by danou křivku rekonstruoval. Problematiku tasení zbraně zde už neřešíme, byla dostatečně popsána v práci Zuzany Mikušové. Také kinematiku a fyziku pohybu bereme jako dříve zpracovanou. Neomezujeme se jen na problematiku zbraní, ale spíš na rekonstrukci křivky procházející naměřenými body.

Na tuto práci (a předchozí bakalářskou práci Zuzany Mikušové) bude navazovat diplomová práce, ve které se zaměřím na samotné natáčení pohybu v prostoru a získání bodů, které se budou prokládat kinematickou křivkou. Proto je zde definováno více pojmů, než by bylo potřeba pro samotnou rekonstrukci prostorové křivky. Celkovým cílem je tedy rekonstrukce prostorového pohybu a jeho matematický popis, ale praktická část a uplatnění je přenecháno do diplomové práce.

Problém aproximací posloupnosti bodů už byl mnohokrát zpracovaný a i Matlab a další matematické vývojové prostředí pro něj mají implementované určité funkce, které však jsou omezené pevně zadanými parametry. Cílem práce tedy je vytvořit program, kde bychom tyto parametry mohli libovolně měnit a dosáhli tím lepšího a přesnějšího výsledku při interpolaci a lepšímu porozumění interpolace. Kód tohoto programu je v příloze B.

V první části práce (1) se věnujeme definování matematických prostorů potřebných k popisu projektivního prostoru, ve kterém se budeme pohybovat. V projektivním prostoru lze velmi snadno popsat snímání objektů, středové promítání a stereoskopii, kterou používáme při práci s prostorovými souřadnicemi.

Druhá kapitola (2) zavádí pojmy přímo potřebné k interpolačním polynomům a jejich konstrukci.

Ve třetí kapitole (3) jsou popsány základní metody k proložení bodů křivkou. Z důvodu aplikace je zde mnohem víc prostoru věnováno interpolaci a následně Hermitovým interpolačním splajnům. Také je zde rozebráno, jak se vlivem změn parametrů může měnit celkový tvar křivky.

Praktická část, tedy program pro interpolaci, se nachází v přílohách. Také zde nalezneme doprovodné programy pro některé změny parametrů, které jsou vykresleny v části 3.2.3 a 3.2.4.

# Kapitola 1

## Matematické prostory

Pro praktické použití rekonstrukce kinematických křivek je vhodné zavést projektivní prostor. Také potřebujeme definovat některé základní pojmy a útvary.

### 1.1 Vektorový prostor

Pro zavedení vektorového prostoru potřebujeme pracovat se dvěma algebraickými strukturami, komutativní grupou a polem čísel. Tato část textu je čerpána z [1], [8] a [11].

#### Definice 1. Metrika

Buď  $\mathbb{M}$  libovolná neprázdná množina a  $\rho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  zobrazení, které  $\forall x, y, z \in \mathbb{M}$  splňuje

1. axiom totožnosti  
 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. axiom symetrie  
 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. trojúhelníková nerovnost  
 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Zobrazení  $\rho$  nazýváme *metrika* na  $\mathbb{M}$ , prvky množiny  $\mathbb{M}$  nazýváme *body metrického prostoru*  $(\mathbb{M}, \rho)$ , číslo  $\rho(x, y)$  nazýváme *vzdálenost bodů  $x, y$* .

#### Příklad 1. Metriky

Příklady uvedeme hlavně z prostoru  $\mathbb{R}^n$ , protože v dalších kapitolách budeme pracovat s rozšířeným Euklidovským prostorem. 1.4 Tedy:  $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

1.  $\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$
2.  $\rho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$
3.  $\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$

Metrika  $\rho_1$  se nazývá *součtová*, nebo také *taxikářská*. Metrika  $\rho_2$  bude pro nás nejdůležitější, nazývá se *euklidovská*,  $\rho_\infty$  je metrika *maximální*.

Ověření axiomů: axiomy 1 a 2 zřejmě platí pro všechny normy. Zaměříme se na axiom 3.



$$\rho_1: \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \geq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i + z_i - y_i| = \rho_1(x, y)$$

$\rho_2$ : Vyjdeme Cauchyova–Buňakovského-Schwartzovy nerovnosti

$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ . Položíme  $u_i = p_i + q_i, v_i = q_i$ , potom máme  $\sum_{i=1}^n (p_i + q_i) q_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}$ . Pokud naopak  $u_i = p_i, v_i = p_i + q_i$ , potom  $\sum_{i=1}^n p_i (p_i + q_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)^2}$ . Sečtením získáme Minkowského nerovnost, tj.  $\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}$ . Dosazením  $p_i = x_i - z_i, q_i = z_i - y_i$  máme

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}$$

tj.  $\rho_2(x, y) \leq \rho_2(x, z) + \rho_2(z, y)$

$\rho_\infty$ : Označme index  $j$  jako ten, kde nastane maximum z hodnot  $|x_i - z_i|$ , podobně označme  $k$  resp.  $l$  u maxima z  $|z_i - y_i|$  resp.  $|x_i - y_i|$ . Potom

$$\rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y) = |x_j - z_j| + |z_k - y_k| \leq |x_l - z_l| + |z_l - y_l| \leq |x_l - z_l + z_l - y_l| = |x_l - y_l| = \rho_\infty(x, y), \text{ tj. } \rho_\infty(x, y) \leq \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y).$$

[11]

## Definice 2. Grupa

Nechť existuje množina  $\mathbb{G}$ , která je neprázdná, a binární operace  $\circ$  taková, že  $\circ : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ .

- $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- existuje  $e \in \mathbb{G}$  takové, že  $e \circ a = a \circ e = a, \quad \forall a \in \mathbb{G}$
- $\forall a \in \mathbb{G}$  existuje  $a^{-1} \in \mathbb{G}$  tak, že  $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Pak nazveme  $\mathbb{G}$  *grupa*.

## Věta 1.

Nechť  $\mathbb{G}$  je grupa a  $a, b, c \in \mathbb{G}$ , pak pro grupu  $\mathbb{G}$  platí následující tvrzení:

1. Inverzní prvek je pro každé  $a \in \mathbb{G}$  právě jeden.
2. Nechť  $a \circ b = a \circ c$  nebo  $b \circ a = c \circ a$  potom  $b = c$ .
3. Existuje právě jedno  $x \in \mathbb{G}$  takové, že  $a \circ x = b$  a jediné  $y \in \mathbb{G}$  takové, že  $y \circ a = b$ .

Důkaz:

1. Nechť  $a \circ b = b \circ a = e$  a  $a \circ c = c \circ a = e$ , pak

$$b = b \circ e = b \circ (a \circ c) = (b \circ a) \circ c = e \circ c = c.$$

2. Necht  $a \circ b = a \circ c$ , pak  $a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$ , využijeme asociativity a dostaneme  $(a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c$ ,  $(a^{-1} \circ a) = e$ , tedy

$$b = e \circ b = e \circ c = c.$$

3. Pro  $x = a^{-1} \circ b$  platí

$$a \circ x = a \circ (a^{-1} \circ b) = (a \circ a^{-1}) \circ b = e \circ b = b$$

tedy  $x$  je jediným řešením rovnice  $a \circ x = b$ . Necht jsou  $x_1$  a  $x_2$  řešení rovnice  $a \circ x = b$ , pak platí  $a \circ x_1 = a \circ x_2$  a tedy  $x_1 = x_2$ . [1]

□

### Definice 3. Komutativní grupa

Necht množina  $\mathbb{G}$  je grupa. Pokud navíc:

- $a \circ b = b \circ a, \quad \forall a, b \in \mathbb{G}$

Pak nazveme  $\mathbb{G}$  *komutativní grupa*.

### Definice 4. Pole

Necht je  $\mathbb{F}$  množina čísel (aspoň dvouprvková) s operací  $+$  a  $\cdot$  takových, že  $+$  :  $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  a  $\cdot$  :  $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  a platí:

- asociativita  $+$   
 $a + (b + c) = (a + b) + c$
- existence neutrálního prvku vzhledem k  $+$   
 $\exists 0_F \in \mathbb{F}$  takové, že  $0_F + a = a + 0_F = a, \quad \forall a \in \mathbb{F}$
- existence inverzního prvku  
 $\forall a \in \mathbb{F} \exists -a \in \mathbb{F}$  tak, že  $a + (-a) = (-a) + a = 0_F$
- komutativita  $+$   
 $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in \mathbb{F}$
- asociativita  $\cdot$   
 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{F}$
- existence neutrálního prvku vzhledem k  $\cdot$   
 $\exists 1_F \in \mathbb{F}$  takové, že  $1_F \cdot a = a \cdot 1_F = a, \quad \forall a \in \mathbb{F}$
- existence převráceného čísla  
 $\forall a \in \mathbb{F}^{\setminus \{0\}} \exists a^{-1} \in \mathbb{F}$  tak, že  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_F$
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$   
 $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$

Pak nazveme  $\mathbb{F}$  *polem*.

**Poznámka 1.** Jestliže navíc platí

- $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{F}$ ,

hovoříme o *komutativním poli*.

**Definice 5. Vektorový prostor**

Nechť  $\mathbb{V}$  je komutativní grupa (její prvky budeme nazývat vektory) a  $\mathbb{T}$  je číselné pole. Zobrazení  $\mathbb{T} \cdot \mathbb{V} \ni (t, \mathbf{u}) \rightarrow t\mathbf{u} \in \mathbb{V}$  nazýváme *násobení skalárem*. Nechť  $\forall t \in \mathbb{T}$  a každý vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$  je definován vektor  $t \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{V}$  tak, že pro libovolné  $t, s \in \mathbb{T}$  a pro  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$  platí:

- $t \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$
- $(t + s) \cdot \mathbf{u} = t \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{u}$
- $(t \cdot s) \cdot \mathbf{u} = t \cdot (s \cdot \mathbf{u})$
- $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

Potom nazveme  $\mathbb{V}$  *vektorový prostor nad tělesem  $\mathbb{T}$* .

**Poznámka 2.**

1. Nulový prvek ve vektorovém prostoru nazveme *nulový vektor* a značíme  $\mathbf{o}$ .
2. Opačný prvek k prvku  $\mathbf{u}$  ve vektorovém prostoru nazveme *opačný vektor k vektoru  $\mathbf{u}$*  a značíme  $-\mathbf{u}$ .
3. Pro naše potřeby si stačí vektor představit jako orientovanou úsečku, nebo jako dvojici (resp. trojici) reálných čísel (dvojice pro prostor  $\mathbb{R}^2$  a trojice pro  $\mathbb{R}^3$ ), popřípadě jako uspořádanou množinu čísel. Tyto vektory lze sčítat a násobit reálným číslem.

**Definice 6. Lineární nezávislost**

Nechť je  $\mathbb{V}$  vektorový prostor nad  $\mathbb{T}$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{T}$  a množinu  $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  je neprázdná konečná množina vektorů z vektorového prostoru  $\mathbb{V}$ . Pak množina  $\mathcal{S}$  je *lineárně nezávislá*, jestliže rovnice

$$t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + t_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + t_n \cdot \mathbf{u}_n = 0$$

má jediné řešení

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0.$$

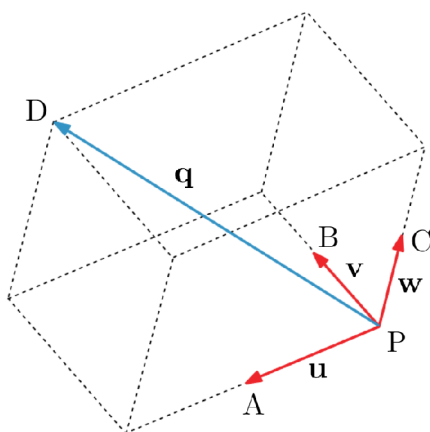
Říkáme, že vektory  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou nezávislé. Pokud má rovnice i jiná řešení, pak je  $\mathcal{S}$  *lineárně závislá*. [1]

Na obrázku 1.1 vidíme vektor  $\mathbf{q}$ , který je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  a  $\mathbf{w}$ . Tedy vektory  $\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$  a  $\mathbf{w}$  jsou lineárně závislé (jeden je kombinací ostatních).

**Definice 7. Báze vektorového prostoru**

Konečná množina  $\mathcal{S}$  vektorů vektorového prostoru  $\mathbb{V}$  je *báze vektorového prostoru  $\mathbb{V}$*  jestliže

1.  $\mathcal{S}$  je nezávislá.
2. Každý vektor  $v \in \mathbb{V}$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů  $\mathcal{S}$ .



Obrázek 1.1: Lineární závislost vektorů. Zdroj [1]

### Definice 8. Dimenze

Nechť  $\mathbb{V}$  je vektorový prostor a  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou nezávislé vektory vektorového prostoru  $\mathbb{V}$ . Maximální počet nezávislých vektorů nazveme *dimenze prostoru*  $\mathbb{V}$  a značíme  $\dim \mathbb{V}$ . Pokud má prostor bázi, pak je dimenze rovna počtu vektorů v bázi a prostor nazveme jako *konečně rozměrný*. [1]

### Definice 9. Souřadnice vektoru

Nechť  $\mathbb{V}$  je vektorový prostor dimenze  $n$ ,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_i\}; i = 1, 2, \dots, n$  je jeho libovolná báze a libovolný vektor  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$ . Koeficienty  $c_1, c_2, \dots, c_n$  nazveme *souřadnicemi vektoru v* a zapisujeme  $\mathbf{v} = (c_1, c_2, \dots, c_n)_{\mathcal{B}}$ . [8]

## 1.2 Unitární prostor

Nechť  $\mathbb{V}$  je vektorový prostor a  $*$ :  $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  je zobrazení, pro které platí:

- $\mathbf{u} * \mathbf{u} \geq 0$ ;  $\mathbf{u} * \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{u} * \mathbf{v} = \mathbf{v} * \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) * \mathbf{w} = \mathbf{u} * \mathbf{w} + \mathbf{v} * \mathbf{w}$
- $(c\mathbf{u}) * \mathbf{v} = c(\mathbf{u} * \mathbf{v})$

Pak operaci  $*$  nazveme *skalární součin* a prostor  $\mathbb{V}$  *unitárním prostorem*. [8]

### Poznámka 3.

1. Jedná se pouze o vektorový prostor doplněný další operací.
2. Pro trojrozměrný prostor tato operace přiřadí vektorům  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$  a  $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$  reálné číslo  $\mathbf{u}\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

### 1.3 Afinní prostor

#### Definice 10. Afinní prostor

Nechť  $\mathcal{A}_n$  je neprázdná množina, pro kterou existuje vektorový prostor  $\mathbb{V}_n$  dimenze  $n$  a zobrazení  $\varphi : \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n \rightarrow \mathbb{V}_n$  takové, že platí:

1.  $\forall A \in \mathcal{A}_n, x \in \mathbb{V}_n$  existuje právě jedno  $B \in \mathcal{A}_n$  takové, že  $\varphi(A; B) = x$
2.  $\forall A, B, C \in \mathcal{A}_n$  je  $\varphi(A; C) \leq \varphi(A; B) + \varphi(B; C)$

Pak množinu  $\mathcal{A}_n$  nazveme *afinním prostorem*, vektorový prostor  $\mathbb{V}_n$  nazveme *zaměřením prostoru  $\mathcal{A}_n$* , dimenzi prostoru  $\mathbb{V}_n$  nazveme *dimenzí  $\mathcal{A}_n$* . Prvky  $A \in \mathcal{A}_n$  nazýváme *body*. [8]

#### Poznámka 4.

- Jedná se o vektorový prostor doplněný o body  $A, B, C, \dots$
- K množině vektorů a bodů přidáme o operaci sčítání vektoru a bodu, jejímž výsledkem je bod  $B = A + \mathbf{u}$ , značíme  $\mathbf{u} = \vec{AB}$ .
- Pro každé tři body  $A, B, C$ , platí  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ .
- Body v rovině budeme modelovat uspořádanými dvojicemi  $A = [a_1, a_2]$  body v prostoru uspořádanými trojicemi  $A = [a_1, a_2, a_3]$ .

### 1.4 Euklidovský prostor

#### Definice 11. Euklidovský prostor

Nechť  $E^n$  je afinní prostor, zaměřením tohoto prostoru je unitární prostor  $\mathbb{V}_n$  uspořádaných  $n$ -tic reálných čísel.  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  je libovolná báze  $\mathbb{V}_n$  a  $O$  je nulový bod z  $\mathcal{A}_n$ . Pak afinní prostor  $E^n$  nazveme *euklidovským prostorem* a uspořádanou  $n + 1$ -tici  $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  kartézskou soustavou souřadnic. Jestliže  $X - O = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ , píšeme  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  a uspořádanou  $n$ -tici  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nazveme *kartézskými souřadnicemi* bodu  $X$ .

#### Definice 12. Objekt ve 2D/3D

Nechť existuje libovolná neprázdná podmnožina euklidovského prostoru  $E^2$  (resp.  $E^3$ ), pak ji nazveme *dvourozměrný* (resp. *trojrozměrný*) *objekt*. [8]

### Axiomatické zavedení euklidovského prostoru

Pro porovnání si uvedeme axiomatické zavedení euklidovského prostoru, které německý matematik David Hilbert rozdělil do několika skupin axiomů [6]. Průběžně budeme definovat pojmy, které se v nich používají.

#### Axiomy incidence

Tato skupina axiomů (I1-I8) zavádí vzájemnou polohu bodů a přímek.

**I1:** Dva různé body mají společnou jednu přímku.

**I2:** Každá přímka obsahuje aspoň dva různé body.

- I3:** Existuje aspoň jedna trojice různých bodů, které nepatří téže přímce.
- I4:** Jestliže tři body nepatří jedné přímce, potom patří jediné rovině.
- I5:** Jestliže dva různé body přímky  $p$  leží v rovině  $\rho$ , potom všechny body přímky  $p$  leží v  $\rho$ .
- I6:** Jestliže průnik dvou rovin není prázdný, obsahuje aspoň dva navzájem různé body.
- I7:** Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, které neleží v téže rovině.
- I8:** Rovina obsahuje aspoň jeden bod.

**Definice 13. Kolinearita**

Nechť  $A, B, C \in E^3$  leží na jedné přímce, pak tyto body nazveme *kolineární*.

**Axiomy Uspořádání**

Další skupina axiomů (**U1-U4**) se zabývá pokrytím přímky, tedy aby na ní bylo dostatečné množství bodů. Pomocí **U1** se také definují pojmy jako úsečka, polorovina a polopřímka.

- U1:** Jestliže bod  $B$  leží mezi body  $A, C$  jsou  $A, B, C$  tři různé body na přímce a platí též, že  $B$  leží mezi body  $A, C$ .
- U2:** Jestliže  $A, B$  jsou dva navzájem různé body, potom existuje na přímce  $AB$  aspoň jeden bod  $C$  takový, že bod  $B$  leží mezi body  $A, C$ .
- U3:** Ze tří různých bodů  $A, B, C$  ležících na té samé přímce leží nejvýše jeden mezi ostatními dvěma.
- U4:** (Paschův axiom) Jsou-li  $A, B, C$  tři nekolineární body a přímka  $p$ , která těmito body neprochází, obsahuje jistý bod mezi body  $A, C$ , potom přímka  $p$  obsahuje bod mezi  $A, B$  nebo mezi  $B, C$ .

**Axiomy shodnosti**

S axiomy **S1-S6** se definují další důležité útvary, středy a osy úseček trojúhelníků a další.

- S1:** Je-li  $AB = CD$ , potom  $A \neq B, C \neq D$ . Pro každé dva různé body  $A, B$  platí  $AB = BA$ .
- S2:** Nechť  $AB$  je úsečka,  $CD$  polopřímka. Potom existuje jediný bod  $E$  polopřímky  $CD$ , pro který platí  $AB = CE$ .
- S3:** Jestliže  $AB = CD$  a  $CD = EF$ , potom  $AB = EF$ .
- S4:** Jestliže bod  $C$  leží mezi body  $A, B$ , bod  $C'$  mezi body  $A', B'$  a jestliže platí  $AC = A'C', BC = B'C'$ , potom platí  $AB = A'B'$ .
- S5:** Nechť jsou  $ABC, A'B'K$  dvě trojice nekolineárních bodů a nechť  $AB = A'B'$ . Potom existuje jediný bod  $C'$  poloroviny  $A'B'K$ , pro který platí  $AC = A'C', BC = B'C'$
- S6:** Nechť jsou  $ABC, A'B'C'$  dvě trojice nekolineárních bodů, pro které platí  $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$ . Nechť dále leží bod  $P$  mezi body  $A, B$  a bod  $P'$  mezi body  $A', B'$  tak, že  $AP = A'P'$ . Potom  $CP = C'P'$ .

### Axiomy pohybu

- P1:** Leží-li bod  $C$  mezi body  $A, B$  a jsou-li  $A', B', C'$  obrazy bodu v přemístění, leží bod  $C'$  mezi body  $A', B'$ .
- P2:** Jestliže je polopřímka v přemístění samodružná, je každý její bod v tomto přemístění samodružný.
- P3:** Necht' jsou  $ABC, A'KL$  dvě trojice nekolineárních bodů. Existuje jediné přemístění v rovině, které převádí bod  $A$  do bodu  $A'$ , polopřímku  $AB$  do polopřímky  $A'K'$  a polorovinu  $ABC$  do poloroviny  $A'KL$ .
- P4:** Jestliže jsou  $A, B$  dva různé body, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí bod  $A$  do bodu  $B$  a bod  $B$  do bodu  $A$ .
- P5:** Jestliže je  $\angle BAC$  dutý úhel, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí polopřímku  $AB$  do polopřímky  $AC$  a polopřímku  $AC$  do polopřímky  $AB$ .
- P6:** Složením dvou přemístění vznikne přemístění.
- P7:** Identita je přemístění.
- P8:** Inverzní zobrazení k přemístění je přemístění.

### Axiomy spojitosti

- A:** (Archimédův axiom) Jsou dány úsečky  $AB, CD$ . Na polopřímku  $AB$  postupně nanášíme úsečku  $CD$  a dostaneme body  $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$ . Potom existuje takové  $n \in \mathbb{N}$ , že bod  $P_{n+1}$  neleží uvnitř  $AB$ .
- C:** (Cantorův axiom) Průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených je neprázdný.
- D:** (Dedekindův axiom) Každý omezený konvexní útvar na přímce, který obsahuje aspoň dva různé body, je úsečka.

### Axiom rovnoběžnosti

- R:** Necht'  $p$  je libovolná přímka,  $A$  bod, který na ní neleží. Potom bodem  $A$  prochází nejvýše jedna rovnoběžka s přímkou  $p$ . [4]

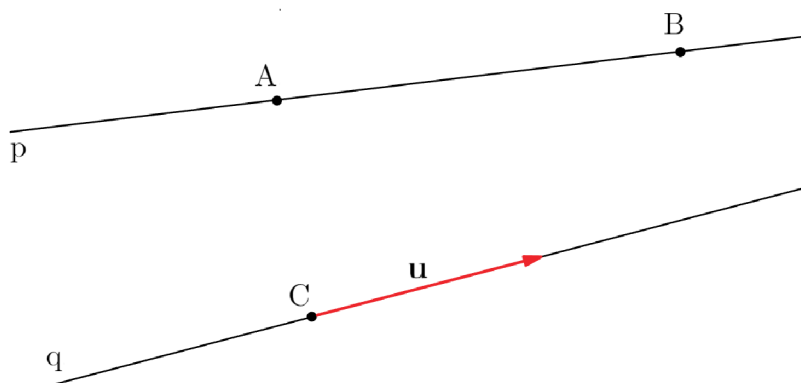
## 1.5 Projektivní prostor

V této části doplníme euklidovský prostor o takzvané *nevlastní body*, definice jsou převzaty z [5]. Rozšířený euklidovský prostor značíme  ${}_{\infty}E^n$ . Nejdříve si zavedeme rozšíření pro  $E^2$  a pak zobecníme pro prostory dimenze  $n$ .

### Projektivní rozšíření roviny $E^2$

Přímka je v  $E^2$  určena dvěma body, nebo bodem a směrovým vektorem (směrem). Tedy dvě přímky mají jeden společný bod, nebo mají společný směr.

Na obrázku 1.2 je znázorněno, že přímka je určena buď dvěma body, nebo bodem a směrem.



Obrázek 1.2: Určení přímky body  $A, B$ , nebo bodem  $C$  a směrem  $\mathbf{u}$ .

Kdybychom směry ztotožnili s body, mohli bychom tvrzení nahradit takto: Přímka je určena dvěma body. Dvě přímky v rovině mají vždy alespoň jeden společný bod. Tedy pro případ rovnoběžných přímek je potřeba doplnit *nevlastní body*  $N_\infty$ , tedy body, které leží v nekonečnu. Můžeme si je představit jako směry přímek. Důsledkem je i vytvoření *nevlastní přímky*  $n_\infty$ , tedy přímky, které je složená z nevlastních bodů.

### Souřadnice ${}_\infty E^2$

Problém reprezentace bodů je v tom, že nelze rozlišit vlastní (body původního prostoru  $E^2$ ) a nevlastní body (směry). Zavádíme tedy *homogenní souřadnice*. Tyto souřadnice jsou výsledkem projektivního rozšíření, tj. přidání souřadnice, která nevlastní body odlišuje

Jedná se v podstatě o položení roviny  $E^2$  do prostoru  $E^3$ , ve kterém je zvolený bod  $Q$  jako počátek a všechny body zapíšeme jako směry z tohoto bodu, tedy jako vektory. Rovina, ve které je třetí souřadnice 1, je množina *vlastních bodů*. Nevlastní body budou mít tuto souřadnici rovnou 0, tedy množina *nevlastních bodů* bude rovina rovnoběžná.

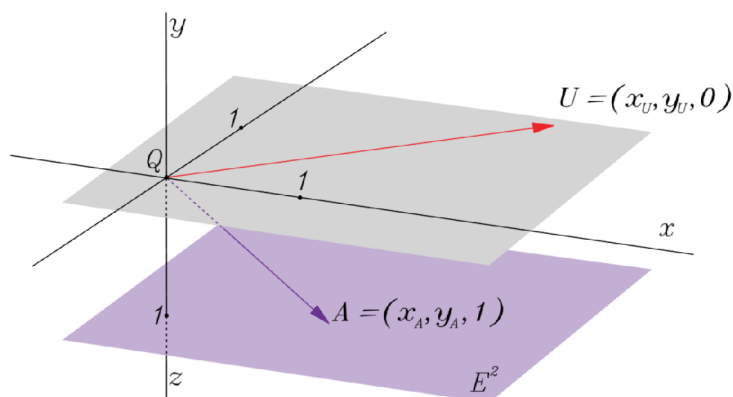
Homogenní souřadnice vlastního bodu  $A \in {}_\infty E^2$ :

$$A = (x_A, y_A, 1)$$

Homogenní souřadnice nevlastního bodu  $U \in {}_\infty E^2$ :

$$U = (x_U, y_U, 0)$$





Obrázek 1.3: Znázornění zavedení nevlastních bodů. Převzato z: [5]

### Souřadnice ${}_{\infty}E^3$

Pro trojrozměrný prostor si zavedeme souřadnice obdobně. Prostor  $E^3$  položíme do čtyřrozměrného prostoru  $E^4$ . Stejně se určí i přidaná čtvrtá souřadnice jako 0, nebo 1.

Homogenní souřadnice vlastního bodu  $A \in {}_{\infty}E^3$ :

$$A = (x_A, y_A, z_A, 1)$$

Homogenní souřadnice nevlastního bodu  $U \in {}_{\infty}E^3$ :

$$U = (x_U, y_U, z_U, 0)$$

### Poznámka 5.

- Na obrázku 1.3 je ukázáno, jak se zavede nevlastní souřadnice pro Euklidovskou rovinu.
- Můžeme si všimnout, že se jedná o nahrazení bodu vektorem, který buď rovinu  $E^2$  protíná, je tedy vlastním bodem, nebo neprotíná, a je bodem nevlastním.
- Je potřeba zdůraznit, že souřadnice  $x_A, y_A, z_A$  bodu  $A$  jsou tytéž souřadnice, kterými bychom tento bod popsali v Euklidovském prostoru.

## Kapitola 2

# Matematický základ k aproximaci

### 2.1 Křivky a funkce

V této části se budeme zabývat popisem trajektorie, po které se daný předmět pohybuje, tu popíšeme křivkou. Křivku v  $E^3$  si představujeme jako jednorozměrný souvislý útvar. Dále budeme pracovat hlavně s polynomy, proto je potřeba upřesnit definici. Čerpáno z [2], [7], [10] a [11].

#### 2.1.1 Funkce reálné proměnné

Funkce reálné proměnné je zobrazení  $f$  takové, že  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Množinu  $D(f) : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tak, že } y = f(x)\}$  nazveme definiční obor.

Množinu  $H(f) : H(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tak, že } y = f(x)\}$  nazýváme obor hodnot.

##### Definice 14. Okolí bodu

Nechť  $X$  je bod ležící v rovině  $E^2$  (resp. prostoru  $E^3$ ) a  $\epsilon$  je libovolně malé kladné číslo. Pak okolím bodu v rovině rozumíme množinu (otevřený kruh)

$$O_\epsilon^2(X) = \{P \in E^2 : |PX| < \epsilon\},$$

a okolím bodu v prostoru rozumíme množinu (otevřená koule)

$$O_\epsilon^3(X) = \{P \in E^3 : |PX| < \epsilon\}.$$

##### Poznámka 6.

Ryzí okolí bodu je  $O(X)$  s vyloučením daného bodu  $X$ . Značíme ho  $\overline{O}(x)$ .

##### Definice 15. Limita funkce

Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  limitu  $a \in \mathbb{R}^*$  a píšeme  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  jestliže ke každému okolí  $O(a)$  existuje ryzí okolí  $\overline{O}(x_0)$  takové, že  $\forall x \in \overline{O}(x_0)$  je  $f(x) \in O(a)$ .

##### Definice 16. Spojitost funkce

Nechť  $f(x)$  je funkce procházející bodem  $x_0$  a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Pak je tato funkce *spojitá* v bodě  $x_0$ .

**Definice 17. Derivace**

Nechť  $f$  je funkce a  $x_0 \in \mathbb{R}$  bod. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme ji *derivace* funkce  $f$  v bodě  $x_0$  označíme ji  $f'(x_0)$ . Neexistuje-li tato limita, řekneme, že funkce  $f$  nemá derivaci v bodě  $x_0$ . [11]

**2.1.2 Křivky****Definice 18. Graf funkce**

Nechť množina  $G = \{[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\}$ , kde  $[x, y]$  značí kartézské souřadnice v rovině. Pak množinu  $G$  nazveme *grafem funkce*.

**Definice 19. Křivka**

Nechť  $I$  je interval  $I \subset \mathbb{R}$ . Křivku definujme jako zobrazení  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Budeme se nyní zabývat rovinnými a prostorovými křivkami. Vyšší dimenze, tedy pro  $n > 3$ , pro nás už nejsou příliš užitečné. V rovině  $\mathbb{R}^2$  si ukážeme princip parametrizace křivky dané grafem funkce. Předepíšeme si křivku jako množina bodů:

$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}.$$

Pro parametrické vyjádření křivky platí, že každá souřadnice této křivky je předepsána funkcí jedné reálné proměnné. Tuto proměnnou nazýváme parametr (zde je to  $t$ ).

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t), \quad t \in I. \end{aligned}$$

Obecná rovnice je úprava parametrické rovnice vyloučením parametru

$$f(x, y) = 0.$$

My budeme používat hlavně graf funkce, jako popis křivky

$$y = f(x).$$

Pro prostorové křivky (tedy v  $\mathbb{R}^3$ ) se parametrická rovnice rozšíří o další souřadnici  $z = \zeta(t)$ . Na obrázku 2.1 je vykreslen příklad rovinné a prostorové křivky.

**Poznámka 7. Parametrické rovnice**

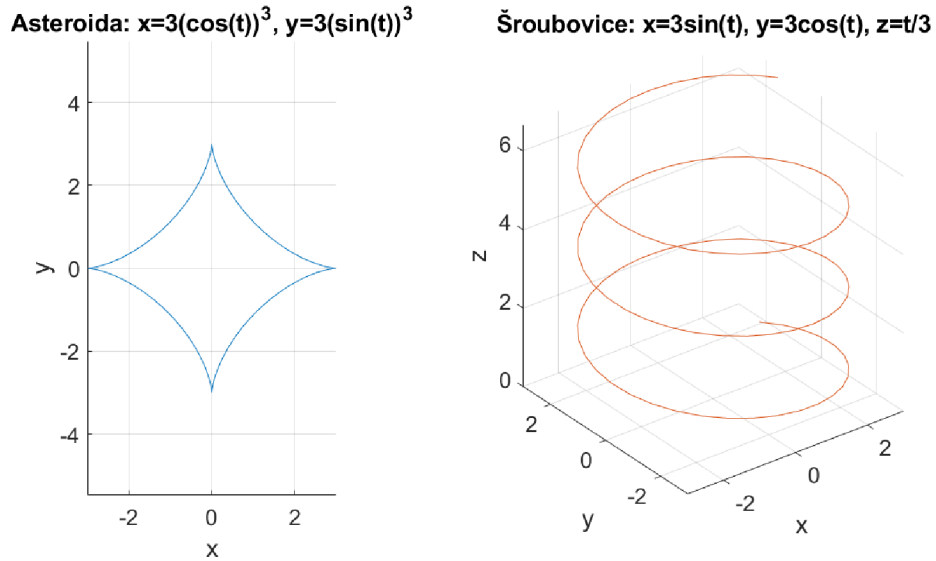
Dále si trochu rozebereme parametrickou rovnici křivky. Pro názornost předpokládejme, že křivka je trajektorie bodu. Parametrických rovnic, kterými ji mohou popsat, je nekonečně mnoho. Ukažme si to na příkladu funkce  $y = \sin(x)$ , interval je zvolen pro co nejlepší názornost.

Funkce je zapsaná takto:

$$y = \sin(x), \text{ na intervalu } \langle 0, 6\pi \rangle.$$

Nejjednodušší zápis parametrické rovnice je následující

$$x = t, \quad y = \sin(t), \quad t \in \langle 0, 6\pi \rangle.$$



Obrázek 2.1: Křivka rovinná a prostorová

Dále uvažujme derivaci v bodě křivky jako rychlost, kterou daný bod trajektorií prochází. Pro zadaný příklad to bude

$$x = 1, \quad y = \cos(t),$$

graf bude mít stejný tvar, ale bude posunutý.

Vyzkoušejme jinou parametrizaci:

$$x = 2t, \quad y = \sin(2t), \quad t \in \langle 0, 3\pi \rangle.$$

Její derivace bude

$$x = 2, \quad y = 2 \cdot \cos(2t),$$

graf tedy bude mít stejnou periodu, ale krom posunutí už bude mít i rozdílnou amplitudu.

Třetí parametrizaci zvolme

$$x = t^3, \quad y = \sin(t^3), \quad t \in \langle 0, \sqrt[3]{6\pi} \rangle.$$

Její derivace bude

$$x = 3t^2, \quad y = 3t^2 \cdot \cos(t^3).$$

Na grafu uvidíme zvětšující se kmity způsobené tím, že parametrem je mocnina.

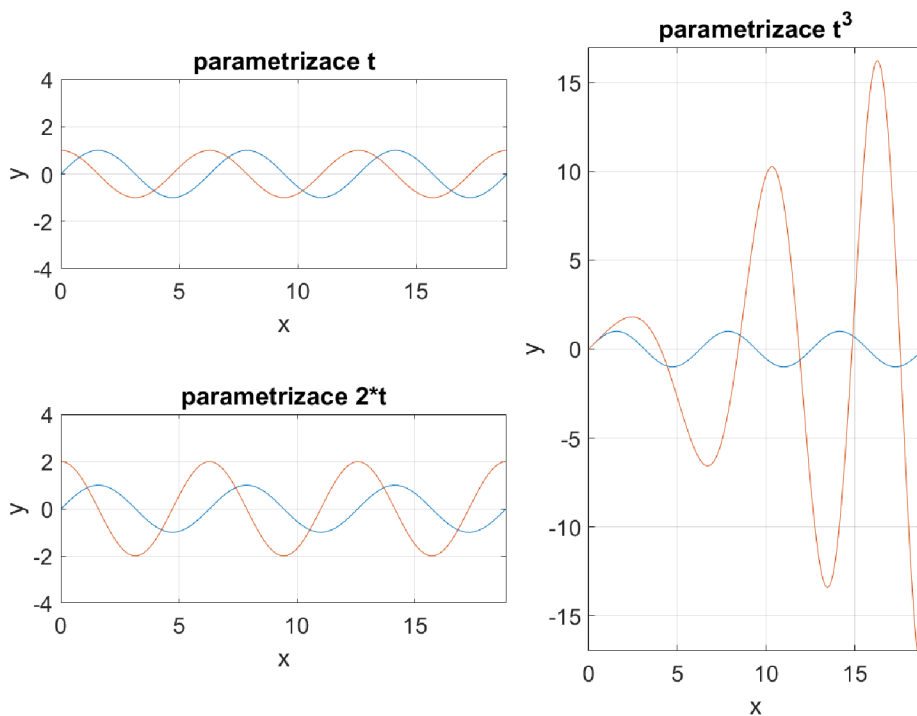
Na obrázku 2.2 si hlavně všimněme, že množina bodů je stále stejná, tedy můžeme říct, že popis křivky nezávisí na zvoleném parametru.

### Definice 20. Racionální funkce - polynom

Nechť  $n \in \mathbb{N}_0$  a  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ . Pak *polynom (celistvá racionální funkce)* je funkce tvaru  $P(n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ . *Stupeň polynomu* je číslo  $n$  a čísla  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  nazýváme *koefficienty polynomu*.

### Definice 21. Kořen

Číslo  $\alpha \in \mathbb{C}$  se nazývá *kořen (nulový bod)* polynomu  $P$ , jestliže platí  $P(\alpha) = 0$ . Je-li  $\alpha$  kořenem  $P$ , pak lineární polynom  $x - \alpha$  se nazývá *kořenový faktor (činitel)* polynomu  $P$ .



Obrázek 2.2: Různé parametrizace, modrá křivka značí zadanou funkci, oranžová její derivaci.

### Poznámky

- Každý polynom stupně  $n \geq 1$  s komplexními koeficienty má kořen v  $\mathbb{C}$ .
- Polynom s reálnými koeficienty se nazývá *reálný polynom*, polynom s komplexními koeficienty se nazývá *komplexní polynom*.
- Pro naši aplikaci si vystačíme pouze s reálnými koeficienty a kořeny.

## 2.2 Řešení soustav lineárních rovnic

V této kapitole zmíníme problém řešení soustav lineárních rovnic. Existuje mnoho způsobů, tak je řešit, ale pro pozdější užití nám bude stačit pouze Gausova eliminační metoda. Tato část je čerpána z [15].

Metody pro řešení soustav lineárních matic se dělí na přímé a iterační. *Přímé metody* jsou ty, které po konečném počtu kroků dodají výsledek, který je (pokud zanedbáme zaokrouhlovací chyby) přesný. *Iterační metody* vypočítají pouze přibližné řešení s požadovanou přesností, na které závisí počet kroků metody. Iteračními metodami se dále nebudeme příliš zabývat, protože v přímých metodách najdeme dostatečně přesnou i výpočtově nenáročnou metodu.

Soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

můžeme zapisovat taky maticově

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

$\mathbf{A}$  je zde matice soustavy,  $\mathbf{b}$  bude vektor pravých stran a  $\mathbf{x}$  vektor neznámých. Zaměříme se na řešení Gaussovou eliminační metodou, protože je jednoduchá a velmi účinná pro třídiagonální matice, kterými se později budeme zabývat.

### 2.2.1 Gaussova eliminační metoda

Mějme soustavu lineárních rovnic  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Gaussova eliminační metoda (dále jen GEM) má dvě části, *přímý chod* a *zpětný chod*. Přímý chod převede soustavu na  $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ , kde  $\mathbf{U}$  je matice, která je horní trojúhelníková (pod diagonálou má pouze nulové prvky).

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Ve zpětném chodu se z poslední rovnice vypočte  $x_n$ , z předposlední  $x_{n-1}$ , a tak dále.

V přímém chodu se v  $k$ -tém kroku soustava transformuje tak, že prvních  $k$  rovnic se nemění, ale cílem je vynulovat poddiagonální prvky v  $k$ -tém sloupci. To se řeší tak, že odečteme  $m_{ik}$  násobek rovnice na  $k$ -tém řádku od všech  $i$ -tých rovnic, pro  $i > k$ .  $m_{ik}$  nazýváme multiplikátory a tvoříme je takto:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},$$

kde  $k$  značí krok v transformaci matice. V případě  $a_{kk}^{(k)} = 0$  nelze spočítat multiplikátor, ale to se dá jednoduše vyřešit prohozením za jiný řádek, který má  $k$ -tý prvek nenulový.

Obecně se tento algoritmus nepoužívá z důvodu několika nevýhod. Má poměrně vysokou výpočtovou náročnost a pro řídké matice nastává problém, že zaplňuje spoustu míst, kde se nacházely nulové prvky. Pro špatně podmíněné matice také vznikají velké chyby z důvodu zaokrouhlovacích nepřesností.

### 2.2.2 Gaussova eliminační metoda pro pásové matice

Pásová matice je speciálním případem řídké matice (matice s výrazně větším počtem nulových prvků, než těch nenulových). Má nenulové prvky pouze v pásu okolo diagonály, tedy pro nezáporná celá  $p, q$ :

$$a_{ij} = 0, \text{ pro } i > j + p, \text{ nebo } j > i + p.$$

Číslo  $w = p + q + 1$  se nazývá *šířka pásu matice* a  $s = \max(p, q)$  je *poloviční šířka pásu*. Pro takové matice jde zefektivnit výpočet pomocí Gaussovy eliminační metody, protože nenulové prvky mohou během ní vznikat pouze v tomto pásu.

### GEM pro třídiagonální matici

Soustava, která má  $s = 1$  se nazývá *třídiagonální*, protože má nenulové prvky na diagonále, první naddiagonále a první poddiagonále. Toto značně zjednoduší výpočet pomocí GEM. Pro tuto soustavu:

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

počítáme pouze v přímém chodu:

$$b_i := \frac{b_i}{a_i}, \quad a_{i+1} := a_{i+1} - b_i c_i, \quad d_{i+1} := d_{i+1} - b_i d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

a ve zpětném:

$$x_n := \frac{d_n}{a_n}, \quad x_i := \frac{d_i - c_i x_{i+1}}{a_i}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

## Kapitola 3

# Aproximace funkcí

Hlavním cílem práce je najít křivku, po které se těleso pohybuje. Její předpis neznáme, ale známe pouze body, ve kterých se na své trajektorii nachází. K proložení těchto bodů křivkou se využívá aproximace. Nenajdeme sice přesný předpis originální křivky, ale dostatečně se k ní přiblížíme. Definice a další informace v této kapitole jsou převzaty z [3], [12], [14] a [15].

Dvě základní metody používané k aproximaci jsou *metoda nejmenších čtverců* a *interpolace*.

### 3.1 Metoda nejmenších čtverců

Při této aproximaci hledáme funkci, jejíž vzdálenost je minimální od zadaných bodů. Zpravidla daná funkce zadanými body neprochází. Pro nás tedy není užitečná, protože víme, že v zadaných bodech se objekt nachází přesně, zmíníme si metodu nejmenších čtverců jen okrajově.

Jedná se o případy, kdy je zadání nepřesné a hledáme pouze přibližnou křivku. Postup je založený na minimalizaci kvadrátů reziduí. Jako  $t$  označíme nezávislou proměnnou, může to značit například čas.  $n$  bude počet pozorování, tedy počet naměřených, navzájem různých hodnot

$$y_i \approx y(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Cílem je vymodelovat  $y(t)$  jako lineární kombinaci  $n$  *bázových funkcí*

$$y(t) \approx x_1\varphi_1(t) + x_2\varphi_2(t) + \dots + x_n\varphi_n(t) = R_n$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou parametry, které chceme určit tak, aby

$$y_i \approx R_n(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

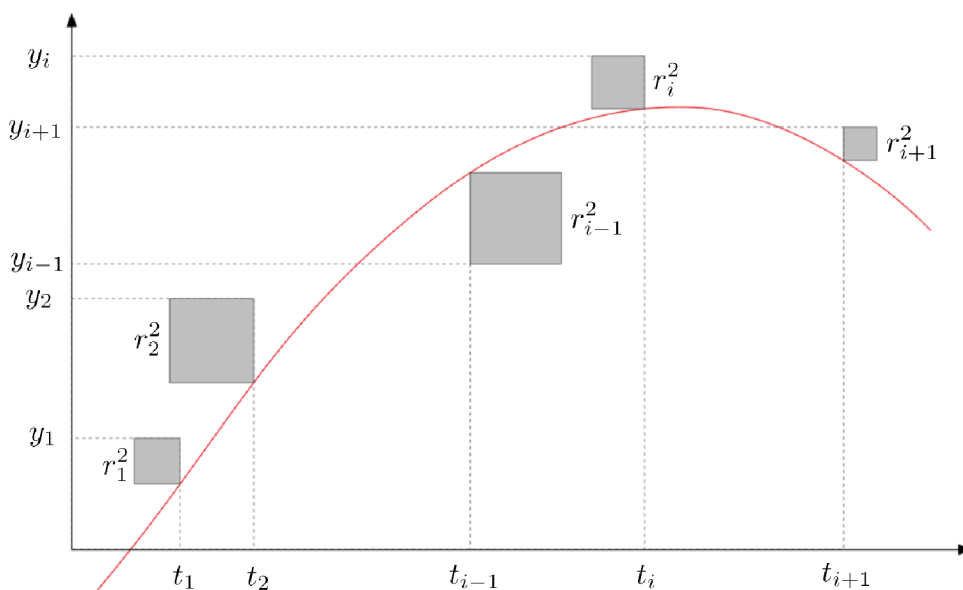
Rozdíly mezi pozorovanými hodnotami  $y_i$  a modelovanými  $R_n(t_i)$  nazveme *rezidua*

$$r_i = y_i - R_n(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Rezidua jsou znázorněna na obrázku 3.1. Maticově tedy můžeme zapsat:

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{Ax}$$





Obrázek 3.1: Metoda nejmenších čtverců - rezidua

kde  $x_i$  jsou parametry, které chceme určit tak, aby rezidua byla minimální. Tedy metodou nejmenších čtverců dostaneme minimalizaci součtu kvadrátů reziduí:

$$\|\mathbf{r}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m r_i^2 \rightarrow \min.$$

## 3.2 Interpolace

Dále se budeme zabývat interpolací. Tento druh aproximace vyžaduje, aby funkční hodnoty hledané funkce procházely přímo zadanými body, tedy je pro naše potřeby vhodný.

Hlavní požadavky na hledanou funkci jsou, aby byl její výpočet jednoduchý a často také aby byla snadno derivovatelná (pro zajištění hladkosti křivky), proto se často hledá ve tvaru polynomu.

### 3.2.1 Interpolace polynomem

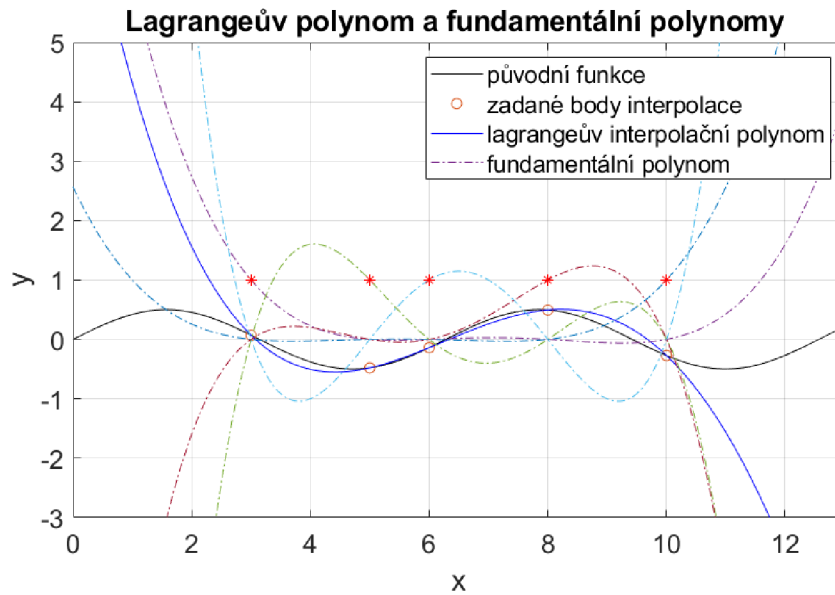
Předpokládejme, že máme zadané navzájem různé body  $x_0, x_1, \dots, x_n$  a jejich hodnoty  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Tyto body se nazývají uzly a hledaný polynom

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

#### Lagrangeův interpolační polynom

Jedná se o lineární kombinaci takzvaných *fundamentálních polynomů*, pro které platí:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$



Obrázek 3.2: Fundamentální polynomy Lagrangeova interpolačního polynomu (čerchované). Zdrojový kód je v příloze C

Protože hledáme polynomy s kořeny v bodech  $x_0, x_1, \dots, x_n$  vyjma bodu  $x_i$ , kde  $i = 0, \dots, n$ , můžeme je zapsat ve tvaru

$$l_i = C_i(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(x - x_n)$$

a pro podmínku  $l_i(x_i) = 1$  platí, že

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n)}$$

Tedy předpis fundamentálních polynomů je následující:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Základní tvar Lagrangeova interpolačního polynomu je tedy následující

$$P_n(n) = y_0l_0(x) + y_1l_1(x) + \dots + y_nl_n(x) = \sum_{i=1}^n y_il_i(x).$$

Výhodou tohoto zápisu je elegantní forma. Na druhou stranu nevýhodou je nutnost přepočítat všechny fundamentální polynomy pro každý přidaný uzel. Další nevýhoda je velká výpočtová náročnost. Vzorce a formulace jsou převzaty z [3].

Na obrázku 3.2 můžeme vidět funkci  $\frac{\sin(x)}{2}$  (černě), interpolaci Lagrangeovým polynomem (modře) a fundamentální polynomy použité ke konstrukci Lagrangeova interpolačního polynomu (čerchované). Za povšimnutí stojí body označené \*, protože fundamentální polynom  $l_i$  má hodnotu 1 v bodě  $x_i$  a v ostatních uzlech 0.

**Jednoznačnost** Uvažujme polynom  $P_n(n) = y_0l_0(x) + y_1l_1(x) + \dots + y_nl_n(x)$ , který řeší úlohu Lagrangeovy interpolace. Dokažme, že tento polynom stupně  $n$  je právě jeden. Necht existují  $L_n$  a  $\bar{L}_n$ , které jsou dvě různé řešení úlohy. Definujme polynom

$$p(x) = L_n(x) - \bar{L}_n(x).$$

Protože jsou polynomy  $L_n$  a  $\bar{L}_n$  různé, pak polynom  $p(x)$  bude nenulový a stupně nejvýše  $n$  a splňuje podmínku, že  $p(x) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , tedy má  $n + 1$  nenulových kořenů. To ale nelze pro polynom stupně nejvýše  $n$ , tedy vzniká spor.[13]

□

## Newtonův interpolační polynom

Lagrangeův interpolační polynom není dobrý pro praktické využití, protože pro přidání dalšího uzlu je potřeba přepočítat všechny fundamentální polynomy. Tento problém řeší Newtonův interpolační polynom. Definice jsou převzaty z [3].

### Definice 22. Poměrná diference

Nechť  $(x_i, y_i)$  jsou body, na kterých interpolační polynom definujeme. Pak

$$D[x_i] = y_i$$

$$D[x_{i-1}, x_i] = (D[x_i] - D[x_{i-1}]) / (x_i - x_{i-1})$$

$$D[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i] = (D[x_{i-1}, x_i] - D[x_{i-2}, x_{i-1}]) / (x_i - x_{i-2}),$$

...

$$D[x_{i-k}, x_{i-k+1}, \dots, x_{i-1}, x_i] = (D[x_{i-k+1}, \dots, x_i] - D[x_{i-k}, \dots, x_{i-1}]) / (x_i - x_{i-k}),$$

nazveme *poměrné diference*. Označíme  $a_i = D[x_0, x_1, \dots, x_i]$  Celý Newtonův interpolační polynom má tedy tento předpis:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Můžeme zde vidět, že k přidání jednoho uzlu stačí přičíst k původnímu polynomu tento člen

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + a_{n+1}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Lagrangeův ani Newtonův tvar interpolačního polynomu se pro naše potřeby nehodí (shrnutí daného problému je v kapitole 3.3), ale jsou velmi výhodné pro aplikace, kdy potřebují získat jednu funkční hodnotu, která neleží v uzlu. Pak se využívá těchto postupů, protože jsou velmi jednoduché na programování.

## Hermitova interpolace

Rozdíl mezi předchozími metodami a Hermitovou interpolací je v tom, že kromě funkčních hodnot v zadaných uzlech, je také zadaná i hodnota derivace určitého řádu. Předpokládejme, že derivace jsou zadané postupně, tedy ne třeba funkční hodnota a třetí derivace, ale pokud je zadaná třetí derivace, pak i druhá a první. Tedy máme  $x_i$  uzlů a v každém je zadáno  $\alpha_i + 1$  hodnot  $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(\alpha_i)}$  ( $\alpha_i$  značí stupeň nejvyšší derivace). Hermitův interpolační polynom  $P_\alpha(x)$ , který splňuje podmínky

$$\frac{d^j}{dx^j} H_\alpha(x_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

nazveme polynomem stupně nejvýše  $\alpha$ .  $\alpha$  se určí jako součet všech podmínek  $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(\alpha)}$  pro  $i = 0, 1, \dots, n$ . Pro jednoduchost si uvedeme konstrukci Hermitova interpolačního polynomu pro případ, že máme zadané funkční hodnoty  $y_0, y_1, \dots, y_n$  a pouze první derivace  $y'_0, y'_1, \dots, y'_n$ , tedy tvoříme polynom takový, aby

$$H(x_i) = y_i, \quad H'(x_i) = y'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Máme  $2n + 2$  podmínek a proto hledáme polynom stupně nejvýše  $2n + 1$  a to ve tvaru

$$H_{2n+1} = \sum_{i=0}^n y_i h_i(x) + \sum_{i=0}^n y'_i \hat{h}_i(x).$$

Polynomy  $h_i(x)$  a  $\hat{h}_i(x)$  jsou stupně nejvýše  $2n + 1$ . Stejně jako u Lagrangeova polynomu sestrojíme fundamentální polynomy

$$h_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad h'_i(x_j) = 0; \quad \hat{h}_i(x_j) = 0, \quad \hat{h}'_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Předepsané podmínky značí, že polynom  $h_i(x)$  má  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$  kořenů a všechny jsou dvojnásobné. Polynom stupně  $2n + 1$  má tento tvar

$$h_i = (A_i x - B_i)(x - x_0)^2 \dots (x - x_{i-1})^2 (x - x_{k+1})^2 \dots (x - x_n)^2$$

a lze zapsat i takto

$$h_i = (a_i x - b_i) \frac{(x - x_0)^2 \dots (x - x_{i-1})^2 (x - x_{k+1})^2 \dots (x - x_n)^2}{(x_i - x_0)^2 \dots (x_i - x_{i-1})^2 (x_i - x_{k+1})^2 \dots (x_i - x_n)^2} = (a_i x - b_i) l_i^2(x),$$

kde  $l_i$  jsou fundamentální polynomy z konstrukce Lagrangeova interpolačního polynomu. Zbývá nám určit koeficienty  $a_i, b_i$ . K tomu využijeme podmínky  $h_i = 1, h'_i = 0$ , tedy

$$a_i = -2l'_i(x_i), \quad b_i = 1 + 2x_i l'_i(x_i)$$

Celý polynom má tedy tvar

$$h_i(x) = (-2l'_i(x_i)x + 1 + 2x_i l'_i(x_i)) l_i^2(x).$$

$\hat{h}_i(x)$  se sestrojí podobně. Předpokládaný tvar je

$$\hat{h}_i = C_i (x - x_0)^2 \dots (x - x_{i-1})^2 (x - x_{k+1})^2 \dots (x - x_n)^2$$

a opět ho můžeme zapsat takto

$$\hat{h}_i(x) = c_i (x - x_i) l_i^2(x).$$

Konstanta  $c_i = 1$ , to je určeno z podmínky  $\hat{h}_i(x_i) = 1$  a tak polynom vypadá takto

$$\hat{h}_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x).$$

Hermitův interpolační polynom tedy můžeme zapsat v tomto tvaru

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n y_i (-2l'_i(x_i)x + 1 + 2x_i l'_i(x_i)) l_i^2(x) + \sum_{i=0}^n y'_i (x - x_i) l_i^2(x).$$

[3]

**Jednoznačnost** Potřebujeme dokázat, že polynom

$$H_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

je právě jeden, který řeší úlohu Hermitovy interpolace, tedy splňuje tyto podmínky:

$$H_m^{(j)}(x_i) = \left( \sum_{k=0}^m a_k (x_i^k) \right)^{(j)} = y_i^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Neznámé hodnoty jsou zde  $a_k$  a matice má prvky  $(x_i^k)^{(j)}$ , které jsou známá čísla. Když determinant této soustavy je rovný nule, pak by existovalo netriviální řešení soustavy. Tím by byl polynom  $H^{(j)}(x_i) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , který je stupně nejvýše  $m$  a má  $n + 1$  různých kořenů  $x_0, x_1, \dots, x_n$  a každý z nich má násobnost  $\alpha_i$ . Dohromady má tedy polynom

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i = m + 1$$

kořenů, což je spor s tím, že polynom je stupně nejvýše  $m$ .

Pro determinant soustavy nenulový existuje právě jedno řešení, a tím je Hermitův interpolační polynom stupně  $m$ . [13]

□

### Chyba interpolace

Chybu v bodě  $\bar{x}$  označíme jako  $E_n(\bar{x}) := f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$ . Jedná se o rozdíl hodnoty původní funkce a polynomu, který proložíme určitými body. Je zřejmé, že chyba v uzlech  $E_n(x_i) = 0$ . Pro chybu mimo uzly u Lagrangeova a Newtonova polynomu platí:

$$E_n(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n)$$

kde  $\xi$  je bod z intervalu, na kterém aproximujeme. Odhad chyby

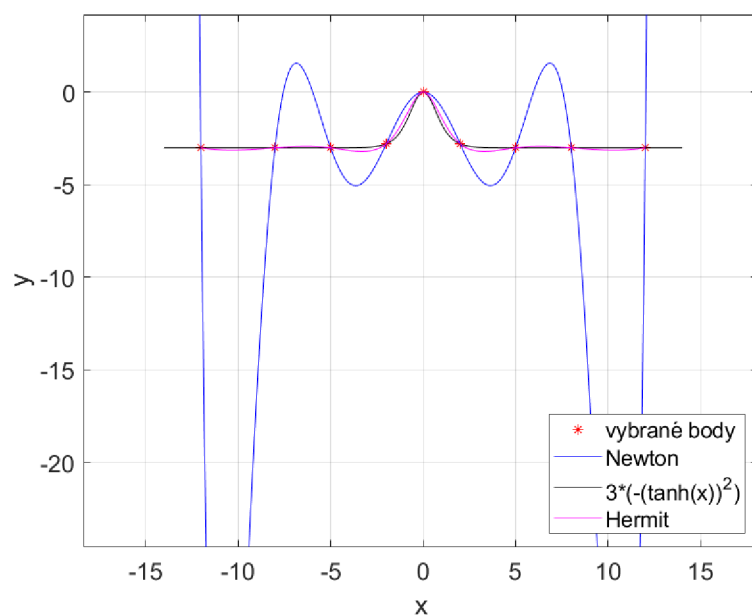
$$|E_n(\bar{x})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in \langle a, b \rangle} |\omega_{n+1}(x)|,$$

kde  $M_{n+1}$  je konstanta taková, že  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$  bývá přehnaný. Skutečná chyba je obvykle menší.

Vezmeme případ Hermitova interpolačního polynomu. Polynom  $H_\alpha(x)$  je aproximací funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Pak pro chybu Hermitovy interpolace platí

$$f(\bar{x}) - H_\alpha(\bar{x}) = \frac{f^{(\alpha+1)}(\xi)}{(\alpha+1)!} (\bar{x} - x_0)^{\alpha_0+1} (\bar{x} - x_1)^{\alpha_1+1} \dots (\bar{x} - x_n)^{\alpha_n+1}.$$

Je zřejmé, že když nemáme zadanou původní funkci, pak nemůžeme chybu určit. Její odhad se hodí pro případy, kdy se prokládá funkcí polynom pro její snazší integraci apod. [15] Na obrázku 3.3 je vykreslena pozvolná funkce a její interpolace pomocí Newtonova interpolačního polynomu a Hermitových interpolačních splajnů (definované v následující části). Je zde názorně vidět jak se zvyšujícím počtem uzlových bodů roste chyba.



Obrázek 3.3: Graf funkce  $3(-(\tanh(x))^2)$ , na ní vybrané body a jejich interpolace.

### 3.2.2 Interpolační splajny

Můžeme vidět, že na dlouhém intervalu  $\langle a, b \rangle$ , s velkým počtem uzlů je vytvořen polynom vysokého stupně, tady u pozvolných funkcí je chyba mezi uzly relativně velká. Proto se interval  $\langle a, b \rangle$  rozdělí na menší intervaly a na každém se tvoří interpolační polynom. Necht

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

je dělení intervalu a  $x_i$  jsou uzly s předepsanými hodnotami  $y_i$ . Označme  $i$ -tou délku intervalu

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Interpolační splajn  $S(x)$  bude po částech polynom předepsaného stupně a  $S_i(x)$  jednotlivé polynomy na intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$

Zavedeme lokální proměnnou

$$s = x - x_{i-1}$$

a první poměrnou diferencí

$$\delta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}.$$

#### Lineární interpolační splajn

Jedná se o jednoduché spojení vedlejších bodů úsečkou, tedy:

$$S_i = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) = y_{i-1} + s\delta_i$$

Dostaneme pak spojitý interpolační splajn  $S_i$  procházející všemi body, ovšem první derivace již obecně spojitě nejsou. Pro chybu v bodě  $x$  platí:

$$|f(x) - S(x)| \leq Ch^2,$$

pro  $x$  z intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,  $C$  je konstanta, která není závislá na  $h$ . Při dostatečném množství uzlů je chyba libovolně malá (pro  $h$  jdoucí k nule).

Když uzlů nemáme dostatek, můžeme použít polynomy stupně vyššího než 1, které nám pomohou aproximovat křivku tak, aby byla hladká (křivka je hladká, pokud má spojitě 1. derivace). Těmi se budeme zabývat v dalších kapitolách. Informace jsou čerpány z [15].

### Hermitův kubický interpolační splajn

Funkce  $S(x)$  je na intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitá, i její první derivace je spojitá. Tedy v uzlech platí pro  $y_i$  funkční hodnoty a  $\delta_i$  derivace:

$$S(x_i) = y_i, \quad S'(x_i) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Je zajímavé si exaktně odvodit polynom třetího stupně, kde není třeba použít řešení pomocí soustavy lineárních rovnic. Na každém intervalu definujeme polynom v tomto tvaru

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Zaměříme se na jeden určitý úsek s krajními body například  $x_1, x_2$ . Pro tento úsek platí podmínky

$$\begin{aligned} S(x_1) &= y_1, & S'(x_1) &= d_1 \\ S(x_2) &= y_2, & S'(x_2) &= d_2. \end{aligned}$$

Tyto podmínky dosadíme do rovnice polynomu a i její derivace  $S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$  a dostaneme čtyři rovnice

$$\begin{aligned} S(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1, \\ S'(x_1) &= a_1 + 2a_2x_1 + 3a_3x_1^2 = d_1, \\ S(x_2) &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2, \\ S'(x_2) &= a_1 + 2a_2x_2 + 3a_3x_2^2 = d_2. \end{aligned}$$

Vznikly čtyři rovnice o neznámých  $a_0, a_1, a_2, a_3$ . Pokud ale provedeme rozvoj polynomu kolem jiného bodu než nuly, například  $x_1$  dostaneme

$$S(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)^2 + a_3(x - x_1)^3$$

a derivaci  $S'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_1) + 3a_3(x - x_1)^2$ . Po dosazení hodnoty  $x_1$  dostaneme rovnice

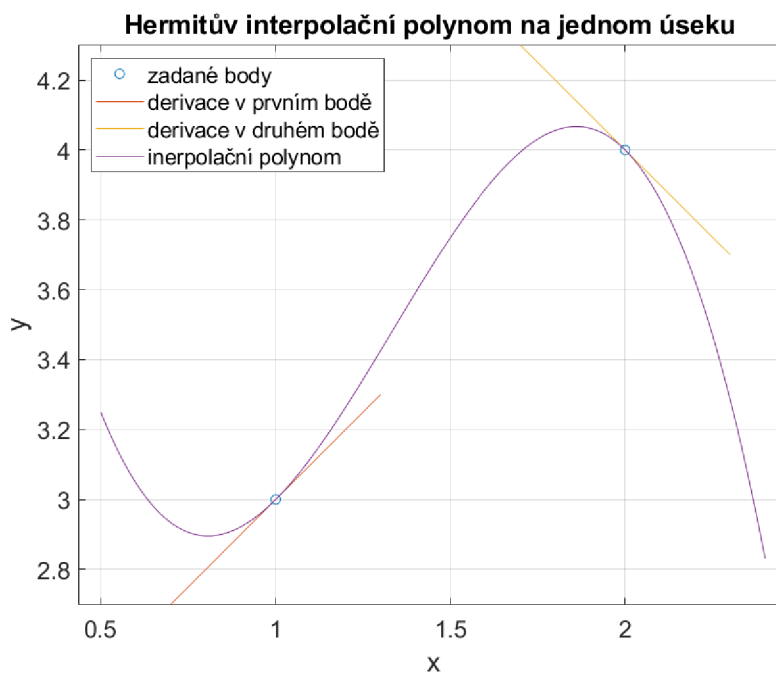
$$\begin{aligned} S(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_1) + a_2(x_1 - x_1)^2 + a_3(x_1 - x_1)^3 = y_1, \\ S'(x_1) &= a_1 + 2a_2(x_1 - x_1) + 3a_3(x_1 - x_1)^2 = d_1. \end{aligned}$$

Vidíme, že veškeré závorky se vynulovaly a zbyly nám rovnosti

$$a_0 = y_1, \quad a_1 = d_1.$$

Dosadíme i  $x_2$  a získáme dvě rovnice o dvou neznámých  $a_2, a_3$

$$\begin{aligned} S(x_2) &= y_1 + d_1(x_2 - x_1) + a_2(x_2 - x_1)^2 + a_3(x_2 - x_1)^3 = y_2, \\ S'(x_2) &= d_1 + 2a_2(x_2 - x_1) + 3a_3(x_2 - x_1)^2 = d_2, \end{aligned}$$



Obrázek 3.4: Příklad polynomu s krajními body  $[1,3]$  (derivace je zde 1) a  $[2,4]$  (derivace je zde -1). Výsledný polynom má předpis  $S = -2(x-1)^3 + 2(x-1)^2 + 1(x-1) + 3$ .

což nám zjednoduší výpočet. Výsledkem bude

$$a_2 = \frac{3 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - 2d_1 - d_2}{x_2 - x_1}, \quad a_3 = \frac{d_1 - 2 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + d_2}{(x_2 - x_1)^2}.$$

Na začátku kapitoly jsme definovali nahrazení  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\delta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$  a lokální proměnnou  $s = x - x_{i-1}$ . Se všemi těmito poznatky popíšeme celý polynom předpisem

$$S_i = y_{i-1} + s d_{i-1} + s^2 \frac{3\delta_i - 2d_{i-1} - d_i}{h_i} + s^3 \frac{d_{i-1} - 2\delta_i + d_i}{h_i^2}.$$

Konkrétní příklad je na obrázku 3.4.

### Poznámka 8.

- Máme zaručenou spojitou první derivaci, ale druhou už ne. Pro chybu v bodě  $x$  platí:

$$|f(x) - S(x)| \leq Ch^4,$$

kde  $C, h$  jsou stejné jako u lineárního splajnu.

- Pokud nejsou zadané derivace, je potřeba je vypočítat z vhodných dodatečných podmínek.



## Kubický interpolační splajn

Hermitův interpolační splajn obecně nemá spojitou druhou derivaci. V aproximaci kinematických křivek je ale nutné, aby druhá derivace byla spojitá, protože zde značí zrychlení. Toho docílíme použitím Kubického interpolačního splajnu.

V uzlových bodech tady požadujeme podmínku:

$$S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Pomocí předpisu Hermitova interpolačního polynomu, který zderivujeme, získáme rovnici

$$S_i''(x_i) = \frac{(6h_i - 12s)\delta_i + (6s - 4h_i)d_{i-1} + (6s - 2h_i)d_i}{h_i^2}.$$

Předepíšeme pro  $x = x_i$  a dosazením  $s = h_i$  dostaneme

$$S_i''(x_i) = \frac{-6\delta_i + 2d_{i-1} - 4d_i}{h_i}$$

A pro  $x = x_{i-1}$  a dosazením  $s = 0$  dostaneme

$$S_i''(x_i) = \frac{6\delta_i - 4d_{i+1} - 2d_i}{h_i}$$

a zvýšením indexu o jedna

$$S_{i+1}''(x_i) = \frac{6\delta_{i+1} - 4d_i - 2d_{i+1}}{h_{i+1}}.$$

Tedy po dosazení do první rovnice

$$h_{i+1}d_{i-1} + 2(h_{i+1} + h_i)d_i + h_id_{i+1} = 3(h_{i+1}\delta_i + h_i\delta_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Pro celý polynom potřebujeme ještě okrajové podmínky

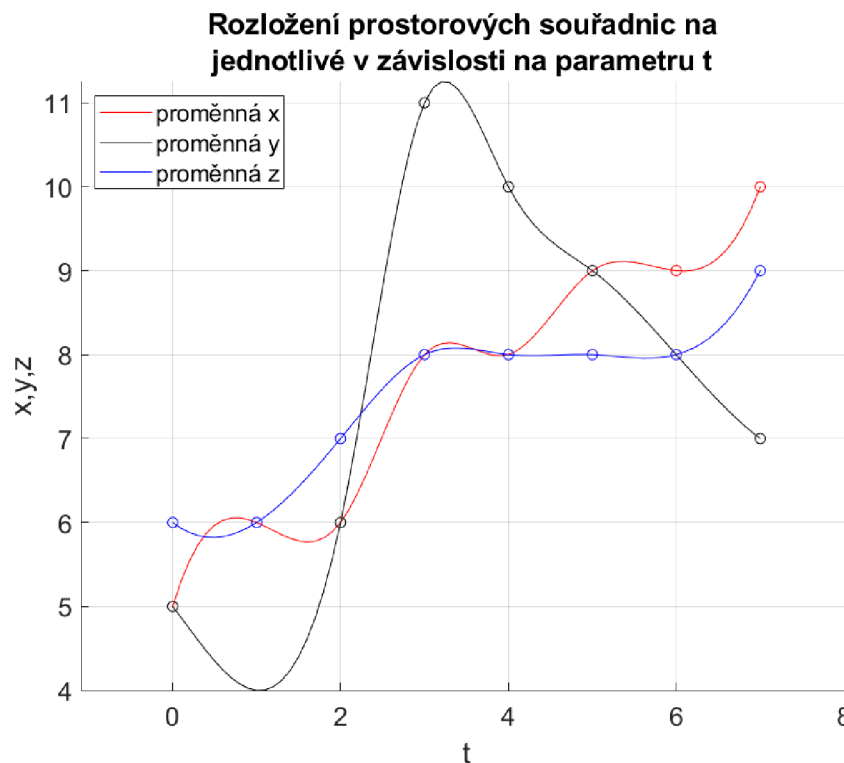
$$S'(a) = d_a, \quad S'(b) = d_b$$

V případě, že je nemáme, používáme postup zvaný *not a knot*. Princip je založený na tom, že všechny splajny chceme jako polynomy třetího stupně, proto uzly  $x_1$  a  $x_{n-1}$  nepovažujeme za uzly, tedy nemění se zde předpis polynomu. To znamená, že okrajové podmínky budou vypadat takto:

$$S_1'''(x_1) = S_2'''(x_1), \quad S_{n-1}'''(x_{n-1}) = S_n'''(x_{n-1}).$$

Tím získáme zbývající rovnice

$$h_2d_0 + (h_2 + h_1)d_1 = \frac{(3h_1 + 2h_2)h_2\delta_1 + h_1^2\delta_2}{h_1 + h_2}$$
$$(h_n + h_{n-1})d_{n+1} + h_{n-1}d_n = \frac{h_n^2\delta(3h_1 + 2h_2)h_2\delta_1 + h_1^2\delta_2}{h_1 + h_2}.$$



Obrázek 3.5: Rozložení souřadnic  $x, y$  a  $z$  v závislosti na parametru  $t$ , který zde značí ekvidistantní vzdálenosti.

### Interpolace křivky v prostoru

Hermitův interpolační splajn interpoluje funkci jedné proměnné, pokud potřebujeme prostorovou křivku, použijeme parametrické vyjádření křivky a interpolujeme pro každou souřadnici zvlášť v závislosti na parametru  $t$ .

Postup je jednoduchý, nechtě

$$\{\mathbf{A}_i\}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

je posloupnost zadaných bodů  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , které mají souřadnice  $[x_i, y_i, z_i]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Rozklad na souřadnice provedeme zavedením další proměnné, například  $\mathbf{t}$ , pro jednoduchost může  $\mathbf{t}$  růst konstantně, tedy  $t_i = i$  (v dalších kapitolách se podíváme na nekonstantní případy). Vytvoříme interpolace jednotlivých souřadnic v závislosti na tomto parametru

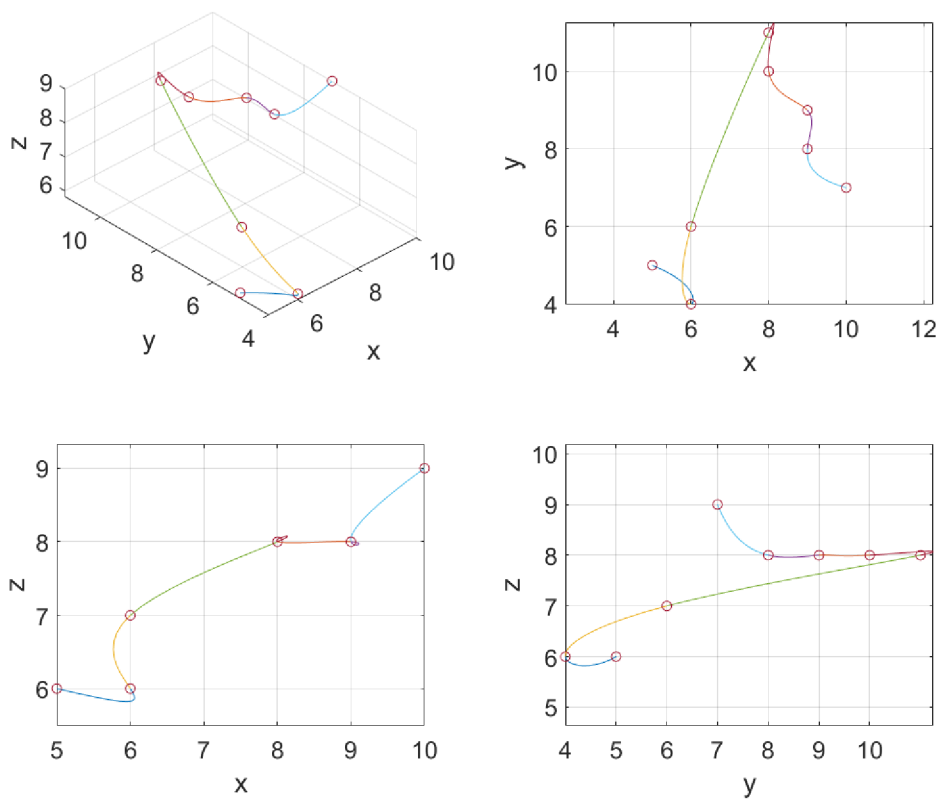
$$x_i \text{ na } t_i$$

$$y_i \text{ na } t_i$$

$$z_i \text{ na } t_i$$

jak je zobrazeno na obrázku 3.5.

Výsledná prostorová křivka pro dané body může vypadat jako na obrázku 3.6. Pro lepší přehlednost jsou přidány pohledy pro každou dvojici souřadnic ve stejných barvách jednotlivých úseků. Vybrané body a kód jsou v příloze B.



Obrázek 3.6: Hermitův kubický interpolační splajn pro prostorovou křivku.

### 3.2.3 Interpolace s různými parametry

V této části se zaměříme na parametry, a na to, jak mohou ovlivňovat tvar interpolační křivky. Informace jsou převzaty z [12].

Předpokládejme, že máme řadu bodů  $\{\mathbf{Q}_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , které chceme interpolovat polynomem  $p$ -tého stupně. Ke každému bodu přiřadíme hodnotu parametru  $t_k$  a uzlový vektor  $\mathbf{t} = t_0, t_1, \dots, t_n$ . Tím dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{C}(t_k) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(t_k) \mathbf{P}_i.$$

Řídící body  $\mathbf{P}_i$  jsou neznámé. Označme  $r$  jako počet souřadnic (tedy  $r = 2, 3$ ). Metoda závisí na  $r$ , předchozí rovnice má jednu matici koeficientů, s pravou stranou  $r$  hodnot a  $r$  řešení odpovídá počtu souřadnic  $\mathbf{P}_i$ . Výběr  $t_k$  a  $\mathbf{u}$  ovlivňuje tvar křivky, dále budeme předpokládat, že parametr leží v intervalu  $[0, 1]$ .  $t_k$  zvolíme některou z metod:

- rovnoměrně rozmístění

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 & t_n &= 1 \\ t_k &= \frac{k}{n} & k &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Tato metoda se nedoporučuje, může vytvářet nepravidelné tvary (například smyčky), jestliže jsou nerovnoměrně rozložena data. Pro případ naší konkrétní aplikace 3.3 ji však použijeme.

- vzdálenost mezi uzly  
Nechť je  $d$  celková délka

$$d = \sum_{k=1}^n |\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|$$

pak

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 & t_n &= 1 \\ t_k &= t_{k-1} + \frac{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|}{d} & k &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Tato metoda je nejpoužívanější a dává křivce dobrou parametrizaci.

- centripetální metoda  
Nechť

$$d = \sum_{k=1}^n \sqrt{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|},$$

potom

$$t_0 = 0 \quad t_n = 1$$

a tedy

$$t_k = t_{k-1} + \frac{\sqrt{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|}}{d} \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Tato metoda je novější, dává lepší výsledky v případě, že je křivka velmi „divoká“. Uzly mohou být stejnoměrně vzdálené:

$$t_0 = \dots = t_p = 0 \quad t_{m-p} = \dots = t_m = 1$$

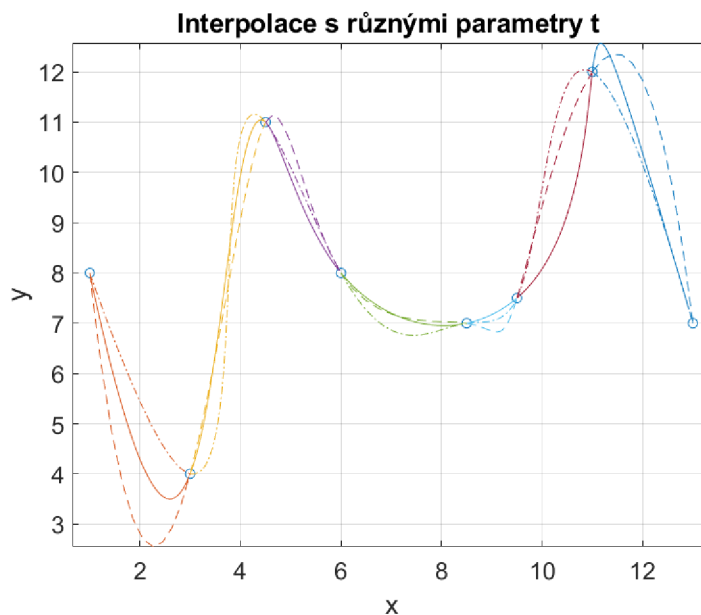
$$t_{j+p} = \frac{j}{n-p+1} \quad j = 1, 2, \dots, n-p.$$

Obvykle se ale tato metoda nedoporučuje, protože soustava rovnic  $t_k$  může být singularní. Doporučuje se následující metoda průměrování:

$$t_0 = \dots = t_p = 0 \quad t_{m-p} = \dots = t_m = 1$$

$$t_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} t_i \quad j = 1, 2, \dots, n-p.$$

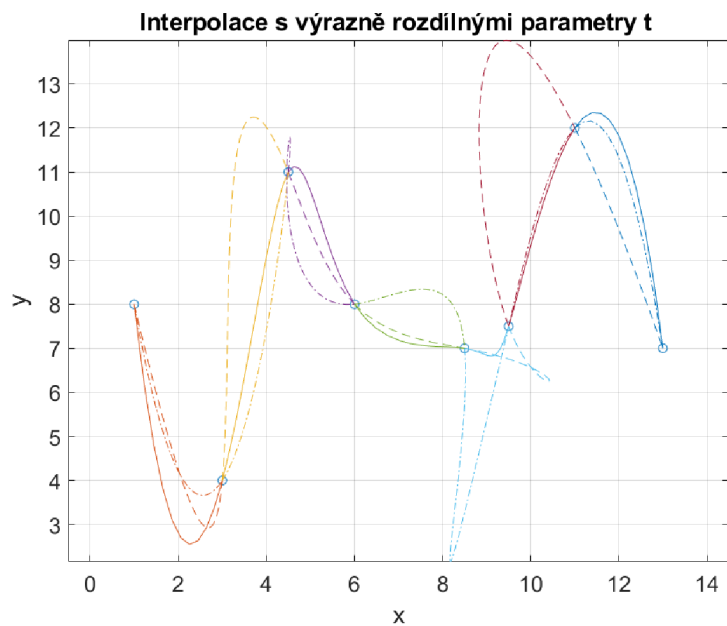
S touto metodou uzly odrážejí rozložení  $t_k$  a tento systém lze řešit Gaussovou eliminační metodou bez výběru hlavního prvku. Na obrázku 3.7 jsou řídicí body, parametrizace pomocí euklidovské vzdálenosti mezi uzly a její srovnání s jinými parametrizacemi.



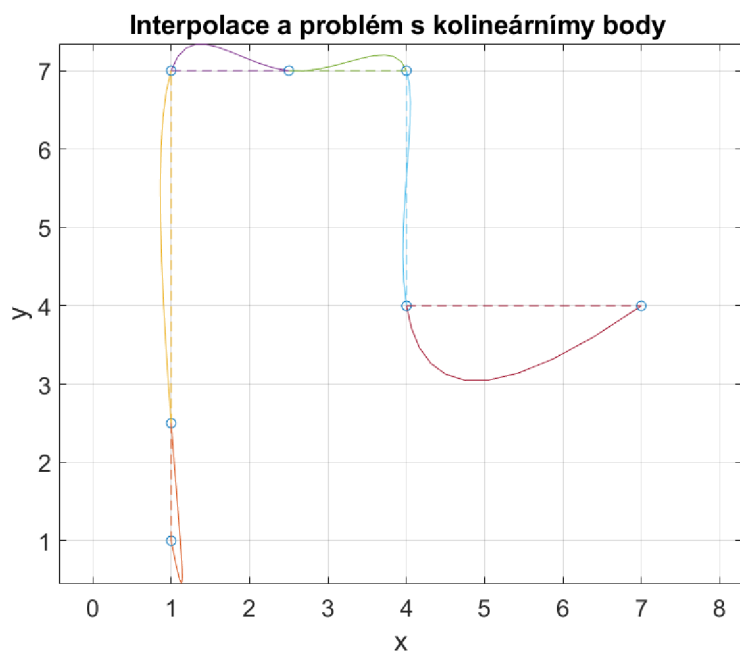
Obrázek 3.7: Příklad různých parametrizací. Plnou čarou jsou parametrizace pomocí euklidovské vzdálenosti mezi uzly, přerušovaná křivka má parametr ekvidistantní a čerchovaná náhodný (pro tento případ zvolené  $t=[1\ 2\ 5\ 6\ 8\ 9\ 11\ 12]$ ). Zdrojový kód se nachází v příloze C.

Další obrázek 3.8 ukazuje stejné srovnání více „divokých“ zadání parametrů. Jde dobře vidět, jak na nich závisí tvar křivky a že může tvořit i smyčky důsledkem příliš velké délky mezi dvěma poměrně blízkými body.

Ve všech případech se jedná o interpolaci kubickým splajnem. Na dalším obrázku 3.9 je znázorněná neschopnost globální interpolace proložit řadu kolineárních bodů.



Obrázek 3.8: Další příklad různých parametrizací. Plnou čarou jsou opět parametrizace pomocí euklidovské vzdálenosti mezi uzly, ale přerušovaná i čerchovaná křivka je má mnohem „divočejší“. Zdrojový kód je v příloze C.



Obrázek 3.9: Problémy s kolineárními body.

### 3.2.4 Interpolace s různými zadanými derivacemi v bodech.

V následující části se budeme zabývat derivacemi a tím, jak působí na tvar interpolační křivky. Příklady jsou převzaty z [12].

Při zadání derivací v bodech nám přibývá další uzel a řídicí bod, tedy i další lineární rovnice. Uvedeme příklad s první derivací.

Nechť  $\mathbf{Q}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  jsou uzlové body a vektory  $\mathbf{d}_0$  a  $\mathbf{d}_n$  jsou první derivace v krajních bodech. Interpolovat chceme pomocí křivky  $p$ -tého stupně.

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^{n+2} N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i$$

Stejně jako předtím vypočítáme  $t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , označíme  $m = n + p + 3$  a získáme  $m + 1$  uzlů takto:

$$\begin{aligned} t_0 = \dots = t_p = 0 & \quad t_{m-p} = \dots = t_m = 1 \\ t_{j+p+1} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} t_i & \quad j = 0, 1, \dots, n - p + 1 \end{aligned}$$

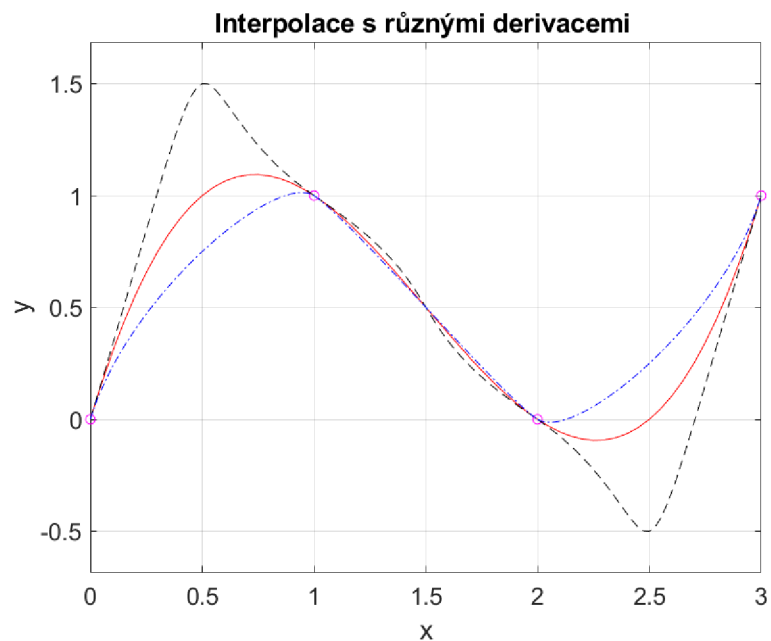
a tyto dvě další rovnice:

$$\begin{aligned} -\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 &= \frac{t_{p+1}}{p} \mathbf{d}_0 \\ -\mathbf{P}_{n+1} + \mathbf{P}_{n+2} &= \frac{1 - t_{m-p-1}}{p} \mathbf{d}_n \end{aligned}$$

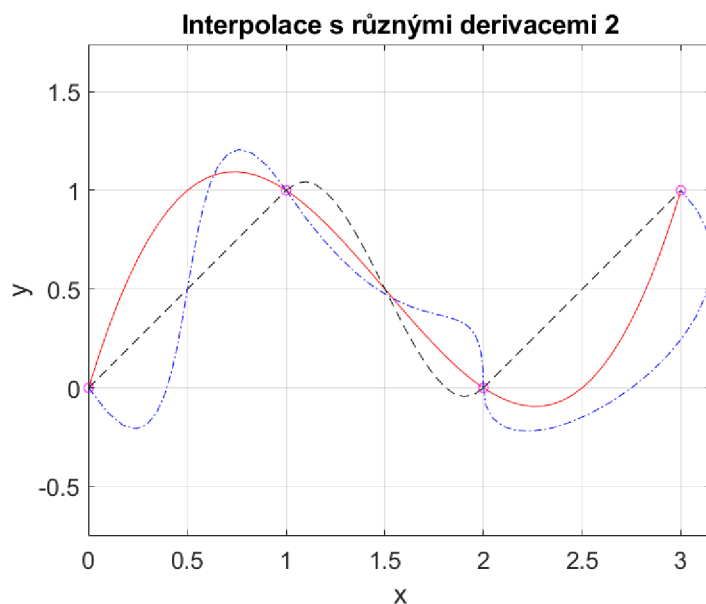
S nimi dostaneme soustavu rovnic  $(n + 3) \times (n + 3)$ . Na obrázku 3.10 je vidět srovnání různých velikostí derivací ve všech bodech.

Další obrázek 3.11 znázorňuje stejný případ, jen s úplně různými hodnotami derivace.

V obou případech se jedná o kubický splajn a interpolaci stejných bodů. Obrázky jsou generovány v Matlabu, zadané body a všechny parametry jsou v příloze C.



Obrázek 3.10: Příklad různých derivací v bodech. Červenou plnou čarou jsou derivace dopočítané pomocí spojitosti druhých derivací, černá přerušovaná křivka má derivace dvakrát větší a modrá čerchovaná naopak dvakrát menší. Zdrojový kód je v příloze C.



Obrázek 3.11: Červenou plnou čarou jsou opět derivace dopočítané pomocí spojitosti druhých derivací, černá přerušovaná křivka má derivace jednotkové a modrá čerchovaná úplně náhodné, konkrétně  $dx=[2 \ 2 \ 0 \ -2]$ ;  $dy=[-3 \ -3 \ -2 \ 2]$ . Zdrojový kód se nachází v příloze C.



### 3.3 Shrnutí pro konkrétní aplikaci

Práce je zaměřena na rekonstrukci prostorové kinematické křivky, kterou je trajektorie sledovaného bodu. Prostorové souřadnice bodu v různých časech pozorování budou získány pomocí stereoskopického snímání, které lze popsat zavedením projektivního prostoru. Parametry  $t$  byly zvoleny ekvidistantní, neboť víme, že mezi jednotlivými snímanými uzlovými body proběhne stejný časový úsek.

K interpolaci vybereme vhodný matematický aparát. Jeden polynom na celém intervalu (Lagrangeův a Newtonův) jsme vyřadili z důvodu velkých chyb při vyšším počtu uzlových bodů, tedy budeme pracovat se splajny. Vycházíme z předpokladu, že zrychlení pohybu člověka je spojitě. Pokud křivka značí trajektorii, pak první derivace bude rychlost a druhá zrychlení. Proto byl vybrán Hermitův kubický interpolační splajn. V daných uzlových bodech neznáme derivace, ale z předpokladu spojitosti druhé derivace jsme schopni je dopočítat.

Při výpočtu souřadnic bodů se používá stereoskopie, jak je popsáno v [9]. Body, které získáme, budou popsány souřadnicemi v projektivním prostoru. Lze je snadno transformovat do souřadnic euklidovských, protože víme, že veškeré body jsou vlastní, tedy vypadají takto:

$${}_{\infty}E^3 \ni_{\infty} A = (x_A, y_A, z_A, 1),$$

stačí nám vzít z nich první tři souřadnice a popsat s nimi daný bod následovně

$$E^3 \ni A = [x_A, y_A, z_A].$$

# Závěr

Cílem práce bylo nastudovat problematiku interpolace v prostoru  $\mathbb{R}^3$  s přechodem do projektivního prostoru a vytvořit aplikaci pro interpolaci prostorových bodů, a tedy i rekonstrukci prostorového pohybu.

V první části práce je zaveden projektivní prostor a všechny k němu potřebné pojmy. V druhé části jsou definované vybrané pojmy ke křivkám, jejich zkoumání a práci s nimi.

Poslední část se věnuje samotným aproximacím. Jsou zde nastudované různé druhy interpolačních polynomů, největší pozornost se věnujeme Hermitovu interpolačnímu splajnu. Odvodili jsme si jeho exaktní rovnici pro polynom třetího stupně, kterou využíváme v hlavním programu. Také jsme si v Matlabu vygenerovali obrázky pro ostatní druhy interpolace, změny parametrů a derivací. V rámci práce byly vytvořeny programy, z nichž nejdůležitější najdeme v příloze C. Z ukázkových příkladů je zřejmé, jak změny parametrů a derivace ovlivňují tvar křivky.

V poslední podkapitole 3.3 byla vybrána vhodná metoda interpolace, vhodné parametry a způsob získání derivací pro zadanou aplikaci, tedy prokládání prostorových bodů křivkou. Program pro tuto aplikaci je vytvořený v Matlabu a najdeme jej v příloze B. Proloží zadané body Hermitovým kubickým interpolačním spljnem a vykreslí danou křivku. Cíl se tedy podařilo splnit.

Spolu s dříve zmiňovanou prací Zuzany Mikušové máme vytvořený dostačující základ pro navazující diplomovou práci, která bude zaměřená na samotné natočení pohybu a celkovou rekonstrukci křivky z kamerového záznamu nebo fotografií. Budeme se zabývat hlavně sebeobraným tasením zbraně a rekonstrukci křivky, po které se zbraň pohybuje. Důležitou částí bude samotné získávání bodů ze dvou kamer. Následně se budeme věnovat i natáčení profesionálních střelců a amatérů, a porovnávání křivek jejich pohybu. Dále je v plánu vytvoření optimální křivky při tasení a porovnání například se sportovními střelci. Další možností bude věnovat se libovolnému jinému pohybu v trojrozměrném prostoru.

# Literatura

- [1] DOSTÁL, Z. a VONDRÁK, V. *Lineární algebra* [online]. 1. vyd. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni\\_algebra.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra.pdf).
- [2] HANČL, J. *Křivky* [online]. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy [cit. 2020-06-09]. Dostupné z: <https://prase.cz/library/KrivkyJH/KrivkyJH.pdf>.
- [3] HASÍK, K. *Numerické metody* [online]. Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě [cit. 2020-06-16]. Dostupné z: <https://www.slu.cz/file/cul/3f2481de-0419-42ec-91b1-ab2cdde89f45>.
- [4] HAŠEK, R. *Axiomatická výstavba geometrie* [online]. Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích [cit. 2020-06-09]. Dostupné z: [http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GE03/GE03\\_CZV\\_Axiomaticka\\_vystavba.pdf](http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GE03/GE03_CZV_Axiomaticka_vystavba.pdf).
- [5] HAŠEK, R. *Geometrie 2 - 2. díl* [online]. Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, 2020-04-30 [cit. 2020-06-09]. Dostupné z: [http://home.pf.jcu.cz/~hasek/Geometrie\\_2\(CZV-ZS\)/Geometrie\\_2\(2\)\\_studijni\\_text.pdf](http://home.pf.jcu.cz/~hasek/Geometrie_2(CZV-ZS)/Geometrie_2(2)_studijni_text.pdf).
- [6] HILBERT, D. *Grundlagen der Geometrie* [online]. Přeložil Edgar. J. Townsend: The Foundations of Geometry. Open Court Publishing Company (1902), 1899. Dostupné z: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=miun.abr1237.0180.001&view=1up&seq=1>.
- [7] MARTÍŠEK, D. *Počítačová geometrie a grafika* [online]. Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně [cit. 2020-06-10]. Dostupné z: <https://mathonline.fme.vutbr.cz/Prednaska/sc-1245-sr-1-a-261/default.aspx>.
- [8] MARTÍŠEK, D. *Matematické principy grafických systémů*. 1. vyd. Littera, 2002. ISBN 80-85763-19-2.
- [9] MIKUŠOVÁ, Z. *Rekonstrukce prostorových kinematických křivek*. Brno, 2018. [cit. 2020-06-18]. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce PAVEL ŠTARHA doc. ing.
- [10] NECHVÁTAL, L. *Matematická analýza 2, přednášky* [online]. [cit. 2020-06-08]. Dostupné z: <https://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-analyzanbspII/sc-1226-sr-1-a-267/default.aspx>.
- [11] NECHVÁTAL, L. *Matematická analýza, přednášky* [online]. Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně [cit. 2020-06-06]. Dostupné z: <https://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-analyzanbspI/sc-1225-sr-1-a-265/default.aspx>.

- [12] PIEGL, L. A. a TILLER, W. *The NURBS book*. 2nd ed. Berlin: Springer, 1997. ISBN 3-540-61545-8.
- [13] TICHÝ, P. *Interpolace, ortogonální polynomy a Gaussova kvadratura* [online]. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy [cit. 2020-06-15]. Dostupné z: [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~ptichy/blogs/nan/NA\\_08\\_text.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~ptichy/blogs/nan/NA_08_text.pdf).
- [14] ZELINKA, J. *Numerické výpočty II* [online]. Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova Univerzita [cit. 2020-06-17]. Dostupné z: [https://www.math.muni.cz/~zelinka/Vyuka/Numericke\\_vypocty/n\\_vypocty-2.pdf](https://www.math.muni.cz/~zelinka/Vyuka/Numericke_vypocty/n_vypocty-2.pdf).
- [15] ČERMÁK, L. a HLAVIČKA, R. *Numericé metody*. 3. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5437-8.

# Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^*$	množina rozšířených reálných čísel
$\mathbb{N}_0$	přirozená čísla s nulou
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbf{u}, \vec{AB}$	vektor
$\mathbf{o}, \vec{o}$	nulový vektor
$*, \circ, \varphi, \psi$	zobrazení
$\forall$	pro každý prvek
$\exists$	existuje
$\mathbb{G}$	algebraická struktura
$\mathbb{R} - \{a\}$	množina reálných čísel bez určitého prvku $a$
$\mathbb{R}^n$	kartézská mocnina množiny $\mathbb{R}$
$\mathbf{uv}, (\mathbf{u}, \mathbf{v})$	skalární součin
$A, B, C$	body
$p, q$	přímky
$\rho$	rovina
$\angle BAC$	úhel s vrcholem v bodě $A$ , ohraničený polopřímkami $AB$ a $AC$
$E_n$	euklidovský prostor
${}^\infty E_n$	rozšířený euklidovský prostor
$O(a)$	okolí bodu $a$
$\overline{O}(A)$	ryzí okolí bodu $A$
$\approx$	přibližná rovnost
$f(x)$	funkce s proměnnou $x$
$f'(x)$	derivace funkce s proměnnou $x$
$\langle a, b \rangle$	interval od hodnoty $a$ do $b$
$P_n(x)$	polynom stupně $n$ , s proměnnou $x$
$!$	faktoriál
$D[x_{i-k}, x_{i-k+1}, \dots, x_{i-1}, x_i]$	poměrná diference
$\{\mathbf{A}_i\}, i = 0, 1, \dots, n$	posloupnost bodů $A_0, A_1, \dots, A_n$

# Příloha A

## Pomocné funkce

```
function [d] = der_v_b(x,t,n)
% tvoří vektor h, to jsou rozestupy mezi t-souřadnicemi
% pro t=čas je rozestup konstantní, lze nahradit vektorem ones(1,n)
h=zeros(1,n-1);
for i=1:(n-1)
    h(i)=t(i+1)-t(i);
end

% tvoří vektor delta od dvojky, protože x se značí od jedné
del=zeros(1,n-1);
for i=1:n-1
    del(i)=(x(i+1)-x(i))/h(i);
end

D=zeros(n); % plnění matice
D(1,1)=h(2); % počítěčnická okrajová podmínka
D(1,2)=h(2)+h(1);
D(n,n-1)=h(n-1)+h(n-2); % koncová okrajová podmínka
D(n,n)=h(n-2);

for i=2:n-1 % plnění matice, i je řádek
    D(i,i-1)=h(i);
    D(i,i)=2*(h(i)+h(i-1));
    D(i,i+1)=h(i-1);
end

b=zeros(n,1); % naplnit b
b(1)=((3*h(1)+2*h(2))*h(2)*del(1)+(h(1)^2)*del(2))/(h(1)+h(2));
b(n)=((h(n-1)^2)*del(n-2)+(2*h(n-2)+3*h(n-1))*h(n-2)*del(n-1))/(h(n-2)+
+h(n-1));
for i=2:n-1
    b(i)=3*(h(i)*del(i-1)+h(i-1)*del(i));
end
[d] = tridiagf(D,b); % řešení třídiag. matice
end
```

```

function [B] = tridiagf(A,b) % řeší třídiagonální matici
n=size(A,2);
B = zeros(n,1);

for i=1:n-1          % dopředný chod
    A(i+1,i) = A(i+1,i)/A(i,i);
    A(i+1,i+1) = A(i+1,i+1) - A(i+1,i)*A(i,i+1);
    b(i+1) = b(i+1) - A(i+1,i)*b(i);
end
B(n) = b(n)/A(n,n);

for m=n-1:-1:1      % zpětný chod
    B(m) = (b(m) - A(m,m+1)*B(m+1))/A(m,m);
end

function [S] = Herm (d0,d1,x0,x1,t0,t1)
h=t1-t0;           % rozestupy t, pro tento případě h=vždy 1
del=(x1-x0)/h;    % tvořím delta - rozestupy x/h

% vytvoření s jako funkci parametru t
a=zeros(1,4);
a(1)=x0;
a(2)=d0;
a(3)=(3*del-2*d0-d1)/h;
a(4)=(d0-2*del+d1)/(h^2);

s = @(t)(t-t0);
S=@(t) a(1)+a(2)*s(t)+a(3)*s(t).^2+a(4)*s(t).^3;
end

```

## Příloha B

# Hlavní zdrojový kód

Vykreslení je na obrázku 3.6

```
x=[ 5 6 6 8 8 9 9 10]; %zadání
y=[ 5 4 6 11 10 9 8 7];
z=[6 6 7 8 8 8 8 9];
n=length(x);
if length(y)~=n && length(z)~=n % kontrola délky vektorů x, y, z
    msgbox('Vektory nemají stejnou délku.');
```

```
    return
end

t=zeros(1,n); % horizontální-osa grafu, založená na čase pořízení fotek
for i=2:n % vertikální-osa bude x,y,z
    t(i)=t(i-1)+1;
end

[dx] = der_v_b(x,t,n); % spočítá derivace v bodech t
[dy] = der_v_b(y,t,n); % ze spojitosti druhých derivací
[dz] = der_v_b(z,t,n);

for i=1:n-1
    l=(i-1):0.1:i; % Sx - dostanu koeficienty polynomu
    [Sx] = Herm (dx(i),dx(i+1),x(i),x(i+1),t(i),t(i+1));
    sx=Sx(1); % dostanu funkci kubického polynomu
    [Sy] = Herm (dy(i),dy(i+1),y(i),y(i+1),t(i),t(i+1));
    sy=Sy(1);
    [Sz] = Herm (dz(i),dz(i+1),z(i),z(i+1),t(i),t(i+1));
    sz=Sz(1);
    plot3(sx,sy,sz, '- ', x, y, z, 'o')
    hold on % podržení otevřeného okna pro dopisování dalších částí
end
axis equal % osy se stejnými jednotkami
grid on % zobrazení mřížky
xlabel('x') ylabel('y') zlabel('z') % popisky os
```



## Příloha C

# Zdrojové kódy pro obrázky

### Lagrangeův polynom a fundamentální polynom

Program pro obrázek 3.2. Zdroj: [14]

```
uzly=[3 5 6 8 10];
ff=sin(uzly)/2;
xx=0:0.01:13;
[lip, lfp] = laintpol2(uzly,ff);
Px=polyval(lip,xx);
fx=sin(xx)/2;

plot(xx,fx,'-k',uzly,ff,'o',xx,Px,'-b')
hold on

l1=lfp(1,:);

L1=polyval(l1,xx);
plot(xx,L1,'-.'')
axis equal
grid on
axis([0,13,-3,5])
legend('původní funkce','zadané body interpolace','lagrangeův interpolační
polynom','fundamentální polynom')
title('Lagrangeův polynom a fundamentální polynomy ') % titulek nahoře
xlabel('x') % popisek osy x
ylabel('y')

function [lip,lfp] = laintpol2(uzly,ff)
% uzly,ff - radkove vektory
% lip - Lagr. interpol. polynom
% lfp - matice fundamentalnich polynomu
om=poly(uzly); % funkce omega
omd=polyder(om); % omega'
n=length(uzly)-1;
```

```

lip=zeros(1,n+1);
lfp=[];
    for ii=0:n
        i1=ii+1;
        xi=uzly(i1);
        cit=deconv(om,[1,-xi]);
        jme=polyval(omd,xi);
        li=1/jme*cit; % fundamentalni polynom
        lfp=[lfp;li];
    end % konec cyklu
lip=ff*lfp;
end % konec funkce

```

## Hermitova interpolace v rovině

Jedná se o základní program pro obrázky 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 a 3.11, kde se mění parametry a derivace jak je popsáno v následujících částech přílohy.

```

x=[ 1 3 4.5 6 8.5 9.5 11 13 ]; % příklad zadání
y=[ 8 4 11 8 7 7.5 12 7];

n=length(x);
t=zeros(1,n);
for i=2:n
    t(i)=t(i-1)+sqrt((x(i)-x(i-1))^2 + (y(i)-y(i-1))^2);
end

[dx] = der_v_b(x,t,n);
[dy] = der_v_b(y,t,n);

for i=1:n-1
    l=(i-1):0.1:i; % Sx - dostanu koeficienty polynomu
    [Sx] = Herm (dx(i),dx(i+1),x(i),x(i+1),t(i),t(i+1));
    sx=Sx(1);
    [Sy] = Herm (dy(i),dy(i+1),y(i),y(i+1),t(i),t(i+1));
    sy=Sy(1);
    plot(sx, sy, '- ', x, y, 'o');
    grid on
    axis equal
    hold on
end

```

## Interpolace s různými parametry t

Program pro obrázek 3.7.

Parametrizace euklidovské (plná čára):

```
t=zeros(1,n);
for i=2:n
    t(i)=t(i-1)+sqrt((x(i)-x(i-1))^2 + (y(i)-y(i-1))^2);
end
```

Hodnoty zvolené jako parametrizace (čerchovaná čára):

```
t=[ 1 2 5 6 8 9 11 12];
```

## Interpolace s výrazně rozdílnými parametry t

Program pro obrázek 3.8.

Parametrizace:

```
t2=[ 1 4 9 10 11 15 20 21];
t3=[0 5 12 25 30 36 37 38];
```

## Interpolace s různými derivacemi

Program pro obrázek 3.10 a 3.11.

```
x=[0 1 2 3]; % zadání
y=[0 1 0 1];
```

Derivace:

```
[dx] = der_v_b(x,t,n);          dx4=[1 1 1 1];
[dy] = der_v_b(y,t,n);          dy4=[1 1 1 1];
dx2=dx*2;                       dx5=[2 2 0 -2];
dy2=dy*2;                       dy5=[-3 -3 -2 2];
dx3=dx*0.5;
dy3=dy*0.5;
```