Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky a biomatematiky

Polohové úlohy ve stereometrii

Diplomová práce

Bc. Lenka Krepsová

Vedoucí práce: RNDr. Ing. Jana Kalová, Ph.D.

České Budějovice, 2015

Bibliografické údaje

Krepsová L., 2015: Polohové úlohy ve stereometrii [Representation of space objects in the solid geometry. Mgr. Thesis, in Czech.] - p. 119, Faculty of Science, The University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace

This thesis deals with the representation of objects in the solid geometry. The first part contains a summary of theorems and definitions which are needed for understanding problems of mutual position of lines and planes, cut of objects with a plane and intersection of the object with a line. The second part contains a collection of worksheets for students. It has been created a solution for each worksheet. This solution can be used in printed version or in electronic version which is created in the software GeoGebra 5. This thesis can be used in tuition or self-studying.

Práce se zabývá problematikou polohových úloh ve stereometrii. První teoretická část obsahuje přehled definic a vět potřebných k pochopení problematiky vzájemné polohy přímek a rovin, řezů těles rovinou a průniky přímky s tělesem. Druhou část tvoří soubor pracovních listů pro studenty. Ke každému pracovnímu listu je vytvořeno řešení, které lze použít v tištěné podobě nebo v elektronické verzi vytvořené v softwaru GeoGebra. Práce je určena pro výuku i pro samostudium.

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.
Prohlašuji, že v souladu s §47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 17. dubna 2015

Lenka Krepsová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat své vedoucí práce RNDr. Ing. Janě Kalové, Ph.D. za čas a rady, které mi věnovala při tvorbě diplomové práce. Dále bych chtěla poděkovat všem pedagogům a studentům za jejich ochotu spolupracovat a také děkuji své rodině a příteli za podporu.

Obsah

Seznam obrázků

1 Úvod

Diplomová práce volně navazuje na bakalářskou práci Metrické úlohy ve stereometrii [1], která vznikla jako požadavek pro podporu výuky na fakultním gymnáziu v Jírovcově ulici v Českých Budějovicích. Tyto úlohy byly již otestovány na fakultním gymnáziu a mezi středoškolskými učiteli z ostatních gymnázií a středních škol vyvolaly zájem o jejich používání. Z tohoto důvodu začala vznikat další část zabývající se problematikou polohových úloh ve stereometrii. Stereometrie je oblast matematiky, která je časově obtížná a také problematická z hlediska prostorové představivosti. Studenti musejí neustále překreslovat tělesa do sešitu a tímto způsobem také dochází ke ztrátě času při výuce, který by se dal využít pro procvičení většího množství úloh a případně rozšíření výuky i o složitější úlohy.

Celá práce je koncipována jako přehled vět a postupů, které jsou za potřebí při řešení polohových úloh. Hlavním těžištěm je však vytvoření pracovních listů a jejich řešení. Pracovní listy se nacházejí vždy za danou kapitolou a jsou určeny studentům k procvičování probírané látky, případně mohou být použity pro domácí přípravu. Následuje podrobné řešení pracovního listu, který může posloužit vyučujícím v případě, že není k dispozici technologie k promítání řešení v software Geogebra 5. Poslední krok spočívá ve vytvoření řešení pracovních listů v software GeoGebra 5. Řešení úloh nabízí vyučujícímu efektivní a názornou pomůcku pro zlepšení prostorové představivosti studentů. Studenti při procvičování mohou pracovat svým tempem a vyučující může lépe kontrolovat jejich práci a upozorňovat na nedostatky.

Pracovní listy a jejich řešení nemohou žádným způsobem plně nahradit výklad učitele, proto jsou vhodné jako doplňková aktivita při procvičování a případné testování znalostí. Pracovní listy mohou být přístupné pro studenty na školních webových stránkách.

2 Stereometrie - komplikovaná oblast matematiky

Planimetrie (geometrie v rovině) a stereometrie (geometrie v prostoru) patří k oblastem středoškolské matematiky, které nejsou až na výjimky mezi studenty příliš oblíbené. Tato práce se zabývá problematikou stereometrie konkrétně její podkapitolou polohové úlohy. Dalším vyučovaným blokem jsou kromě těles i metrické úlohy. Problematika metrických úloh byla zpracována již v bakalářské práci [1] předcházející této diplomové práci.

V dnešní době je k dispozici velké množství starších, ale také úplně nových učebnic. Nové učebnice se snaží poutavým a přehledným způsobem přiblížit problematiku stereometrie a nabízejí i množství příkladů k procvičování. Většina z nich je barevně zpracována. Barevnost a poutavost může studenty více zaujmout, než starší učebnice plné textu, definic a příkladů. Vznikají také elektronické učebnice. Jejich přínosem je interaktivita. Stručný přehled středoškolských učebnic stereometrie je uveden v kapitole 3.2.

Dalším zdrojem studijních materiálů je internet. Zde je však riziko špatných řešení či zavádějících informací. Lze nalézt ale i kvalitní materiál, jako například na stránkách realisticky.cz. [2] V dnešní době digitalizace jsou dostupné na webových stránkách fakult či univerzitních knihoven i různé absolventské práce, které se zabývají problematikou polohových úloh ve stereometrii. Většina z nich předkládá učiteli a studentům přehled teorie potřebné k pochopení učiva a dále několik řešených příkladů. K řešení je využíván především software Cabri geometrie. Nevýhodou tohoto softwaru je především nutnost zakoupení licence [3], čímž je omezen přístup studentů, ale také vyučujících k tomu software.

Na základě předchozího zjištění a také na požadavek vyučujících z fakultního Gymnázia v Jírovcově ulici v Českých Budějovicích vznikl soubor úloh řešených v software GeoGebra 4 a velké množství úloh na procvičení problematiky metrických úloh. Navazující diplomová práce spolu s bakalářskou prací vytváří ucelený komplet pracovních listů pro studenty a jejich řešení v software GeoGebra 5. [9]

Pracovní listy pro studenty bude možné využít při výkladu, procvičování a průběžném i závěrečném testování probírané látky. Řešení jsou vhodná pro učitele, kteří je mohou využívat při výkladu jako názorné řešení úloh nebo při procvičování během hodiny. Řešení pracovních listů může být také poskytnuto studentům např. při samostudiu. Vyučující má možnost v programu GeoGebra krokovat řešení a během promítání řešení kontrolovat práci studentů. Součástí práce je teoretická část, která obsahuje přehled definic a vět.

3 Analýza učebnic, absolventských prací a WEB

3.1 Analýza absolventských prací

Nejdříve proběhla analýza absolventských prací zabývajících se problematikou stereometrie. Ve sbírce Akademické knihovny Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích bylo zjištěno, že část prací se zaměřuje pouze na všeobecný přehled definic a vět. Lze nalézt i některé řešené příklady. Většina řešení je prováděna v softwaru, který je méně dostupný studentům i vyučujícím (například Cabri geometrie). Další analýza probíhala na absolventských pracích zveřejněných na internetových stránkách dalších vysokých škol. Absolventských prací s problematikou stereometrie lze nalézt velké množství. Nepodařila se však dosud najít žádná práce, která by obsahovala větší množství příkladů s interaktivním řešením pracovních listů pro studenty a byla by vhodná k použití ve výuce na všech typech středních škol.

3.2 Analýza současných učebnic

Nejčastěji se používají k výuce stereometrie učebnice Matematika pro gymnázia - stereometrie [4] z nakladatelství Prometheus a Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť [5] z téhož nakladatelství. Zatím se v nakladatelství Prometheus připravuje učebnice Matematika pro SŠ - stereometrie a v tomto nakladatelství již vyšla učebnice Geometrie v rovině a prostoru pro SŠ. U konkurenčního nakladatelství Didaktis byla již vydána nová řada učebnice Matematika pro SŠ - stereometrie - 6. díl obsahující učebnici, pracovní sešit a příručku pro učitele [6]. Tato učebnice byla prezentována i na konferenci v Srní [7]. Není však příliš vhodná k výuce na gymnáziu, na což upozornili i sami autoři. Pro vyučující, kteří mají raději online učebnice, se nabízí řada učebnic Flexibooks od nakladatelství Fraus. Zatím byla zpřístupněna učebnice Stereometrie I. Pravděpodobně se předpokládá i její pokračovaní, jako je tomu u Planimetrie. Učebnice se dají zakoupit za příznivou cenu a nebo pouze vypůjčit na 31 dní.

3.3 Analýza webových stránek

Na webových stránkách je přístupné velké množství vyřešených příkladů. Ne ve všech případech je však řešení správné, někdy je vysvětlení problematiky velmi zjednodušené. Existují ale i velmi zdařilé stránky, které problematiku vysvětlují velmi přehledně a mohou posloužit žákům jako výukový či doplňkový materiál. Například webové stránky realisticky.cz. [2]

4 Pracovní listy a jejich řešení

4.1 Pracovní listy

Pracovní listy pro studenty obsahují 30 zadání úloh, které s množstvím podúloh tvoří sbírku o 84 úlohách. Zadání příkladů jsou převzata z učebnice pro gymnázia - Stereometrie z nakladatelství Prometheus [4], Matematika pro střední školy a učiliště a studijní obory středních odborných učilišť [5] a ze sbírky příkladů Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy [8]. Vyučující může pracovní listy studentům rozdat při vyučování nebo zpřístupnit na webových stránkách školy, odkud si je studenti budou moci vytisknout. Jednotlivé pracovní listy jsou umístěny pro větší přehlednost za teoretickou částí zabývající se danou problematikou. Každý pracovní list obsahuje zadání příkladů a obrázek tělesa ve volném rovnoběžném promítání, do kterého si studenti zakreslují svá řešení. V některých příkladech není těleso z důvodu větší přehlednosti znázorněno v klasickém pohledu ve volném rovnoběžném promítání.

4.2 Řešení pracovních listů

K jednotlivým pracovním listům jsou vytvořena řešení. Řešení jsou umístěna za pracovním listem pro studenty. Vyučující má dvě možnosti využití řešených příkladů.

První možností je vytištění řešení, kde je znázorněn konečný výsledek. Zároveň je k diplomové práci připojen soubor s příklady v programu GeoGebra. Pracovní list má svou složku s danými příklady. Některé triviální příklady nejsou v tomto souboru obsaženy a jsou pouze vyřešené v tištěné formě.

Druhou možností využití řešených příkladů je přímo interaktivní PDF s odkazy na řešení.

Součástí příkladu vyřešeného v programu GeoGebra je interaktivní odkaz, který otevře řešení přímo v programu GeoGebra. Nutností je nainstalování tohoto softwaru do počítače. Postup instalace je popsán v kapitole 5.

V případě potřeby je řešení možné krokovat. Krokování lze nastavit jako automatické nebo je ovládáno vyučujícím. Studenti řeší úlohy v pracovních listech a vyučující je může upozornit studenty na další krok řešení. Při automatickém krokování může vyučující procházet třídou a kontrolovat práci studentů a upozorňovat je na chyby. Velkou výhodou je také možnost natáčení těles z více pohledů. Některá řešení opět nejsou z důvodu názornosti ve volném rovnoběžném promítání zobrazena v klasickém pohledu.

5 GeoGebra 4 vs. GeoGebra 5

Porovnání obou verzí programu bylo zaměřeno na problematickou oblast ve výuce matematiky - stereometrii. Pro výuku polohových i metrických úloh je program Geogebra vhodný z důvodu možnosti krokování postupu řešení a také znázornění těles a jejich natáčení. Zvolený software je vhodný jako doplněk výuky, který může zlepšit prostorou představivost žáků. Zároveň je však vhodné, aby výuka pomocí software Geogebra byla doplněna výkladem učitele s pomocí klasické tabule. Zapojení informačních technologií do výuky může být přínosem pro rozvoj dovedností žáků, nemělo by ale zaplňovat celou výuku.

Pro tvorbu řešení byl zvolen software GeoGebra 5. Oproti předchozí verzi GeoGebra 4 nabízí mnohem více možností. V následují tabulce lze nalézt porovnání těchto 2 verzí.

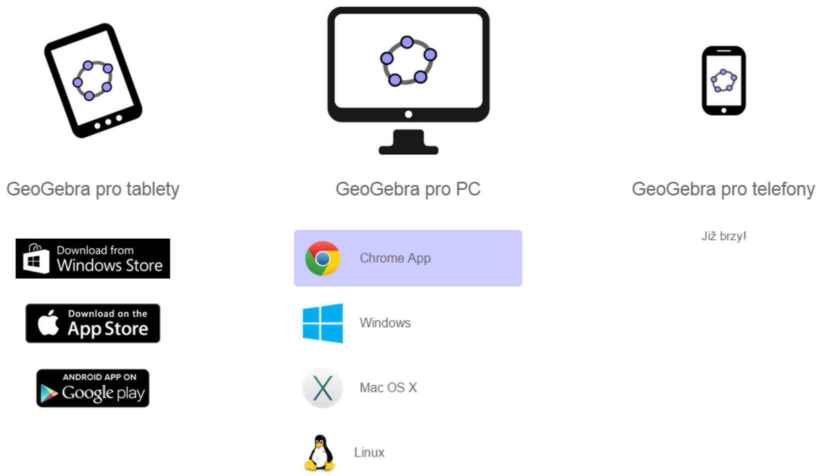
	Geogebra 4	**Geogebra 5**
dostupnost	zdarma	zdarma
instalace na PC	ano	ano
instalace na tablet	ne	ano
instalace na chytrý telefon	ne	ano, ve vývoji
velikosti písma	3 velikosti	8 velikostí
tvorba těles	ne	ano
3D náhled	ne	ano
krokování	ruční, automatické	ruční, automatické
export do .png	ano	ano, ale pouze 2D
otáčení tělesa	ne	ano
vytvoření bodu v prostoru	ne	ne

5.1 Instalace

Instalační soubory programu GeoGebra jsou umístěny na webové stránce www.geogebra.org. Po zadání zadání této webové stránky do prohlížeče se zobrazí následující stránka:

Obrázek 1: Úvodní strana

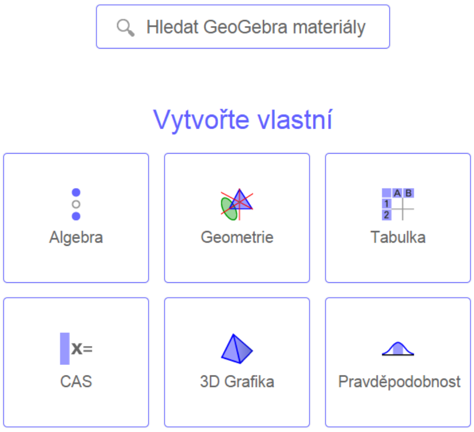
Pro instalaci do počítače či tabletu vybereme **Stáhnout hned**. Načte se následují webová stránka, kde si již vybereme instalaci pro požadovanou platformu. Dojde ke stažení instalačního souboru a instalace probíhá v závislosti na operačním systému.



Obrázek 2: Instalace

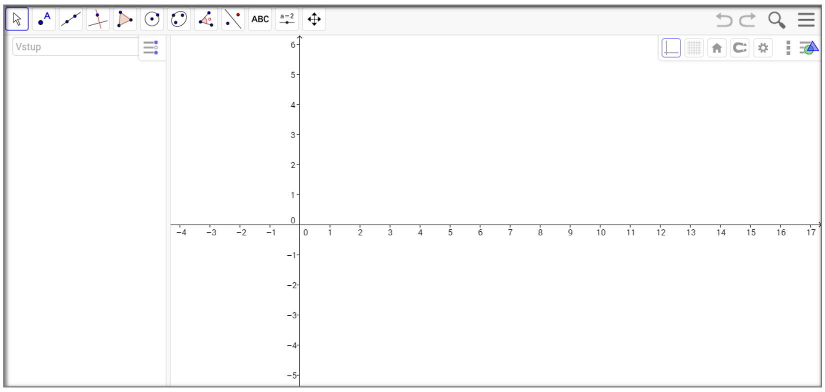
Po nainstalování do počítače otevřeme program GeoGebra. Pro práci v 3D náhledu zapneme v kartě **Zobrazit**→ **Grafický náhled 3D**. Navigační panel nejde bohužel zobrazit v náhledu 3D, ale pouze v nákresně. Pro zapnutí navigačního panelu v kartě **Zobrazit** zapneme **Nákresna** (pokud není již zobrazená). Kdekoli v nákresně klikneme na pravé tlačítko myši a vybereme možnost **Navigační panel**.

Pracovat je možné v prohlížeči bez nutnosti instalace a soubory GeoGebra lze otevřít i z počítače. Na úvodní stránce [9] pro práci v prohlížeči vybereme možnost **Začněte tvořit**. Objeví se následující stránka s výběrem možností:



Obrázek 3: Práce v prohlížeči

Po výběru jedné z možností se otevře stránka, které se vzhledově podobá softwaru GeoGebra instalovanému do počítače.



Obrázek 4: Práce v prohlížeči

6 Polohové úlohy

6.1 Základní pojmy

Pro začátek si zopakujeme základní pojmy planimetrie, s nimiž se pracuje v oblasti stereometrie. Základními geometrickými pojmy jsou bod, přímka a rovina.

Body značíme velkými písmeny latinské abecedy, přímky malými písmeny latinské abecedy a roviny malými písmeny řecké abecedy. Na každé přímce a rovině leží nekonečný počet bodů. Libovolná množina bodů z prostoru se nazývá geometrický útvar v prostoru nebo také prostorový geometrický útvar. Je - li $A \in \rho$, říkáme, že bod A leží v rovině ρ, nebo též rovina ρ prochází bodem A. Je - li $p \subset \rho$, říkáme, že přímka p leží v rovině ρ nebo též, že rovina ρ prochází přímkou p.

V této kapitole si uvedeme základní vlastnosti mezi body, přímkami a rovinami. [10, s.508]

Věta 6.1 *Dvěma různými body A, B prochází právě jedna přímka p. Říkáme, že přímka p je určena body A, B, a píšeme $p = \leftrightarrow AB$ nebo $p = \leftrightarrow BA$.*

Věta 6.2 *Leží - li dva různé body A, B v rovině ρ, leží i přímka jimi určená v rovině ρ.*

Věta 6.3 *Danou přímkou p a daným bodem X ležícím mimo ni prochází právě jedna rovina ρ. Zapisujeme $\rho = \leftrightarrow pX$.*

Věta 6.4 *Třemi danými body A, B, C, které neleží v přímce, prochází právě jedna rovina ρ. Zapisujeme $\rho = \leftrightarrow ABC$.*

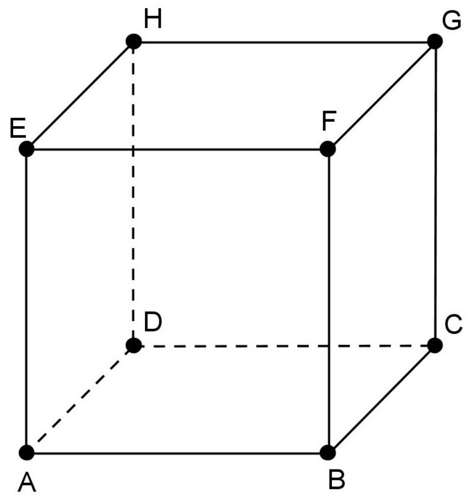
Věta 6.5 *Dvěma různými přímkami p, q, které mají společný bod, prochází právě jedna rovina ρ. Zapisujeme $\rho = \leftrightarrow pq$.*

Věta 6.6 *Procházejí - li dvě různé roviny ρ, σ týmž bodem A, obsahují právě jednu přímku p, která prochází bodem A. Mimo tuto přímku p nemají už žádný společný bod.*

Libovolná rovina ρ rozděluje prostor na dvě části zvané poloprostory (navzájem opačné), přičemž společná rovina ρ je jejich hraniční rovina. Body poloprostoru, které neleží v jeho hraniční rovině, se nazývají vnitřní body poloprostoru a množinu všech těchto bodů tvoří vnitřek poloprostoru. Poloprostor s hraniční rovinou ρ a vnitřním bodem M se značí $\mapsto \rho M$. [11, s.279]

6.1.1 Pracovní list č. 1

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$.

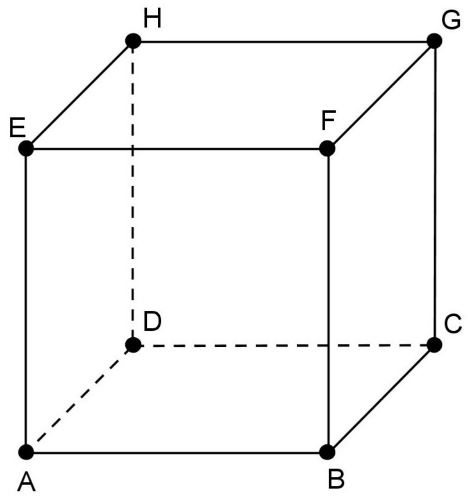


a) Kolik různých přímek je určeno vrcholy A, C, E, F, H?

b) Kolik různých přímek je určeno všemi vrcholy krychle?

c) Kolik z nich prochází bodem B?

Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda v rovině BCE leží:



a) body H, F

b) přímky CH, AC.

Příklad 3 Kolika přímkami lze spojit šest různých bodů v prostoru, z nichž žádné tři neleží v téže přímce? Kolik těchto přímek prochází každým z těchto bodů?

Příklad 4 Vysvětlete, proč stativ k fotoaparátu má jen 3 nohy.

6.1.2 Řešení pracovního listu č. 1

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$.

a) Kolik různých přímek je určeno vrcholy A, C, E, F, H?

b) Kolik různých přímek je určeno všemi vrcholy krychle?

c) Kolik z nich prochází bodem B?

Řešení:

a) Z vrcholu A: AC, AE, AF, AH, z vrcholu C: CE, CF, CH, z vrcholu E: EF, EH, z vrcholu F: FH. Počet různých přímek je 10.

b) Máme 8 vrcholů A, B, C, D, E, F, G, H. Počet různých přímek určených vrcholy krychle je 28, viz následující tabulka.

Vrchol	různé přímky	shodné přímky
A	$AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH$	
B	BC, BD, BE, BF, BG, BH	AB
C	CD, CE, CF, CG, CH	AC, BC
D	DE, DF, DG, DH	AD, BD, CD
E	EF, EG, EH	AE, BE, CE, DE
F	FG, FH	AF, BF, CF, DF, EF, GF
G	GH	AG, BG, CG, DG, EG, FG
H		$AH, BH, CH, DH, EH, FH, GH$

Z každého vrcholu lze vést 7 přímek, vrcholů krychle je 8. Takto získáme $7 \cdot 8 = 56$ přímek. Každá přímka je však započtena 2x, proto 56 vydělíme dvěma. Přímek je tedy 28.

c) Z bodu B vychází 7 různých přímek.

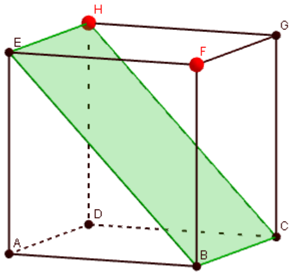
Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda v rovině BCE leží:

a) body H, F

b) přímky CH, AC.

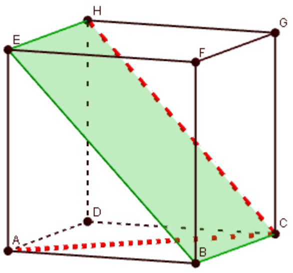
Řešení:

a) Bod H leží, bod F neleží.



Řešení GeoGebra

b) Přímka CH leží, AC neleží.



Řešení GeoGebra

Příklad 3 Kolika přímkami lze spojit šest různých bodů v prostoru, z nichž žádné tři neleží v téže přímce? Kolik těchto přímek prochází každým z těchto bodů?

Řešení:

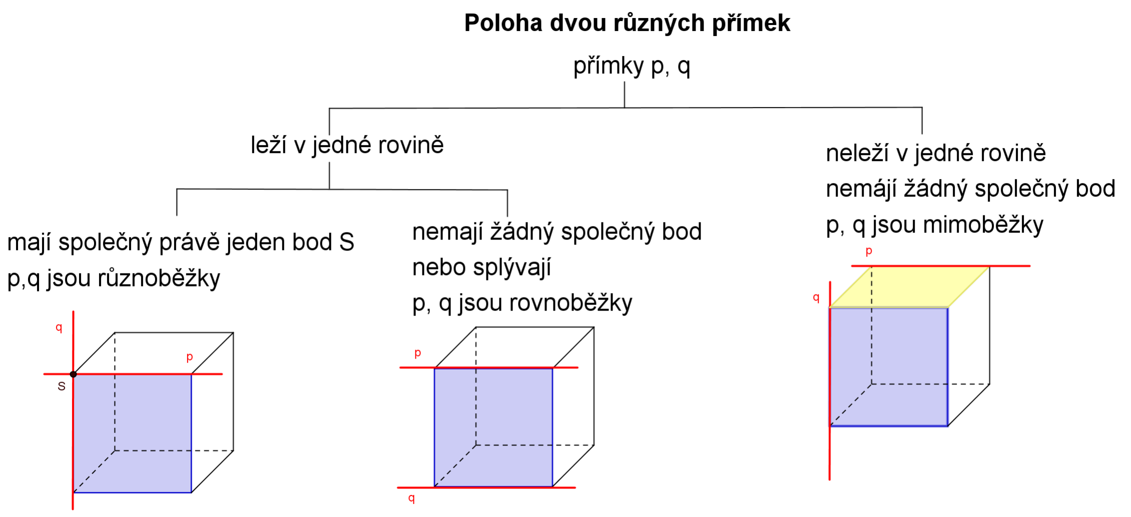
Přímka je určena dvěma body. Ze šesti přímek lze vytvořit $\binom{6}{2} = 30$ dvojic. Každá je však započtena 2x, proto výsledný počet přímek je 15. Z jednoho bodu lze vést k zbývajícím bodům 5 různých přímek.

Příklad 4 Vysvětlete, proč stativ k fotoaparátu má jen 3 nohy.

Řešení:

Tři nohy stativu jsou jako 3 body. Tři body vytváří rovinu.

6.2 Vzájemná poloha dvou přímek



Obrázek 5: Poloha dvou přímek v prostoru

- Přímky p, q jsou různoběžné. Jejich průnikem je právě jeden bod S, který nazýváme průsečík. Značíme $p \nparallel q$ a $S \in p \cap q$.
- Přímky p, q jsou rovnoběžné. Značíme $p \parallel q$.
  a) rovnoběžné různé: p a q leží v jedné rovině ϱ, $p \cap g = \{\}$
  b) totožné: p a q leží v jedné rovině ϱ, $p \cap g = p = q$
- Přímky p, q jsou mimoběžné. Každá z přímek leží v jiné rovině a nemají žádný průsečík. Značíme $p \cap q = \{\}$

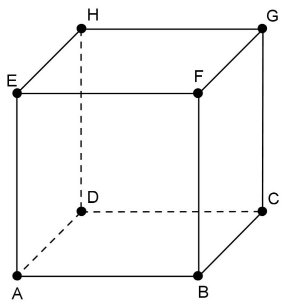
Poznámka 6.1 *Zápis $p \nparallel q$ pro přímky p, q v prostoru vyjadřuje, že přímky p, q nejsou rovnoběžné, tj. jsou různoběžné, anebo mimoběžné.*

Poznámka 6.2 *Každou přímku m, která protíná dvě přímky p, q ve dvou různých bodech U, V, nazýváme příčkou přímek p, q. [11, s.280]*

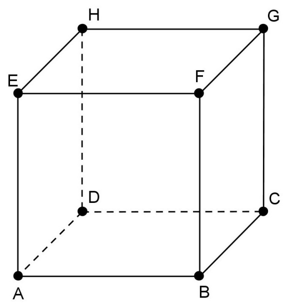
6.2.1 Pracovní list č. 2

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Uveďte všechny přímky, které procházejí bodem E a dalším vrcholem krychle a jsou s přímkou BC:

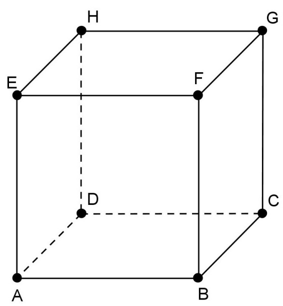
a) rovnoběžné



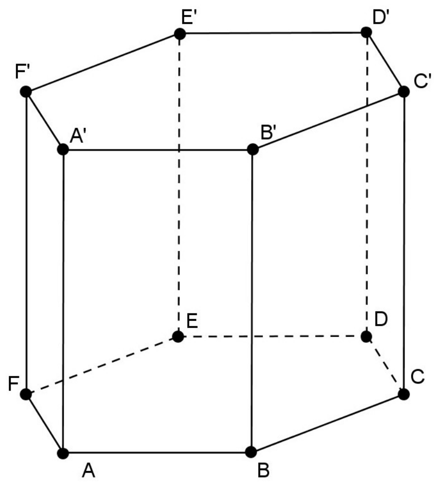
b) různoběžné



c) mimoběžné

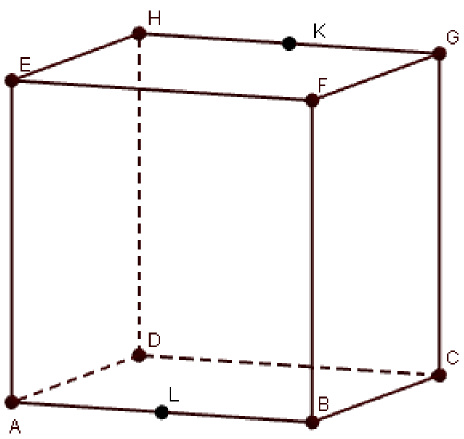


Příklad 2 Je dán pravidelný šestiboký hranol s podstavami $ABCDEF$ a $A'B'C'D'E'F'$. Určete aspoň tři dvojice mimoběžných přímek procházejících jeho vrcholy a pomocí vrcholů hranolu jejich příčky.

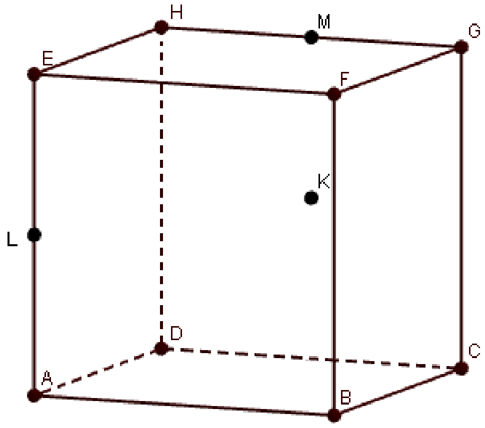


Příklad 3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete vzájemnou polohu přímek:

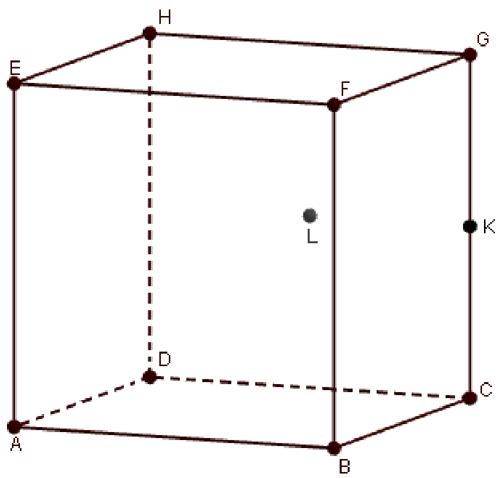
a) AK, DL, kde bod K je středem přímky GH, bod L je středem přímky AB



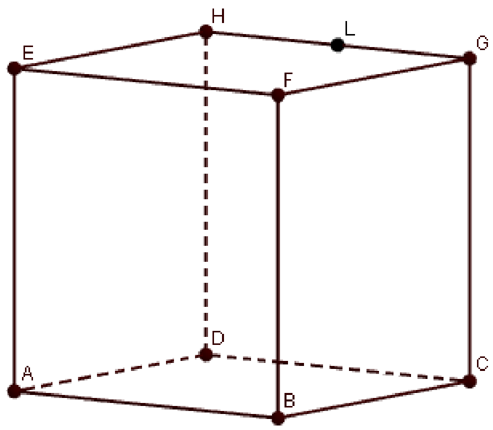
b) AK, LM, kde bod K je středem přímky CH, bod L je středem přímky AE a bod M je středem přímky GH



c) BK, AL, kde bod K je středem přímky CG, bod L je středem přímky CH

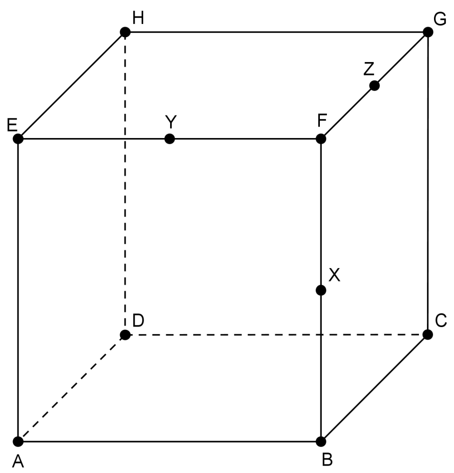


d) EC, AL, kde bod L je středem přímky GH.

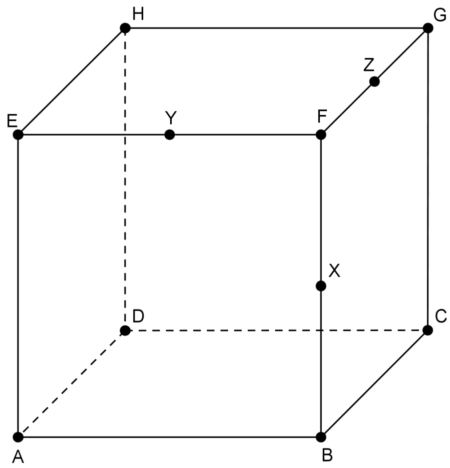


Příklad 4 Je dána krychle $ABCDEFGH$, body X, Y, Z jsou po řadě středy hran $FB, FE,$ FG. Určete vzájemnou polohu přímek:

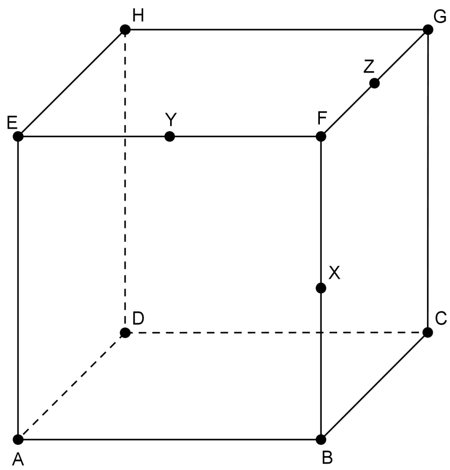
a) XY, EZ



b) YZ, EH



c) XZ, AH.



6.2.2 Řešení pracovního listu č. 2

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Uveďte všechny přímky, které procházejí bodem E a dalším vrcholem krychle a jsou s přímkou BC:

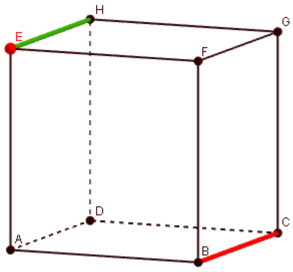
a) rovnoběžné

b) různoběžné

c) mimoběžné

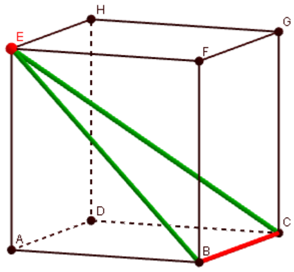
Řešení:

a) EH



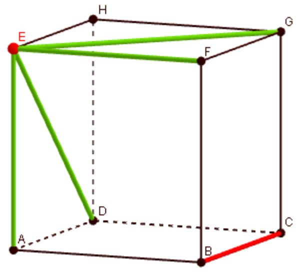
Řešení GeoGebra

b) BE, CE



Řešení GeoGebra

c) AE, EG, EF, ED



Řešení GeoGebra

Příklad 2 Je dán pravidelný šestiboký hranol s podstavami $ABCDEF$ a $A'B'C'D'E'F'$. Určete aspoň tři dvojice mimoběžných přímek procházejících jeho vrcholy a pomocí vrcholů hranolu jejich příčky.

Řešení:

Např: Mimoběžky AB, CC', jejich příčka BC; mimoběžky FE, AA', jejich příčka AF; mimoběžky $B'C', DD'$, jejich příčka $C'D'$.

Příklad 3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete vzájemnou polohu přímek:

a) AK, DL, kde bod K je středem přímky GH, bod L je středem přímky AB

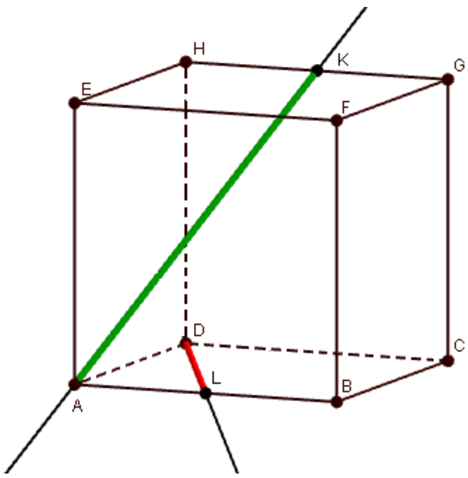
b) AK, LM, kde bod K je středem přímky CH, bod L je středem přímky AE a bod M je středem přímky GH

c) BK, AL, kde bod K je středem přímky CG, bod L je středem přímky CH

d) EC, AL, kde bod L je středem přímky GH.

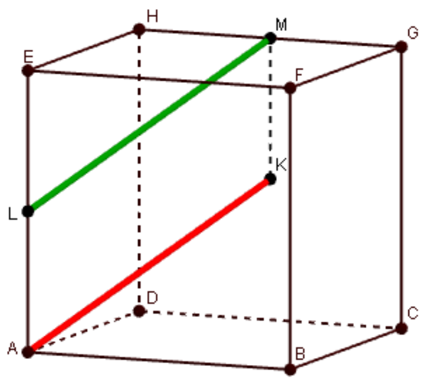
Řešení:

a) Přímky AK a DL jsou mimoběžné.



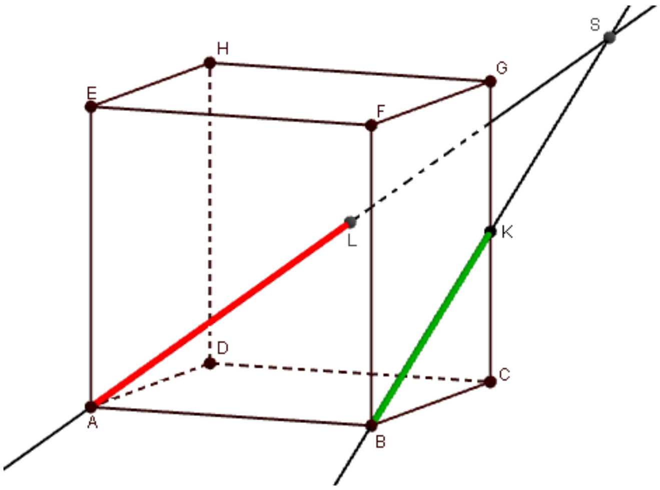
Řešení GeoGebra

b) Přímky AK a LM jsou rovnoběžné.



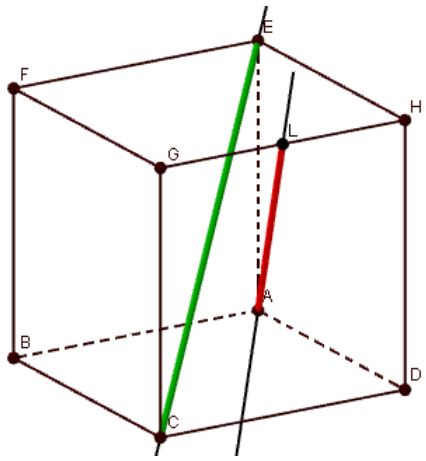
Řešení GeoGebra

c) Přímky BK a AL jsou různoběžné.



Řešení GeoGebra

d) Přímky EC a AL jsou mimoběžné.



Řešení GeoGebra

Příklad 4 Je dána krychle $ABCDEFGH$, body X, Y, Z jsou po řadě středy hran FB, FE, FG. Určete vzájemnou polohu přímek:

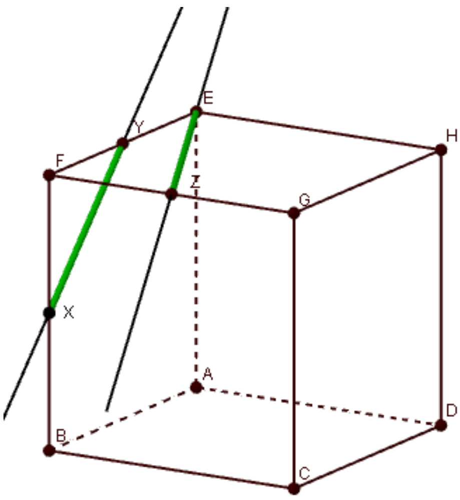
a) XY, EZ

b) YZ, EH

c) XZ, AH.

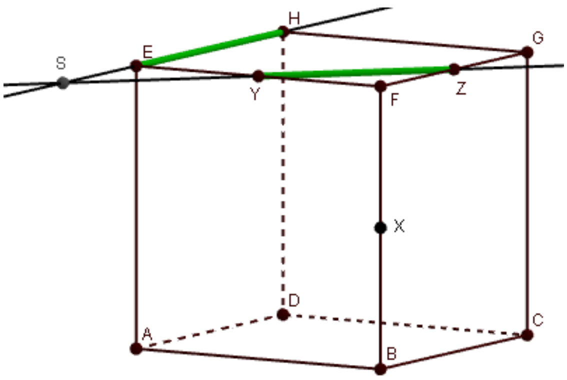
Řešení

a) mimoběžné



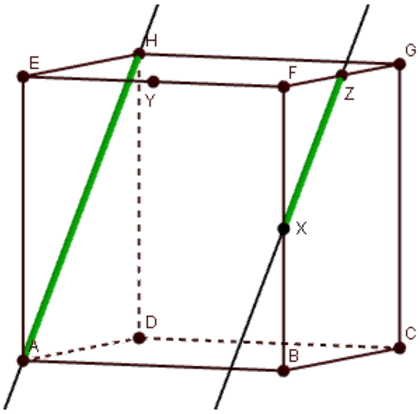
Řešení GeoGebra

b) různoběžné



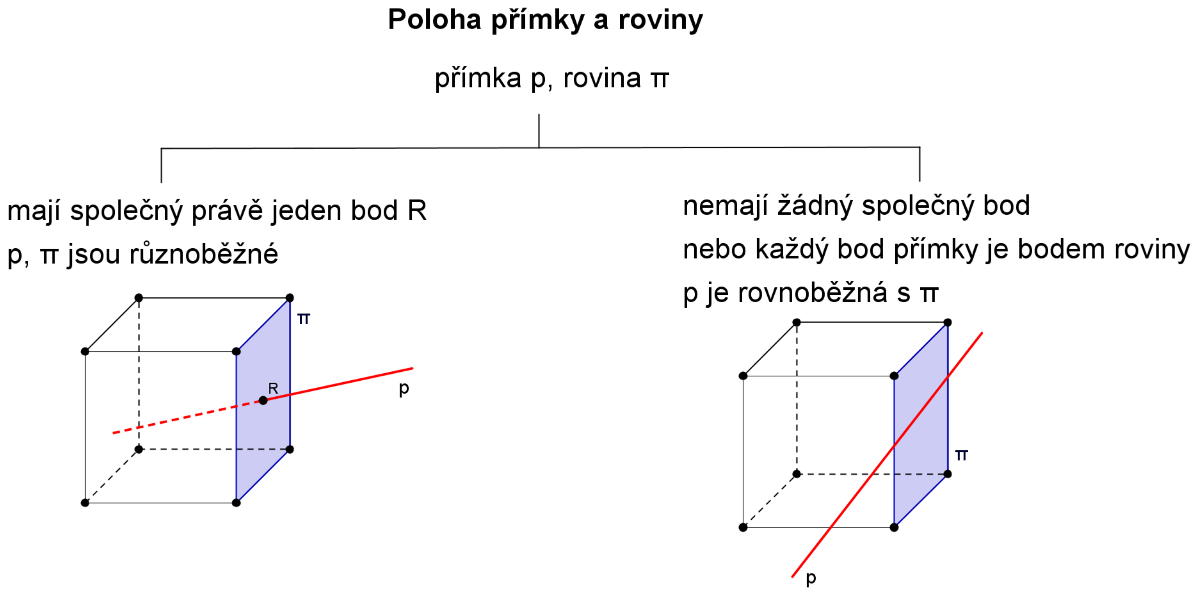
Řešení GeoGebra

c) rovnoběžné



Řešení GeoGebra

6.3 Vzájemná poloha přímky a roviny



Obrázek 6: Poloha přímky a roviny v prostoru

- Přímka p a rovina π jsou rovnoběžné. Značíme $p \parallel \pi$.

  a) přímka leží v rovině: přímka $p \in \pi$, $p \cap \pi = p$

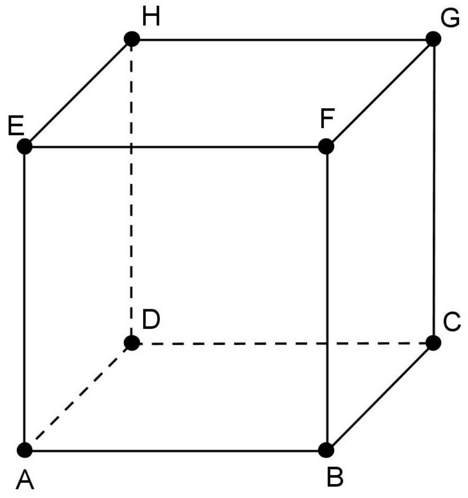
  b) přímka neleží v rovině: přímka $p \notin \pi$, $p \cap \pi = \{\}$

- Přímka p a rovina π jsou různoběžné. Jejich průnikem je právě jeden bod R, který nazýváme průsečík. Značíme $p \nparallel \pi$ a $R \in p \cap \pi$. [10, s.507]

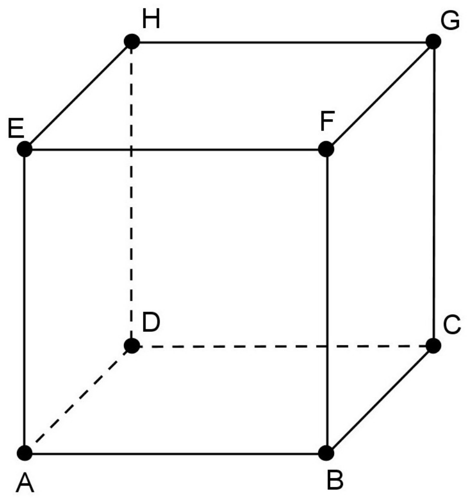
6.3.1 Pracovní list č. 3

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny přímky, které procházejí bodem H a některým dalším vrcholem krychle a s rovinou ABC jsou:

a) rovnoběžné

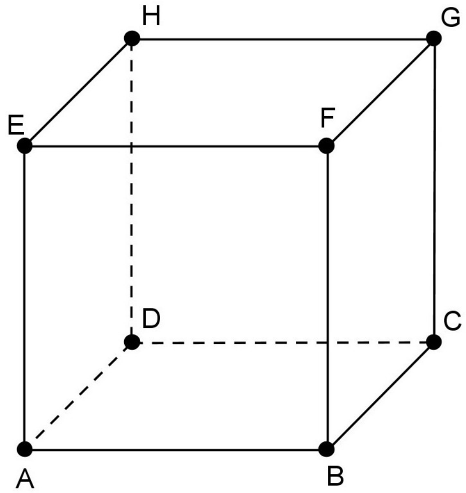


b) různoběžné.

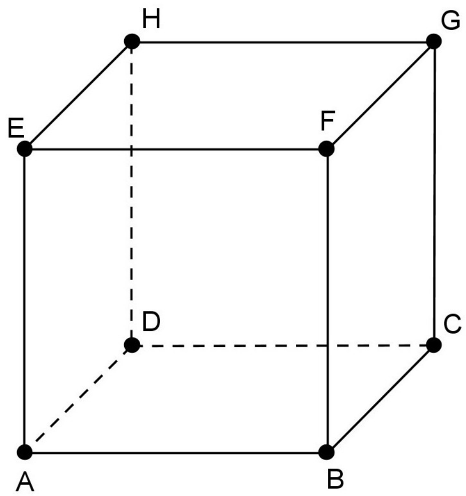


Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny roviny, které procházejí bodem H a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s přímkou BC:

a) rovnoběžné

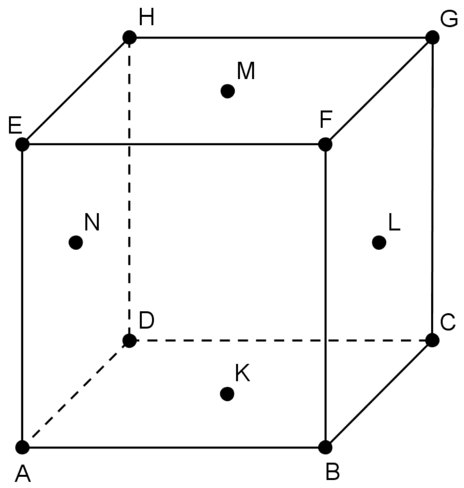


b) různoběžné.

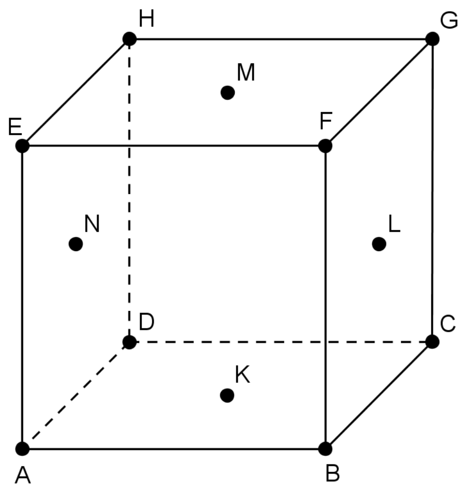


Příklad 3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Body K, L, M, N jsou po řadě středy stěn $ABCD, BCFG, EFGH, ADHE$. Určete, jaká je vzájemná poloha

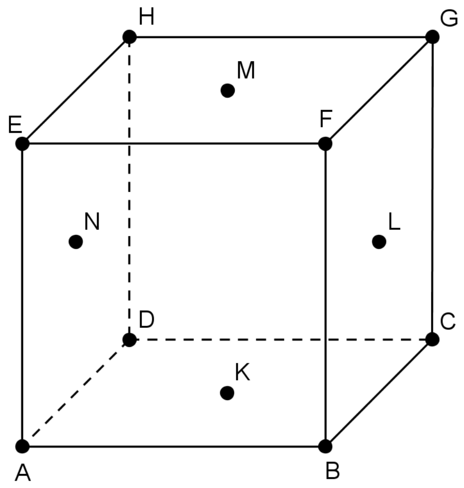
a) přímky KL a roviny CDH



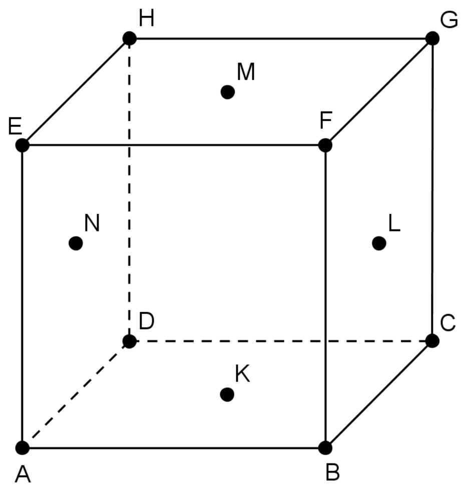
b) přímky LN a roviny ABG



c) přímky LM a roviny BCE

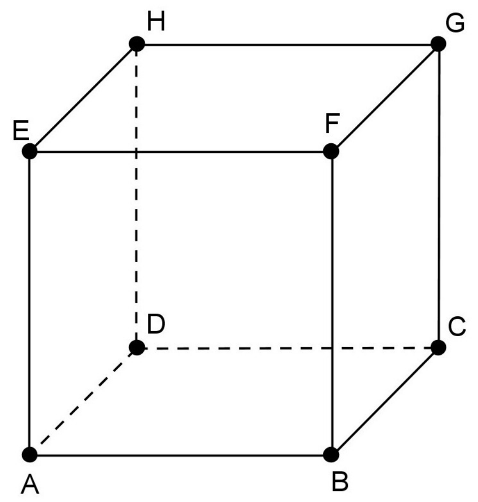


d) přímky KN a roviny EFG.

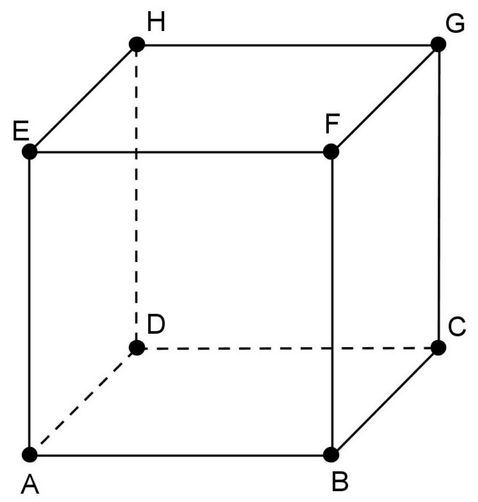


Příklad 4 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny:

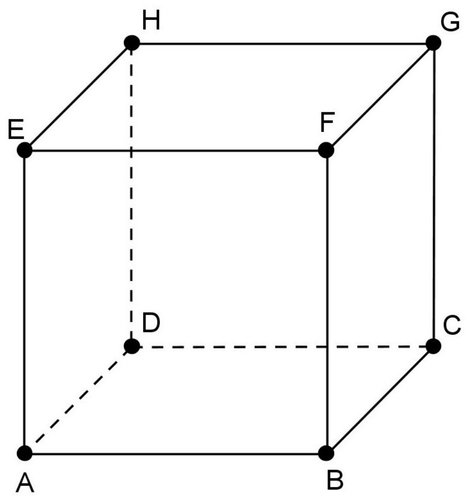
a) EC a ABH



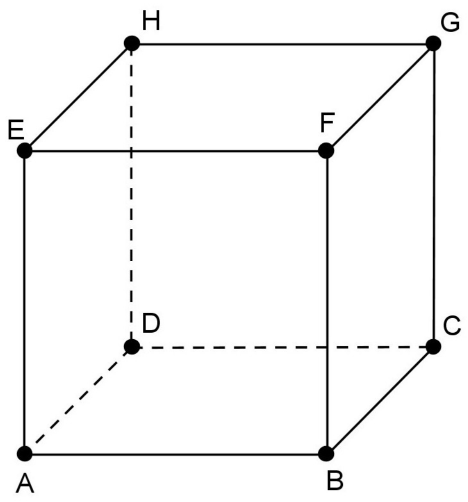
b) FH a BDH



c) BG a ABH



d) AG a BHS kde S je středem AB.



6.3.2 Řešení pracovního listu č. 3

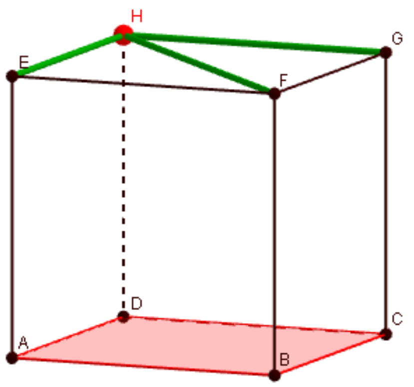
Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny přímky, které procházejí bodem H a některým dalším vrcholem krychle a s rovinou ABC jsou:

a) rovnoběžné

b) různoběžné.

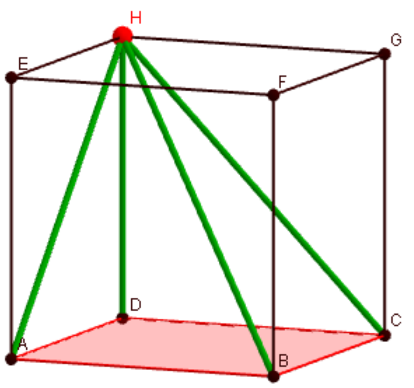
Řešení:

a) EH, FH, GH



Řešení GeoGebra

b) AH, BH, CH, DH



Řešení GeoGebra

Poznámka: Pokud sečteme počet různoběžných přímek a rovnoběžných, které vycházejí z jednoho daného bodu, získáme celkem 7 různých přímek vycházejících z bodu do dalších bodů krychle. Viz. Řešení pracovního listu č. 1.

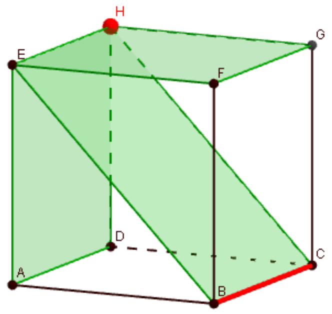
Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny roviny, které procházejí bodem H a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s přímkou BC:

a) rovnoběžné

b) různoběžné.

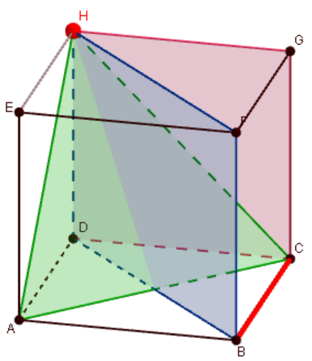
Řešení:

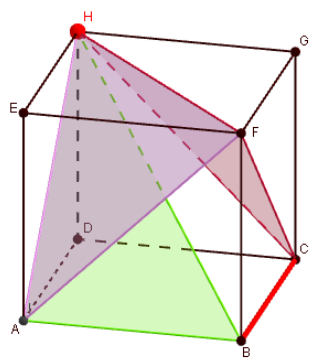
a) ADH, EFH, BCH



Řešení GeoGebra

b) $CDH, ACH, BDH, ABH, AFH, CFH$





Řešení GeoGebra

Příklad 3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Body K, L, M, N jsou po řadě středy stěn $ABCD, BCFG, EFGH, ADHE$. Určete, jaká je vzájemná poloha

a) přímky KL a roviny CDH

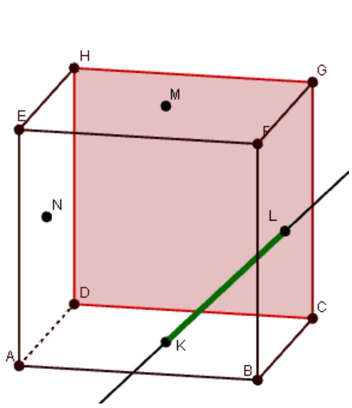
b) přímky LN a roviny ABG

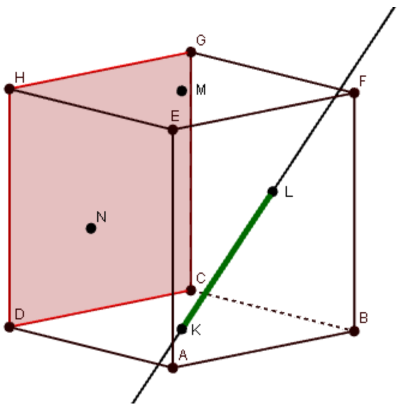
c) přímky LM a roviny BCE

d) přímky KN a roviny EFG.

Řešení:

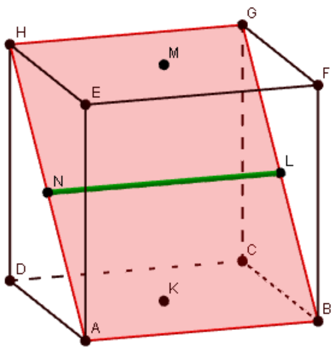
a) Přímka KL a rovina CDH je rovnoběžná.





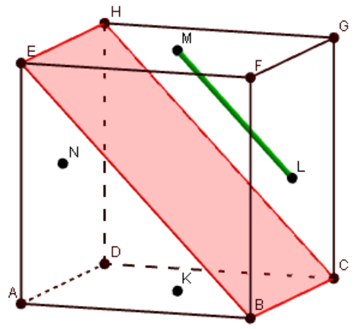
Řešení GeoGebra

b) Přímka LN leží v rovině ABG.



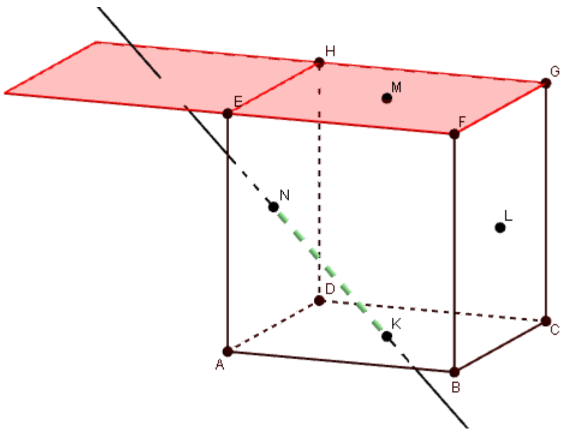
Řešení GeoGebra

c) Přímka LM a rovina BCE jsou rovnoběžné.



Řešení GeoGebra

d) Přímka KN a rovina EFG jsou různoběžné.



Řešení GeoGebra

Příklad 4 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny

a) EC a ABH

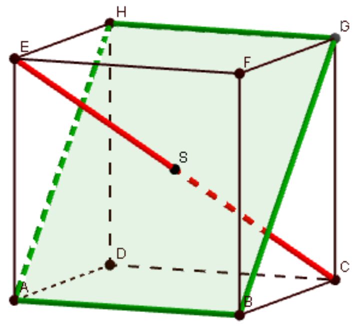
b) FH a BDH

c) BG a ABH

d) AG a BHS kde S je středem AB.

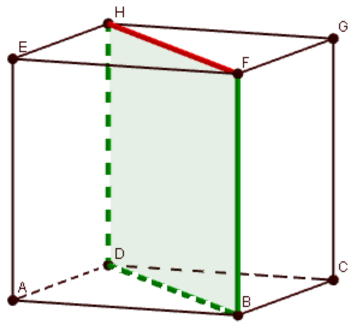
Řešení:

a) Přímka EC je různoběžná s ABH.



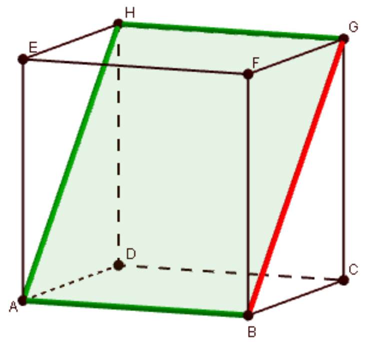
Řešení GeoGebra

b) Přímka FH leží v rovině BDH.



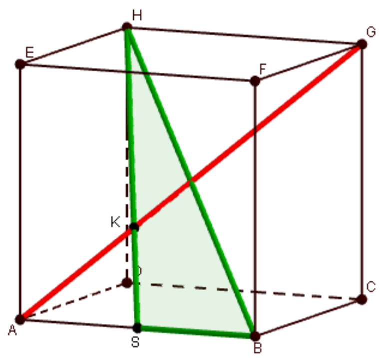
Řešení GeoGebra

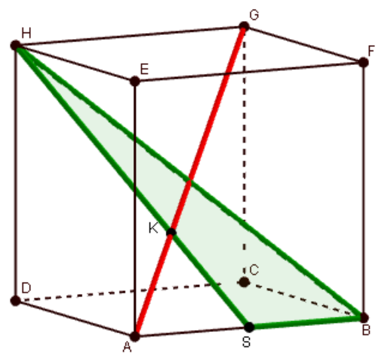
c) Přímka BG leží v rovině ABH.



Řešení GeoGebra

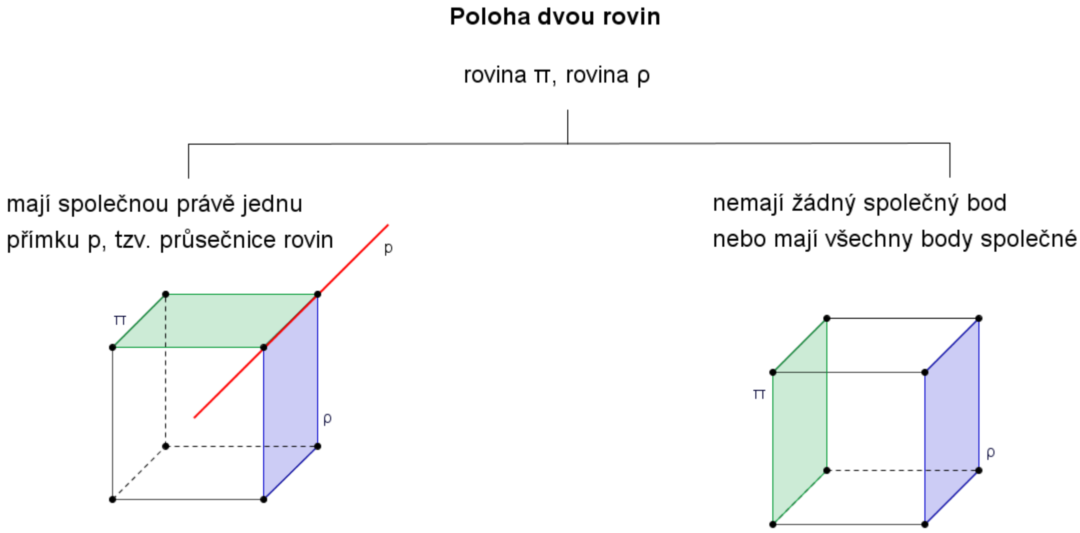
d) Přímka AG je různoběžná s rovinou BHS.





Řešení GeoGebra

6.4 Vzájemná poloha dvou rovin



Obrázek 7: Poloha dvou rovin

- Rovina ϱ a rovina π jsou rovnoběžné. Značíme $\varrho \parallel \pi$.

  a) totožné: rovina $\varrho \cap \pi = \varrho = \pi$

  b) rovnoběžné různé: rovina $\varrho \cap \pi = \{\}$

- Rovina ϱ a rovina π jsou různoběžné. Jejich průnikem je přímka p, kterou nazýváme průsečnicí. Značíme $\varrho \nparallel \pi$ a $p \in \varrho \cap \pi$. [10, s.508]

6.4.1 Pracovní list č. 4

Příklad 1 Určete jaká je vzájemná poloha dvou rovin, jestliže mají společné:

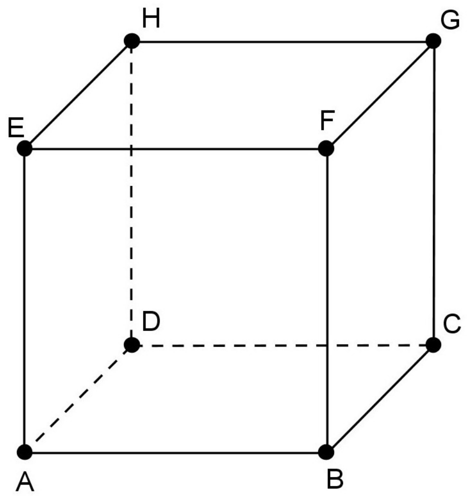
a) dva různé body

b) tři různé body neležící v přímce

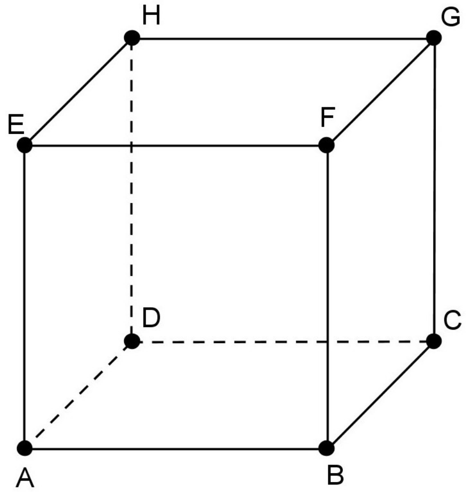
c) dvě rovnoběžky.

Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny roviny, které procházejí bodem H a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s rovinou ABC

a) rovnoběžné



b) různoběžné.



6.4.2 Řešení pracovního listu č. 4

Příklad 1 Určete jaká je vzájemná poloha dvou rovin, jestliže mají společné:

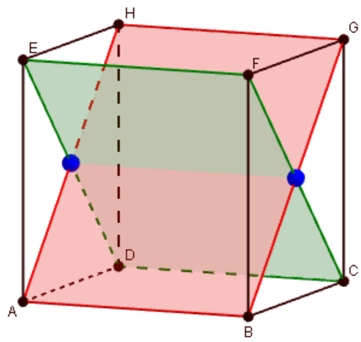
a) dva různé body

b) tři různé body neležící v přímce

c) dvě rovnoběžky.

Řešení:

a) Roviny jsou různoběžné nebo totožné.



Řešení GeoGebra

b) Roviny jsou totožné.

c) Roviny jsou totožné.

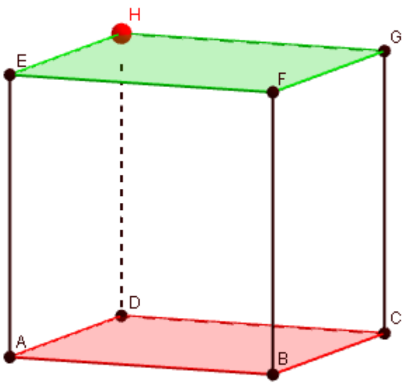
Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny roviny, které procházejí bodem H a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s rovinou ABC

a) rovnoběžné

b) různoběžné.

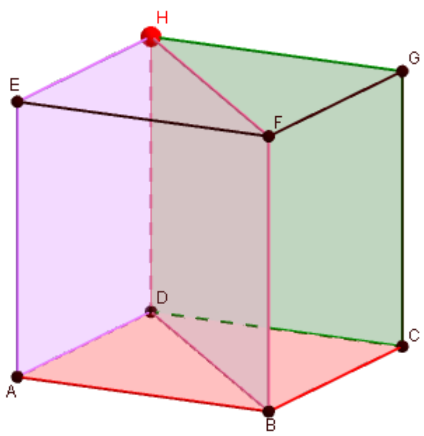
Řešení:

a) EFH



Řešení GeoGebra

b) $ADH, BDH, CDH, ACH, BCH, ABH, HAF, HCF$. Některá řešení jsou znázorněna v následujícím obrázku:



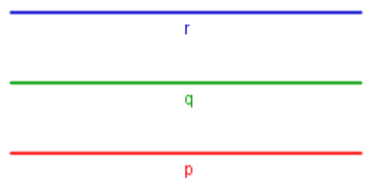
Řešení GeoGebra

6.5 Rovnoběžnost přímek a rovin

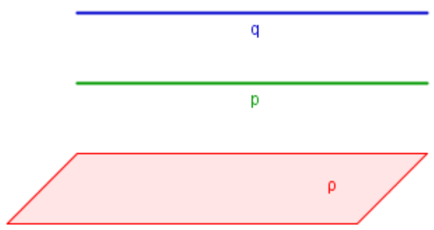
Věta 6.1 *Daným bodem P prochází právě jedna rovina ϱ rovnoběžná s danou rovinou ρ.*

Věta 6.2 *Pro každé tři přímky p, q, r a každé tři roviny ϱ, σ, τ platí:*

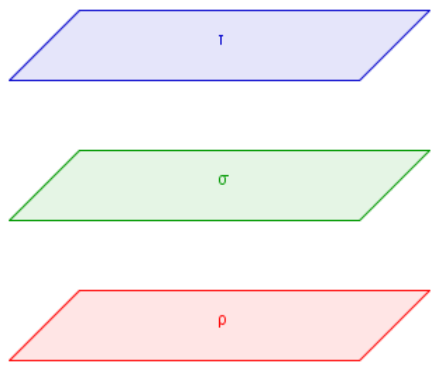
a) *Je - li $p \parallel q$ a $q \parallel r$, pak je také $p \parallel r$*



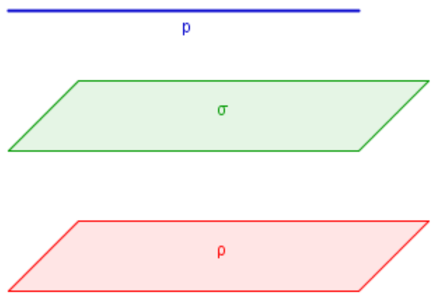
b) *Je - li $p \parallel q$ a $p \parallel \varrho$, pak je také $q \parallel \varrho$*



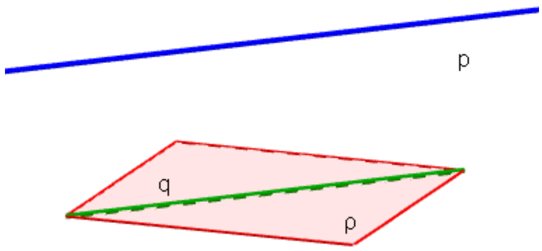
c) *Je - li $\varrho \parallel \sigma$ a $\sigma \parallel \tau$, pak je také $\varrho \parallel \tau$*



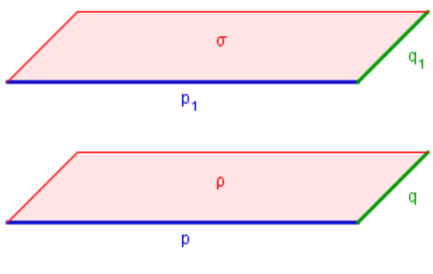
d) *Je - li* $\varrho \parallel \sigma$ *a* $p \parallel \varrho$, *pak je také* $p \parallel \sigma$



Věta 6.3 *Je - li přímka* p *rovnoběžná s některou přímkou* q *roviny* ϱ, *pak je rovnoběžná s rovinou* ϱ.

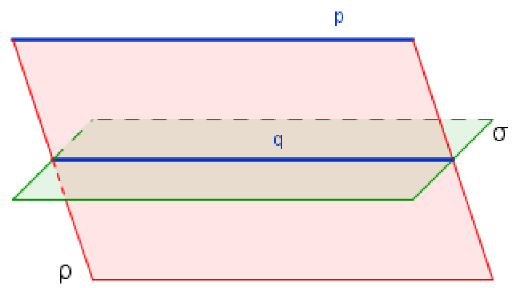


Věta 6.4 *Obsahuje - li rovina* ϱ *dvě různoběžky* p, q, *z nichž každá je rovnoběžná s rovinou* σ, *pak roviny* ϱ, σ *jsou rovnoběžné.*



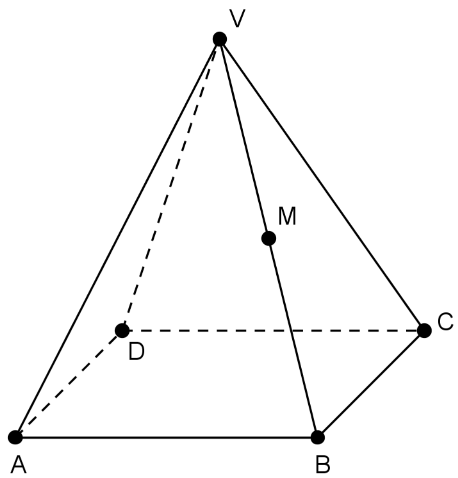
Věta 6.5 a) *Nechť daná přímka p je rovnoběžná s danou rovinou ϱ . Potom každá rovina, která prochází přímkou p a je různoběžná s rovinou ϱ, protíná tuto rovinu v přímce q rovnoběžné s přímkou p.*

b) *Nechť přímka p je rovnoběžná s každou ze dvou různoběžných rovin ϱ, σ. Potom je přímka p rovnoběžná s průsečnicí q rovin ϱ, σ. [10, s.508]*



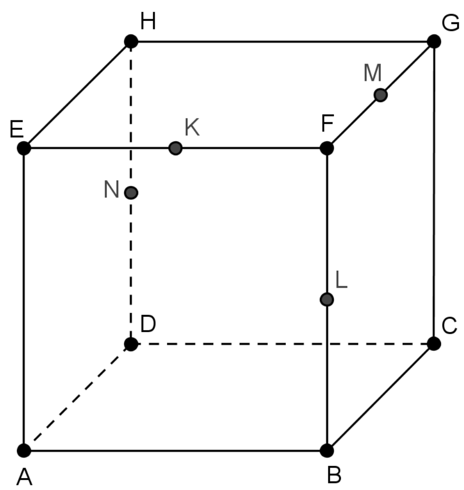
6.5.1 Pracovní list č. 5

Příklad 1 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, bod M je středem hrany BV. Dokažte, že přímka DV je rovnoběžná s rovinou ACM.

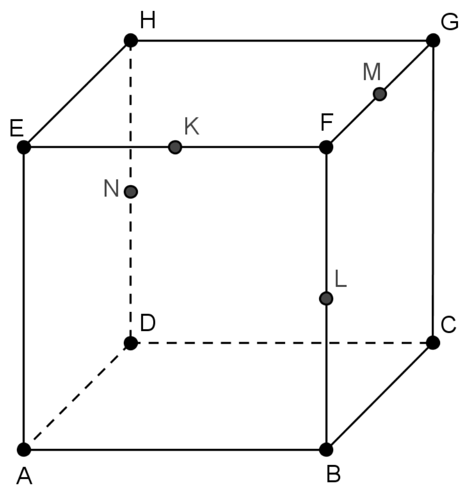


Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$, body K, L, M, N jsou po řadě středy hran EF, BF, FG, DH. Dokažte rovnoběžnost rovin:

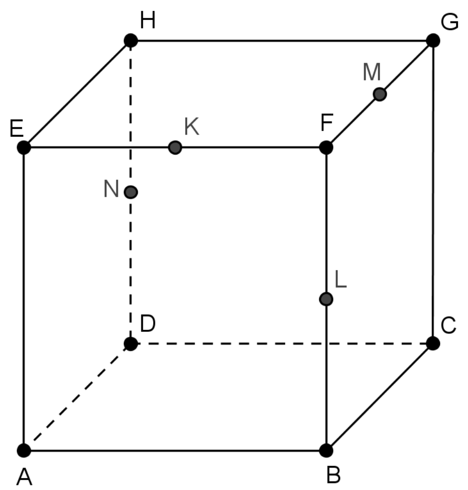
a) KLM, BEG



b) KLM, ACH

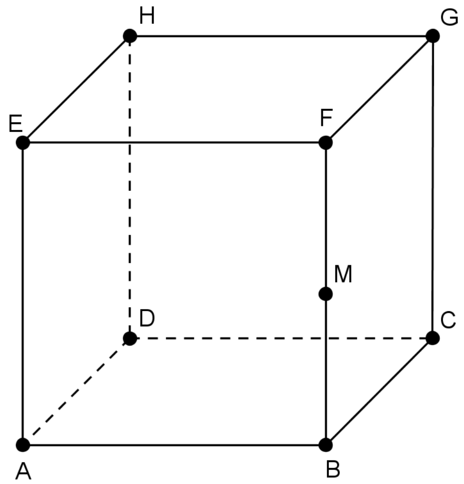


c) $ACN, ELG.$

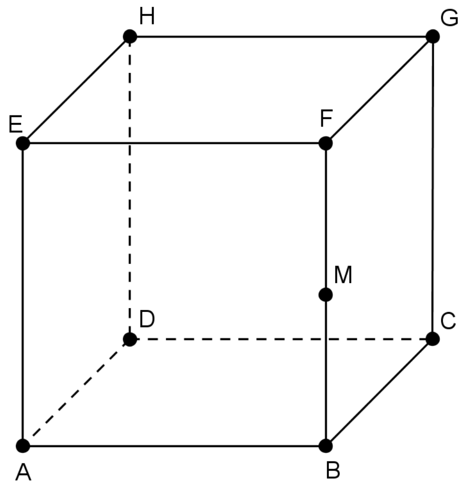


Příklad 3 Bod M je středem hrany BF krychle $ABCDEFGH$. Veďte bodem M rovinu rovnoběžnou s rovinou:

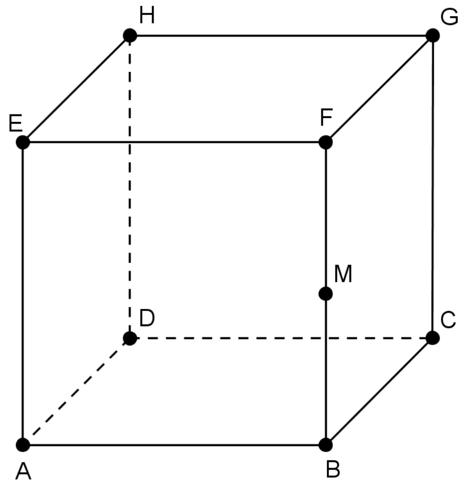
a) ADH



b) ABC



c) ACH.

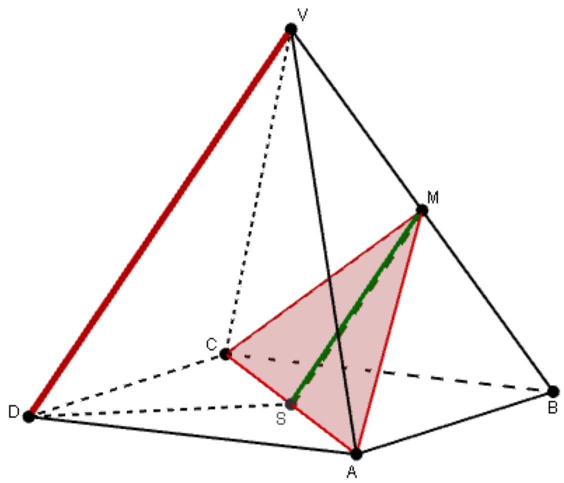


6.5.2 Řešení pracovního listu č. 5

Příklad 1 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, bod M je středem hrany BV. Dokažte, že přímka DV je rovnoběžná s rovinou ACM.

Řešení:

Podle věty 6.3 je přímka DV s rovinou rovnoběžná, pokud existuje přímka, která leží v dané rovině ACM a je s přímkou DV rovnoběžná. V rovině ACM leží přímka MS, kde bod S je středem podstavy $ABCD$. Přímka $DV \parallel MS$. Body D, V, M, S tvoří hrany lichoběžníku.



Řešení GeoGebra

Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$, body K, L, M, N jsou po řadě středy hran EF, BF, FG, DH. Dokažte rovnoběžnost rovin:

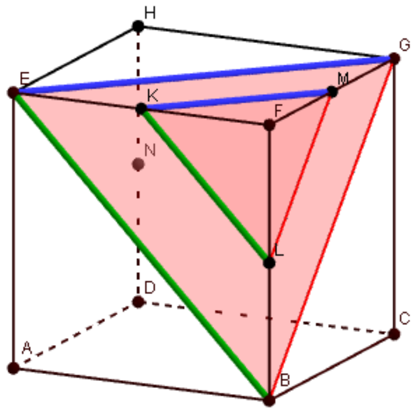
a) KLM, BEG

b) KLM, ACH

c) ACN, ELG.

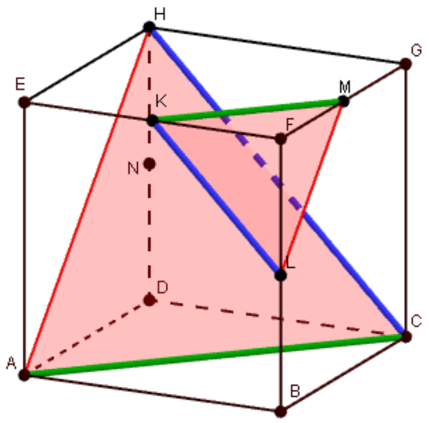
Řešení:

a) Řešení vychází z věty 6.4. Dvě roviny KLM, BEG jsou rovnoběžné, pokud např. KLM obsahuje dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s rovinou BEG. $KL \nparallel KM$ a zároveň $KL \parallel BE$ a $KM \parallel EG$. Roviny KLM a BEG jsou rovnoběžné.



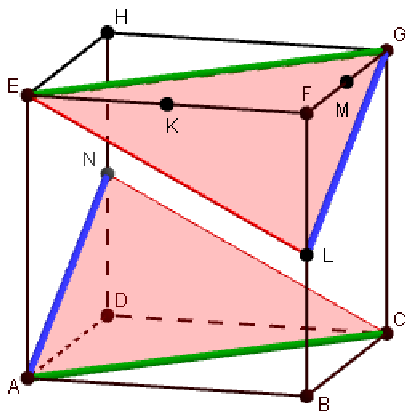
Řešení GeoGebra

b) Řešení vychází z věty 6.4. Dvě roviny KLM, ACH jsou rovnoběžné, pokud např. KLM obsahuje dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s rovinou ACH. $KL \nparallel AC$ a zároveň $KL \parallel CH$ a $KM \parallel AC$. Roviny KLM a ACH jsou rovnoběžné.



Řešení GeoGebra

c) Řešení vychází z věty 6.4. Dvě roviny ACN, ELG jsou rovnoběžné, pokud např. ACN obsahuje dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s rovinou ELG. $KL \parallel KM$, $AC \nparallel AN$ a zároveň $AC \parallel EG$ a $LG \parallel AN$. Roviny ACN a ELG jsou rovnoběžné.



Řešení GeoGebra

Příklad 3 Bod M je středem hrany BF krychle $ABCDEFGH$. Veďte bodem M rovinu rovnoběžnou s rovinou:

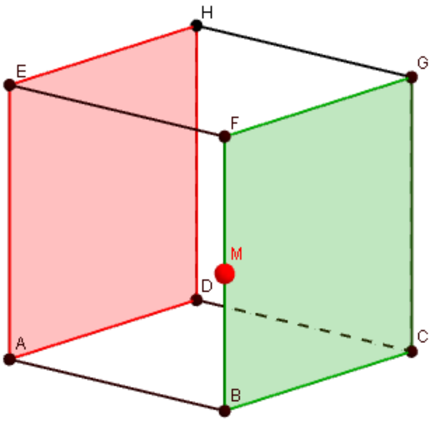
a) ADH

b) ABC

c) ACH.

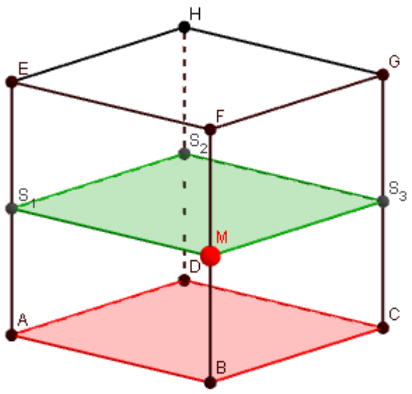
Řešení:

a) Hledanou rovinou je BCG.



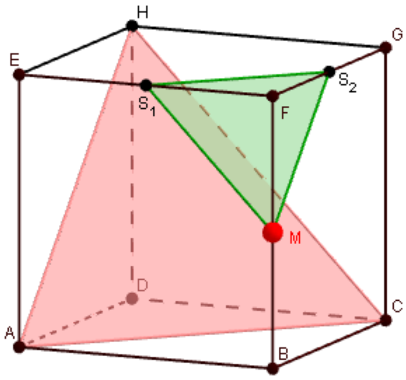
Řešení GeoGebra

b) Hledanou rovinou je rovina S_1MS_3, kde body S_1 je středem hrany AE, bod S_3 je středem hrany CG.



Řešení GeoGebra

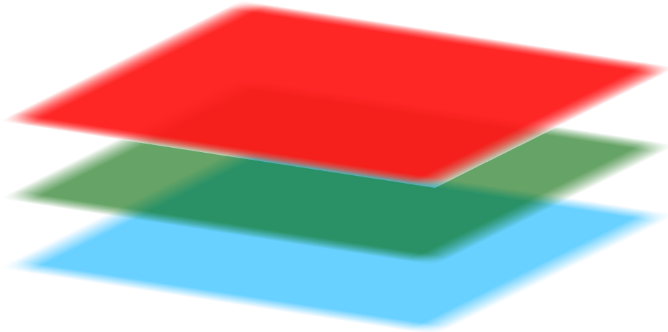
c) Hledanou rovinou je rovina S_1MS_2, kde bod S_1 je středem hrany EF a bod S_2 je středem hrany FG.



Řešení GeoGebra

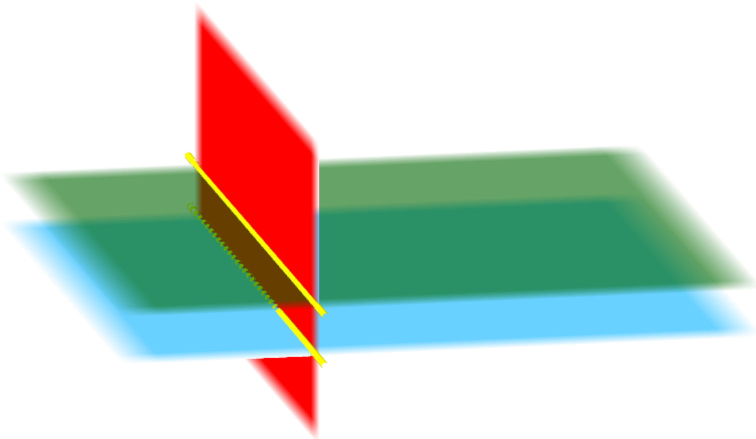
6.6 Vzájemná poloha tří rovin

- Každé dvě roviny jsou rovnoběžné. Jedná se o svazek rovin 2. druhu.



Obrázek 8: Tři rovnoběžné roviny

- Dvě z daných rovin jsou rovnoběžné, třetí je s nimi různoběžná a protíná je v rovnoběžných průsečnicích.

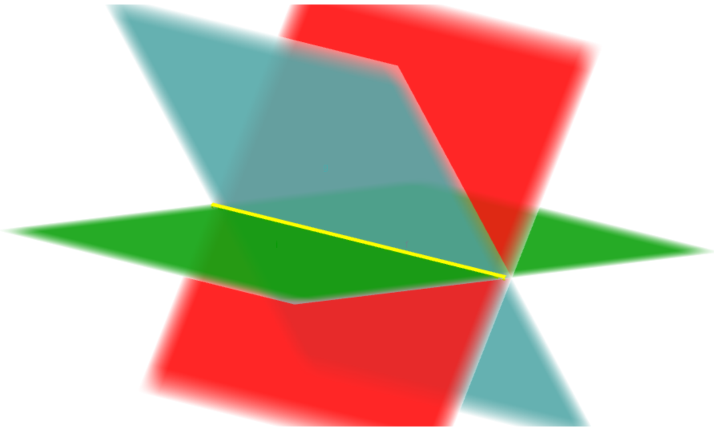


Obrázek 9: Dvě roviny rovnoběžné, třetí s nimi různoběžná

- Každé dvě z daných rovin jsou různoběžné a všechny tři průsečnice jsou rovnoběžné různé. Jedná se o trs rovin 2. druhu.

Obrázek 10: Tři různoběžné roviny, tři rovnoběžné průsečnice

- Každé dvě z daných rovin jsou různoběžné a všechny se protínají v jedné přímce. Jedná se o svazek rovin 1. druhu.



Obrázek 11: Tři různoběžné roviny, jedna průsečnice

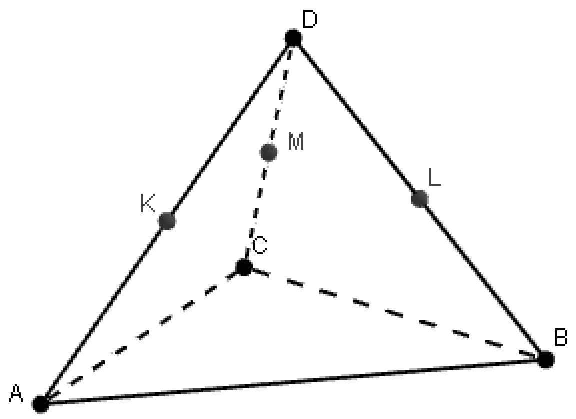
Obrázek 12: Tři různoběžné roviny, jeden společný bod

- Každé dvě z daných rovin jsou různoběžné a procházejí jediným společným bodem. Jedná se o trs rovin 1. druhu. [10, s.508]

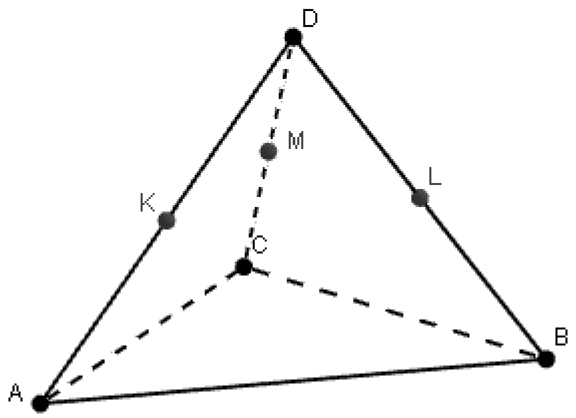
6.6.1 Pracovní list č. 6

Příklad 1 Body A, B, C, D jsou vrcholy čtyřstěnu, body K, L, M jsou po řadě středy hran AD, BD, CD. Zjistěte vzájemnou polohu tří rovin:

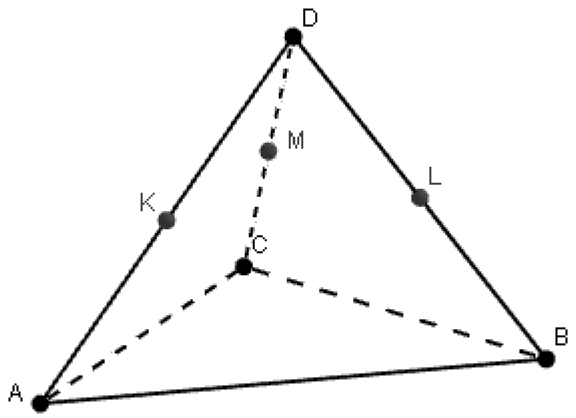
a) ABD, KLM, BCD



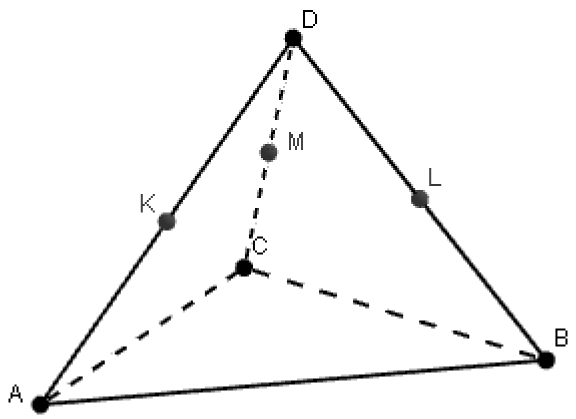
b) ABC, BKM, ACD



c) ABC, ABD, ABM



d) $ABC, KLM, BCD.$



6.6.2 Řešení pracovního listu č. 6

Příklad 1 Body A, B, C, D jsou vrcholy čtyřstěnu, body K, L, M jsou po řadě středy hran AD, BD, CD. Zjistěte vzájemnou polohu tří rovin:

a) ABD, KLM, BCD

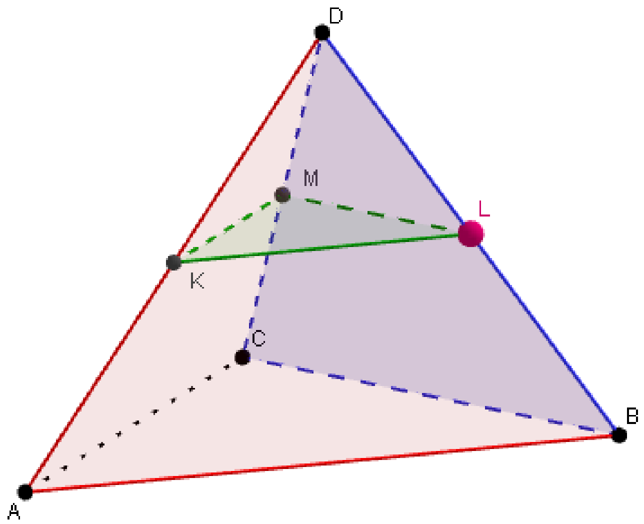
b) ABC, BKM, ACD

c) ABC, ABD, ABM

d) ABC, KLM, BCD.

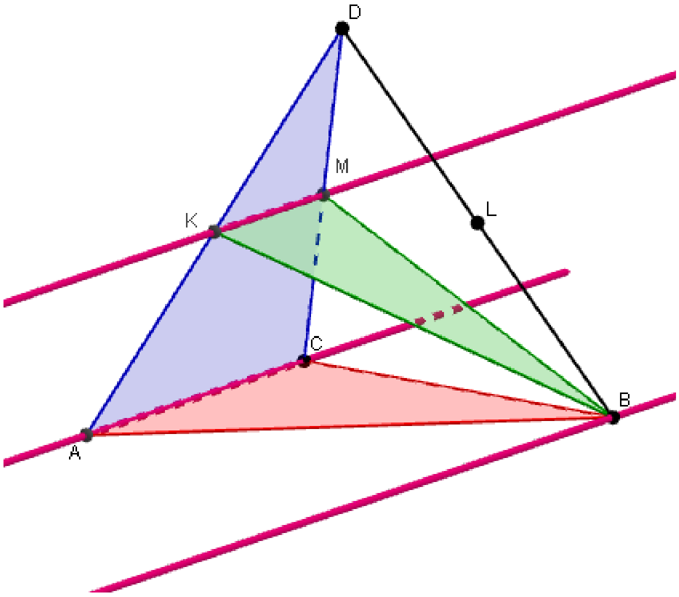
Řešení:

a) Roviny jsou různoběžné, všechny tři se protínají v bodě L. Trs 1. druhu.



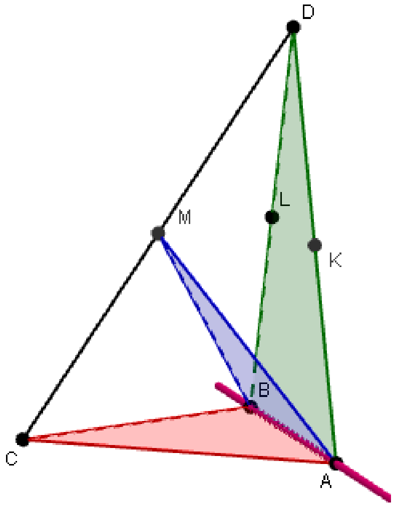
Řešení GeoGebra

b) Každé dvě roviny jsou různoběžné, všechny tři průsečnice jsou rovnoběžné. Trs 2. druhu.



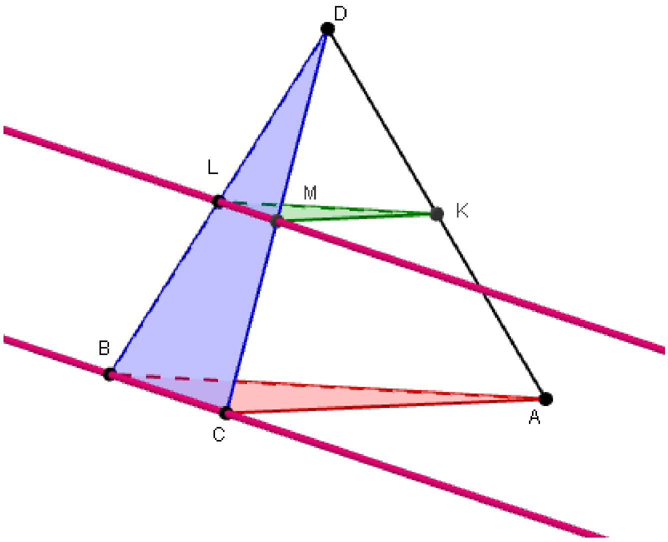
Řešení GeoGebra

c) Roviny jsou různoběžné, všechny se protínají v jedné přímce. Svazek rovin 1. druhu.



Řešení GeoGebra

d) Dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná v rovnoběžných přímkách.



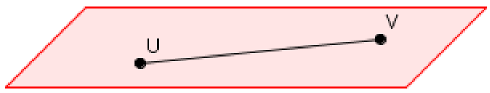
Řešení GeoGebra

6.7 Řešení polohových konstrukčních úloh

6.7.1 Řez tělesa rovinou

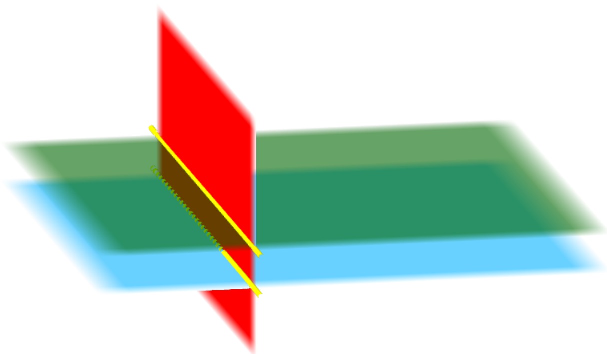
Řezem tělesa rovinou rozumíme průnik tělesa s rovinou. Hranice řezu tělesa se skládá z průniků roviny řezu se stěnami tělesa.
Postup konstrukce řezu [4, s.39]:

1. Leží - li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině.



- Leží -li různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.

2. Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.



- Jsou - li roviny dvou stěn rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.

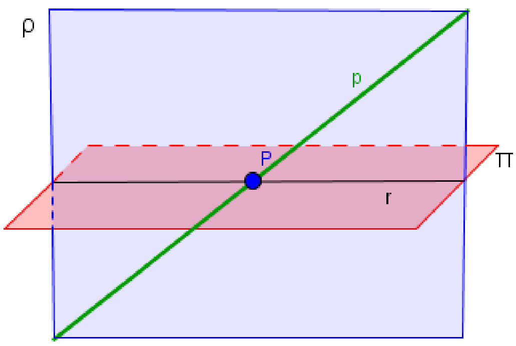
3. Jsou - li dvě ze tří rovin různoběžné a mají - li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice (trs 1. druhu).

- Průsečnice rovin dvou sousedních stěn (tj. stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.

6.7.2 Průsečík přímky a roviny

Průsečík různoběžné přímky p s rovinou π získáme následujícím způsobem:

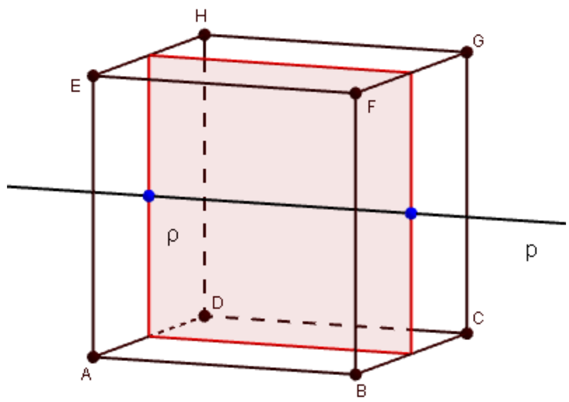
1. Přímkou p proložíme rovinu ρ, která je s rovinou π různoběžná.
2. Najdeme průsečnici r rovin π a ρ.
3. Bod P je průsečíkem přímek p, r a hledaným průsečíkem přímky p a roviny ρ.



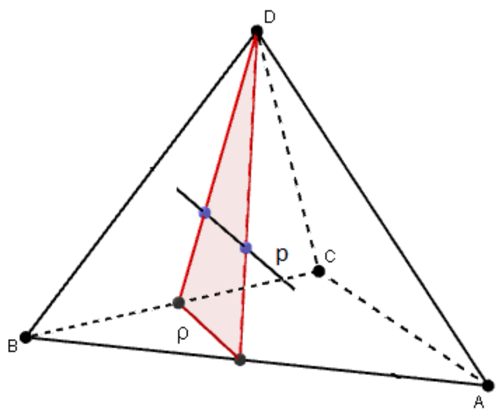
Obrázek 13: Průsečík přímky s rovinou

6.7.3 Průnik přímky s tělesem

1. Přímkou p proložíme rovinu ρ. Pro hranol to bude rovina směrová a pro jehlan rovina vrcholová. Rovina směrová je taková rovina, která obsahuje danou přímku p a je rovnoběžná s bočními hranami tělesa. Rovina vrcholová prochází danou přímkou p a vrcholem tělesa.
2. Určíme řez tělesa pomocnou rovinou.
3. Průnik přímky s řezem tělesa je hledaným průnikem přímky s tělesem.



Obrázek 14: Průnik přímky s hranolem

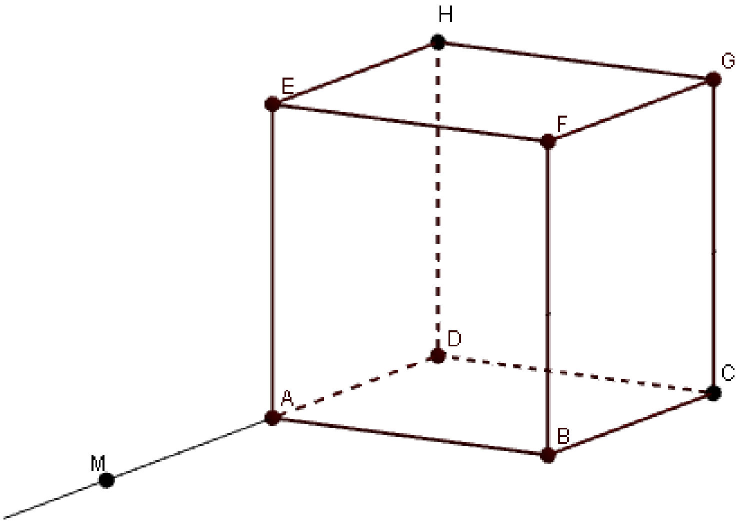


Obrázek 15: Průniku přímky s jehlanem

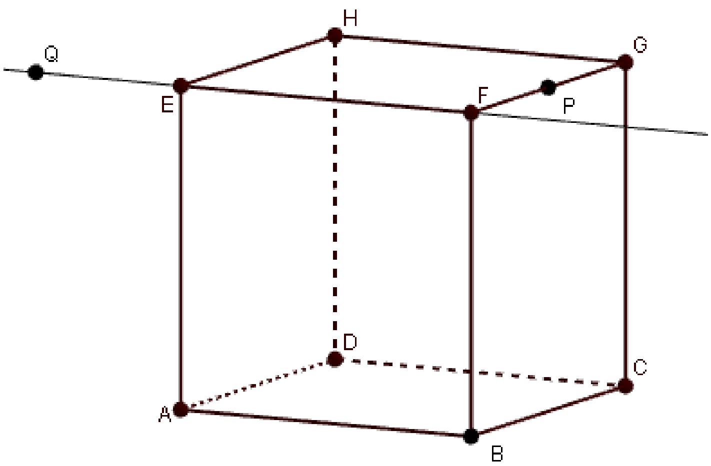
6.7.4 Pracovní list č. 7

Příklad 1 Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou:

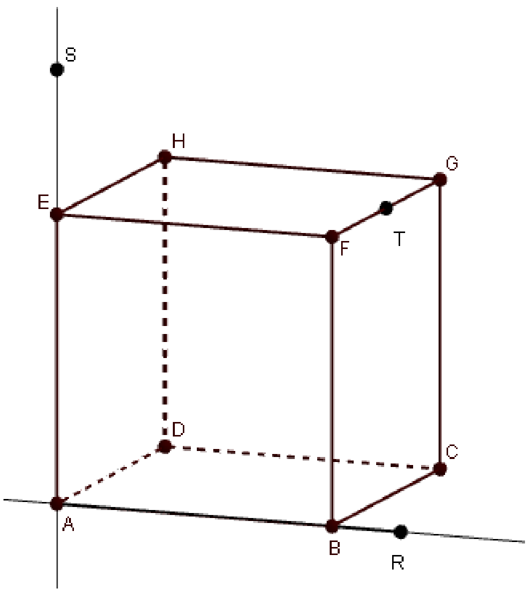
a) MCH, bod M leží na prodloužení úsečky AD za bod A, $|MA| : |AD| = 1 : 2$



b) BPQ, bod P je středem hrany FG, bod Q leží na prodloužení úsečky EF za bod E, $|QE| : |EF| = 1 : 3$

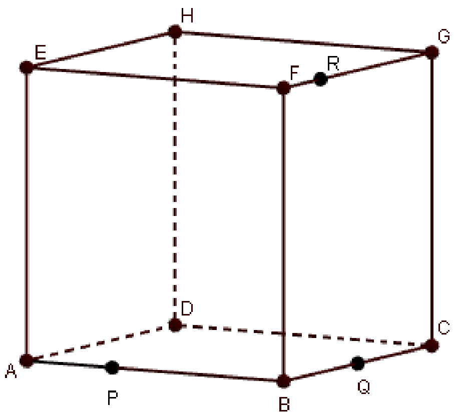


c) TRS, bod T je středem hrany FG, bod R je bodem polopřímky AB, $|AR| = \frac{5}{4}|AB|$, bod S je bodem polopřímky AE, $|AS| = \frac{3}{2}|AE|$.

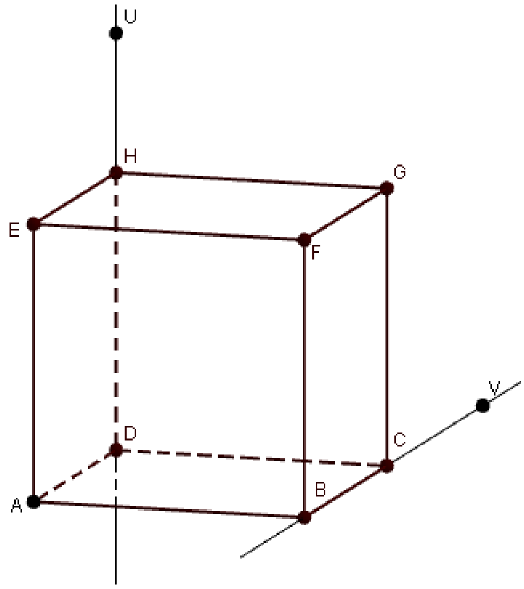


Příklad 2 Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou:

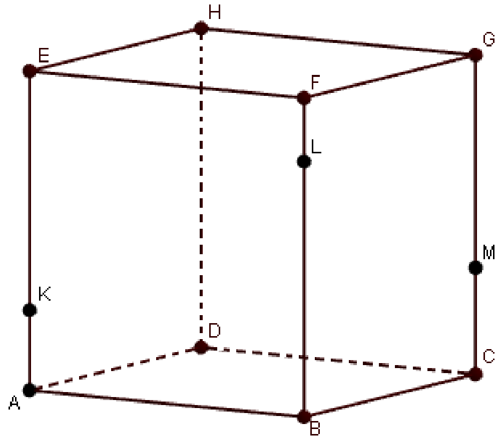
a) PQR, bod P je bodem hrany AB, $|AP| : |PB| = 1 : 2$, bod Q je středem hrany BC, bod R je bodem hrany FG, $|FR| : |RG| = 1 : 3$



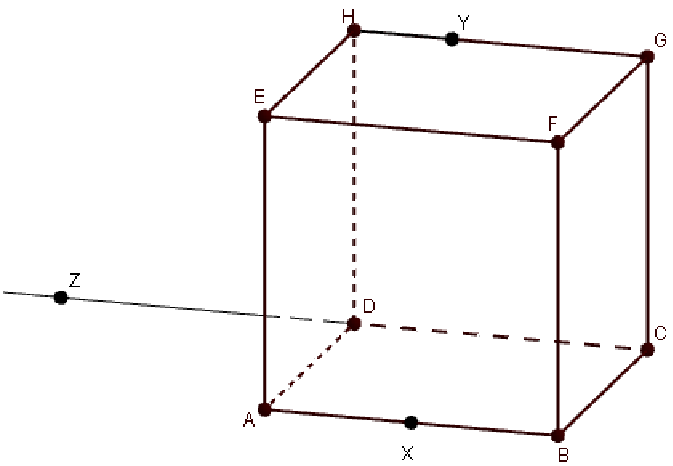
b) AUV, bod U je bodem polopřímky DH, $|DU| = \frac{3}{2}|DH|$, bod V je bodem polopřímky BC, $|BV| = \frac{5}{4}|BC|$



c) KLM, bod K je bodem hrany AE, $|AK| : |KE| = 1 : 3$, bod L je bodem hrany BF, $|BL| : |LF| = 4 : 1$, bod M je bodem hrany CG, $|CM| : |MG| = 1 : 2$

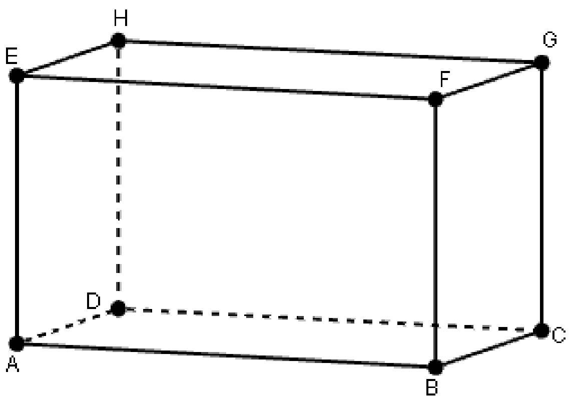


d) XYZ, bod X je středem hrany AB, bod Y je bodem hrany GH, $|GY| : |YH| = 2 : 1$, bod Z je bodem přímky CD tak, že bod D je středem úsečky CZ.

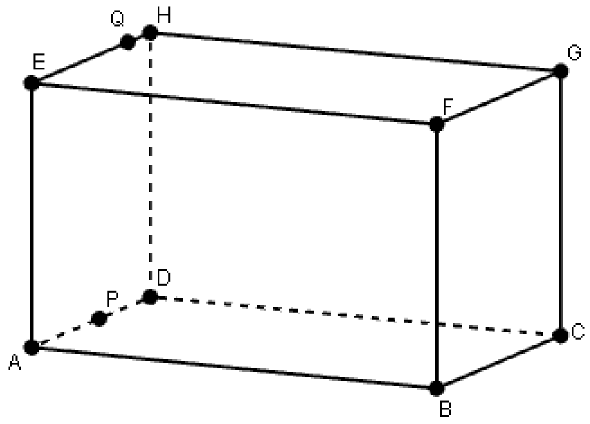


Příklad 3 Sestrojte řez kvádru $ABCDEFGH$ rovinou, která prochází přímkou BG a je rovnoběžná s přímkou:

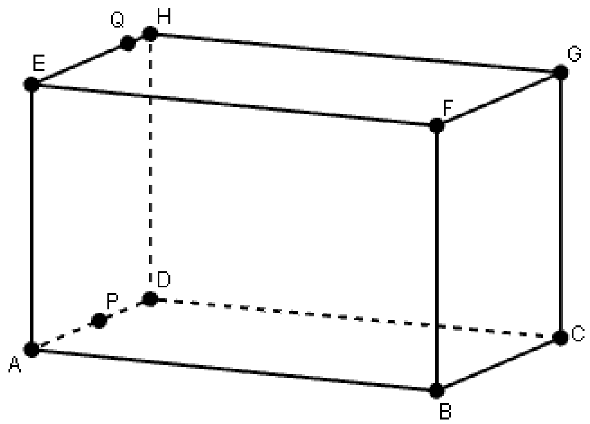
a) CH



b) CP

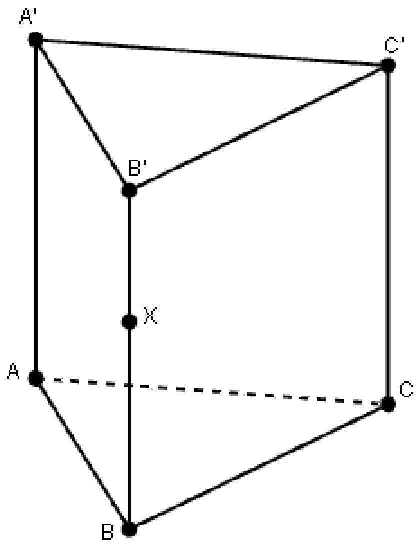


c) CQ.

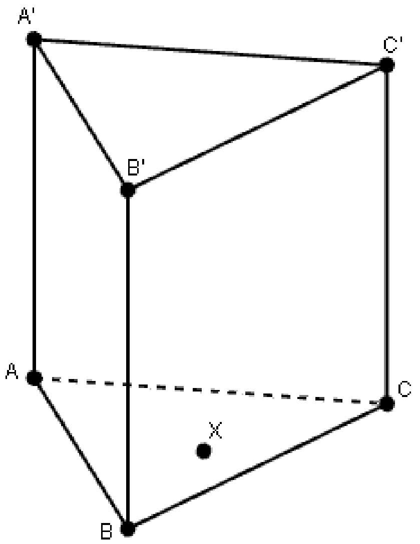


Příklad 4 Sestrojte řez trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ rovinou, která je:

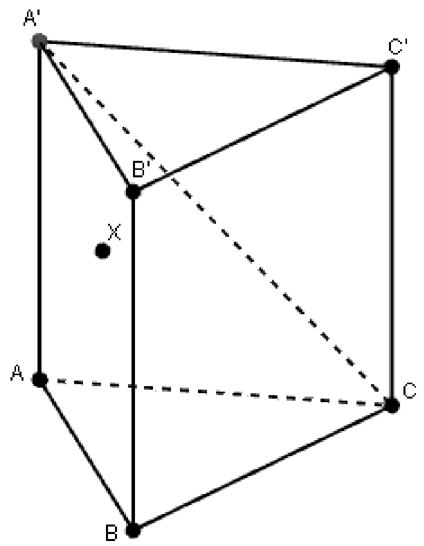
a) rovnoběžná s rovinou ABC a prochází daným vnitřním bodem X hrany BB'



b) rovnoběžná s rovinou ACC' a prochází daným vnitřním bodem X podstavy ABC

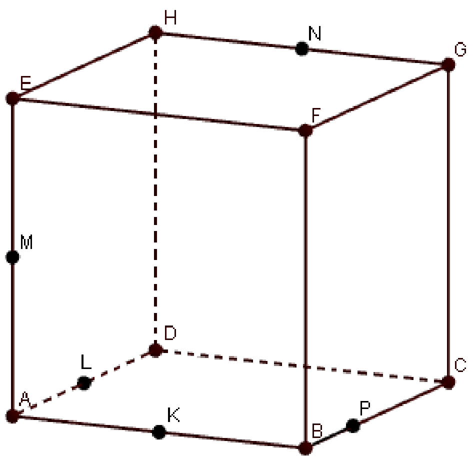


c) rovnoběžná s rovinou ABC' a prochází daným vnitřním bodem X trojúhelníku $AA'C'$.

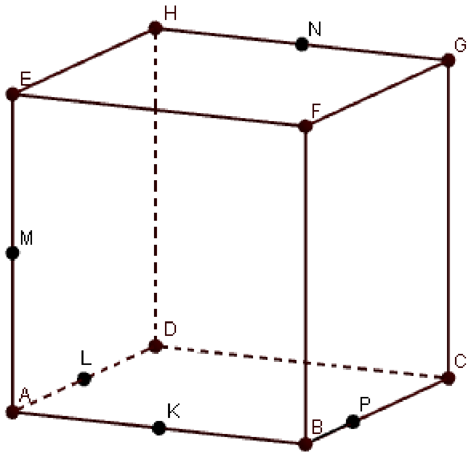


Příklad 5 Body K, L, M, N jsou po řadě středy hran AB, AD, AE, GH krychle $ABCDEFGH$. Bod P je bodem hrany BC, $|BP| : |PC| = 1 : 2$. Sestrojte řez krychle rovinami:

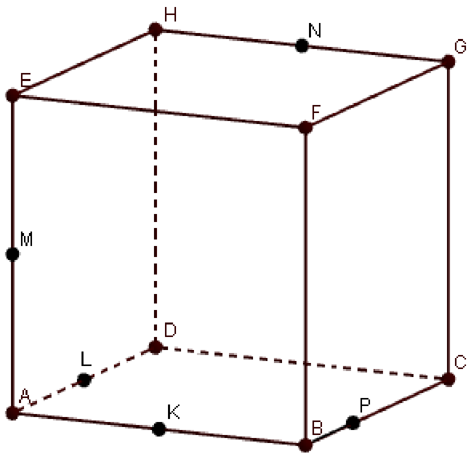
a) HKP



b) LMN

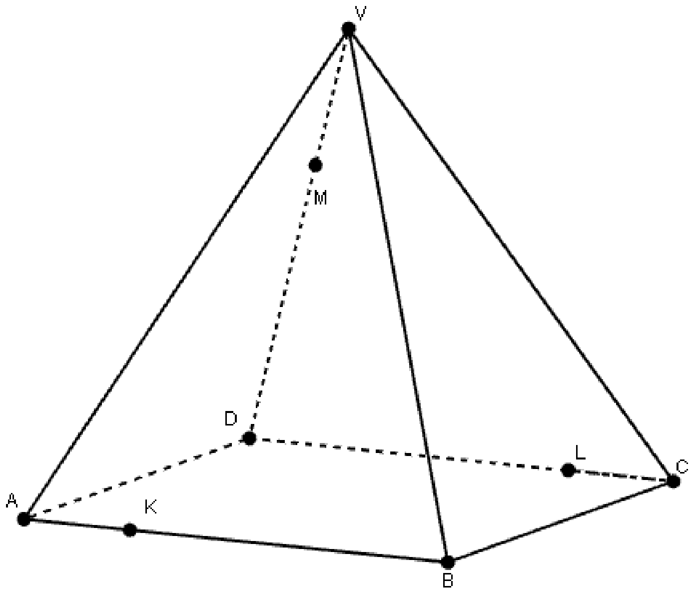


c) KLN.

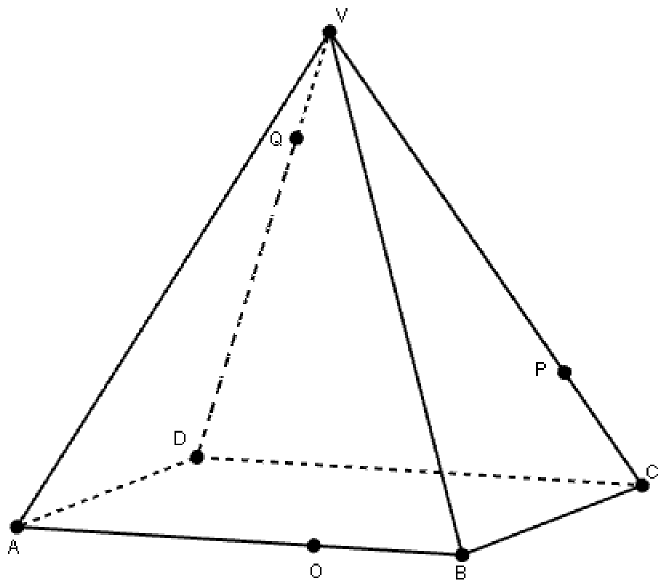


Příklad 6 Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou:

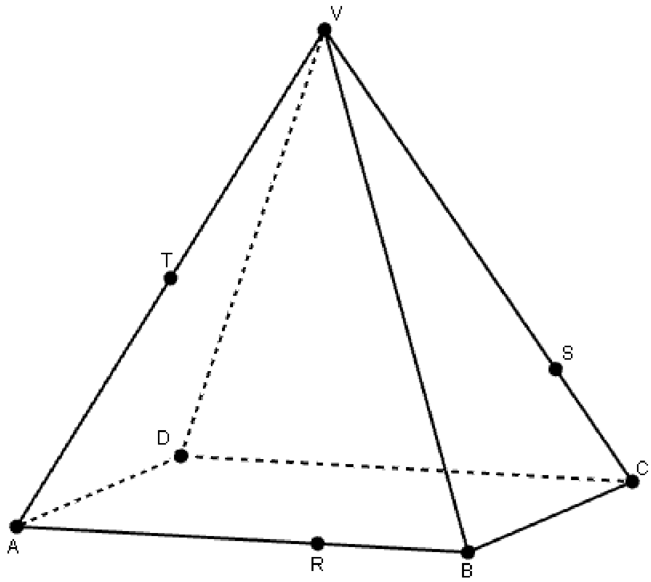
a) KLM, kde bod K leží na hraně AB a $|BK| : |AK| = 3 : 1$, bod L leží na hraně CD a $|DL| : |CL| = 3 : 1$, bod M leží na hraně DV a $|DM| : |MV| = 2 : 1$



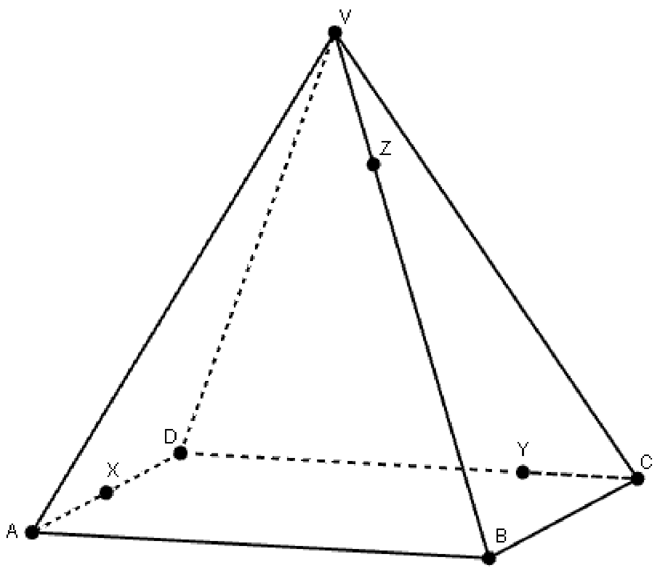
b) OPQ, kde bod O leží na hraně AB a $|AO| : |BO| = 2 : 1$, bod P leží na hraně CV a $|VP| : |CP| = 3 : 1$, bod Q leží na hraně DV a $|DQ| : |QV| = 3 : 1$



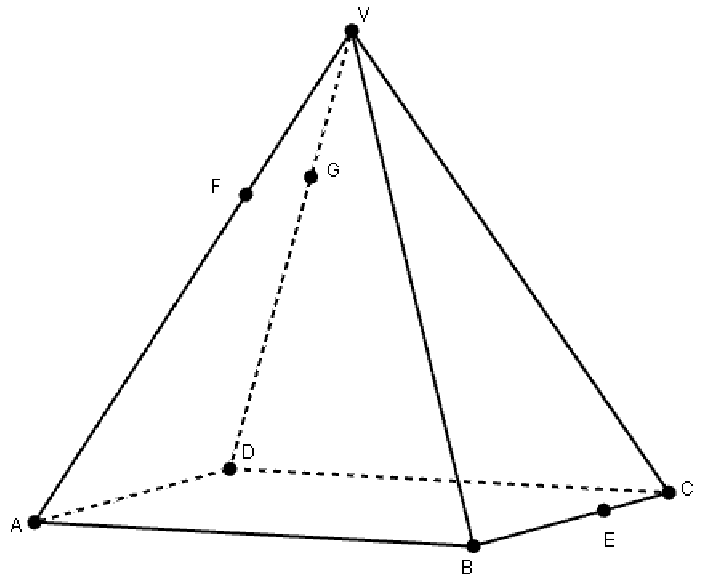
c) RST, kde bod R leží na hraně AB a $|AR| : |BR| = 2 : 1$, bod S leží na hraně CV a $|VS| : |CS| = 3 : 1$, bod T je středem hrany $|AV|$



d) XYZ, kde bod X je středem hrany $|AD|$, bod Y leží na hraně CD a $|DY| : |CY| = 3 : 1$, bod Z leží na hraně BV a $|BZ| : |VZ| = 3 : 1$



e) EFG, kde bod E leží na hraně BC a $|BE| : |CE| = 2 : 1$, bod F leží na hraně AV a $|AF| : |VF| = 2 : 1$, bod G leží na hraně DV a $|DG| : |VG| = 2 : 1$.



6.7.5 Řešení pracovního listu č. 7

Příklad 1 Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou:

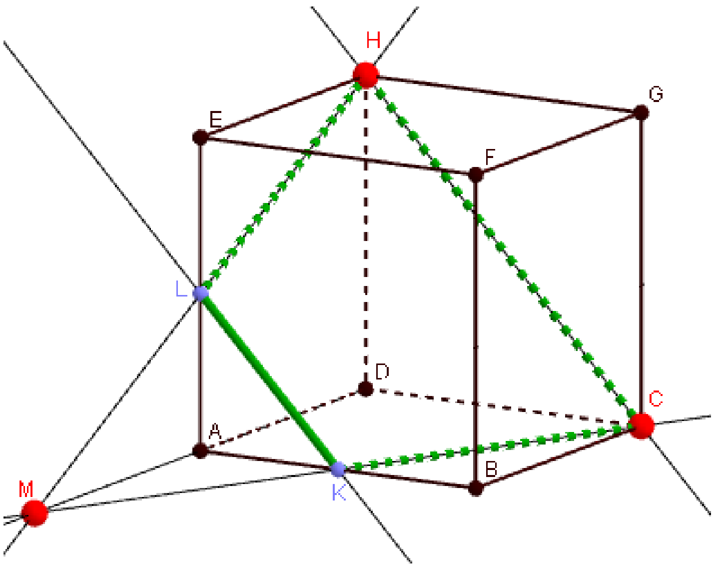
a) MCH, bod M leží na prodloužení úsečky AD za bod A, $|MA| : |AD| = 1 : 2$

b) BPQ, bod P je středem hrany FG, bod Q leží na prodloužení úsečky EF za bod E, $|QE| : |EF| = 1 : 3$

c) TRS, bod T je středem hrany FG, bod R je bodem polopřímky AB, $|AR| = \frac{5}{4}|AB|$, bod S je bodem polopřímky AE, $|AS| = \frac{3}{2}|AE|$.

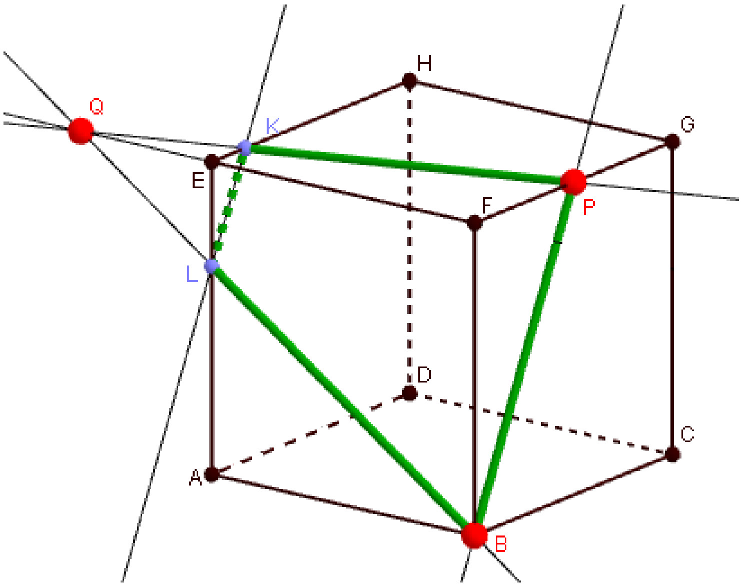
Řešení:

a)



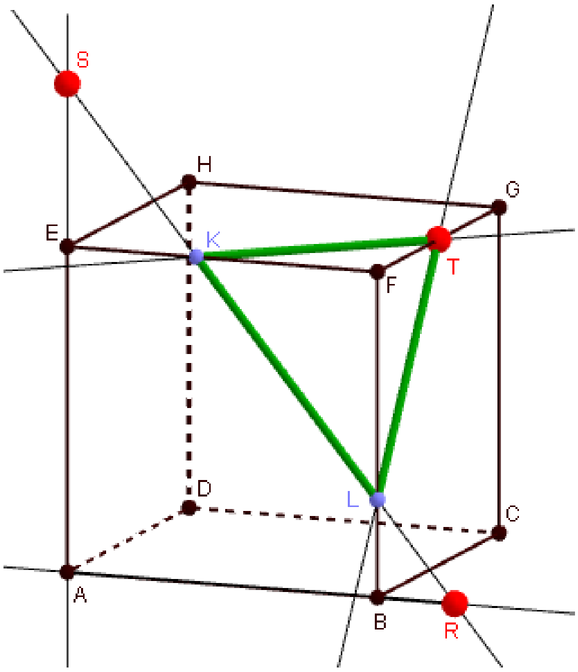
Řešení GeoGebra

b)



Řešení GeoGebra

c)



Řešení GeoGebra

Příklad 2 Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou:

a) PQR, bod P je bodem hrany AB, $|AP| : |PB| = 1 : 2$, bod Q je středem hrany BC, bod R je bodem hrany FG, $|FR| : |RG| = 1 : 3$

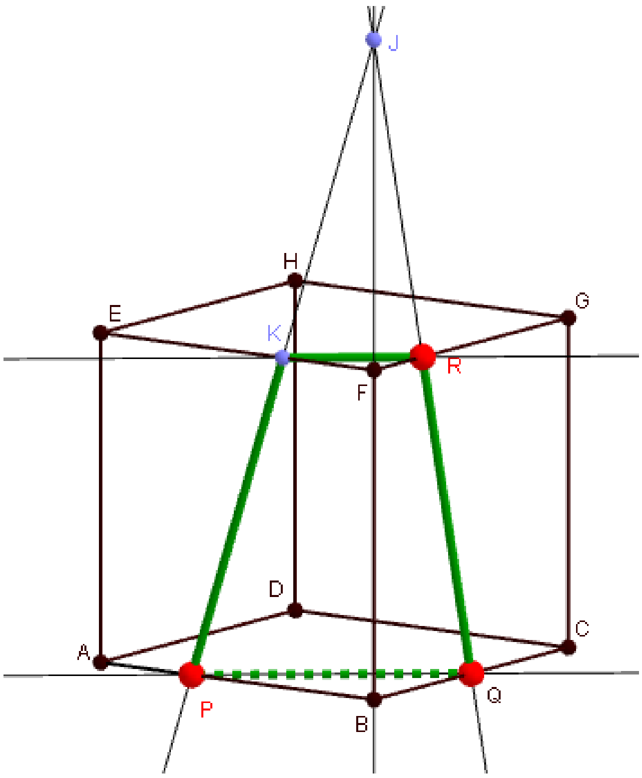
b) AUV, bod U je bodem polopřímky DH, $|DU| = \frac{3}{2}|DH|$, bod V je bodem polopřímky BC, $|BV| = \frac{5}{4}|BC|$

c) KLM, bod K je bodem hrany AE, $|AK| : |KE| = 1 : 3$, bod L je bodem hrany BF, $|BL| : |LF| = 4 : 1$, bod M je bodem hrany CG, $|CM| : |MG| = 1 : 2$

d) XYZ, bod X je středem hrany AB, bod Y je bodem hrany GH, $|GY| : |YH| = 2 : 1$, bod Z je bodem přímky CD tak, že bod D je středem úsečky CZ.

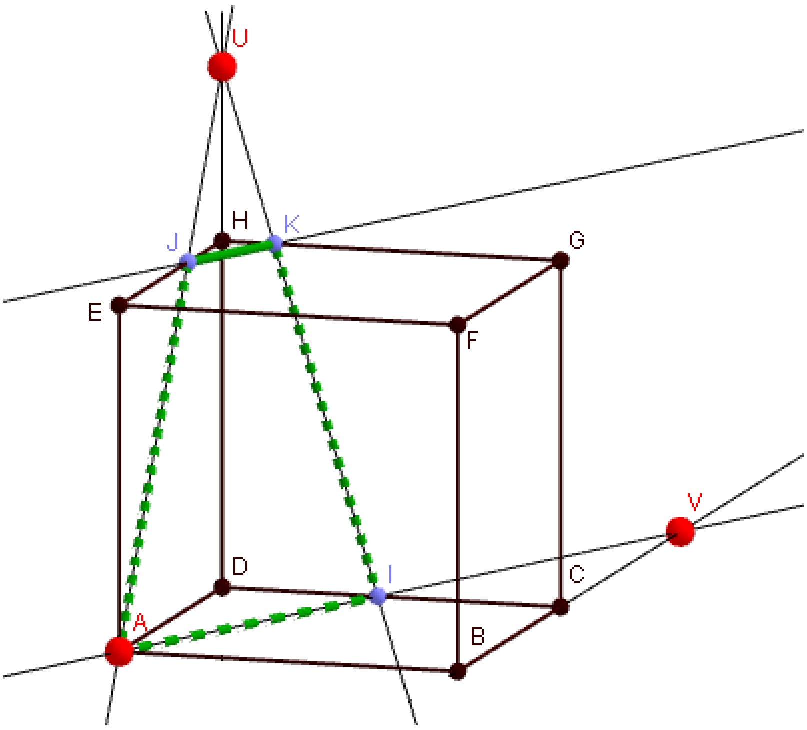
Řešení:

a)



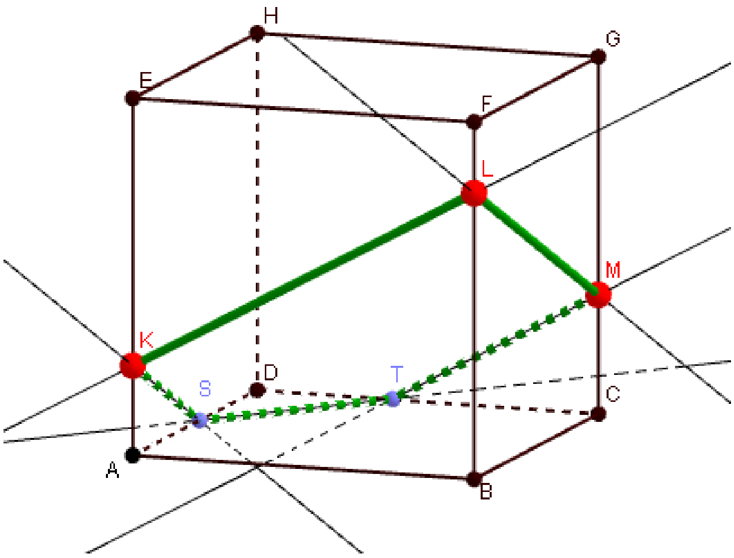
Řešení GeoGebra

b)



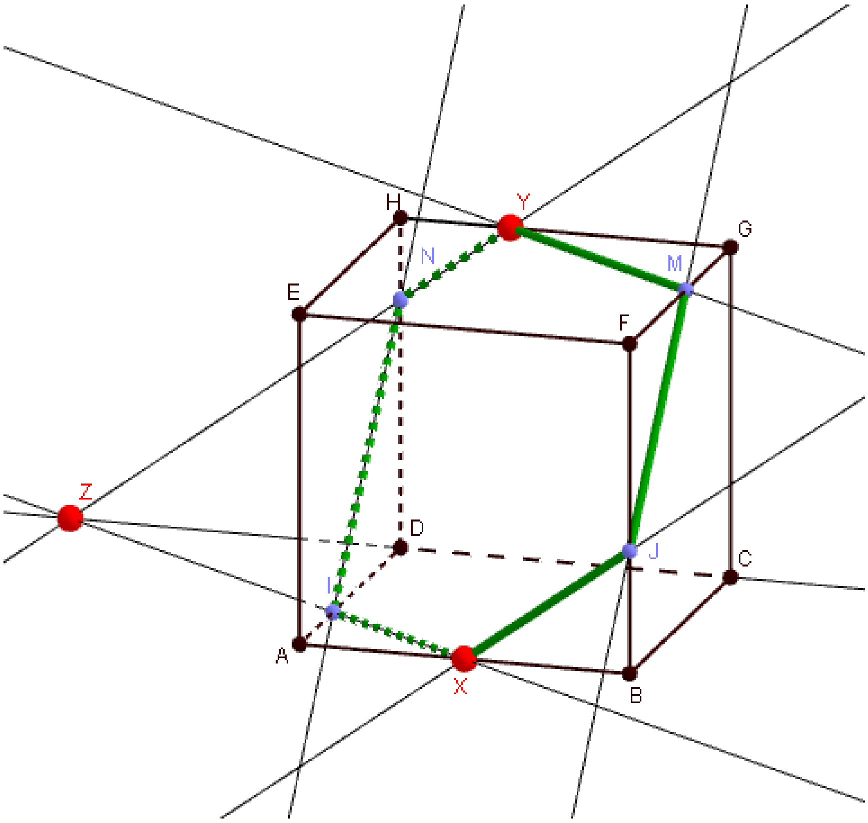
Řešení GeoGebra

c)



Řešení GeoGebra

d)



Řešení GeoGebra

Příklad 3 Sestrojte řez kvádru $ABCDEFGH$ rovinou, která prochází přímkou BG a je rovnoběžná s přímkou

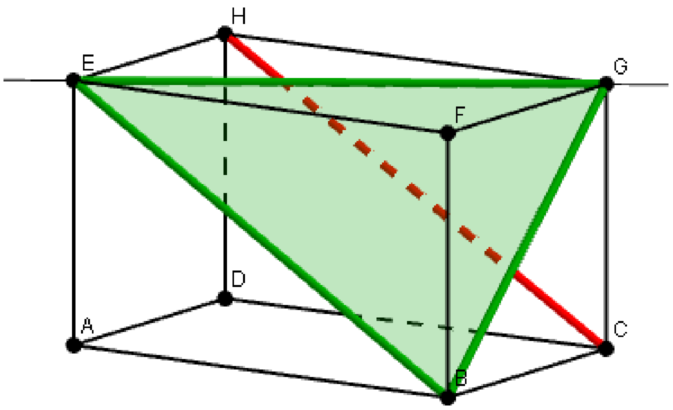
a) CH

b) CP

c) CQ.

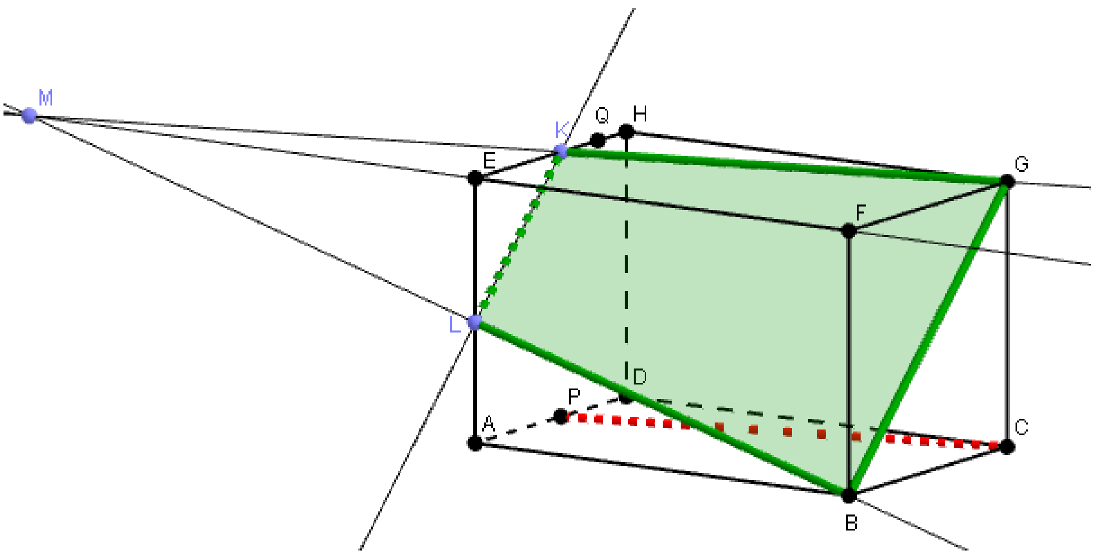
Řešení:

a)



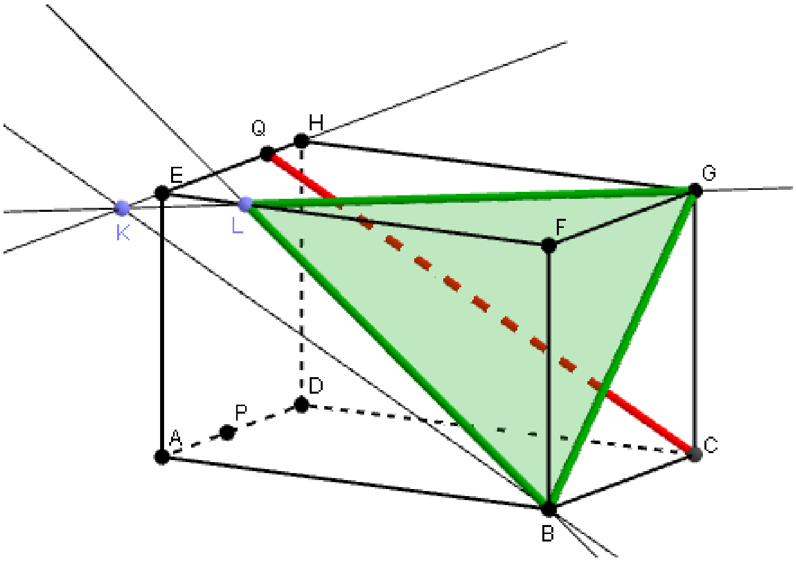
Řešení GeoGebra

b)



Řešení GeoGebra

c)



Řešení GeoGebra

Příklad 4 Sestrojte řez trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ rovinou, která je:

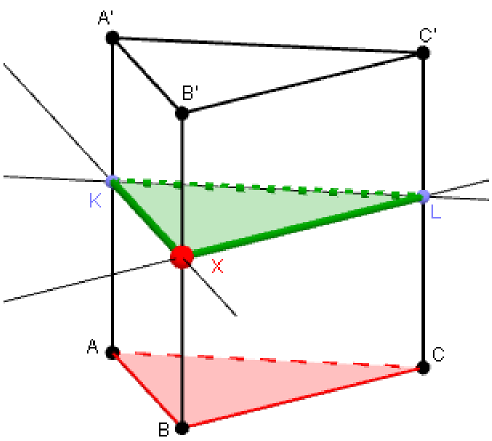
a) rovnoběžná s rovinou ABC a prochází daným vnitřním bodem X hrany BB'

b) rovnoběžná s rovinou ACC' a prochází daným vnitřním bodem X podstavy ABC

c) rovnoběžná s rovinou ABC' a prochází daným vnitřním bodem X trojúhelníku $AA'C'$.

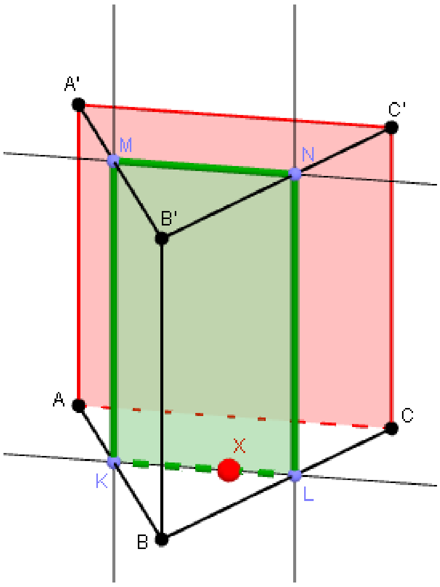
Řešení:

a)



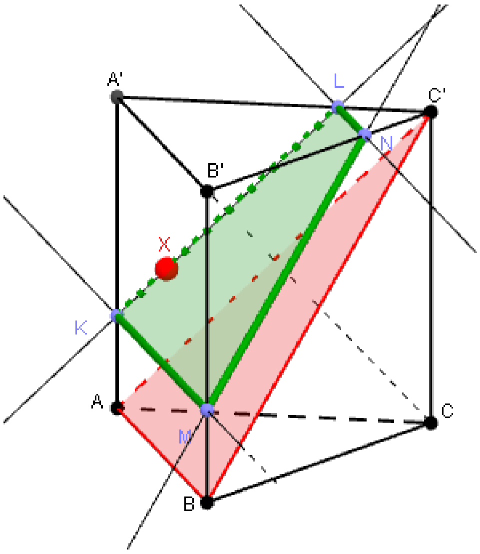
Řešení GeoGebra

b)



Řešení GeoGebra

c)



Řešení GeoGebra

Příklad 5 Body K, L, M, N jsou po řadě středy hran AB, AD, AE, GH krychle $ABCDEFGH$. Bod P je bodem hrany BC, $|BP| : |PC| = 1 : 2$. Sestrojte řez krychle rovinami:

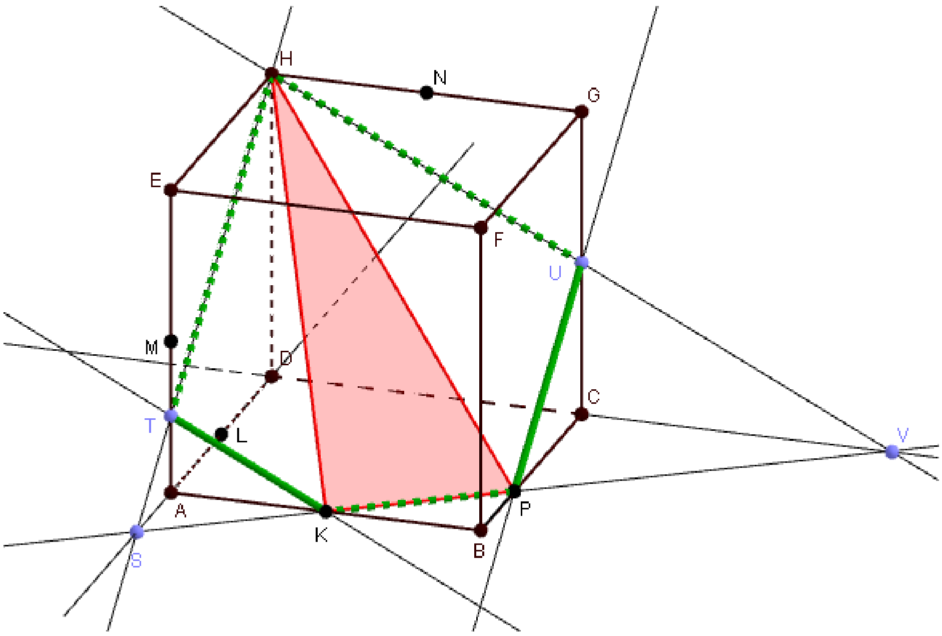
a) HKP

b) LMN

c) KLN.

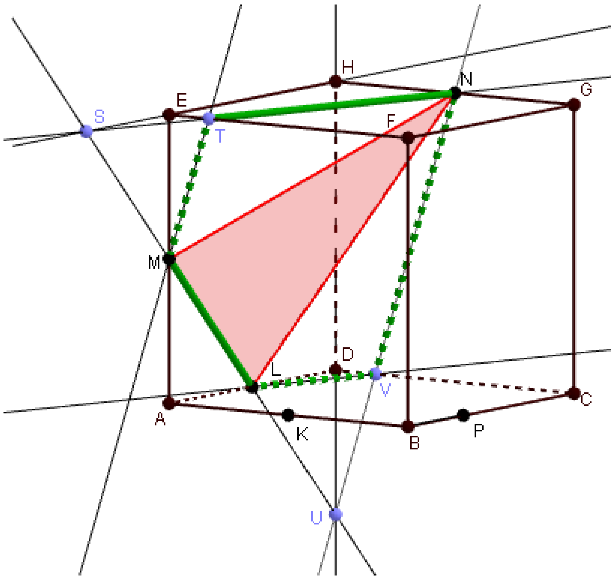
Řešení:

a)



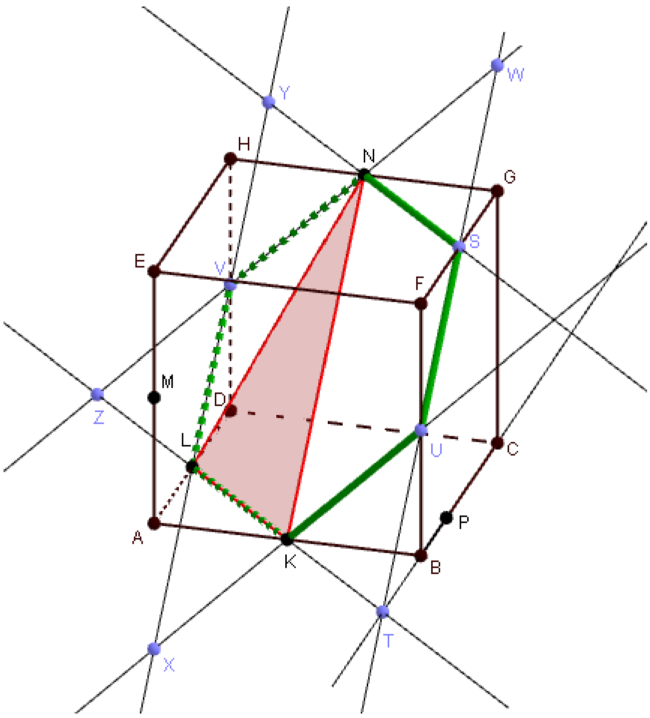
Řešení GeoGebra

b)



Řešení GeoGebra

c)



Řešení GeoGebra

Příklad 6 Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou:

a) KLM, kde bod K leží na hraně AB a $|BK| : |AK| = 3 : 1$, bod L leží na hraně CD a $|DL| : |CL| = 3 : 1$, bod M leží na hraně DV a $|DM| : |MV| = 2 : 1$

b) OPQ, kde bod O leží na hraně AB a $|AO| : |BO| = 2 : 1$, bod P leží na hraně CV a $|VP| : |CP| = 3 : 1$, bod Q leží na hraně DV a $|DQ| : |QV| = 3 : 1$

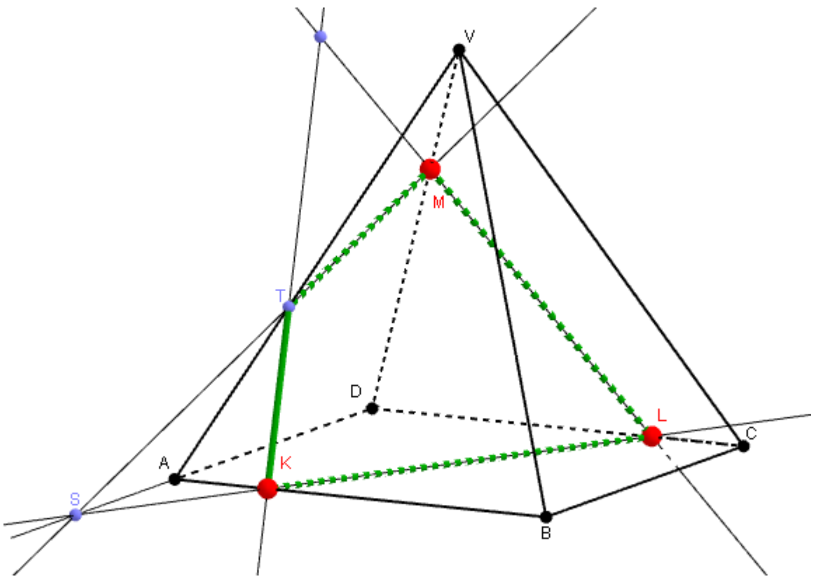
c) RST, kde bod R leží na hraně AB a $|AR| : |BR| = 2 : 1$, bod S leží na hraně CV a $|VS| : |CS| = 3 : 1$, bod T je středem hrany $|AV|$

d) XYZ, kde bod X je středem hrany $|AD|$, bod Y leží na hraně CD a $|DY| : |CY| = 3 : 1$, bod Z leží na hraně BV a $|BZ| : |VZ| = 3 : 1$

e) EFG, kde bod E leží na hraně BC a $|BE| : |CE| = 2 : 1$, bod F leží na hraně AV a $|AF| : |VF| = 2 : 1$, bod G leží na hraně DV a $|DG| : |VG| = 2 : 1$.

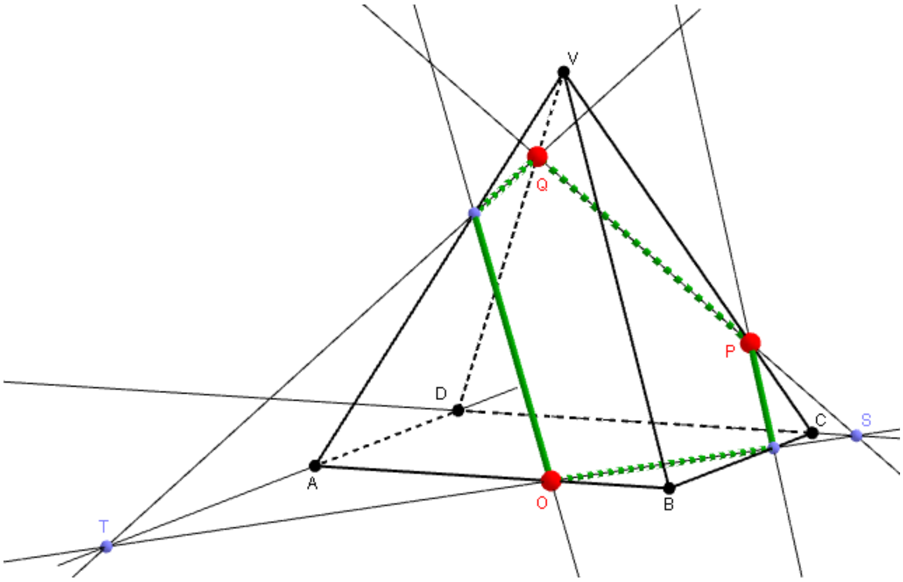
Řešení:

a)



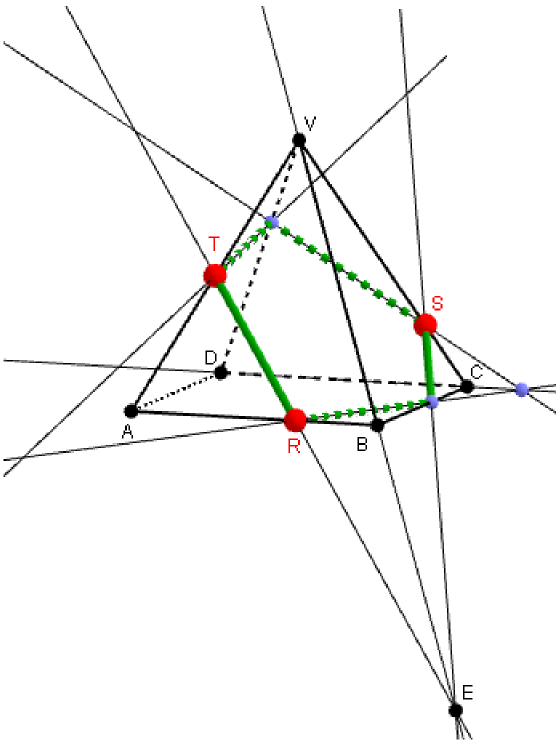
Řešení GeoGebra

b)



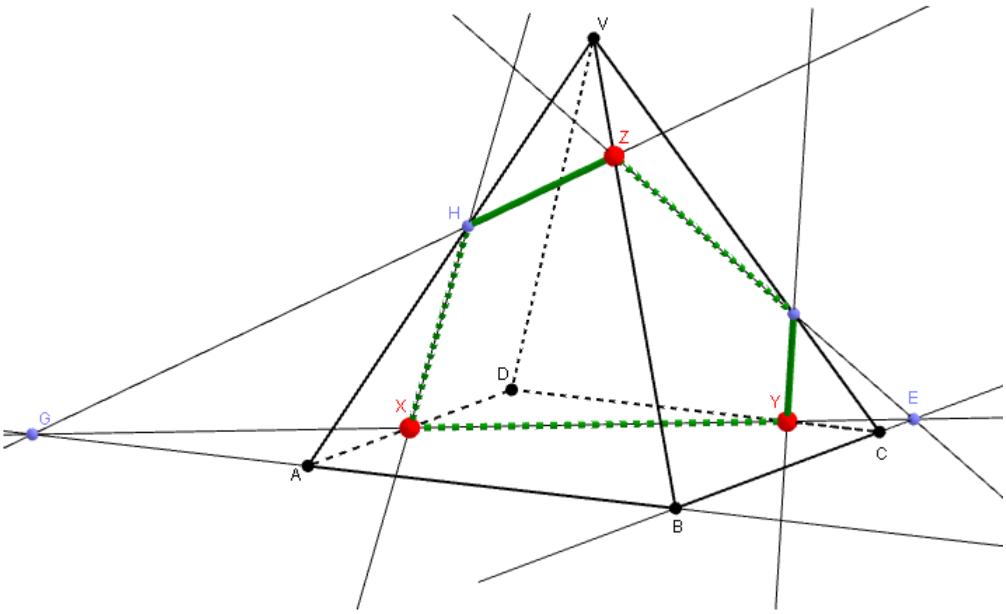
Řešení GeoGebra

c)



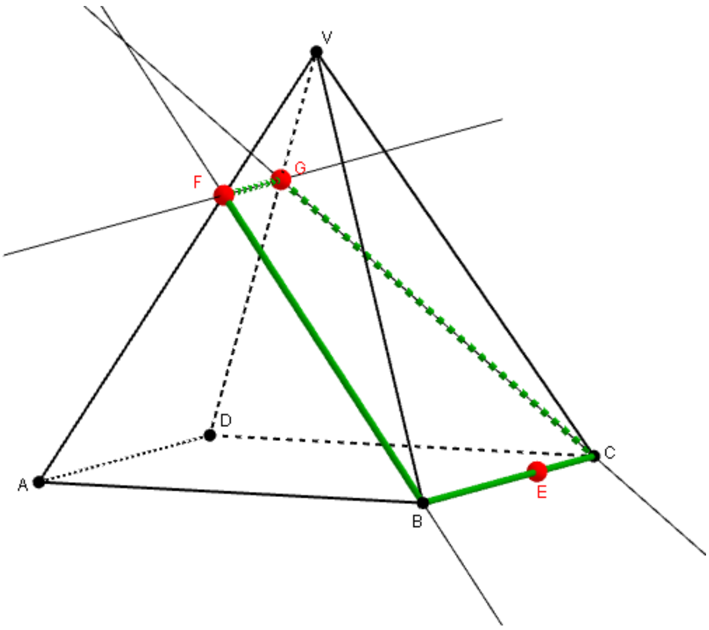
Řešení GeoGebra

d)



Řešení GeoGebra

e)

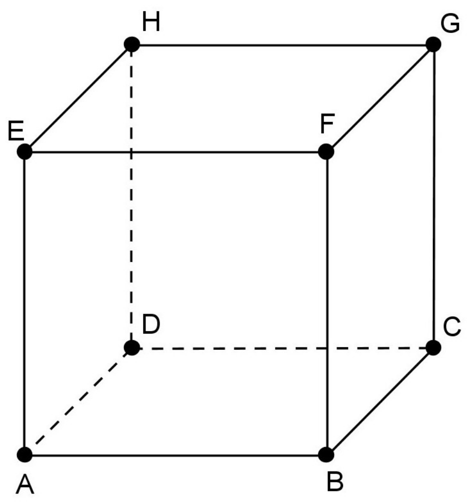


Řešení GeoGebra

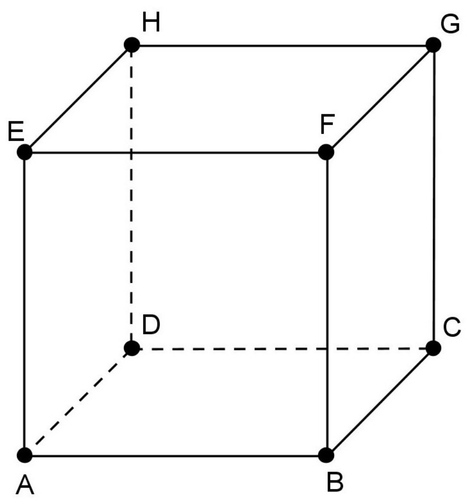
6.7.6 Pracovní list č. 8

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFHGH$. Sestrojte průsečnici rovin:

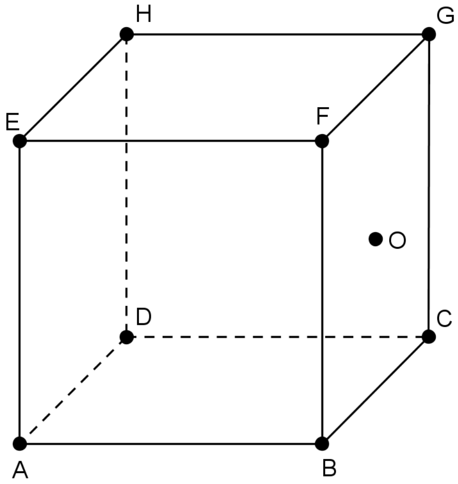
a) ACG, AFH



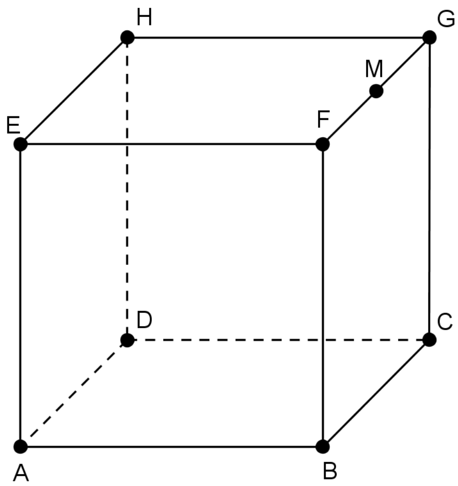
b) ACF, BEG



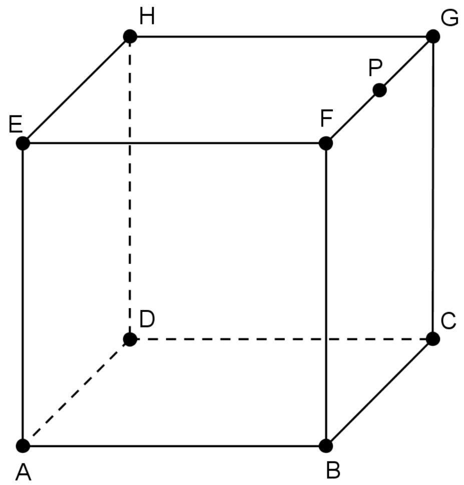
c) BCG, AEO, bod O je středem stěny $BCGF$



d) ABM, CDM, bod M je středem hrany FG

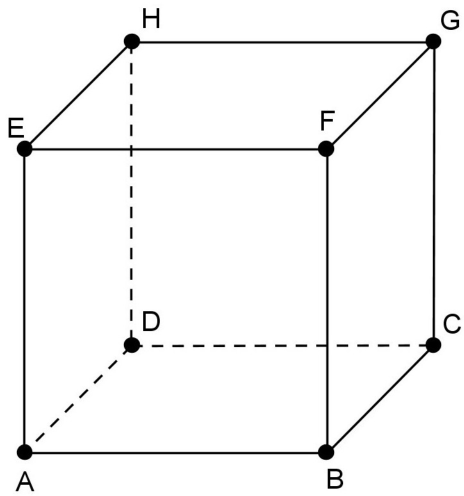


e) ACE, BHP, bod P je středem hrany FG.

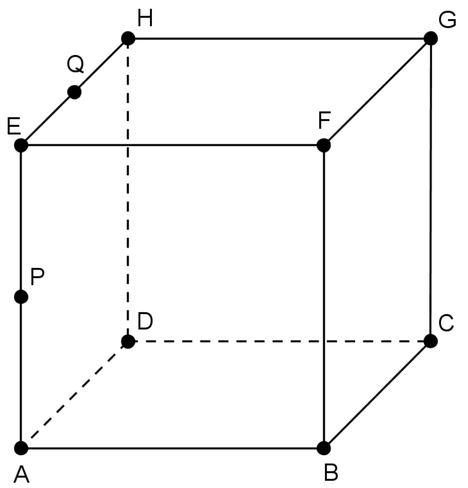


Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte:

a) průsečíky přímek AE, EG, EC s rovinou BDH

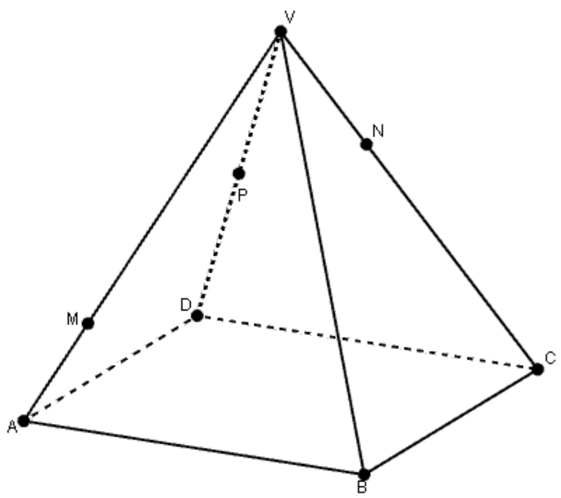


b) průsečíky přímek FC, FD, CQ s rovinou BHP, body P, Q jsou po řadě středy hran AE, EH.

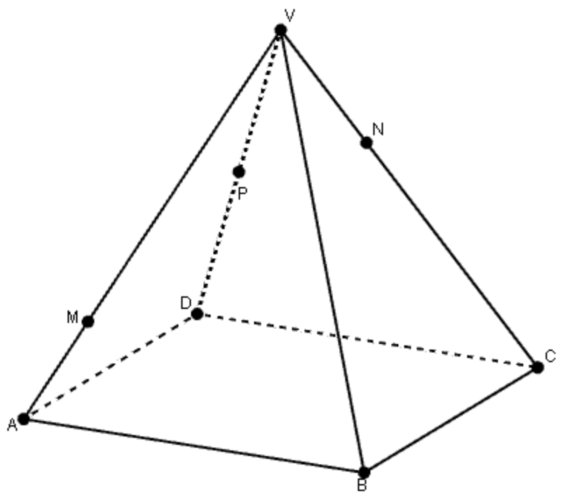


Příklad 3 Body M, N, P, Q jsou body hran pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$. Bod M je bodem hrany AV, $|AM| : |MV| = 1 : 3$, bod N je bodem hrany CV, $|CN| : |NV| = 2 : 1$, bod P je středem hrany DV. Sestrojte průsečík:

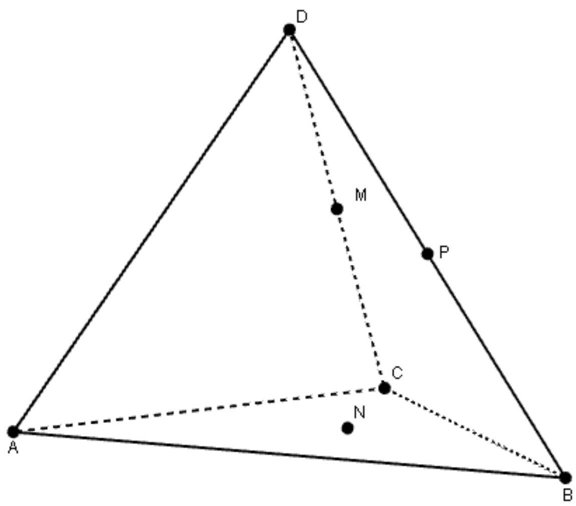
a) přímky MN a rovinou ABC



b) přímky BP a rovinou ACV.



Příklad 4 Je dán čtyřstěn $ABCD$. Bod M je středem hrany CD, bod P je středem hrany BD a bod N je vnitřním bodem stěny ABC. Sestrojte průsečík přímky DN s rovinou ABM.



6.7.7 Řešení pracovního listu č. 8

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFHGH$. Sestrojte průsečnici rovin:

a) ACG, AFH

b) ACF, BEG

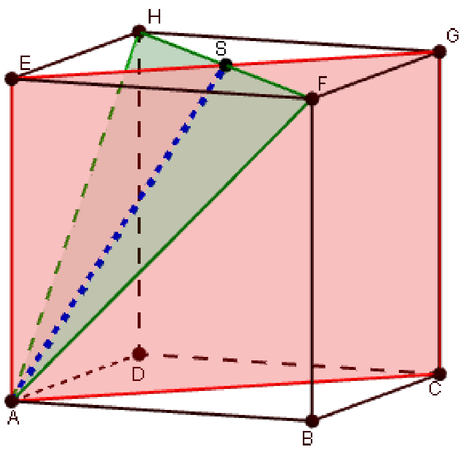
c) BCG, AEO, bod O je středem stěny $BCGF$

d) ABM, CDM, bod M je středem hrany FG

e) ACE, BHP, bod P je středem hrany FG.

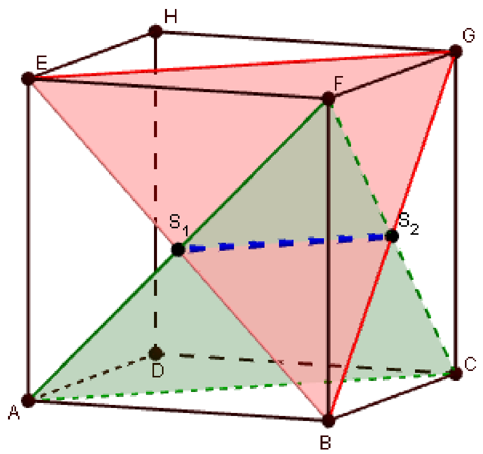
Řešení:

a)



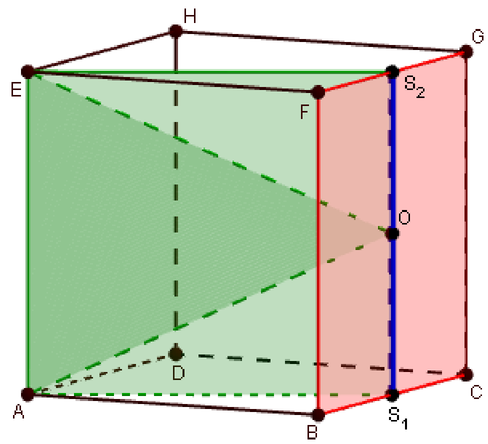
Řešení GeoGebra

b)



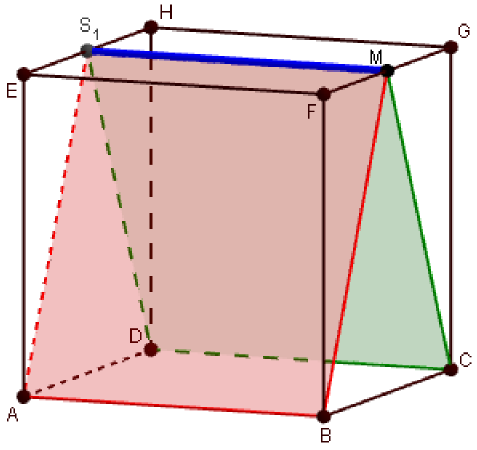
Řešení GeoGebra

c)



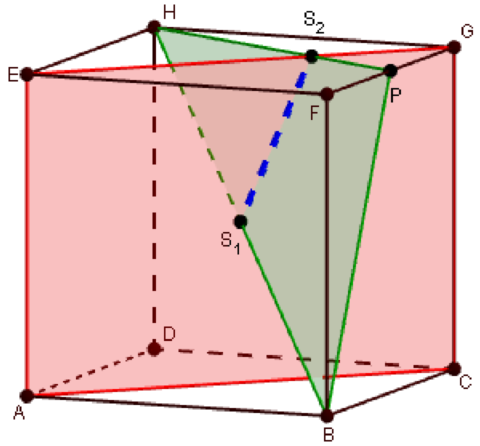
Řešení GeoGebra

d)



Řešení GeoGebra

e)



Řešení GeoGebra

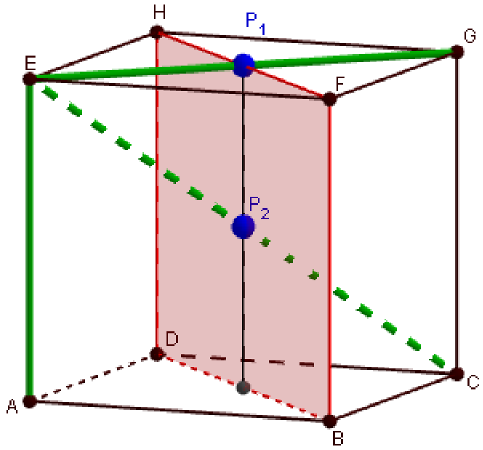
Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte:

a) průsečíky přímek AE, EG, EC s rovinou BDH

b) průsečíky přímek FC, FD, CQ s rovinou BHP, body P, Q jsou po řadě středy hran AE, EH.

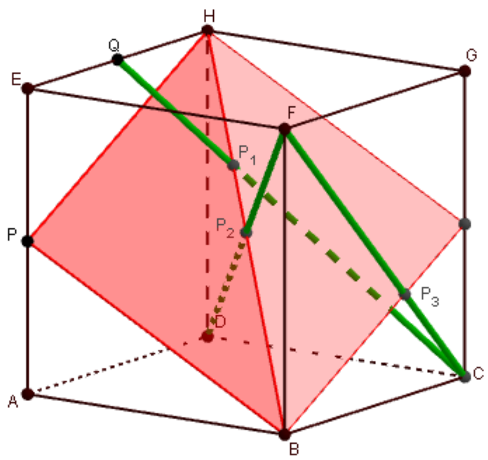
Řešení:

a) Přímka AE nemá s danou rovinou BDH žádný průsečík.



Řešení GeoGebra

b)



Řešení GeoGebra

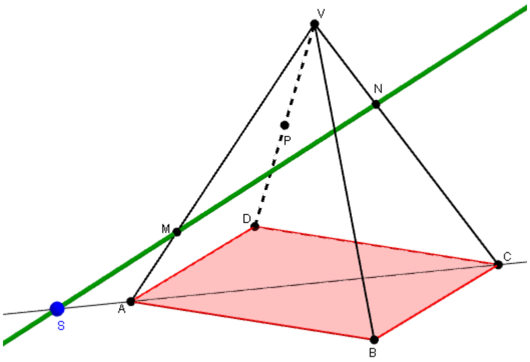
Příklad 3 Body M, N, P, Q jsou body hran pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$. Bod M je bodem hrany AV, $|AM| : |MV| = 1 : 3$, bod N je bodem hrany CV, $|CN| : |NV| = 2 : 1$, bod P je středem hrany DV. Sestrojte průsečík:

a) přímky MN a rovinou ABC

b) přímky BP a rovinou ACV.

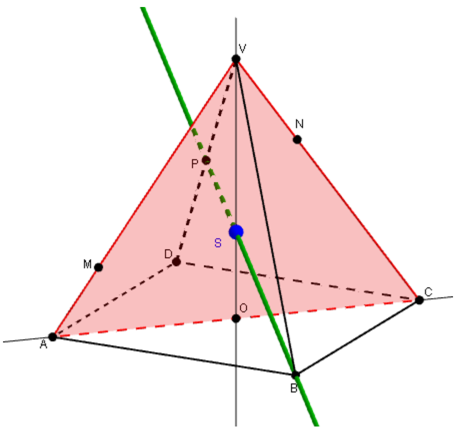
Řešení:

a)



Řešení GeoGebra

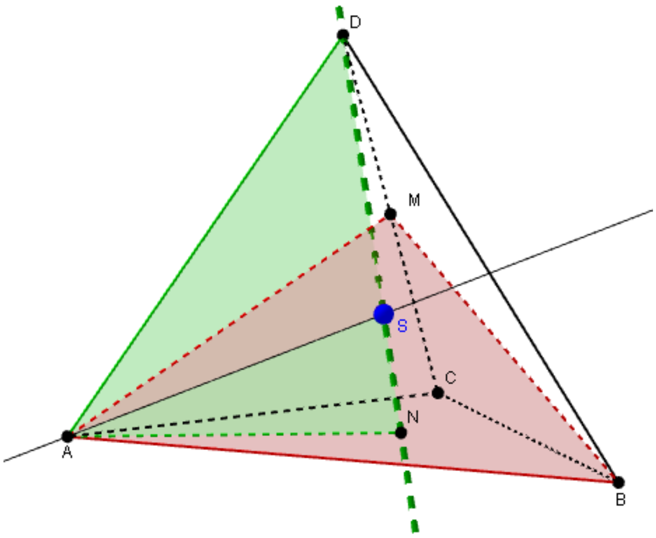
b)



Řešení GeoGebra

Příklad 4 Je dán čtyřstěn $ABCD$. Bod M je středem hrany CD, bod N je vnitřním bodem stěny ABC. Sestrojte průsečík přímky DN s rovinou ABM.

Řešení:

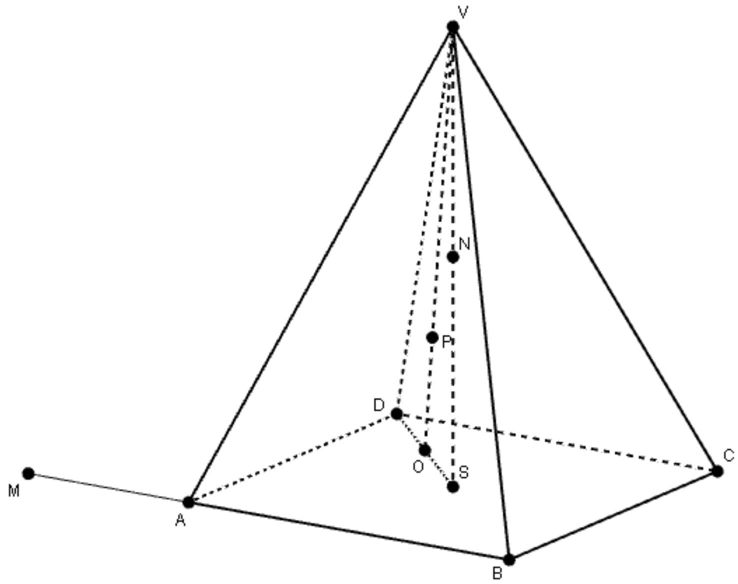


Řešení GeoGebra

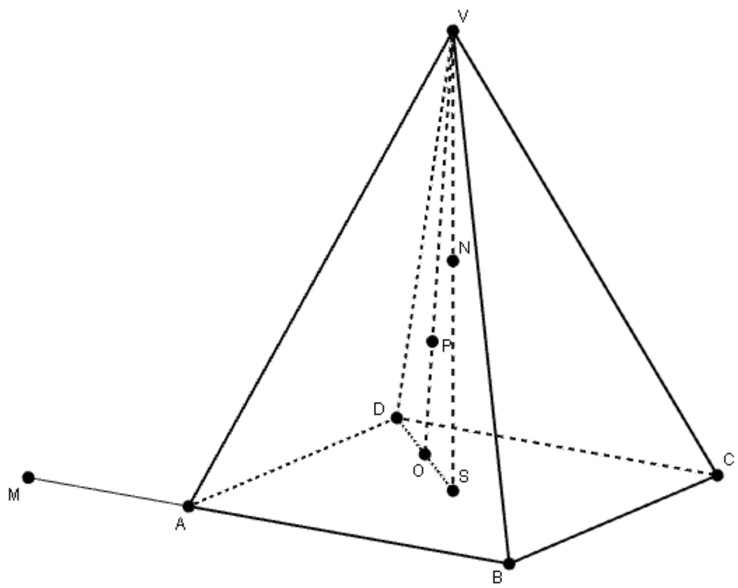
6.7.8 Pracovní list č. 9

Příklad 1 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, bod S je středem jeho podstavy. Bod M je bodem polopřímky BA, $|BM| = \frac{3}{2}|AB|$, bod N je středem úsečky SV a bod P leží na úsečce OV, kde O je středem úsečky DS. Sestrojte průnik jehlanu a přímky:

a) MN

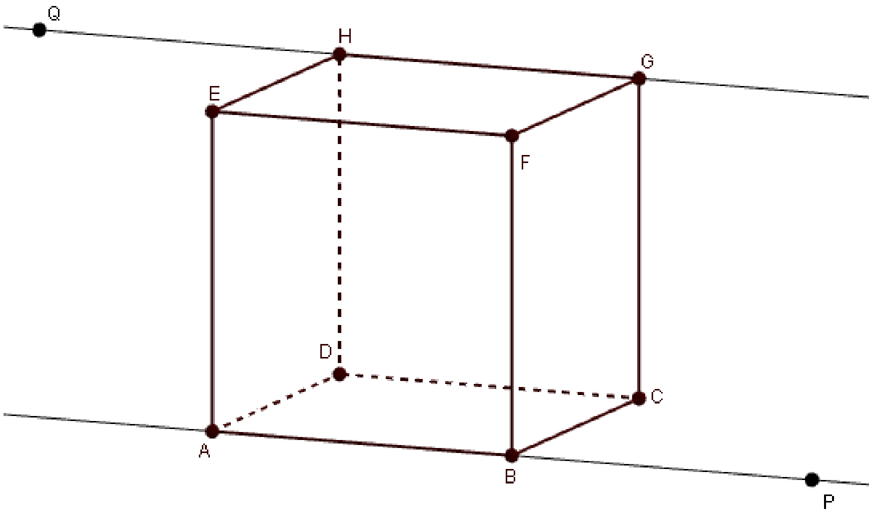


b) MP.

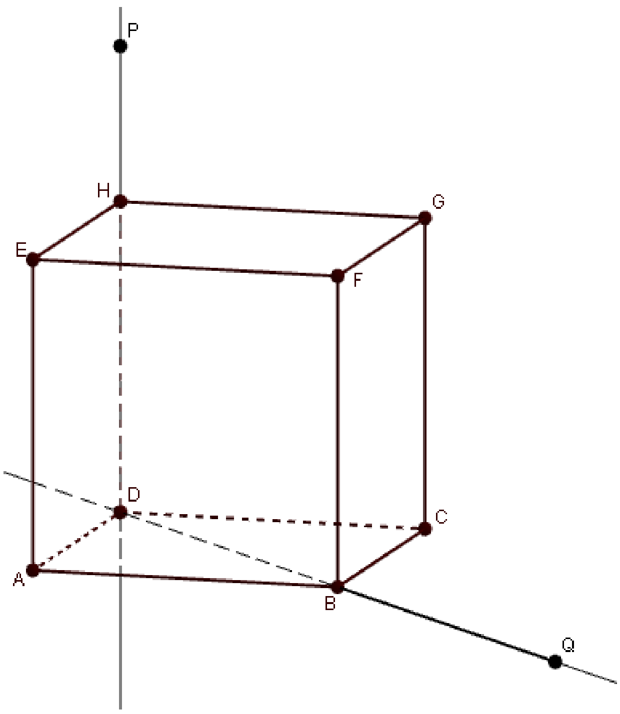


Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průnik přímky PQ s povrchem krychle.

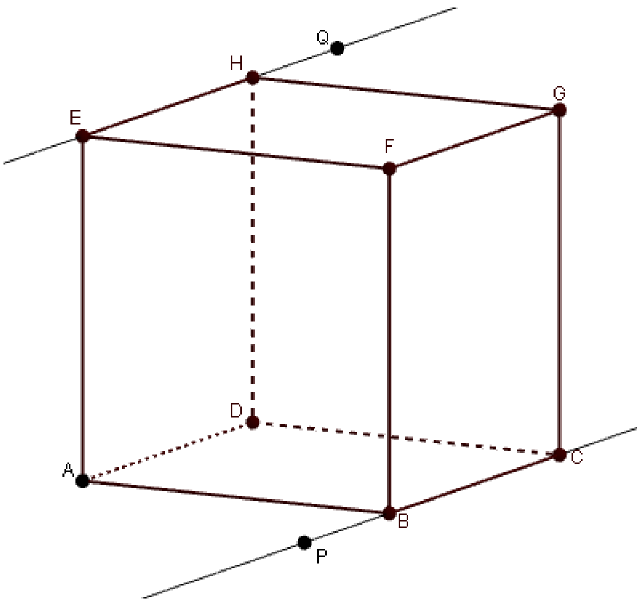
a)



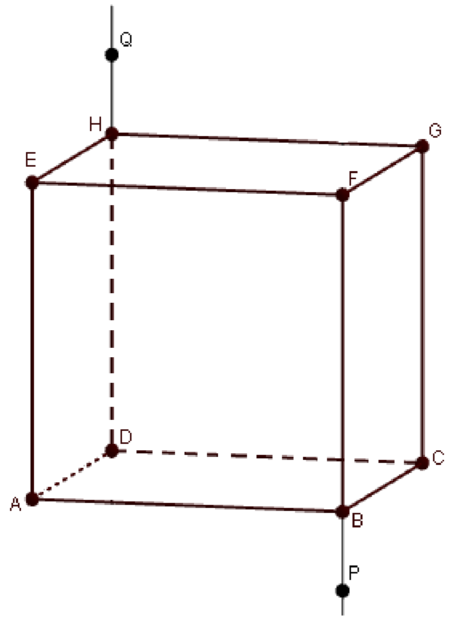
b)



c)



d)



6.7.9 Řešení pracovního listu č. 9

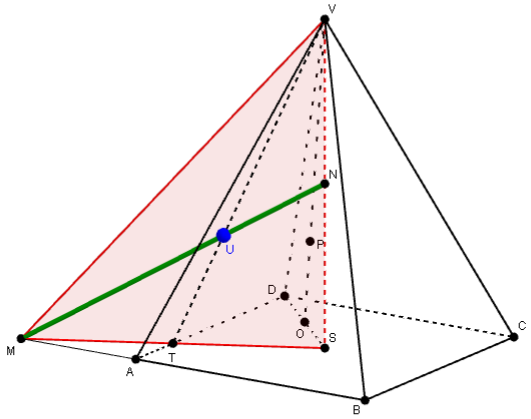
Příklad 1 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, bod S je středem jeho podstavy. Bod M je bodem polopřímky BA, $|BM| = \frac{3}{2}|AB|$, bod N je středem úsečky SV a bod P leží na úsečce OV, kde O je středem úsečky DS. Sestrojte průnik jehlanu a přímky:

a) MN

b) MP.

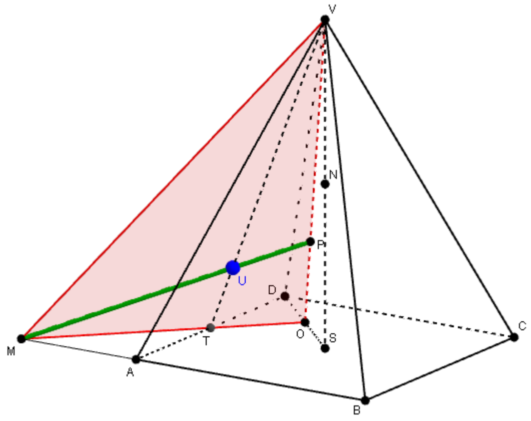
Řešení:

a)



Řešení GeoGebra

b)

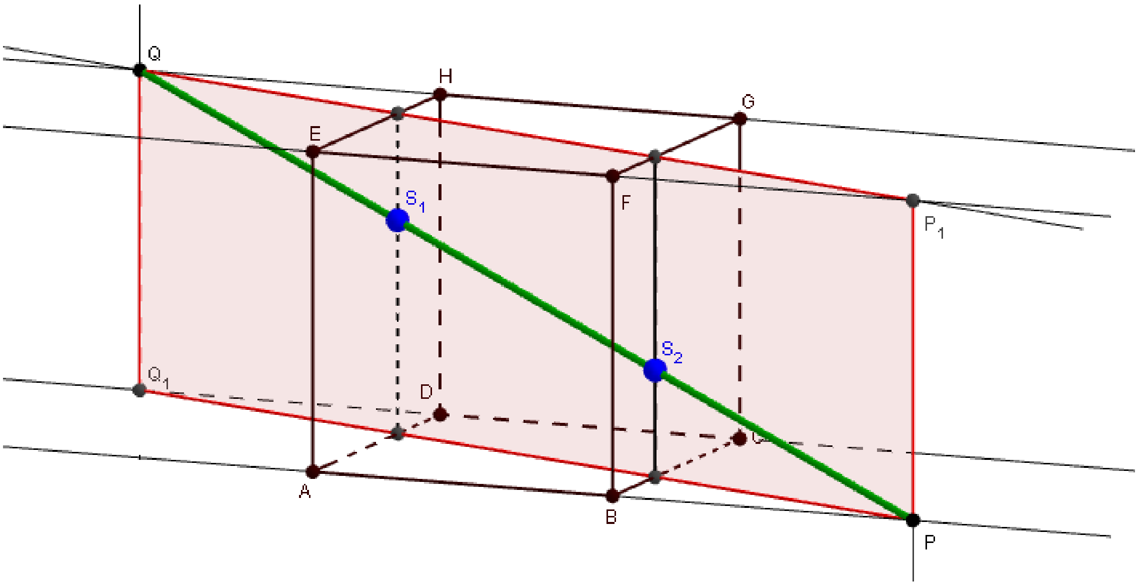


Řešení GeoGebra

Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průnik přímky PQ s povrchem krychle.

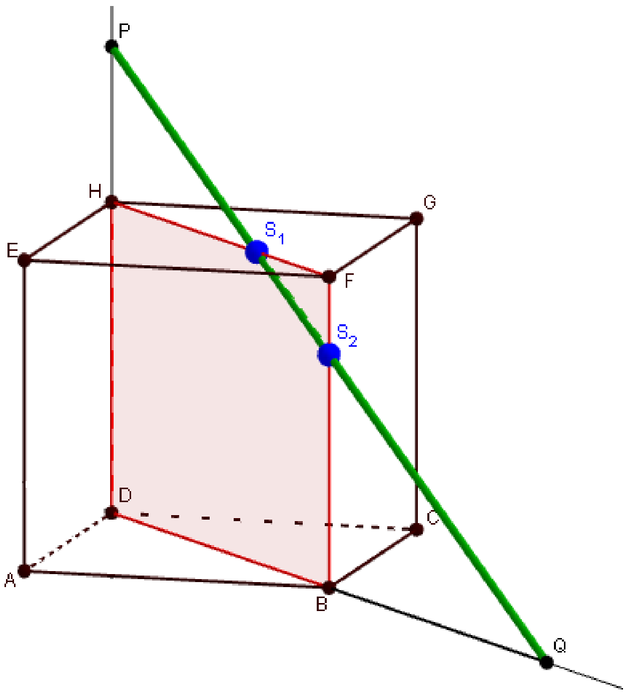
Řešení:

a)



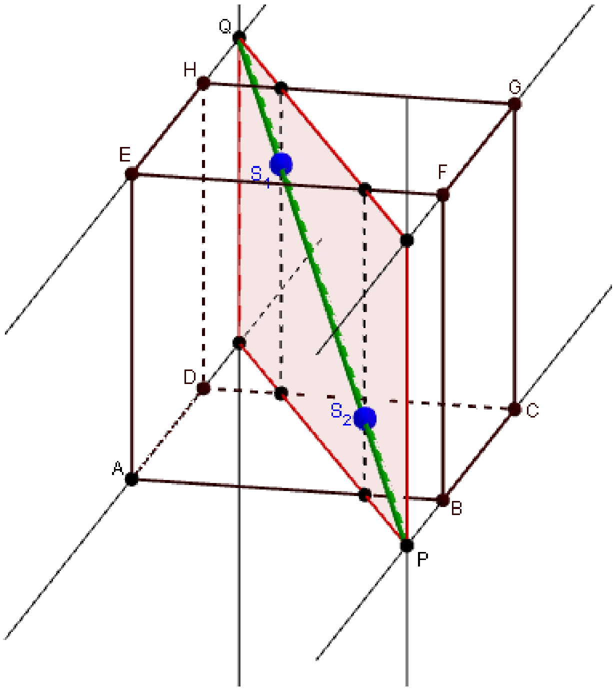
Řešení GeoGebra

b)



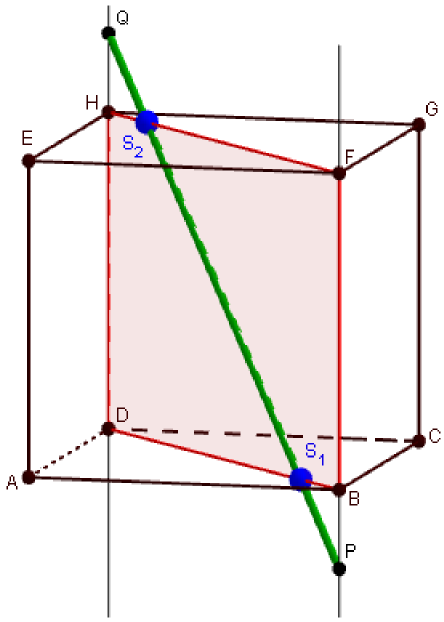
Řešení GeoGebra

c)



Řešení GeoGebra

d)



Řešení GeoGebra

7 Závěr

Diplomová práce Polohové úlohy ve stereometrii vznikla jako pokračování předchozí bakalářské práce zaměřené na problematiku metrických úloh [1]. Cílem této práce je zefektivnění výuky stereometrie na všech typech středních škol a zlepšení prostorové představivosti u studentů. Celkem bylo vytvořeno 84 řešených úloh.

Obě práce byly prezentovány na Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol v Srní v roce 2014. Článek ze sborníku příspěvků [17] recenzovaných dvěma nezávislými recenzenty je zahrnut do přílohy. Požadavek na vytvoření pracovních listů a jejich řešení vyšel z fakultního Gymnázia v Jírovcově ulici 8 v Českých Budějovicích. Po prezentaci na konferenci vytvořené pracovní listy a jejich řešení vyvolaly zájem o jejich používání i na jiných středních školách a gymnáziích.

Metrické úlohy byly již testovány při výuce na fakultním gymnáziu. Z výsledků tohoto testování a hodnocení pracovních listů a jejich řešení se vycházelo při tvorbě diplomové práce.

Příklady jsou řešeny v programu GeoGebra 5. Sbírka obsahuje základní typy úloh řešených na středních školách. Úlohy lze využít na všech typech středních škol.

Reference

[1] KREPSOVÁ, Lenka. Metrické úlohy ve stereometrii. České Budějovice, 2013. 102 s. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita.

[2] KRYNICKÝ, Martin. Realisticky. Matematika SŠ [online]. 2010 [cit. 2015-01-12]. Dostupné z: www.realisticky.cz/dil.php?id=2

[3] akermann electronic. Distributor softwaru Cabri [online]. 2010 [cit. 2015-01-25]. Dostupné z: http://www.akermann.cz/standardni-it/software-cabri/vsechny-licence.html

[4] POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 223 s. ISBN 9788071961789.

[5] ODVÁRKO, Oldřich a Jana ŘEPOVÁ. Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť. 5. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 200 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6039-X.

[6] VONDRA, Jan. Matematika pro SŠ – 6. díl: Stereometrie. Brno: Didaktis, 2015. ISBN 978-80-7358-220-3.

[7] Setkání učitelů matematiky: seminář určený učitelům a studentům : Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. Brno: Masarykova univerzita, 2014. ISSN 9788086843469. 1x ročně.

[8] PETÁKOVÁ, Jindra. Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. ISBN 9788071960997.

[9] GeoGebra [online]. 2013 [cit. 2014-10-22]. Dostupné z: http://www.geogebra.org/cms/cs/

[10] POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 9. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 660 s. ISBN 9788071963561.

[11] POLÁK, Josef. Středoškolská matematika v úlohách II. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 626 s. ISBN 8071961663.

[12] KUBEŠOVÁ, Naděžda a CIBULKOVÁ Eva. Matematika: přehled středoškolského učiva. 2. vyd. Třebíč: Petra Velanová, 2006, 239 s. Maturita (Petra Velanová). ISBN 9788086873053.

[13] ZGODOVÁ, Aneta. Volné rovnoběžné promítání [online]. Brno, 2011 [cit. 2015-01-02]. Dostupné z: `is.muni.cz/th/324385/prif_b/Volne_rovnobezne_promitani.pdf`. Diplomová práce. Masarykova univerzita.

[14] KABOUREK, Jiří a Jan VEJMOLA. Stereometrie. Elektronický učitel [online]. 2008 [cit. 2015-01-02]. Dostupné z: `http://www.eucitel.cz/software/?id=6`

[15] ČERMÁK, Pavel a ČERVINKOVÁ Petra. Odmaturuj! z matematiky 1. Vyd. 4. Brno: Didaktis, 2007, 208 s. Odmaturuj!. ISBN 9788073581022.

[16] BOUCNÍK, Pavel. Odmaturuj! z matematiky 3: [sbírka řešených příkladů]. Vyd. 1. Brno: Didaktis, 2004, 248 s. Odmaturuj!. ISBN 8073580101.

[17] KREPSOVÁ, Lenka. Pracovní listy pro výuku stereometrie. In: Setkání učitelů matematiky. Brno: Masarykova univerzita, 2014, s. 109 - 114. ISSN 9788086843469.

A Článek ze sborníku Setkání učitelů matematiky

Pracovní listy pro výuku stereometrie

Lenka Krepsová

Abstrakt

Stereometrie je disciplína časově náročná a velmi obtížná na prostorovou představivost. Pro zkvalitnění výuky byly vytvořeny pracovní listy pro studenty, které obsahují velké množství příkladů k procvičování. Každé zadání z pracovního listu má své řešení v matematickém softwaru GeoGebra. Vyučující má tak možnost promítat řešení, krokovat postup a zároveň procházet mezi žáky, kontrolovat jejich práci a upozorňovat na chyby.

A.1 Úvod

Stereometrie se obvykle na středních školách vyučuje ve třech blocích. V prvním bloku se student seznámí s tělesy, počítání jejich objemů a povrchů, dále následuje výuka vzájemné polohy přímek a rovin v prostoru, provádějí se řezy těles nebo se hledají průniky přímky s tělesem. Poslední část se zabývá problematikou metrických úloh, která navazuje na znalosti získané v předchozím studiu stereometrie.

Stereometrické úlohy jsou časově náročnější než úlohy planimetrické, jsou mnohem obtížnější na prostorovou představivost a stanovení způsobu řešení. Významným pomocníkem při výuce se může stát použití informačních technologií, vhodného software a interaktivní tabule.

Vzhledem k nedostatku vhodných materiálů a časové zaneprázdněnosti středoškolských učitelů byl stanoven požadavek na vytvoření učebních podpor (pracovních listů, prezentací potřebných k výkladu učiva, testů). V první fázi byly vytvořeny pracovní listy pro studenty a jejich řešení pro učitele jako součást bakalářské práce Metrické úlohy ve stereometrii [1]. Tato práce vznikla jako reakce na požadavek učitelů Gymnázia, Jírovcova 8, České Budějovice, které je fakultní školou Přírodovědecké fakulty Jihočeské univerzity. Nyní pokračuje tvorba pracovních listů a jejich řešení v oblasti polohových úloh.

Hlavním cílem je usnadnění a zefektivnění výuky a zlepšení prostorové představivosti studentů. Každý student je na jiné úrovni, proto je důležité, aby každý mohl studovat svým tempem a podle svých možností.

A.2 Dotazníkové šetření

Podle katalogu minimálních požadavků, který vydal CERMAT, může být ve státní maturitní zkoušce z matematiky oblast stereometrie zastoupena 10 - 20 %. Žák by měl zvládnout charakterizovat jednotlivá tělesa, vypočítat jejich objem a povrch (krychle, kvádr, hranol, jehlan, rotační válec, rotační kužel, komolý jehlan a kužel, koule a její části) a měl by umět využít poznatků o tělesech v praktických úlohách [2].

Před vlastní tvorbou pracovních listů a řešených příkladů pro vyučující bylo provedeno anonymní dotazníkové šetření na středních školách všech typů (gymnázia, střední odborné školy, odborná učiliště). Dotazníkového šetření se zúčastnilo celkem 19 vyučujících středních škol v Českých Budějovicích a blízkém okolí. Vyučující odpovídali na 10 otázek. Cílem bylo zjistit, jakým způsobem vysvětlují problematiku metrických úloh ve stereometrii, jaké k tomu využívají pomůcky, zda jim tento způsob výuky vyhovuje či nikoli a zda by uvítali podpůrné materiály k výuce.

Z průzkumu vyplynulo, že stereometrie se vyučuje na všech typech středních škol, dokonce i na odborných učilištích, kde se výuka stereometrie nepředpokládala mj. vzhledem k časové náročnosti výuky. Vyučující při výkladu stereometrie využívají především tabuli a připravené prezentace, které pak promítají, či využívají multimediální tabule. Někteří také připravují své vlastní materiály, které pak poskytují studentům. Ve výuce využívají především programy GeoGebra [6], Mathematica a Cabri.

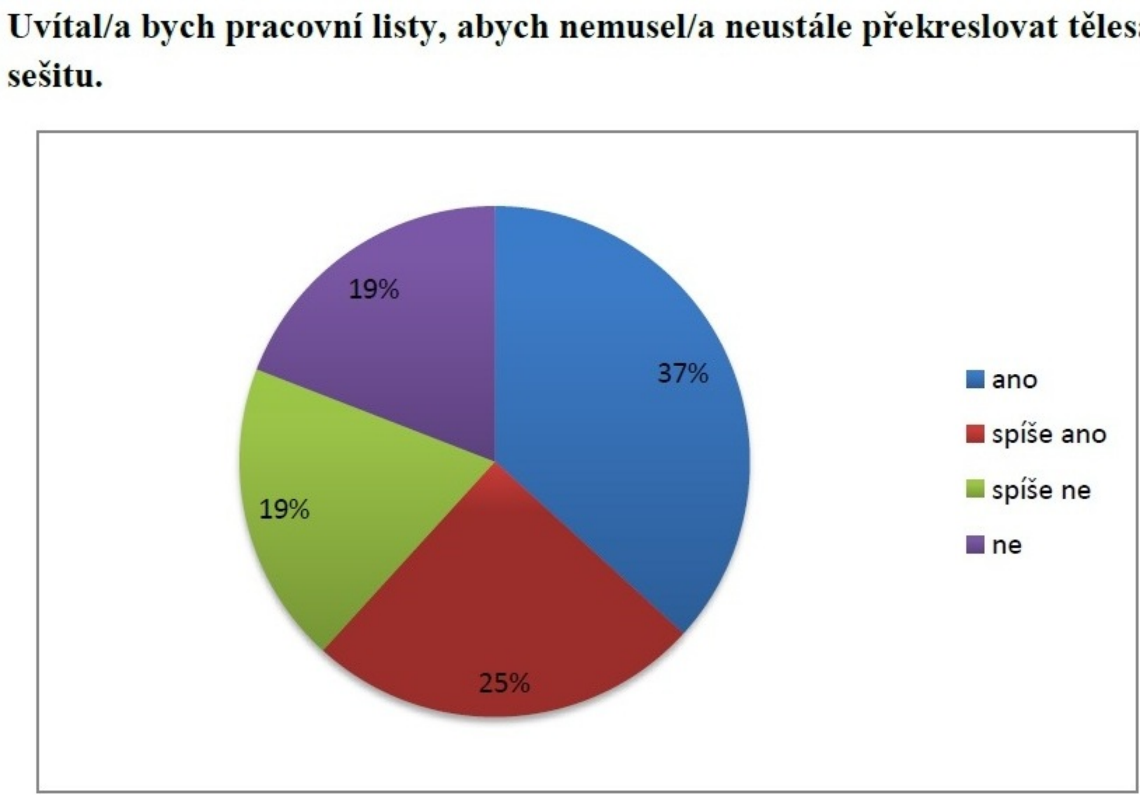
Většině učitelů jejich styl výuky vyhovuje, ale pro zkvalitnění výuky by uvítali změnu, která by jim usnadnila výklad stereometrie.

Druhé dotazníkové šetření bylo provedeno mezi studenty posledního ročníku gymnázia. Celkově se ho zúčastnilo 68 studentů. Odpovídali na 4 otázky, které se opět týkaly stylu výuky stereometrie, jestli jim styl výuky vyhovuje a zda by uvítali pracovní listy a využívání informačních technologií při výuce.

Studenti uvedli, že vyučující jim látku vysvětluje na tabuli, používá prezentace a své materiály. Studenti byli se stylem výuky spokojeni nebo téměř spokojeni.

Ve výuce by pracovní listy uvítali, aby nemuseli neustále překreslovat tělesa do sešitu. Také zastávají názor, že ve výuce by bylo vhodné pro názornost používat matematický software (obr.16).

Dotazníkové šetření bylo provedeno na malém vzorku respondentů.



Obrázek 16: Dotazníkové šetření - žáci

A.3 Tvorba pracovních listů a jejich řešení

A.3.1 Východiska pro tvorbu

Po předchozí analýze dosud zveřejněné literatury a odborných prací bylo zjištěno, že problematikou stereometrie se zabývá například učebnice stereometrie z edice Matematika pro gymnázia nakladatelství Prometheus [3] a Přehled středoškolské matematiky [4]. Odborné práce se zabývaly všeobecným přehledem stereometrie, polohovými úlohami, řešenými ukázkovými příklady v matematickém programu Cabri geometrie, či vytvořením webové stránky s výkladem učiva [5]. Nebyly zveřejněny téměř žádné pracovní listy pro studenty.

A.3.2 Pracovní listy

Před tvorbou pracovních listů byl vytvořen stručný teoretický přehled potřebných vět a definic na úrovni gymnaziálního učiva. Teoretická část může být také použita k samostudiu. Kromě přehledu teorie jsou uvedeny i základní příklady k ilustraci daného tématu. Zadání příkladů v teoretické části i pracovních listech vychází z učebnice pro gymnázia [3] a některá jsou vytvořena autorkou tohoto příspěvku.

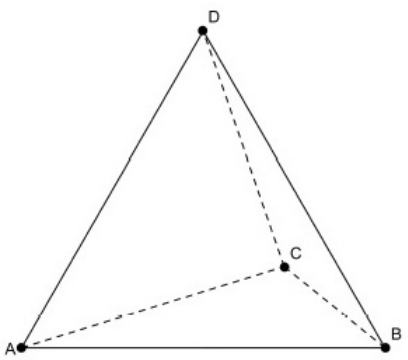
Na gymnáziu je látka probírána mnohem podrobněji než na odborných středních školách. Výběr pracovních listů lze přizpůsobit obsahu výuky na konkrétní škole.

Stěžejní část práce tvoří soubor příkladů v pracovních listech pro žáky. Celkem byla vytvořena sbírka 48 příkladů. Některé příklady mají i další podúlohy a celá sbírka nabízí kolem 120 příkladů k procvičování. Konkrétní zadání jsou doplněna obrázkem tělesa, do kterého student může přímo znázorňovat své řešení zadané úlohy a dále zde má u jednotlivých zadání prostor na výpočty. Ukázka pracovního listu pro studenty je na (obr.17).

Příklad 13 Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Vypočítejte odchylku:

a) rovin dvou stěn čtyřstěnu

Řešení:



Obrázek 17: Ukázka zadané úlohy v pracovním listu pro studenty

A.3.3 Řešení pracovních listů

Jsou připravena řešení jednotlivých příkladů, postupy výpočtů jsou krokovány a podrobně vysvětleny. Takto zpracované úlohy lze použít jak při přímé výuce, tak i při samostudiu. Požadavek na vytvoření pracovních listů a jejich řešení vznikl na gymnáziu, proto i příklady vybrané do pracovních listů pocházejí z učebnice pro gymnázia [3]. Neznamená to však, že je nemožné jejich využití na jiných typech středních škol.

Pro tvorbu řešení byl zvolen software GeoGebra[6]. Mezi výhody tohoto softwaru patří přístupnost a intuitivní ovládání.

Program GeoGebra byl použit k rýsování. Vyučující má k dispozici narýsované těleso a znázorněné zadání dané úlohy. Vedle znázorněného tělesa je popsáno řešení úlohy s náznakem výpočtu a konečný výsledek.

Mezi největší výhodu patří možnost krokování. Vyučující má možnost procházet mezi studenty, kontrolovat jejich postup řešení a upozornit je na případné chyby. Tímto způsobem se studentům může věnovat individuálně. Zároveň mohou být řešené úlohy zpřístupněné pro studenty pro kontrolu domácích prací, jako příprava na písemnou práci nebo při samostudiu.

Vytvořené materiály lze také využít pro práci s talentovanými studenty a podpořit tak jejich individuální rozvoj [7].

A.3.4 Testování

Testování zhotovených pracovních listů a jejich řešení proběhlo při hodině matematiky v maturitním ročníku osmiletého gymnázia. Výuka probíhala formou opakování. Byla vytvořena prezentace, která obsahovala přehled definic a vět potřebných při řešení stereometrických úloh. Prezentace byla rozdělena do třech hlavních částí: odchylka přímek a rovin, kolmost přímek a rovin, vzdálenost bodů, přímek a rovin. Po každé části byly studentům rozdány pracovní listy obsahující úlohy, na které bylo potřeba aplikovat zopakované definice a věty. Studenti během řešení úloh vysvětlovali, jak by postupovali při řešení, případně složitější úlohy řešili samostatně a poté jim bylo postupně vysvětleno řešení v programu GeoGebra. Na závěr byl shrnut obsah opakování a proběhla diskuze. Studenti zhodnotili pracovní listy a jejich řešení a uvedli klady a zápory tohoto stylu výuky.

Studenti se shodli, že pracovní listy jim zpříjemní práci při hodinách a také bude možné látku probírat efektivněji. Promítání řešení příkladů může velmi pomoci vyučujícím při výkladu nové látky. Někteří studenti mají problém s prostorovou představivostí, názorná ukázka jim může pomoci lépe pochopit danou problematiku. Zároveň byly studenty uvedeny také připomínky. Řešení příkladů promítané na plátno může vést k tomu, že studenti budou vyčkávat, až se objeví řešení, které si pak opíší, a nebudou mít snahu řešení vymyslet sami. Dospělo se k závěru, že při výuce bude vhodné kombinovat více metod. Pracovní listy lze využívat i pro domácí přípravu, testy a procvičování a řešené příklady mohou být zveřejněné na výukovém serveru školy a zpřístupněné pro studenty.

A.4 Závěr

K zefektivnění výuky metrických úloh ve stereometrii byly vytvořeny pracovní listy a řešené příklady. Celý soubor obsahuje 48 zadání příkladů. Sbírka příkladů je přehledně rozdělena do podkapitol. Poskytuje velké množství úloh, které mohou být použity pro různé účely (výklad, procvičování, domácí příprava, testování). Náhodně vybrané pracovní listy z každé kapitoly a jejich řešení byly testovány v praxi při hodině matematiky na fakultním gymnáziu. Do testování se zapojili studenti posledního ročníku osmiletého gymnázia. V následujícím období budou úlohy dále testovány v přímé výuce, případné připomínky budou zohledněny. Po úpravách bude sbírka veřejně zpřístupněna.

Vzhledem k příznivému přijetí vytvořených materiálů pro výuku metrických úloh pokračuje v současné době tvorba materiálů pro úlohy polohové. Dokončení se předpokládá na jaře 2015. Po následném testování na gymnáziu a zapracování připomínek budou i tyto materiály zveřejněny.

A.5 Poděkování

Autorka děkuje za podporu projektu Otevřená věda III, vyučujícím matematiky z Gymnázia Jírovcova v Českých Budějovicích a RNDr. Ing. Janě Kalové, Ph.D. z Ústavu matematiky a biomatematiky PřF JČU v ČB za jejich čas a rady.

A.6 Reference

1. KREPSOVÁ, Lenka. Metrické úlohy ve stereometrii. České Budějovice, 2013. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita.

2. CERMAT. Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky - matematika [online]. 2013 [cit. 2014-06-10]. Dostupné z: http://www.novamaturita.cz/katalogy-pozadavku-1404033138.html

3. POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia - stereometrie. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 223 s. ISBN 9788071961789.

4. POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 9. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 660 s. ISBN 9788071963561.

5. KRYNICKÝ, Martin. Realisticky. Matematika SŠ [online]. 2010 [cit. 2014-06-10]. Dostupné z: www.realisticky.cz/dil.php?id=2

6. GeoGebra [online]. 2013 [cit. 2014-06-10]. Dostupné z: http://www.geogebra.org/cms/cs/

7. KALOVÁ, Jana. Individual students works as a way to increase interest in technical disciplines and science. Journal of Technology and Information Education, Časopis pro technickou a informační výchovu [online]. 2/2013. ISSN 1803-537X. [cit. 2014-04-30].

B Zavedené značení

P, Q	body P, Q
p, q	přímky p, q
$\leftrightarrow PQ$	přímka PQ
$\mapsto PQ$	polopřímka PQ
σ	rovina σ
$\leftrightarrow PQS$	rovina PQS
$\leftrightarrow Qp$	rovina QP
$\leftrightarrow pq$	rovina pq
$\measuredangle PVQ$	konvexní úhel PVQ
$\in$, $\notin$	je/není prvkem
$P = Q$, $P \neq Q$	bod P je/není totožný s bodem Q
$p = q$, $p \neq q$	přímka p je/není totožná s q
$\rho = \sigma$, $\rho \neq \sigma$	přímka ρ je/není totožná s σ
$\parallel$, $\nparallel$	je/není rovnoběžno
$p \cap q = P$	průsečík P přímek p,q
$\rho \cap \sigma = p$	průsečnice p přímek p,q
$\perp$	je kolmo
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$p \perp \rho$	přímka p je kolmá k rovině ρ
$\rho \perp \sigma$	rovina ρ je kolmá k rovině σ
$\|PQ\|$	vzdálenost bodů P, Q
$\|Pq\|$	vzdálenost bodu P od přímky q
$\|P\rho\|$	vzdálenost bodu P od roviny ρ
$\|pq\|$	vzdálenost rovnoběž. (mimoběž.) přímek p, q
$\|\rho\sigma\|$	vzdálenost rovnoběžných rovin ρ, σ
$\|\measuredangle PVQ\|$	velikost konvexního úhlu $\measuredangle PVQ$
$\|\measuredangle pq\|$	odchylka přímek p, q
$\|\measuredangle p\rho\|$	odchylka přímky p od roviny ρ
$\|\measuredangle \rho\sigma\|$	odchylka rovin ρ, σ