UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Marie Zubatá

MATEMATIKA A JEJÍ PROBLÉMY V OBDOBÍ STAROVĚKU

Olomouc 2015 Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CsC.

Prohlašuji, že jsem práci zpracovala samostatně za pomoci citované literatury a použitých zdrojů pod vedením doc. RNDr. Jitky Laitochové, CsC..

V Olomouci ……………………….

podpis

Děkuji doc. RNDr. Jitce Laitochové, CsC. za vedení mé práce, dále pak Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., PhD. za cenné rady, připomínky a za čas, který mi věnoval při konzultacích mé bakalářské práce a v neposlední řadě mé rodině, která mi byla po celou dobu studia oporou.

Obsah

Úvod

Bakalářskou práci na téma: Matematika a její problémy ve starověku jsem si vybrala, protože mě zaujala myšlenka podívat se na matematiku do dob, kdy počtáři neměli k dispozici při výpočtech materiály (matematické tabulky, kalkulačku, matematické programy atd.), jako máme my dnes, ale přesto spoustu složitějších úloh bez větších problémů zvládli vyřešit.

Období starověku se datuje od 4. – 1. tisíciletí př. n. l. až do rozpadu Západořímské říše tj. do roku 476 po Kristu. Matematika prošla během staletí zásadními změnami, které ovlivnily následující generace v počtech. K získání přehledu o úrovni matematiky v období starověku nám slouží nalezené matematické texty, které jsou důležitým zdrojem informací.

V oblastech nejstarších říčních kultur jako jsou: Mezopotámie, Egypt, Čína, Indie vznikaly první matematické pojmy. Důkazem jsou obsáhlé dochované matematické texty. Např. z Mezopotámie desítky až stovky hliněných tabulek a z Egypta papyry (Rhindův, Moskevský (Londýnský)…). Nesmíme opomenout ani antické Řecko, které je kolébkou nejznámějších a důležitých matematiků například jako Pýthagorás, Eukleidés, Thalés, Archimédés, aj.

Jelikož je historie matematiky výše zmíněných míst velice obsáhlá, vybrala jsem pro podrobnější zpracování samotnou Mezopotámii.

Cílem této bakalářské práce je seznámení čtenáře s matematikou starověké Mezopotámie, která je rozebrána ve dvou kapitolách a jejich podkapitolách od vzniku písma až po řešení složitých rovnic a dále zjistit, jak si poradí s podobnými úlohami z této doby žáci současné ZŠ.

V první kapitole je čtenář obeznámen s obecným výkladem období starověku, který je doplněn tematickým obrázkem Babylónské věže.

Druhá kapitola je členěna na několik podkapitol, ve kterých je rozebrána historie Mezopotámie, vznik písma, vzdělání a samotný zrod zápisu čísel, pozičních soustav, rovnic, výpočtů objemů těles a dalších.

Třetí a tedy zároveň i poslední kapitola je věnována praktické části bakalářské práce a to pracovním listům pro žáky devátých tříd ZŠ a jejich zhodnocení.

1. Starověk

Starověk je etapa, kterou řadíme do druhého období celého lidstva (vznik písma, vzdělávání – jsou dochovány písemné dokumenty). Jeho začátek považujeme období od rozpadu společnosti, která se tak rozdělila na několik menších útvarů (států) - cca 4. – 1. tisíciletí př. n. l. Konec této doby určujeme pádem západořímské říše, který se datuje do roku 476 po Kristu. Na začátku tohoto období začaly vznikat první kultury, města. První kulturou je Mezopotámie, která vznikla v oblasti řek Eufrat a Tigris. Druhou je Egypt, který se nachází v údolí Nilu. V této době žila v městech a vesničkách společenství, která se dělila na zemědělce, úředníky, řemeslníky a obchodníky. Součástí byly i státní řídící instituce, které pomocí donucovacích úřadů získávaly různé poplatky a daně. [18]

Stát zastával několik důležitých funkcí, které byly potřeba pro správný chod (vojenské, politické, hospodářsko-kulturní). Zajišťoval, aby lidé prováděli odvodňovací a zavlažovací systémy. V čele tohoto celého systému stál panovník, který určoval pravidla a povinnosti všech vrstev (od rolníků po vyšší vrstvy), vytvářel zákoníky. Současně s těmito faktory vzniklo i písmo, které se začalo používat mimo jiné pro usnadnění hospodářské činnosti. Největší úlohu ale mělo náboženství, které zapříčinilo rozvoj kultury (literatura, stavby pyramid, náboženské uctívání panovníka, stavby, umění a věda). [18]

Tato celá civilizace se dostává i dál do světa, a to na východ (Sýrie a oblasti, které leží při Středozemním moři). Úzce to tedy souvisí s rozvojem zemědělství a námořní dopravy, která zajišťovala styky v té době významnými místy (Malá Asie, Řecko, ostrovy v Egejském moři a Egypt). Začaly se tedy stavět přístavy, které výrazně zlepšily propojení těchto zemí. Do Malé Asie začala více pronikat civilizace a v severní Mezopotámii se začal rozvíjet obchod, díky velkému množství kamene a dřeva. [18]

V povodí velkých řek kde byla úrodná půda a příhodné podmínky se usídlili zemědělci, kteří prohlubovali své zkušenosti při pěstování různých plodin. Nečekané záplavy několikrát do roka jim dopomohly odhadnout, kdy a jaké plodiny sázet. V Egyptě to byl nejčastěji ječmen, proso, čočka, ovoce a zelenina. Rolníci také chovali různé druhy zvířat, ať už pro maso nebo produkty, které z těchto zvířat využívaly. Na mléko chovaly kozy, ovce, na maso vepře, pro vejce slepice a jako tažný prostředek koně či osly. Důležitou úlohu v oblasti těžkých řemesel sehráli muži (řezník, pekař, mlynář, truhlář, kov…), ženy se věnovaly především tkaní, kovotepectví či jiným pro ženy lehčím řemeslům. Urychlení dopravy dopomohl vynález kola, které se objevilo v Mezopotámii již na konci 4. tisíciletí př. n. l. Vozy byly taženy tažnými zvířaty, a tak docházelo k rychlé přepravě zboží, předmětů, materiálů. Mezi další oblíbený způsob dopravy patřilo i mořeplavectví, které propojovalo i různé kontinenty. Domovy, úřady a různé stavby se stavěly z hlíny, jelikož hlína po vypálení na Slunci měla podobné vlastnosti jako pálená cihla. Dalším stavebním materiálem bylo kamení a dřevo. Nejčastějšími stavbami byly chýše, opevnění, obydlí panovníků - v Egyptě pyramidy a v Mezopotámii zikkuraty („schodové chrámy“) atd. [18]

Obrázek 1 ***Babylonská věž na obraze Pietra Brueghela*** **[20]**

2. Mezopotámie

Oblast, která se nacházela mezi řekami Eufrat a Tigris (dnešní Fúrád a Tidžlid) měla v severní oblasti hornatý povrch (viz. obr.2). Čelila nájezdům horských kmenů, které tuto zemi často napadaly. Průsmyky vedly rozsáhlé obchodní cesty a jih Mezotopotámie tvořil Perský záliv, který umožňoval dokonalé propojení s Indií. Na přelomu 4. – 3. tisíciletí př. n. l. osídlili tuto zemi Sumerové. [19]

2. 1 Období Akkadů

Ve 23. století př. n. l. založil, po nekonečných válkách a bojích s hlavním protivníkem Lugalzasesim o sjednocení Mezopotámie, Sargon Akkadský novou říši – Akkadskou. Jako prvnímu se Sargonovi podařilo spojit celou Mezopotámii, které vládla jediná moc. Největšího rozmachu dostála Mezopotámie za vlády Narám-Sína, vnuka Sargona Akkadského.

Budoucí pokolení pokládaly akkadskou říši za nejslavnější a nejlepší v celé říši. I když byla říše opěvována, systém založený samotným Sargonem byl natolik zajímavý, že vyvolával války a soupeření kolem královy osoby, až nakonec těmto nátlakům Sargon neodolal a byl poražen. Tato neutichající touha po moci způsobila rozpad říše.

Akkadští králové ztratili úplnou kontrolu nad sumerským jihem na přelomu 22. a 21. století př. n. l. a pouze na okolí samotného města Akkadu a údolí řeky Dijály se vztahovala jejich moc. Ostatní města jako Uruk, Lagaš, Umma a Ur vyhlásila svoji samostatnost, přece jenom to byla doba epigonů. Ostatní méně významní panovníci si dělali nárok na dědictví zaniklé říše Akkadské. Mezitím usedl na trůn Gudea z Lagaše, kterému stačila vláda nad knížectvím. [1]

2. 2 Období Amoritů

Na přelomu 3. a 2. tisíciletí př. n. l. vznikla Starobabylónská říše po vpádu semitských Amoritů, jejichž hlavním městem se stal Babylón. Během vlády Amoritů došlo k rozvoji obchodu, vědy, umění a budování měst. V průběhu následujících let se událo několik zásadních zvratů, které měly za následek rozpad říše. Až chaldejská dynastie v 1. tisíciletí obnovila na jihu Mezopotámie babylonský stát – Novobabylónská říše. Na severu vznikl městský stát Aššur, který byl základním kamenem Asýrie. Mocného rozmachu dosáhla kolem

8. – 7. století př. n. l.. Připojilo se k ní území na Blízkém východě a některé oblasti Egyptu (hl. město Aššur, později Ninive). Médsko – babylonská vojska dobyla roku 612 Ninive a tím, rozvrátila celou Asýrii. Krátkodobě byla sjednocena Mezopotámie novobabylónskou vládou. Následovalo její ovládnutí Perské říše, kterou na konci 4. století př. n. l. dobyl Alexandr Makedonský. Na následující mapě jsou znázorněna významná města Mezopotámie. [4]

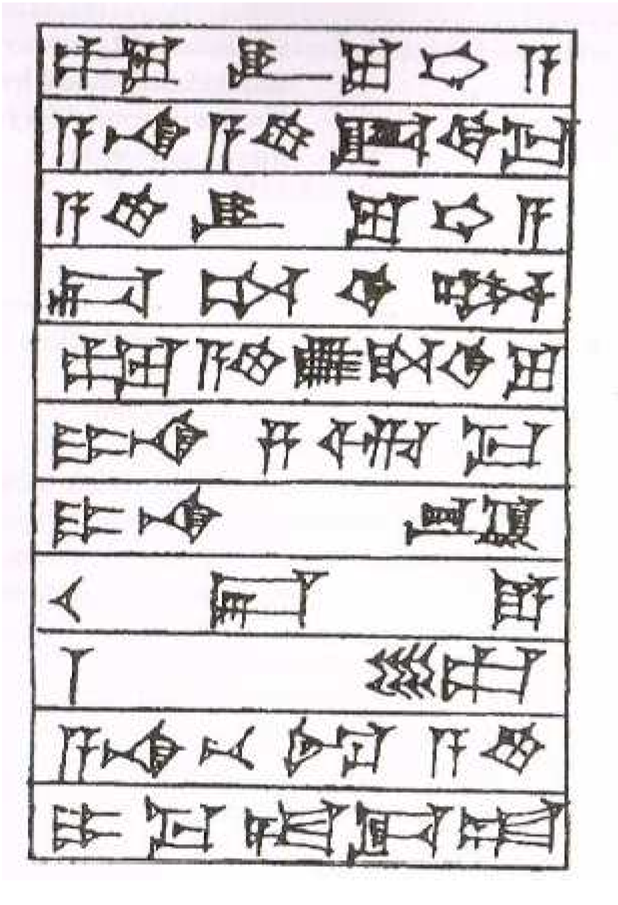
Obrázek 2 ***Mapa starověké Mezopotámie*** **[4, s. 180]**

2. 3 Písmo

Ještě dříve než bylo vynalezeno písmo, se ve 4. tisíciletí př. n. l. používali tzv. kalkuli (žetony, známky), které se zapečeťovaly do dutých kulatých hliněných schránek. Ty se nepřestaly používat ani po vynálezu písma. [1]

První národ, který je považován za tvůrce písma, jsou Sumerové. Považovali písmo za úchvatný dar Bohů. Vzniklo na přelomu 4. – 3. tisíciletí. (viz. obr. 3) Psalo se do vlhkých hliněných destiček. Nejdříve to byly oblé a rovné čáry (piktogramy) později vyryté klínky. Vznikaly většinou vtlačováním seříznuté třtiny do vlhké hlíny, mnohem méně se nám klínopis dochoval na nápisech tesaných do kamene. Odtud již známé klínové písmo. Vlhké hliněné destičky se po vepsání textu sušily na Slunci. Sloužily pro zápisy hospodářů, kteří získávali přehled o výpůjčkách zaměstnanců nebo o svém majetku. Velké využití měly i jako učební pomůcky. Mistři, učenci na ně zapisovali své poznatky, ať už z odvětví vědy, stavebnictví či vojenství. I učni, žáci přispívali svými poznatky.

Tabulky vypálené Sluncem (z naprosté většiny jen vysušené) se uchovávaly v tehdejších knihovnách. Pravě proto, že byly vypalovány jen pomocí záření Slunce, se většina z nich dochovala mnohdy ve velmi špatném stavu; vypalují se až dnes – v muzeích na to mají speciální pece (po vypálení se odstraní nečistoty a často až poté je možno tabulku číst). Stávalo se, že knihovny vyhořely, ale tabulkám to jen prospělo. Oheň je ještě více vypálil a tak můžeme z těchto děl čerpat dodnes. Nejstarší dochované písemné památky pochází z chrámu v Uruku (dnešní Warka), Ninive, Nippuru, Mari, Ugaritu, Alalachu, Lagaši, Kaneši, Babylón, Uruku, Uru a Aššuru - ve všech těchto místech byly nalezeny rozsáhlé knihovny. [4]



Obrázek 3 ***Starobabylónské písmo*** **[4, s. 189]**

2. 4 Vzdělání

Rozvoj vzdělání úzce souvisí se vznikem písma. Jako první začali školy budovat Sumerové asi ve 3. tisíciletí. Jejich vzdělávací systém později převzali Babylóňané, Akkadové a Asyřané. Písmo umělo jen omezené množství lidí (písaři, úředníci), proto se první školy stavěly v blízkosti paláců či chrámů. Mohli se v nich vzdělávat chlapci, kteří patřili do vyšší vrstvy. Až do vlády panovníka Chammurabiho se mezi písaři nevyskytovaly žádné ženy. Důkazem jsou toho všechny soupisy žáků, jenž školy navštěvovaly.

Škola byla nazývána jako „dům tabulek“, kterou vedl ředitel, kterému se říkalo školní nebo velký otec. Samotné vzdělání zajišťovali učitelé a jejich pomocníci. Připravovali tabulky pro žáky a zkoumali jejich vědění a úkoly. Drtivá většina záznamů o mezopotamských školách pochází až ze starobabylónského období. [4]

„V Nippuru byla objevena destička s hádankou, která výstižně charakterizuje mezopotamský pohled na význam školy.

Dům, jehož základ se klene jako nebe,

dům, jenž jako amfora zahalen je látkou.

Nevědoucí tam vstupuje,

vědoucí odtud vychází ven. Co je to?

Je to dům tabulek.“ [4, s. 192]

Sumérský jazyk, počítání, kreslení, psaní a čtení se učilo ve škole. Úředníky, kteří měli na starost palácovou administrativu v hospodářství nebo v obchodě, připravovalo vzdělání. Ve školách byla vyžadována přísná kázeň (ve třídách stáli speciální muži s bičem, kteří v případě nekázně žáky bičovali), tělesné tresty tedy byly tedy běžnou součástí výuky. Mimo jiné existovaly i ve velkých městech odborné školy, kde se vyučovaly základy věd a náboženství, dále poznatky z lékařství, astronomie, matematiky, ranhojičství, lexikografie, literatura, právo, účetnictví, astrologie, liturgie, zaříkávání a věštění. Byly zde připravování úředníci, kněží, lékaři, vyšší státní úředníci, vědci, soudcové a učitelé. Nacházely se na významných místech, jako jsou soukromé domy, paláce a slavné chrámové okrsky. Školy měly vybavení velmi prosté. Jednotlivé třídy obsahovaly lavice z hlíny nebo rohože z rákosí a psací pultík. Při archeologických nálezech byly objeveny školní budovy v Nippuru, Sipparu, Uru a Mari. Dokonce v Mari byly nalezeny dvě vydlážděné místnosti s lavice pro asi čtyři žáky a dvě oválné nádoby, které nejspíš sloužily jako umývadlo. Ovšem nalezeny nebyly žádné hliněné tabulky s cvičnými texty. [4]

Na jiných nalezištích byla nalezena spousta školních „cvičných“ tabulek z 2. tisíciletí. Hliněné tabulky si většinou žáci obstarávali sami nebo je dostávali a zapisovali na ně své zápisky, úkoly. Starší žáci měli za úkol opisovat některé texty, které jim v budoucnu sloužily jako studijní materiál, nebo vytvářeli opisy pro své učitele. Každý den si žák připravil učivo doma na hliněnou tabulku a na druhý den po příchodu do školy se z této destičky učil, po pročtení a naučení mu pomocný pracovník dal novou nepopsanou tabulku, se kterou žák po celý den pracoval. Do školy žáci začínali chodit ve velmi nízkém věku a se vzděláním končili v dospělosti. Učení tedy bylo založeno na neustálém opakování učiva, memorování a opisování znaků a slov. Výuka vyžadovala trpělivost a dávku inteligence, jelikož klínové písmo bylo složité. V odborné škole vyučoval každý učitel jen jeden předmět, kdežto v obyčejné škole měl na starosti více předmětů. I když byla výchova nákladná, písaři byli žádaní
a privilegovaní. Je velmi pravděpodobné, že učenci nosili svým učitelům dary a platili vysoké poplatky za školné. Ve školách se opisovaly různé literární texty, díla z minulosti, vytvářely se nové vědecké práce. Byly tedy střediskem literární činnosti. Skvělým pramenem z tohoto období jsou školní tabulky. Nalezneme na nich ponaučení učitelů, stížnosti žáků (přísné tresty, náročné úkoly), zesměšňování slabých žáků, ale i chválu na nadané.

Bez větších změn převzali od Sumerů vzdělávání Asyřané, Akkadové a Babylóňané. K výuce přidali navíc výuku vlastního jazyka (akkadština, asyrština nebo babylónština). [4]

2.5 Matematika ve staré Mezopotámii

I když byla nalezena spousta hliněných tabulek, tak jen nepatrná část z nich je prostudována. Destiček, na kterých jsou zapsány matematické úlohy, je prostudováno a rozluštěno cca 400. Matematické výpočty se i objevovaly v hospodářských textech. [4]

2. 5. 1 Zápis čísel

Vývoj zápisu čísel v Mezopotámii byl velice komplikovaný. Vyvíjel se více než 5000 let. V různých dobách a v různých oblastech Mezopotámie existovalo několik způsobů zápisu čísel. Na Blízkém Východě se v 8. tisíciletí př. n. l. objevily malé geometrické „modely“, které znázorňovaly kužel, kouli, válec, apod., tzv. *tokens*, které byly nejspíše používány k „záznamu“ množství zemědělského zboží (ovce, obilí, olej, zelenina, ovoce,…). *Tokens* vznikaly v době, kdy primitivní lidé přecházeli od lovu a sběru k zemědělství.

V sedmdesátých letech 20. století jejich význam osvětlil D. Schmandt-Besserat. Následujících dvacet let se rozvíjely další teorie o původu a významu tokens. [4]

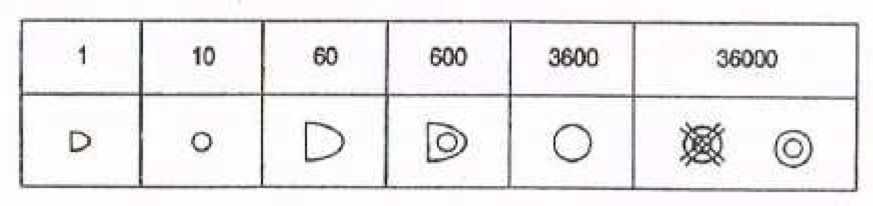
Osobitý tvar zastupoval množství určité plodiny. Kužel reprezentoval malé množství obilí a koule velké množství. Geometrický předmět představoval počítanou kvalitu (jednotka množství obilí), záznam se i sčítal (tři jednotky obilí byly reprezentovány jako tři určité znaky příslušného tvaru). S rozvojem zemědělství, měst, řemesel a obchodů došlo i k rozvoji tokens. Přibyly nové komplikovanější tvary (vroubky, díry, čárky,…) probíhalo tedy ustálení. Záznamy tokens byly uchovány v klášterech, palácích a archívech. Sloužily jako doklady o určitých převodech daní, obchodních dokladů atd. Dodnes se zachovaly dva druhy těchto „zápisů“. [4]

„První obsahoval tzv. „ostré tokens“ s dírkami, kterými se protahoval provázek. Na provázek se navléklo patřičné množství tokens, vše se zavázalo a konce provázku se připevnily k pevnému kusu hlíny, tzv. bullae, který se pohodlně vešel do dlaně. Bullae se opatřily pečetí (tj. otiskem pečetního válečku) tak, aby každý pokus změnit počet nebo tvar tokens byl možný jen při porušení pečeti. Druhý zápis využívající „obálku“ byl podstatně významnější pro vývoj matematiky. „Tokens“ se ukládaly do připravených hliněných obálek, které se nejprve uzavřely, a uzávěr se pak opatřil pečetí. Hliněná obálka však byla „neprůhledná“; jediný způsob, jak zjistit, jakou informaci obsahuje, by bylo rozbití obálky a tím i porušení pečeti. Tento problém byl vyřešen tím, že se na vnější straně obálky před jejím uzavřením otiskly do hlíny všechny ukládané tokens. Odtud byl již jen krůček prvnímu opravdovému zápisu čísel.“ [4, s. 207]

2.5.2 Nepoziční systém

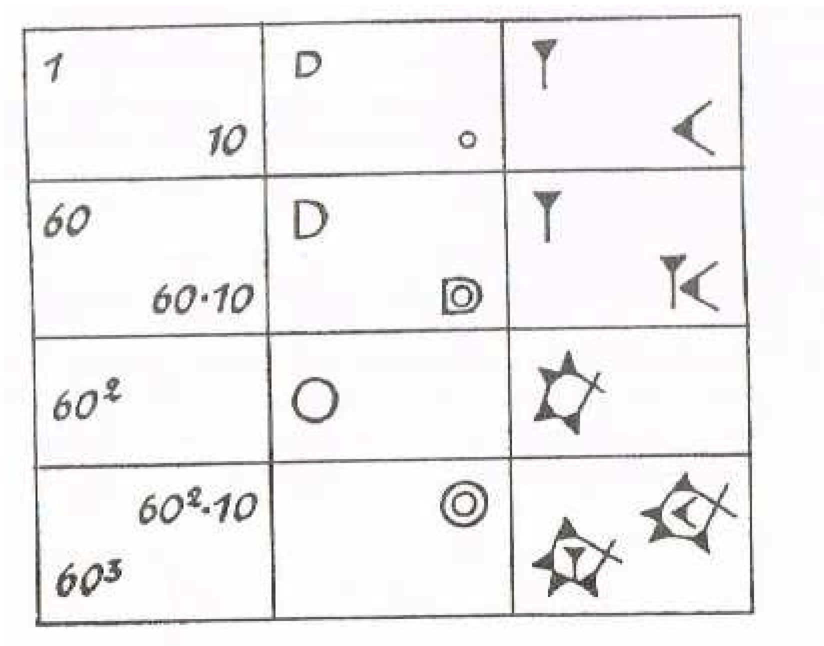
Z „obálkové“ metody vznikl nejspíše aditivní nepoziční zápis čísel. Obsahoval několik systémů s odlišnými znaky pro jednotky a jinými vztahy mezi nimi. Bylo již rozluštěno šedesát různých číselných znaků, které můžeme rozdělit do dvanácti samostatných systémů. Užívala se například následující soustava: otisk malého kužele zastupoval jednotku, jeden malý kruh bylo deset malých kuželů, jeden velký kužel bylo šest malých kruhů, jeden velký kužel s kruhem uvnitř bylo deset velkých kuželů. Tato soustava byla založena na kombinaci dvou soustav o základech 10 a 6. Obyčejně se tak zapisovala čísla od 1 do 360 000. Bisaxemální systém zachycoval nejčastěji čísla od 1 do 7 200. (užíval faktory 10, 6, 2, 10 a 6). Obilí se měřilo v systému s faktory 5, 3 a 10; zaznamenával čísla od 1 do 1 500.

V následující tabulce (viz. obr.3) jsou zobrazeny znaky, které se používaly pro zápis čísel ve 3. tisíciletí př. n. l. v Uruku. [4]



Obrázek 4 [4, s. 208]

Studiem tabulek bylo zjištěno, že vtlačením do vlhké hlíny vznikaly znaky vhodného vzoru. Stejné tvary byly používány pro různé řády, znaky se lišily svou velikostí (např.1 a 60, 10 a 3 600). Otisky válečku (koulí) kuželů byly ve třetím tisíciletí nahrazeny klínovými znaky, které se ryly do vlhké hlíny (rydla). Jednoduché znaky jsou znázorněny v tabulce níže.



Obrázek 5 [4, s. 211]

Zápis čísel byl oddělen od objektů, které byly počítány. Od počítaných předmětů se abstrahovalo číslo. V této době i převládá číselná soustava, která pracuje s jednotkami 1, 10, 60, 600, 3 600, 36 000, tedy kombinovaná soustava o základech 10 a 60.

Zajímavé názvy některých čísel:

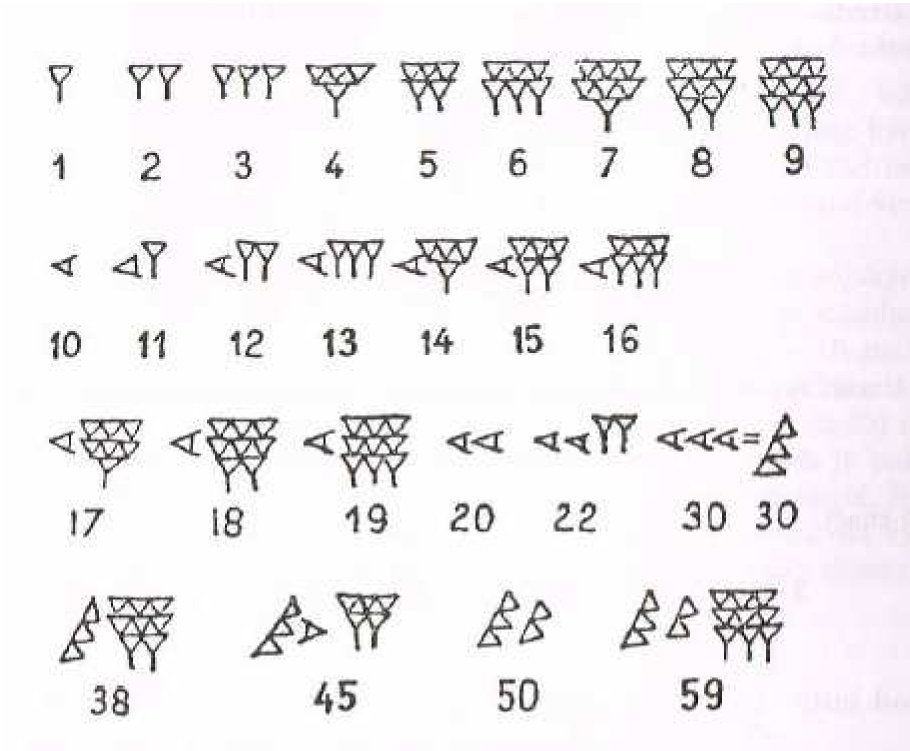
„1 aš (geš)	*20 niš*	*1 200 geš-u-min*
2 min	*30 ušu*	*3 600 šar*
3 eš	*40 nin (nimin)*	*36 000 šar-u*
4 limmu	*50 ninu (ninnů)*	*216 000 šar-gal (šar-geš)*
5 ia	*60 geš (gešta)*	
6 aš	*120 geš-min*	
7 imin	*180 geš-eš*	
8 ussu	*600 geš-u*	
9 ilimmu	*10 u“* [4, s. 211]	

2. 5. 3 Poziční zápis

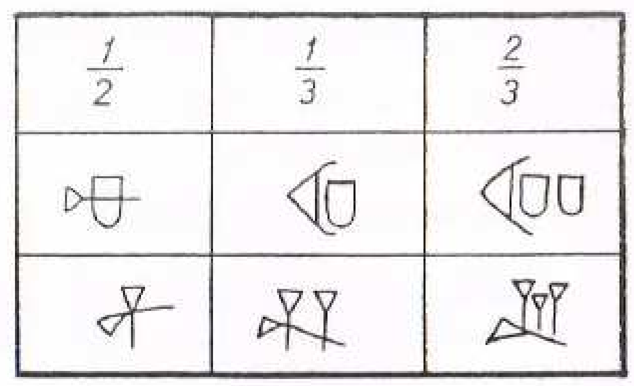
Sumerský nepoziční zápis vydržel bez větších změn do poloviny třetího tisíciletí. Postupně byl nahrazován novým pozičním, více pokročilejším akkadským zápisem, který byl založen na „poziční“ soustavě o základu 60. Proces přeměn probíhal ve dvou etapách. Jako první se objevily oblé znaky pro jednotku a desítku (byly psány rydlem s kulatým hrotem). Kroužek představoval desítku, oválek jednotku. Ve druhé etapě se začalo používat nové rydlo, které mělo špičatý hrot. Prostý klín znázorňoval jednotku, dvojitý klín desítku. Pro 120, 1 200 a 3 600 byla v polovině třetího tisíciletí př. n. l. se objevily speciální znaky, které postupně průběhu let vymizely. Používaly se při zápisech dat, vah nebo velikostí ploch. Větší čísla byla zapisována velkými znaky nebo kombinací znaků (viz. obr. 6). [4]

Obrázek 6 ***Speciální znaky*** **[4, s. 212]**

Ve třetím tisíciletí př. n. l. se používala i nepoziční desítková soustava pro hospodářské zápisy. Soustavy měly několik variant a lišily se časově a místně. Používání poziční šedesátkové soustavy se dvěma znaky se ustálilo ve druhém tisíciletí př. n. l. v Mezopotámii. Znaky byly zapisovány špičatým rydlem. Daly se jimi zaznamenat libovolně velká přirozená čísla a některá kladná racionální čísla. Čísla 1 – 59 byla zapisována standardními symboly (viz. obr. 7). Pokud se symbol opakoval třikrát a vícekrát byla zapisována do „estetických“ útvarů. Čísla byly zapisovány od nejvyšších po nejnižší řady do řádků zleva doprava. Objevovaly se někdy i číselné symboly, které byla zapisována podle principu odčítání. Podobně (viz. obr. 8) jako přirozená čísla byly zapisovány i šedesátinné zlomky (zlomky, jejichž jmenovatelé mají tvar 60^k , k ∈ N). Pro zlomky $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ byly používány speciální znaky. [4]



Obrázek 7 ***Standardní symboly pro čísla 1-59*** **[4, s. 213]**



Obrázek 8 ***Zápis zlomků*** **[4, s. 213]**

2. 5. 4 Zrod nuly

Chybějící znak pro nulu byl velkým problémem. Docházelo k různým zmatkům při rozlišování řádů. *„Např. zápis (5, 6, 3) lze chápat jako*

$$5 * 60^2 + 6 * 60 + 3; \quad 5 * 60^3 + 6 * 60^2 + 3 * 60; \quad 5 * 60^4 + 6 * 60^2 + 3 \; apod.“$$

(4, s. 2014)

Často se zapsaná čísla dešifrovala z kontextu. Pokud se používala malá čísla (do třetího řádu) nečinilo to žádný problém. V některých výpočtech docházelo i k chybám, které byly způsobeny absencí nuly. Celá dlouhá staletí se v Mezopotámii znak pro nulu nevyskytoval. Při sestavování astronomických tabulek bylo potřeba čísla číst rychle a jednoznačně vykládat. Vznikla potřeba vzniku nuly. V astronomických tabulkách byl chybějící řád značen malou mezerou (již ve druhém tisíciletí př. n. l.). Pokud ale došlo k chybějícím dvěma a více řádům, mohly nastat zásadní chyby. Chybějící řád byl vyznačován asi až v osmém století př. n. l., kdy byl nahrazen vhodným symbolem. V sedmém století př. n. l. byla nula značena třemi malými klínečky nebo jedním malým klínkem. Ve 4. století př. n. l. (vláda Seleukonců) s rozvojem astronomie došlo k ustálení zápisu čísel. Nula se vyznačovala malým dvojitým klínkem (původní význam odpovídal zhruba tečce za větou).[4]

2. 5. 5 Sčítání

Sčítání byla nejjednodušší početní operace, která nepředstavovala žádnou komplikaci. Na jeden řádek zleva doprava byli zapsáni sčítanci bez značení operace. Výsledek byl zapsán jako poslední číslo vpravo. Typ i řád sčítanců bylo nutné pochopit z kontextu. Sčítání je na některých tabulkách vyjádřeno i slovy, a to „dej dohromady“ (a-na) a výsledek „dostaneš“ (dah-ma).

Např.: (1) a-na (26, 40) dah-ma (1, 26, 40)

2. 5. 6 Odčítání

Odčítání bylo již o něco složitější. Menšenec i menšitel byl nejdříve napsán na jednom řádku vedle sebe (jako první byl zapisován menšitel). Početní operace se vyjadřovala též slovně, jako tomu bylo u sčítání a to „odejmi“ nebo „odeber“. *„Příklad 2 225-125 = 2 100 byl zapsán asi takto: (2, 5) od (37, 5) odňato dá (35).“* (Bečvář, s. 220) Řády čísel bylo opět třeba pochopit z kontextu. Asi od druhého tisíciletí př. n. l. bylo odečítání… tak, jak ho známe i dnes. Na prvním místě menšenec minus menšitel. [4]

2. 5. 7. Násobení

Násobení nebylo založeno jen na znalosti malé násobilky. Kdyby ano, bylo by potřeba znát 1 770 součinů (od (1)*(1) do (59)*(59) tj. $\frac{59+1}{2} * 59$). Proto je evidentní, že násobení muselo vycházet z jednoduššího základu. Mezopotámské násobení se opíralo o tzv. tabulky násobení. Dodnes se dochovalo desítky těchto tabulek, ať už kompletních nebo více či méně poškozených. Rozdělujeme je na tři skupiny. [4]

Tzv. souborné tabulky (kombinované) zařazujeme do první skupiny. Mají velký rozměr, jsou popsané takřka ze všech stran a obsahují více násobících tabulek najednou. Máme dochovaných třicet devět úplných tabulek a navíc máme k dispozici i řadu zlomků. Drtivá většina z nich obsahuje stejnou sestavu násobků (struktura i obsah musely být uzákoněny). [4]

Tzv. samostatné tabulky typu I řadíme do druhé skupiny. V záhlaví se vyskytuje konkrétní jedno číslo (násobitel) a ve středu samotné tabulky sloupec násobenců a sloupec součinů. Na každé tabulce bylo napsáno, jaká tabulka jí předchází a jaká následuje (obsahuje informace v záhlaví o předchozím a následujícím čísle), protože tabulky tvořily větší soubory. Bylo jich dochováno jen několik desítek. [4]

Tzv. samostatné tabulky typu II přiřazujeme do třetí (poslední) skupiny. Opět se v jejich záhlaví nachází jedno číslo (násobitel) a ve středu tabulky sloupec násobenců a součinů. Ovšem už na nich nenalezneme informace o předchozích a následujících tabulkách. Je možné, že nebyly součástí větších tabulkových souborů (jejich využití mohlo sloužit jako rezervy pro velké tabulkové soubory a, nebo to mohly být opisy žáků apod.). [4]

Podíváme-li se blíže na jednotlivé tabulky, zjistíme, že mají totožnou strukturu; v záhlaví násobitele a v těle tabulky 23 násobenců a 23 součinů. V následující tabulce ukážeme v záhlaví desítku, která zachycuje desetinásobky daných čísel. [4]

(10)	*a-rá*	*(1)*	*(10)*
	a-rá	*(2)*	*(20)*
	a-rá	*(3)*	*(30)*
	a-rá	*(4)*	*(40)*
	a-rá	*(5)*	*(50)*
	a-rá	*(6)*	*(1)*
	a-rá	*(7)*	*(1, 10)*
	a-rá	*(8)*	*(1, 20)*
	a-rá	*(9)*	*(1, 30)*
	a-rá	*(10)*	*(1, 40)*
	a-rá	*(11)*	*(1, 50)*
	a-rá	*(12)*	*(2)*
	a-rá	*(13)*	*(2, 10)*
	a-rá	*(14)*	*(2, 20)*
	a-rá	*(15)*	*(2, 30)*
	a-rá	*(16)*	*(2, 40)*

	a-rá	*(17)*	*(2, 50)*
	a-rá	*(18)*	*(3)*
	a-rá	*(19)*	*(3, 10)*
	a-rá	*(20)*	*(3, 20)*
	a-rá	*(30)*	*(5)*
	a-rá	*(40)*	*(6, 40)*
	a-rá	*(50)*	*(8, 20)*

Tabulka 1 [4, s. 221]

„Tabulky mají nejprve krok 1, pak krok 10. Všechny uvádějí jen dvacet tři součinů (viz tabulka výše), některé uvádějí i kvadrát čísla stojícího v záhlaví. Druhá mocnina snad byla chápána jako zvláštní operace.“ [4, s. 221]

A-rá znamená ve volném překladu součin, násobek apod. Občas byl používán i pro druhou mocninu. Na některých tabulkách je zapsán u každého násobence (viz tabulka výše), na některých jen na prvním řádku a na několika tabulkách není vůbec. Prostudováním tabulek bylo zjištěno, že v záhlaví je zavedeno jen čtyřicet následujících násobitelů. [4]

(50)	(24)	(12)	(6,40)	(2,30)
(48)	(22,30)	(10)	(6)	(2,24)
(45)	(20)	(9)	(5)	(2,15)
(44,26,40)	(18)	(8,20)	(4,30)	(2)
(40)	(16,40)	(8)	(4)	(1,40)
(36)	(16)	(7,30)	(3,45)	(1,30)
(30)	(15)	(7,12)	(3,20)	(1,20)
(25)	(12,30)	(7)	(3)	(1,15)

Obrázek 9 ***Násobitele*** **[4, s. 222]**

Na tabulkách typu I (viz. obr.8) se objevilo všech čtyřicet násobitelů, a to 22 čísel jednociferných v šedesátkové soustavě, 17 dvojciferných a jedno číslo trojciferné (44, 26, 40). V záhlaví byla čísla uspořádána od největšího po nejmenší. Je důležité poznamenat, že se tyto tabulky používaly bez ohledu na řády násobenců a násobitelů. Některé součiny v tabulkách nejsou, a tak, byly počítány jiným způsobem. Byla zapotřebí znalost komutativního a distributivního zákona a znalost struktury tabulek. Pro výpočet součinu 44x33 = 1386 potřebujeme k výpočtu dvě tabulky, neboť čísla 44 a 33 v tabulkách nejsou. Číslo 42 lze rozložit na 40 a 2, číslo 33 na 30 a 3, což v tabulkách nalezneme. Výpočet mohl probíhat následovně (Mezopotámské tabulky): $(44) * (33) = [(40) + (2)] * [(30) + (3)] = (40) * (30) + (40) * (3) + (2) * (30) + (2) * (3) = (23, 6)$ [4, s. 222]

2. 5. 8. Dělení

Dělení bylo nejsložitější početní operací. Hodně školních tabulek obsahuje úlohu: „Najdi k číslu n obrácenou (reciprokou) hodnotu, tedy číslo $\frac{1}{n}$." Dělení beze zbytku bylo prováděno přímo. Násobení převrácenou hodnotou znázorňovalo o něco složitější dělení. Místo podílu $a{:}b$ se počítal součin $\frac{1}{b} * a$, k nalezení převrácené hodnoty součinu, byly používány tabulky. Mezopotámští matematici vytvořili tedy i tabulky reciprokých hodnot. Dochovalo se asi 50 tabulek. V tabulkách reciprokých hodnot jsou jen čísla, která se dají zapsat ve tvaru $2^p.3^q.5^r$ (p, q, r jsou celá nezáporná čísla). Z tohoto zjištění docházíme k závěru, že v tabulkách jsou jen ta čísla, jejichž převrácená hodnota má v šedesátkové soustavě konečný rozvoj. [4]

2. 6 Rovinná geometrie

Většina dochovaných mezopotamských geometrických úloh pochází ze Starobabylónské říše (19. – 17. století př. n. l.) a z období vlády Seleukovců (3. – 1. století př. n. l.). Zeměměřitcví, válečnictví, stavebnictví a obchod, to vše byly oblasti, ve kterých bylo geometrie potřeba. Najdou se však úlohy, které nevychází z praktického života, jelikož v nich hledáme různé hodnoty. Domníváme se, že tyto úlohy sloužily k pedagogickým účelům. Ti, kteří úlohy vytvářeli, museli látce dobře rozumět, neboť číselné hodnoty byly voleny tak, aby úloha byla dobře řešitelná. Pravděpodobně chtěli, aby se žák s danou úlohou příliš netrápil, ale aby pochopil bez jakýchkoliv problémů řešení. [4]

2. 6. 1 Čtverec a obdélník

Již na Starobabylónských tabulkách můžeme nalézt výpočty obsahu čtverce a obdélníka. Vzorce lze vyjádřit v dnešní podobě takto: $S = a^2; S = a * b$ (a – délka strany čtverce; a, b – délky stran obdélníka).

Jednoduché úlohy na výpočet obsahu čtverce a obdélníka byly komplikovány převody jednotek.

U obdélníka byla kratší strana brána jako šířka obdélníka a delší jako délka obdélníka. [4]

2. 6. 2 Trojúhelník

Na mnoha mezopotamských tabulkách se vyskytují výpočty obsahu trojúhelníka. Nejčastěji byla u rovnoramenného trojúhelníka zadána strana a jako základna trojúhelníka a rameno r - jeho obsah byl počítán jen přibližně, a to podle vzorce $S = \frac{1}{2} * a * r$. U pravoúhlého trojúhelníka dvě odvěsny a, b - obsah pravoúhlého trojúhelníka byl počítán přesně $S = \frac{1}{2} * \ a \ * b$. Velmi důležité je, že strany nebyly brány jako výška trojúhelníka.

U některých příkladů nebylo jasné, zda se jedná o výšku trojúhelníka, nebo jeho rameno. Z toho vyplývá, že nelze rozhodnout, zda daný obsah byl vypočítán přesně nebo přibližně. [4]

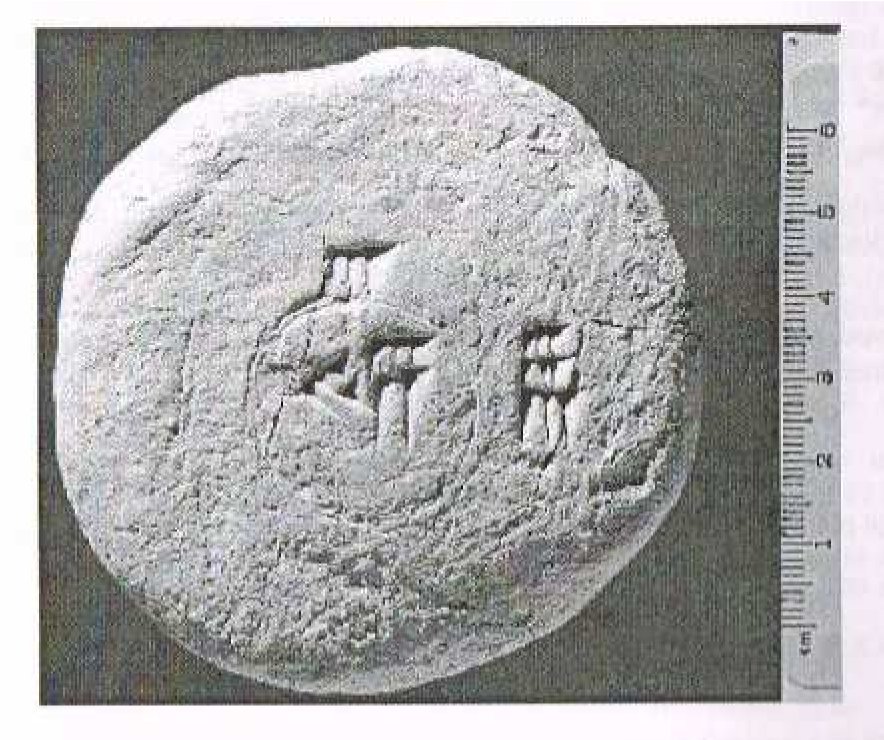
2. 6. 3 Lichoběžník

Lichoběžník byl velmi oblíbeným geometrickým útvarem (především rovnoramenný). Důkazem je velké množství úloh, ve kterých se počítá obsah lichoběžníka, nebo se lichoběžník dělí na několik částí. Obsah lichoběžníka lze v naší symbolice (přibližným výpočtem) zapsat $S = \frac{1}{2} * (a + b) * \ s$; kde a, b jsou základnami lichoběžníka a s délka ramene.

Mnoho příkladů, kde lichoběžník je dělen rovnoběžkou (rovnoběžkami) se základnami na dva lichoběžníky (několik lichoběžníků), se dochovalo na mezopotamských tabulkách. Podle zadaných podmínek (shodný obsah dílů, daný poměr základen nebo výšek, ramena, dané výšky, apod.) se rozhodovalo, jakou metodu „dělení“ použít. Nejvíce se pracovalo s pravoúhlými či rovnoramennými lichoběžníky. [4]

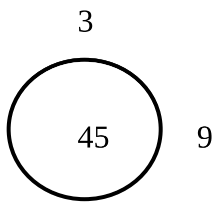
2. 6. 4 Kruh, kružnice

„Jedna z nejstarších babylonských tabulek vztahujících se ke geometrii je tabulka YBC 7 302.“ [4, s. 325]



Obrázek 10 [4, s. 325]

Jedná se o tabulku kruhového tvaru, která má poloměr cca 8 cm. Nenalezneme na ní žádný text, jen skoro dokonalý obrázek kružnice a tři čísla.



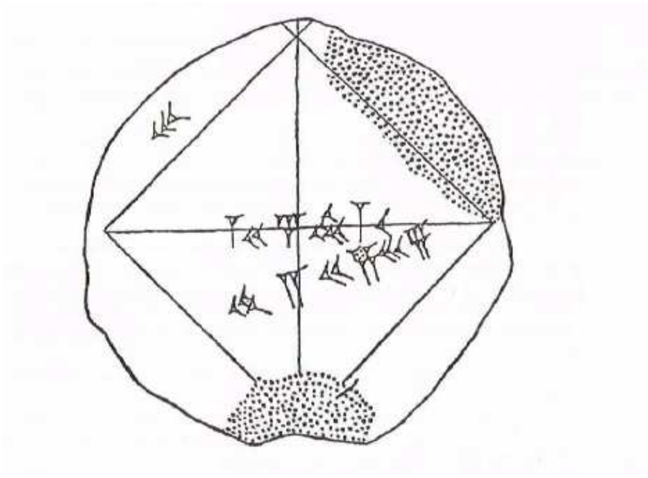
(0; 45) nejspíše znázorňuje obsah kruhu, (9) je druhá mocnina obvodu a (3) obvod.

Babylóňané používali k výpočtu obsahu kruhu vzorec $S = \frac{1}{12} * o^2$ (o – obvod kruhu). Řády uvedených čísel 3, 9 a 45 nejsou stejné. Mezopotámská hodnota $\pi = 3$. V roce 1936 byla objevena tabulka (v Susách), na které je znázorněna hodnota pí jako $\pi = 3\frac{1}{8}$. Obvod byl tedy zřejmě počítán jako$o = \pi * d,\ d - průměr\ kružnice, \pi - většinou\ rovno$ 3. [4]

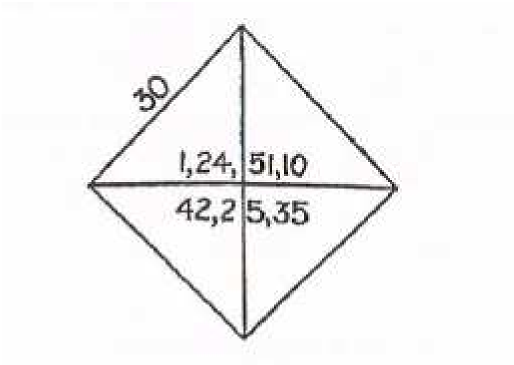
2. 7 Pýthagorova věta

Již staří babylóňané znali „Pýtahgorovu větu“ a to před více než 1000 lety před samotným Pythagorem. Byla zdrojem různě obtížných příkladů „kvadratických rovnic“. Určovali pomocí ní množství osevu potřebného na pole, které mělo tvar rovnoramenného trojúhelníka s určenými stranami, určovali rozměry geometrických obrazců (profil náspu, dělení trojúhelníka na pásy („kanály“), pravoúhlého trojúhelníka…). Bylo nalezeno velké množství tabulek, které obsahovaly úlohy s čistě geometrickými úlohami, které ale nebyly vyjádřeny formou praktické aplikace.[3]

Tabulka YCB 7289 (viz. obr. 11) patří mezi nejznámější tabulky z Mezopotámie, která souvisí právě s již zmiňovanou Pythagorovou větou. Její vznik se datuje do období Starobabylónské říše. Jedná se o poškozenou tabulku kruhového tvaru, která má průměr necelých 7 cm. Není na ní žádný text, ale popsaná je pouze z jedné strany. Je na ni vyobrazen náčrt čtverce s jeho úhlopříčkami a 3 čísla (viz. obr.12). S největší pravděpodobností číslo (30) udává délku strany čtverce. Druhé (1, 24, 51, 10) lze zapsat takto $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \doteq 1$, 414212963 což představuje starobabylónský odhad čísla $\sqrt{2}$. Třetí je součinem čísla (30) a (1, 24, 51, 10) a představuje délku úhlopříčky ve čtverci. Součin lze zapsat takto (30) * (1, 24, 51, 10) = (42, 25, 35). Výsledek je vyobrazené číslo na tabulce, je velmi pravděpodobné, že toto číslo souviselo s Pythagorovou větou. Můžeme se tedy domnívat, že šlo o výukovou tabulku, která měla seznámit žáky se vztahem délek strany a úhlopříčky čtverce.



Obrázek 11 ***Poškozená tabulka YBC 7289*** **[4, s. 328]**



Obrázek 12 ***Přepsaný čtverec z tabulky YBC 7289*** **[4, s. 328]**

Pozn. Je dochováno několik příkladů, ve kterých je zapotřebí použití Pythagorovy věty.

Znalost Pýthagorovy věty svědčí o tom, že již Babyloňané měli nepředstavitelné (na tu dobu) znalosti v oblasti geometrie. Nejčastějším využitím byla podobnost geometrických útvarů. Dá se tedy předpokládat, že znalost Pýthagorovy věty odvodili právě na základě úvah o podobnosti. [3]

2. 8 Starobabylónské míry

Míry a váhy byly ve Starobabylónské říši komplikovaný systém, který byl ale o mnohem jednodušší než sumerský. Soubor měr a vah je v drtivé většině matematických textů poměrně standardizovaný. Většina převodů pracuje jen s šedesátinnými zlomky. [4]

2. 8. 1. Délkové míry

1 še (zrno) bylo nejmenší délkovou jednotkou, je to asi 2,75 mm.

Přehlednost větších jednotek:

1 šu-ši	= 6 še	[prst]	asi 1,65 cm
1 kúš	= 30 šu-ši	[loket]	asi $\frac{1}{2}$ m
1 gi nebo 1 qanu	= 6 kúš	[rákos]	asi 3 m
1 nindam nebo 1 gar	= 2 gi	[tyč, hůl, prut]	asi 6 m

1 eše	= 10 gar	[lano]	asi 60 m
1 uš	= 6 eše		asi 360 m
1 beru	= 30 uš		asi 10, 8 km

Tabulka 2[4, 235s.]

2. 8. 2 Plošné míry

1 sar byl základní plošnou jednotkou (cca 36 m^2), ta se dělí na 60 gin. Dále se1 gin dělí ještě na 180 še. 1 sar = 10 800 še.

1 gin	= 180 še		asi 0,6 m^2
1 sar	= 60 gin		asi 36 m^2
1 ubu	= 50 sar		asi 0,18 ha
1 iku	= 2 ubu	[kvadratické lano]	asi 0,36 ha
1 eše	= 6 iku		asi 2,16 ha
1 bur	= 3 eše	[1 beru x 1 gar]	asi 6,48 ha

Tabulka 3 [4, 235s.]

2. 8. 3. Objemové míry

1 objemový sar (základní objemová jednotka); jde o objem hranolu se základnou čtverce o straně 1 gar a výškou 1 kúš. Objemové jednotky měly stejné názvy jako plošné.

1 objemový gin	= 180 objemových še
1 objemový sar	= 60 objemových gin
1 objemový ubu	= 50 objemových sar

Tabulka 4 [4, s.236]

2. 8. 4 Duté míry

K měření objemů piva, zrna, oleje apod. se používaly tzv. duté míry.

1 gin	= 180 še
1 síla	= 60 gin
1 bán	= 10 síla
1 pi	= 6 bán
1 gur	= 5 pi

Tabulka 5 [4, s. 236]

Byly odvozeny ze starých sumerských měr. [4]

2. 8. 5 Váhy

1 mina (cca 0,5 kg) byla základní váhovou jednotkou. Z 3. tisíciletí př. n. l. pocházejí nejstarší závaží, která byla vyrobena ve tvaru lvů a kachen. Další závaží měla tvar válcový nebo kulový. Byla nalezena i série 17 bronzových závaží v Kalchu. Měla podobu lvů, jeden ze lvů vážil 20 kg a měří skoro 30 cm. Považujeme ho za největší závaží. Nejmenší závaží vážilo pouhých 50 g a měřilo necelé 2 cm. Na všech závažích ze série bylo vyryto jméno krále Sinecheriba (asi 704-681 př. n. l.) a údaj o váze.

1 še	[zrno]	asi 0,05 g
1 gin = 180 še	[šekel]	asi 0,83 dkg
1 mina = 60 gin		asi 0,5 kg
1 gú = 60 mina	[talent]	asi 30 kg

Tabulka 6 [4, s. 236]

2. 9 Prostorová geometrie

Z každodenních potřeb zeměměřičů, architektů a stavitelů se dochovalo dodnes z období Starobabylónské říše v Mezopotámii několik tabulek, které obsahují úlohy z praktického života. (výpočty objemů, rozměrů staveb, domů, náspů, kanálů, přehrad, opevnění, apod.)

Důležité je zdůraznit, že se v úlohách neobjevovaly názvy těles, jako známe dnes (kvádr, krychle, hranol…), ale hovořilo se o člunu, žlabu, korytu…Velmi často byly počítány objemy, ale počty povrchů se nevyskytovaly. Nemáme ani doložen výskyt výpočtů objemů koule, kuželu a jehlanu. S největší pravděpodobností se počítaly jen objemy těles, která se objevovala v běžném životě nebo ve stavební praxi. [4]

2. 9. 1. Krychle a kvádr

Už ve Starobabylónské říši dovedli počtáři vypočítat přesně objem kvádru a krychle. V naší symbolice lze zapsat tyto výpočty jako: V = a^3 – výpočet objemu krychle, V = abc - výpočet objemu kvádru. Kde *a* je délka hrany krychle a *a, b, c* jsou hrany kvádru.

Na tabulce NBC 7934 je úloha na výpočet objemu tělesa, které je tvořeno třemi kvádry. Zadání zní takto:

„(6) a $\frac{1}{2}$ gar a (5) loktů je délka, (3) lokty horní šířka, (3) a $\frac{1}{2}$ lokte je druhá hloubka. Jaký je objem?

$\frac{5}{6}$ sar, (1) a $\frac{5}{6}$ gin a (7) a $\frac{1}{2}$ še je objem.

(6) a $\frac{1}{2}$ gar a (5) loktů je délka, $\frac{1}{2}$ loktů dolní šířka, $\frac{1}{2}$ loktů je dolní hloubka. Jaký je objem? (1) a $\frac{2}{3}$ sar, (3) a $\frac{2}{3}$ gin a (15) še je objem.

Celkem: (2) a $\frac{1}{2}$ sar, (5) a $\frac{1}{2}$ gin a (22) a $\frac{1}{2}$ še je objem

A (15) gin objem. $\frac{1}{2}$ gar je strana čtverce, $\frac{1}{2}$ lokte je hloubka.

Celkem: (2) a $\frac{5}{6}$ sar, $\frac{1}{2}$ gin a (22) a $\frac{1}{2}$ še je objem.“ [4, s. 344]

Výpočet ale není uveden. Na tabulce jsou pouze výsledky. Je nutné převést jednotky *sar* na délku a šířku převést na jednotky v *gar*. Výšku nepřevádíme ta je již převedena do správné jednotky – v loktech. Výpočty lze v našem zápisu napsat takto:

$$„V_1 = \left(6\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{12}\right).\tfrac{3}{12}.\tfrac{1}{2} = \tfrac{249}{288}\ sar = \tfrac{5}{6}\ sar\ 1\tfrac{5}{6}\ gin\ 7\tfrac{1,}{2}\ še\ ,$$

$$V_2 = \left(6\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{12}\right).\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} = \tfrac{83}{48}\ sar = 1\tfrac{2}{3}\ sar\ 3\tfrac{2}{3}\ gin\ 15\ še,$$

$V_3 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{4}\ sar = 15\ gin.$

Objem celého tělesa V, je tedy dán součtem:

$V = V_1 + V_2 + V_3 = 2\frac{5}{6}\ sar\ \frac{1}{2}\ gin\ 22\frac{1}{2}$ *še*.“ [4, s. 345]

Další příklady na výpočet objemu krychle a kvádru jsou i na tabulce BM 85 194.

2. 10 Úrokový počet

Některé nalezené hliněné tabulky dokazují, že se od pradávna rozvíjely finanční transakce – jednou z oblastí je i Mezopotámie, jsou na nich zaznamenány daně, různé kupní smlouvy, úroky, dluhy, klauzule o placení doručiteli apod. Zrno bylo používáno jako peněžní jednotka ve druhém tisíciletí př. n. l. postupem času se, ale tato jednotka nahradila stříbrem, které bylo bráno jako klasické oběživo. V období starověku se však nestavěly banky, ale jejich funkci nahrazovaly chrámové komplexy či palácová sídla, kde se nejdříve shromažďovalo obilí a později již zmiňované stříbro. V následujících stoletích se zakládaly rodinné soukromé podniky – byly řízeny rozvětvenými rodinami, které pronajímaly své zvířata, pozemky, pracovní nářadí a půjčovaly peníze. V Mezopotámii byly úroky od 20 – 30%, byly tedy poměrně vysoké, ale i přesto byly někdy i vyšší. Pro upřesnění práv dlužníků a bankéřů vznikla řada zákonů v Chammurabiho zákoníku. [4]

Dochovaly se tabulky, které obsahují výpočty kapitálu ze znalosti splácení úroků při jednoduchém úrokování, růst kapitálů při komplikovanějším úrokování, příklady procvičující různé bankovní výpočty apod.

2. 10. 1 Jednoduchý úrokový počet

Tabulka obsahuje čtyři úlohy, ve kterých je zadán roční úrok, úroková roční sazba. Počtář má za úkol vypočítat základní kapitál (půjčený obnos). První ze čtyř úloh zní:

„ Za (1) minu stříbra on dal (12) šekelů, jaká hodnota je splácena, dal-li splátku (1, 40) šekelů.

Vezmi (1) minu. (0; 12) vezmi, (1, 40) vezmi za to, co ti dal.

(0; 12) vynásob (1). (0; 12). Převrácenou hodnotu od (0; 12) hledej. (5) máš.

(5) vynásob (1; 40). (8, 20) je základní kapitál.

Jestliže (8, 20), základní kapitál, je splácen (12) šekely z (1) miny, pak (1, 40) je úrok.

(1) minu (0; 12) násob. (0; 12). (0; 12) a (8,20) násob. (1, 40) je úrok. Jaký je kořen z (1, 40)? (10) to je.“ [4, s. 248]

V naší symbolice lze tento příklad vypočítat takto:

12 šekelů z 1 miny = 12 šekelů z 60 šekelů

60 šekelů……………….100%

12 šekelů……………….x %

$x = \frac{100.12}{60} = 20$

x = 20%

Dále je nám znám úrok (1, 40) = 100 šekelů

Podle vzorce, který známe v naší symbolice, vypočteme vypůjčenou částku.

z – hledaný základní kapitál

u – splácený úrok

p – úroková sazba

$z = \frac{u}{p} = \frac{100}{0,2} = 500 = (8, 20)$

V originálním znění je na konci příkladu napsáno slovo *íb-si* míso slova *kořen*. Termín íb-si má širší význam. Můžeme ho překládat jako již zmíněný kořen nebo jako druhou odmocninu.

V dalších úlohách je úroková sazba stejná a všechny úlohy užívají stejného postupu výpočtu jako u první úlohy. [4]

2. 11 Lineární rovnice a jejich soustavy

Ani lineární rovnice a jejich soustavy nebyly mezopotamským počtářům v Chammurabiho období neznámé.

Při určování počtu pracovníků, které byly potřeba na zemědělské nebo stavební práce, byly vytvářeny úlohy, které dnes řešíme lineárními rovnicemi o jedné neznámé nebo soustavou lineárních rovnic o několika neznámých. I když Babyloňané řešili úlohy o pěti neznámých, pracovali jen s veličinami, které znali a nezaváděli neznámé, jak to je obvyklé v pozdější algebře. [3]

Řešily úlohy stejně jako my v dnešní době lineární rovnice a jejich soustavy. Avšak místo algebraické terminologie matematických symbolů používali geometrickou symboliku, což je velmi důležité zdůraznit. Hledané neznámé byly psány v akkadských textech sumersky, ale postupem času, kdy tento jazyk zanikal, se měnily tyto slova v termíny, která bylo možno považovat za starobylé matematické symboly. *Délka*, *šířka*, *hloubka* nebo *výška* byly označením neznámých veličin. Logicky tedy byl součin dvou neznámých označován jako *plocha*, *obsah*, *pole*, *délka – šířka*, součin tří jako *objem*. [4]

V úlohách se bez jakýchkoliv zábran sčítají šířky (sag), délky (uš), obsahy, bezrozměrné konstanty a objemy. Není tedy dodržován zákon homogenity a to i přesto, že drtivá většina úloh byla geometrická a tudíž byla i geometrická terminologie.

V textech, které jsou psány klínopisech, nenalezneme žádné úlohy, které by vedly na lineární rovnice nebo na lineární soustavu rovnic. Řešení proto nemůžeme ve většině případů určit, neboť je možné, že byly úlohy řešeny substitucí, postupnou eliminací neznámých nebo metodou chybného předpokladu. Tyto tabulky obsahovaly pouze zadání úloh a někdy jejich výsledek. [4]

2. 11. 1 Lineární rovnice

Na tabulce YBC 4669 (viz. obr. 13) nalezneme jednoduchý příklad.

„$\frac{2}{3}$ *z* $\frac{1}{3}$ *mých zásob dal jsem pryč. (7) zbylo. Jaké byly mé zásoby? (31; 30).*“ [4, s. 256]

Úlohu můžeme snadno zapsat do rovnice v naší symbolice a to:

x……… hledané množství zásob

$x - \left(\frac{2}{3} . \frac{1}{3}\right) . \ x = 7$

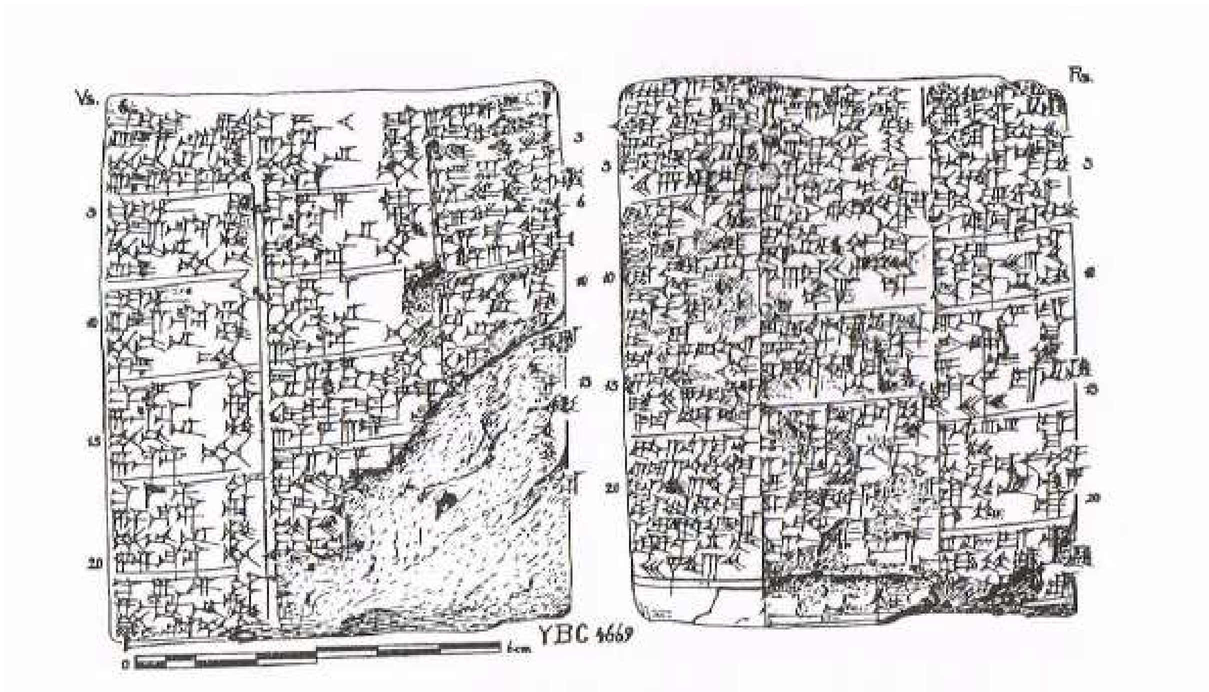
$x - \frac{2}{9} \ . \ x = 7 \ \ |. 9$

$9x - 2\,x = 63$

$7\,x = 63\ |/7$

$\underline{\underline{x = 9}}$

Výsledek je tedy 9 a ne 31 $\frac{1}{2}$, neboli (31; 30). Lze se tedy domnívat, že počtář udělal chybu ve výpočtu nebo bylo napsáno chybné zadání. Výsledek 31 $\frac{1}{2}$, je kořenem rovnice $\frac{2}{9}.x = 7$.



Obrázek 13 *Tabulka YBC 4669* [4, s. 257]

Některý z dalších příkladů z tabulek bude zařazen do pracovních listů v praktické části bakalářské práce. [4]

2. 11. 2. Soustavy lineárních rovnic

Na tabulce AO 8862 je uveden příklad:

„… cihly, lidé a své dny sečetl jsem, to dá (2; 20). $\frac{2}{3}$ *lidí jsou mé dny. Stanov cihly, lidi a dny.“* [4, s. 259]

Po studiích této tabulky a i jiných tabulek, lze předpokládat, že se jedná o úlohu, která vede na soustavu lineárních rovnic o třech neznámých.

x……. počet cihel

y……. počet lidí

z …… počet dnů

$x + y + z = (2; 20)$

$x + y + z = (2.60) + \ 20$

$x + y + z = 140$

I. $x + y + z = 140$

II. $x + y = 120$

III. $\frac{2}{3} \, . y = z$

Ze třetí rovnice si vyjádříme neznámou *y*.

$\frac{2}{3} . y = z \; |.3$

$2y = 3z \; |/2$

$y = \; \frac{3}{2} . z$

Vyjádřené ypsilon dosadíme do I. a II. rovnice a dostaneme lineární soustavu o dvou neznámých.

I. $x + \left(\frac{3}{2}.z\right) + z = 140 \mid .2$

II. $x + \left(\frac{3}{2}.z\right) = 120 \mid .2$

$2x + 3z + 2z = 280$

$2x + 3z = 240$

$2x + 5z = 280$

$2x + 3z = 240 \mid .(-1)$

$2x + 5z = 280$

$-2x - 3z = -240$

$2z = 40 \mid /2$

$\underline{\underline{z = 20}}$ - dosadíme do rovnice, kde jsme si vyjádřili y

$y = \frac{3}{2}.20$

$y = \frac{60}{2}$

$\underline{\underline{y = 30}}$

Vypočítané *y* a *z* dosadíme do I. rovnice a vypočítáme neznámé *x*.

I. $x + y + z = 140$

$x + 30 + 20 = 140$

$x + 50 = 140 \,|{-50}$

$\underline{\underline{x = 90}}$

$\underline{\underline{K = \{90, 30, 20\}}}$

Tabulka obsahuje správný výsledek: (1; 30) = 90 cihel, 30 lidí a 20 dnů. [4]

2. 12 Kvadratické rovnice

Mezopotámská matematika neřešila jen úlohy, které dnes zapisujeme pomocí lineární rovnice a jejich soustav, ale řešila i úlohy, které vedly na kvadratickou rovnici. Některé z nich vycházely z potřeb z praxe, jiné poukazují na vývoj matematiky a její vyučovací otázky v matematice.[4]

Stejně jako u úloh lineárních rovnic nalézáme i u kvadratických rovnic geometrickou terminologii. Opět byly veličiny značeny jako *délka*, *výška*, *šířka* a *hloubka* a jejich součiny jako *plocha* atd. Nedodržoval se ani zákon homogenity jako u lineárních rovnic. Některé termíny byly převzaty i z oblasti aritmetických operací (dělenec, dělitel, násobenec, násobitel atd.). [4]

Vzorce $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, které dnes takto zapisujeme, a s nimi spojenými poznatky si mezopotámští počtáři museli dobře osvojit. Při počítání úloh, které vedly na kvadratické rovnice, bylo zapotřebí zvládnout operace se známými a neznámými veličinami. [4]

Znalost řešení kvadratických rovnic, byla velice důležitá v rozvoji matematiky. Nedokazuje jen vysokou úroveň matematického myšlení, ale také počátky algebry. Řešeny byly úlohy, které obsahovaly konkrétní čísla, ale některé z nich byly pouze vzorové, podle kterých se počítaly obdobné příklady. [4]

Mezopotámští počtáři vytvořili obecné návody, podle kterých bylo možno převést nejrůznější úlohy na „kanonické tvary“, pro které byly zpracovány standardní postupy jejich řešení. K převodu na kanonické tvary, byly užívány různé úpravy (substituce a eliminace). Neznámé veličiny byly brány jako známé veličiny a výsadně používali algebraické metody. Svědčilo to o vysokém stupni rozvoje algebraických metod. [4]

Důležité je poznamenat, že k obecnému algoritmu pro řešení kvadratické rovnice tvaru $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, který odpovídá známému vzorci $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, matematici v Mezopotámii dospěli, máme i úlohy, jejichž řešení zapsané v modernizované podobě je přímo obecným vzorcem $x^2 + px + q = 0$, pouze s tím omezením, že kořeny rovnice mohly být jen kladné a kvůli této omezující podmínce vznikla nutnost uspořádání kvadratickýh rovnic na již zmíněné „kanonické“ tvary a rozpracování metod jejich řešení. [4]

2. 12. 1 Kvadratická rovnice typu I.

Kvadratická rovnice typu I. tvaru $x^2 = q$, byla nejjednodušším typem kvadratické rovnice. q bylo dané přirozené číslo, smíšené číslo nebo šedesátinný zlomek. Objevovala se především v úlohách procvičujících Pythagorovu větu. Řešení bylo dohledáváno v tabulkách odmocnin, tabulkách čtverců nebo byla počítána druhá odmocnina čísla q.

2. 12. 2 Kvadratické rovnice typu II.

Mezopotámské úlohy, které vedly na kvadratickou rovnici $x^2 + q = px$, se obvykle formulovaly jinak. Považujeme ji za první „opravdovou“ kvadratickou rovnici, která v zápisu naší symboliky lze zapsat jako soustava dvou rovnic o dvou neznámých:

$$x + y = p,$$

$$x . y = q.$$

p, q jsou přirozená čísla, čísla smíšená nebo šedesátinné zlomky, $x > y$ jsou hledaná kladná čísla. Tuto soustavu lze označit jako první kanonický tvar, na kterém byly převáděny složitější úlohy.

$$x + y = p,$$

$$x . y = q.$$

Z první rovnice $x + y = p$ vyjádříme y.

$x + y = p \mid -x$

$y = p - x$

Vyjádřené y dosadíme do druhé rovnice $x.y = q$.

$x.(p - x) \ = q$ roznásobíme,

$px - \ x^2 = q \ |{+x^2}$

$px = q + \ x^2$

$\underline{\underline{x^2 + \ q = px}}$

Obdrželi jsme tvar kvadratické rovnice, který je základní.

2. 12. 3 Kvadratické rovnice typu III.

$x^2 \ = px + q$ je typ rovnice, který znali i mezopotámští matematici, akorát ji zapisovali ve slovním zadání. V našem zápisu ji lze zapsat jako soustavu rovnic o dvou neznámých.

$$x - y = p,$$

$$x *. y = q.$$

p, q jsou přirozená čísla, smíšená čísla nebo šedesátinné zlomky, $x > y$ jsou kladná čísla. Tuto soustavu rovnic lze považovat za druhý kanonický tvar a opět na něj mezopotámští matematici převáděli složitější příklady. [4]

Z první rovnice $x - y = p$ vyjádříme y:

$x - y = p \ |{-x}$

$-y = p - x \ |.(-1)$

$y = x - p$

Vyjádřené y dosadíme do druhé rovnice $x.y = q$:

$x.(x - p) = q$ roznásobíme,

$x^2 - \ px = q \ |{+px}$

$\underline{\underline{x^2 = px + q}}$

Získali jsme základní tvar.

Pro představu jak byly zapisovány rovnice tohoto typu, ukážeme na obrázku. (viz. obr. 14)

Obrázek 14 ***Tabulka YBC 6967*** **[4, s. 271]**

2. 12. 4. Kvadratické rovnice typu IV.

Kvadratická rovnice typu IV. má tvar $x^2 + px = q$, při počítání rovnic byla zavedena substituce. Oblíbená a značně užívaná metoda byla zavedení pomocné veličiny. Z toho vyplývá, že i babylonští matematici dokázali úspěšně řešit úlohy, které vedly na obecné kvadratické rovnice.

Po prostudování tabulek víme, že neznáme žádnou úlohu, která by měla dvě kladná řešení a byla vypočtena. Lze tvrdit, že mezopotámští matematici neměli potřebu najít všechna platná řešení těchto rovnic, ale nemůžeme s jistotou říci, že by druhé řešení neznali. [4]

2. 12. 5 Kvadratická rovnice typu V.

$ax^2 + bx = c$, máme k dispozici tabulku BM 13 901, kde je zaznamenáno 24 úloh. Úlohy 20 – 22 jsou zničeny, ale ostatní příklady vedou na kvadratické rovnice. Rovnice můžeme rozdělit do tří skupin:

1) Kvadratické rovnice s jednou neznámou,

2) soustavy dvou rovnic o dvou neznámých vedoucí na kvadratické, nebo bikvadratické rovnice

3) soustavy tří rovnic o třech neznámých nebo čtyř rovnic o čtyřech neznámých vedoucí na kvadratické rovnice.

Úlohy se neřadí mezi nejjednodušší, vedou totiž na různé typy kvadratických rovnic, jejich početní řešení je velice obtížné, tvůrce tabulek musel velice dobře ovládat problematiku kvadratických rovnic. [4]

2. 13 Bikvadratické rovnice

V Mezopotámii ve starobabylonském období byly řešeny i rovnice, které v dnešní době řešíme pomocí bikvadratických rovnic. Mají jako u kvadratických rovnic stejnou terminologii. Stejně i u bikvadratických rovnic se nedodržuje zákon homogenity a formulace těchto úloh využívají geometrickou terminologii. [4]

Nejzajímavější tabulkou je tabulka YBC 4709 (viz. obr. 15). Obsahuje 55 úloh, které vedou na stejnou soustavu rovnic tvaru:

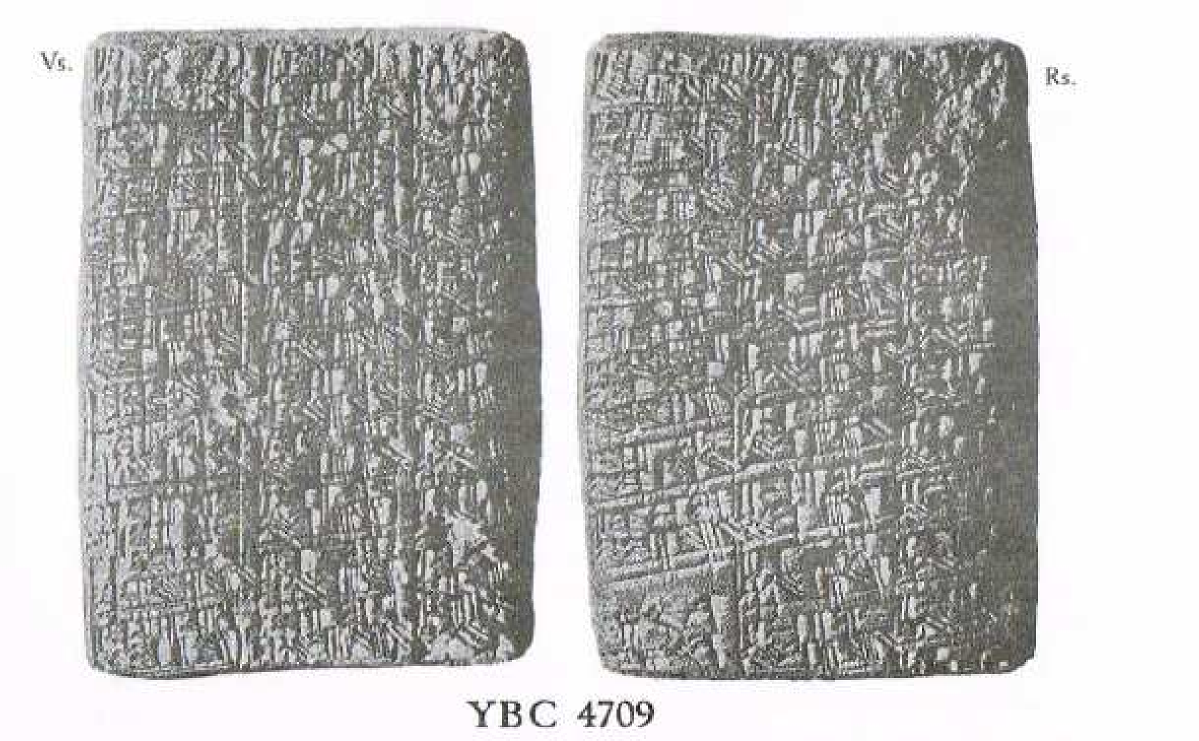
$$x.y = 600,$$

$$(ax \pm by)^2 \pm cx^2 \pm dy^2 = e.$$

e je přirozené číslo a *a, b, c, d* jsou buď přirozená čísla, nebo nuly. Výsledky ani řešení těchto příkladů na tabulce nenalezneme, je uvedeno jen společné řešení úloh: $x = 30, y = 20.$

Pro metodický výzkum tvorby příkladů a jejich řazení do sbírek je tabulka YBC 4709 velice cenná a užitečná. U všech úloh v tabulce je první rovnice stejná a je ve tvaru: $f\ (x, y) + g\ (x, y) = e$. Funkce g a f jsou jednoduché rovnice o dvou proměnných x a y. e (přirozené číslo) bylo voleno tak, aby vyšel u všech příkladů stejný výsledek. [4]

Na tabulkách objevených ve městě Súsy můžeme vidět i rovnice vedoucí na rovnice osmého stupně. Vhodnou substitucí můžeme tyto rovnice převést na rovnici kvadratickou. [4]



Obrázek 15 Tabulka YBC 4709 [4, s. 289]

2. 14 Zhodnocení úrovně matematiky ve starověkém Babylóně

Geometrické znalosti Babyloňanů byly považovány do nedávné doby za nesrovnatelné s jejich aritmeticko – algebraickými vědomostmi. Dle Neugebauera (rakousko – americký matematik a historik, který rozluštil mnoho hliněných tabulek) byla geometrie v době starověku v Babylónu chápána jako metoda praktického měření a to i přes to, že se v technicko – číselných dokumentech objevovaly i kruhové úseče a trojúhelníky. Soudil to i z toho, že se v geometrii vyskytovaly, vedle přesných vzorců, přibližné formule. Například se domníváme, že Babyloňané považovali obvod kružnice za součet jejich tří průměrů, což rozhodně není tak přesné jako u Egypťanů. [3]

Velkým objevem byly v roce 1939 nové klínopisné matematické texty, které byly nalezeny v hlavním městě starověké říše elamské v Súzách. Nově nalezené tabulky rozluštil a uveřejnil roku 1951 E. M. Bruins. Dokázal, že i když se jevilo, že Babylóňané považovali geometrii jen jako metodu praktického měření, tak opak byl pravdou. Jejich geometrie byla na velmi vysoké úrovni. Na jedné z tabulek můžeme naleznout výpočet poloměru kruhu, který je opsán rovnoramennému trojúhelníku, jehož základna je 60 a ramena 50. Konečný výpočet poloměru je $31 + \frac{15}{60}$. Na jiné tabulce, která byla nalezena v Súzách, nejdeme i výpočet poloměru kružnice, která je vepsaná do pravidelného šestiúhelníka, kde mimo jiné zjistíme, že za hodnotu $\sqrt{3}$ používají číselnou hodnotu $1 + \frac{45}{60}$. Do nálezu hliněných tabulek v Súzách jsme věděli, že Babyloňané dokázali počítat rovnice do šestého stupně. Na jedné z tabulek dokonce nalezneme i rovnici, která v naší terminologii vede na rovnici osmého stupně. [3]

Lze říci, že po mnoha a mnoha nově nalezených historických pramenů (jejich počet stále vzrůstá) můžeme říci, že matematická úroveň Babylonských matematiku byla velice vysoká, i když se na samém počátku luštění a interpretování hliněných destiček zdálo, že tomu tak nebylo. [3]

Porovnáním matematiky Mezopotámie a starého Egypta zjistíme, že měla v obou zemích mnoho společného, i když tu byly jisté rozdíly v početní soustavě a početní technice nebo v geometrickém základu matematiky v Egyptě. Bylo to zapříčiněno stejnými ekonomickými a sociálními podmínkami. Úlohy řešené vyvolanými potřebami zavlažování, zemědělství, stavebnictví, vlastnictví, měření času a hospodářské účetnictví byly v obou zemích stejné. Úlohy se v obou zemích počítaly bez předpokladů a důkazů, i když je jasné, že nemohly dosáhnout správného výsledku právě bez předpokladu a důkazu. Při počtech používaly předpoklad teoretického myšlení. [3]

Po rozluštění spousty historických pramenů je nám známo, že matematika Babylónu byla na velice vysoké úrovni. V Egyptě můžeme považovat jejich matematiku za vysokou, i když je nalezeno méně historických pramenů, které skutečnou úroveň matematiky nedoceňují. [3]

Od těchto dvou starověkých kultur převzal starověký Orient – Indie, Řekové a možná i Číňané, od nich pak prostřednictvím Arabů, národů přední Asie i Evropané, algebraickou metodu myšlení a elementární geometrii raně otrokářské společnosti s ostatním kulturním dědictvím. [3]

3. Praktická část

Po teoretické části se zaměříme na část praktickou, která obsahuje pracovní listy pro žáky devátých tříd na ZŠ. Pracovní listy byly rozdány k vyplnění žákům deváté třídy na ZŠ a MŠ Tovačov.

Prostudováním teoretických poznatků matematiky z období starověké Mezopotámie, jsme získali přehled, jaké početní úlohy a problémy ve starověku byly počítány. Zjistili jsme, že mezopotamským počtářům nedělalo problém sčítání, odčítání, násobení a dělení. Zavedli poziční a nepoziční soustavy, ze kterých se nejvíce využívala šedesátková soustava. Je pro nás i velkým překvapením, že dokázali spočítat daně, úroky, kapitál a pro ně důležité počty, které vycházely z běžného každodenního života. Matematika byla poměrně na vysoké úrovni, a tak můžeme žasnout, že svedli vypočítat úlohy, které vedly na lineární, kvadratické, bikvadratické a kubické rovnice. Nezaostávali ani za geometrií, v nichž z potřeb každodenního života dokázali spočítat obsahy rovinných útvarů a jejich obvody, objemy těles nebo Pýthagorovu větu.

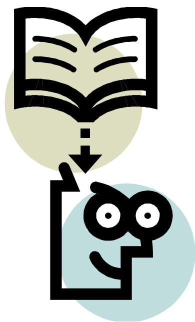
Pracovní listy obsahují vybrané úlohy matematiky, které jsou typově podobné, jako byly početní úlohy v období Mezopotámie a navíc jsou převedeny do srozumitelného jazyka pro žáka, který se s těmito listy dostane do kontaktu. Jsou určeny k oživení výuky a především pro zvětšení zájmů žáků o královnu věd, která není mezi žáky příliš oblíbená.

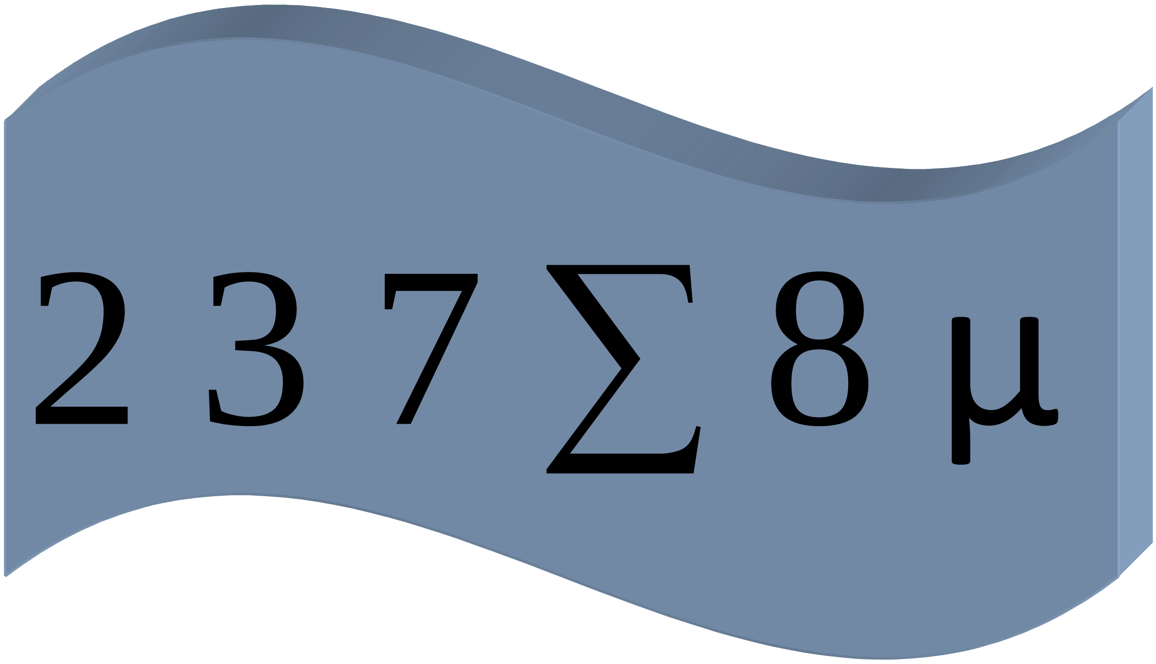
Vybrané příklady, které jsou zařazeny do pracovních listů, jsou čerpány nebo byly inspirací z titulů [4], [3], [5].

3. 1 Pracovní listy

Pracovní listy pro žáky 9. tříd druhého stupně na Základní škole

Každý z nás měl během školní docházky svůj méně oblíbený předmět. Většinou je tímto méně oblíbeným předmětem matematika, ale věřte, že matematika není jen o tom, jak se naučit vzorce správně nazpaměť nebo hodinách a hodinách marného snažení přijít k správnému výsledku. Matematika může být i fascinující. Věděli jste například, že už ve starověké Mezopotámii dokázali počtáři vypočítat bez větších problému například plochu (obsah) čtverce nebo jiných rovinných útvarů? Že čísla, která známe dnes, prošla v průběhu tisíciletí obrovskou změnou a rozhodně nejsou náhodou? Ani řešení různých druhů rovnic nebylo tehdejším počtářům cizí. Zkuste se na chvíli přemístit do dob a do míst, kde bylo běžnou součástí života provádět tyto výpočty, a pojďte se přiučit něčemu novému.





Matematika v Mezopotámii

Pokyny:

1. Vyplňte své jméno, třídu a školní rok.

2. Nejdříve si přečtěte všechna zadání příkladů, které jsou obsaženy v pracovních listech.

3. Vyberte si pořadí vyřešení úloh od (pro Vás) nejzajímavějších po (pro Vás) méně zajímavé.

4. Není podmínkou mít všechny zadané příklady vyřešené, ale čím více, tím lépe.

5. Nyní Vám nic nebrání v řešení úloh ☺. Šťastné a zábavné řešení!!!!!

Jméno:

Třída:

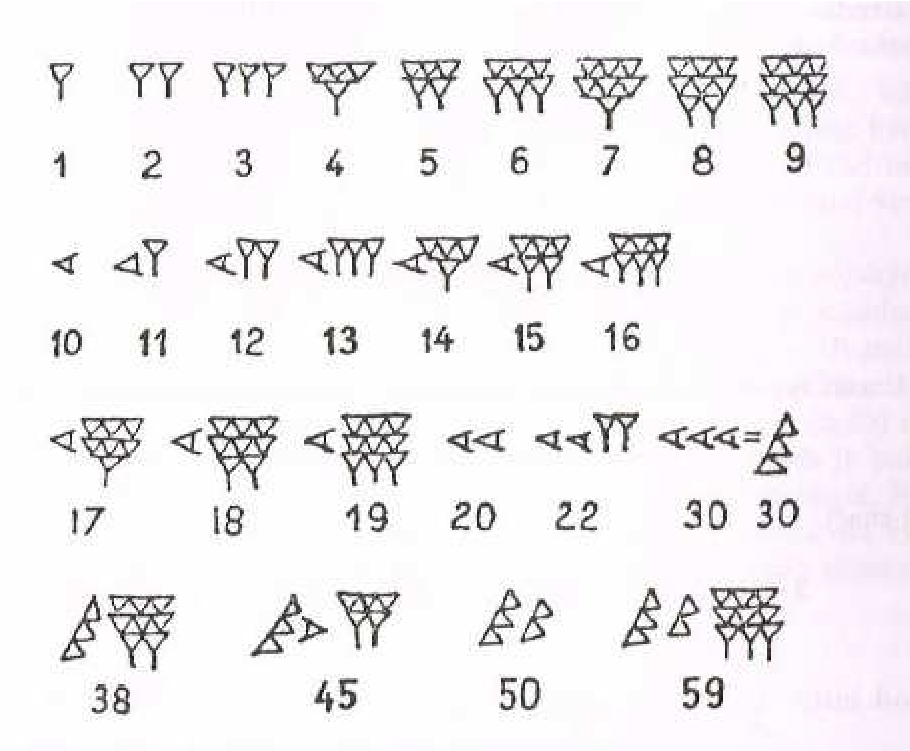
Školní rok:

Následující tabulku nevyplňujte – vyplní vyučující!

Hodnocení pracovních listů:

Číslo příkladu	***Název úlohy***	***Ohodnocení příkladu***			
		0	***1***	***2***	***3***
1	*Zápis čísel*				
2	*Sčítání*				
3	*Šedesátková soustava*				
4	*Lineární rovnice*				
5	*Kvadratická funkce*				
6	*Soustava rovnic*				
7	*Čtverec*				

1. Určitě jste už někdy v hodinách dějepisu slyšeli o klínovém písmu. Víte ale, že se pomocí něj dala zapisovat i čísla? Ne? Na následující tabulce je zobrazen zápis čísel od 1 do 59.



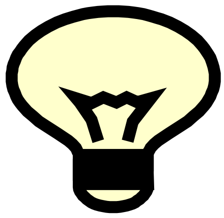
Zapište pomocí klínového písma čísla:

25

57

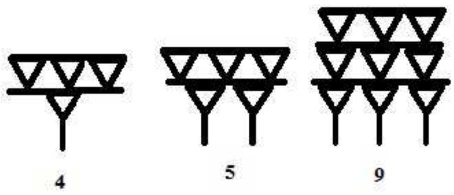
46

34



2. 3+1, 6+10,5+8 nebo 13+1. Pro nás lehké početní úlohy, co říkáte? Ale dokázali byste tyto početní úlohy zapsat klínovým písmem? Že ne? Nevadí, tady je malá nápověda: sčítanci byli obvykle zapisováni na jeden řádek a to zleva doprava. Poslední zápis v řádku vyjadřoval výsledek početní úlohy. Zkuste přepsat následující příklady do jazyka Mezopotámských matematiků: 6+9, 20+1 a 8+4.

Ukázkový příklad:



6+9

20+1

8+4

3. Již starověcí sumerové zapisovali čísla do šedesátkových soustav. Základem jejich soustavy bylo tedy číslo šedesát a to nejspíš proto, že se dobře dělí. Dodnes nám zbytky této soustavy zůstaly zachované např. při počítání času (1 hodina = 60 minut) a úhlů (1minuta = 60 sekund). Nyní se pokusíme převádět čísla z naší desítkové soustavy do šedesátkové.

Ilustrační příklad:

<table>
<tr><th>Současné vyjádření čísla</th><th>Rozložené vyjádření</th><th>Sumerské vyjádření</th></tr>
<tr><td rowspan="2">137</td><td>= 2.60+17</td><td rowspan="2">(2, 17)</td></tr>
<tr><td>= kolikrát se číslo 60 vejde do zadaného čísla + zbytek</td></tr>
</table>

Zapište následující čísla v šedesátkové soustavě:

256

568

924

713

4. Starověcí matematici řešili i úlohy, kde hledali hodnotu neznámé, která splňovala předepsané podmínky. Dnes bychom řekli, že řešili lineární rovnice. Řešte následující lineární rovnici. Pozn.!!! Nejdříve převeďte číslo v šedesátkové soustavě na pravé straně rovnice, do „našeho“ tvaru čísla tj. do desítkové soustavy!!! Výsledek zapište v šedesátkové soustavě. (Viz. ilustrační příklad ve cvičení 3.)

a) $20x + 16 = (3; 16)$

b) $45 - 7x = (0; 38)$

5. Řeš graficky následující kvadratické funkce. Průsečíky s osou x (kladné) zapiš klínovým písmem.

$f(x) = x^2 - 2x - 8$

$f(x) = x^2 + x - 72$

6. Vyřeš následující soustavy lineárních rovnic o 2 neznámých. Výsledky zapiš klínovým písmem.

a)	b)
$4x + 3y = 6,$	$2x + 3y = 16$
$2x + y = 4.$	$x - 2y = -6$

7. a) Vypočítej délku strany čtverce, je-li jeho obsah 100 cm^2.

b) Vypočítej délku strany čtverce, je-li jeho obvod 36 dm.

c) Vypočítej obvod čtverce, je-li délka jeho strany 8 cm.

Výsledky zapiš klínovým písmem.

A to je vše ☺

3. 2 Zhodnocení vyplněných pracovních listů

Bodování jednotlivých příkladů:

Číslo příkladu	Bodový systém			
	0	**1**	**2**	**3**
1.	bez řešení	1-2 vyřešených příkladů	3 příklady	4 příklady
2.	bez řešení	1 příklad	2 příklady	3 příklady
3.	bez řešení	1-2 vyřešených příkladů	3 příklady	4 příklady
4.	bez řešení	převod	1 příklad	2 příklady
5.	bez řešení	1 příklad	2 příklady	1. a 2. příklad + převod
6.	bez řešení	1 příklad	2 příklady	2 příklady + zápis
7.	bez řešení	1 příklad	2 příklady	a, b, c + zápis

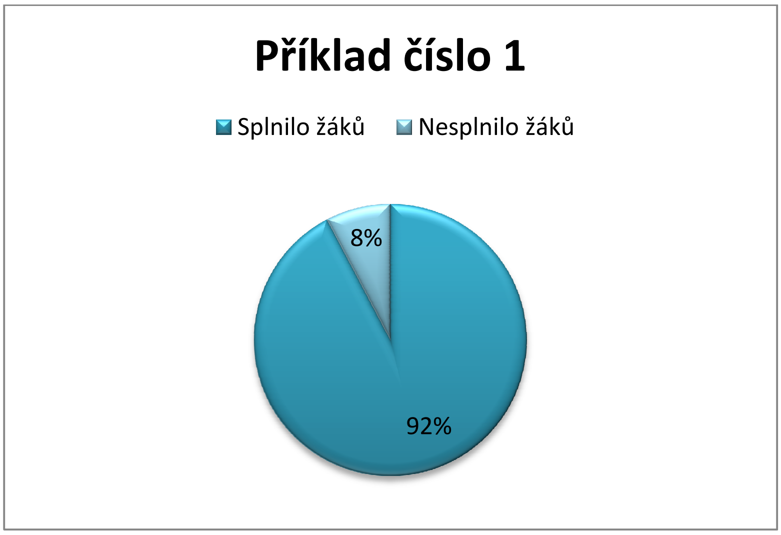
Pracovní listy byly vyplněny vybraným vzorkem žáků (13 žáků) deváté třídy. Pro lepší představu jsou příklady jednotlivě vyobrazeny v grafech, ve kterých je znázorněna úspěšnost vyřešení úloh.

Nejdříve si každý žák přečetl, co bude obsahem pracovních listů, poté pokyny, podle kterých pracovní listy vyplňoval. Je důležité zdůraznit, že žáci mohli řešit jen ty úlohy, které se jim jevily zajímavé.

Vyřešení pracovních listů probíhalo během jedné vyučovací hodiny (45 minut), která byla vyhrazena pro tento účel.

Příklad číslo	***Celkem 13 žáků***	
	Splnilo žáků	***Nesplnilo žáků***
1	12	1
2	12	1
3	11	2
4	11	2
5	8	5
6	9	4
7	12	1

Tabulka 7

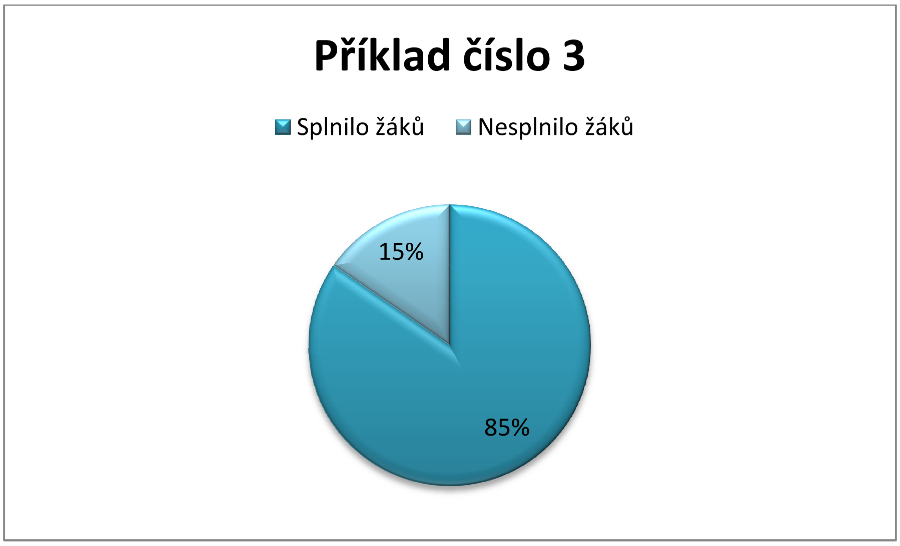


Graf 1 ***Příklad číslo 1***

Z tabulky a grafu (viz. graf 1) můžeme vyčíst, že příklad číslo jedna vyřešilo 92% žáků. Tato úloha byla jednoznačně pro žáky nejzajímavější, jelikož se seznámily se zápisem čísel v klínové podobě, a tak si mohly vyzkoušet, jak se před dávnými časy čísla zapisovala.

Graf 2 ***Příklad číslo 2***

Stejně jako první úloha byl druhý příklad vyřešen 92% žáků, kteří opět ocenili zajímavost zápisu sčítání pomocí klínového písma.



Graf 3 ***Příklad číslo 3***

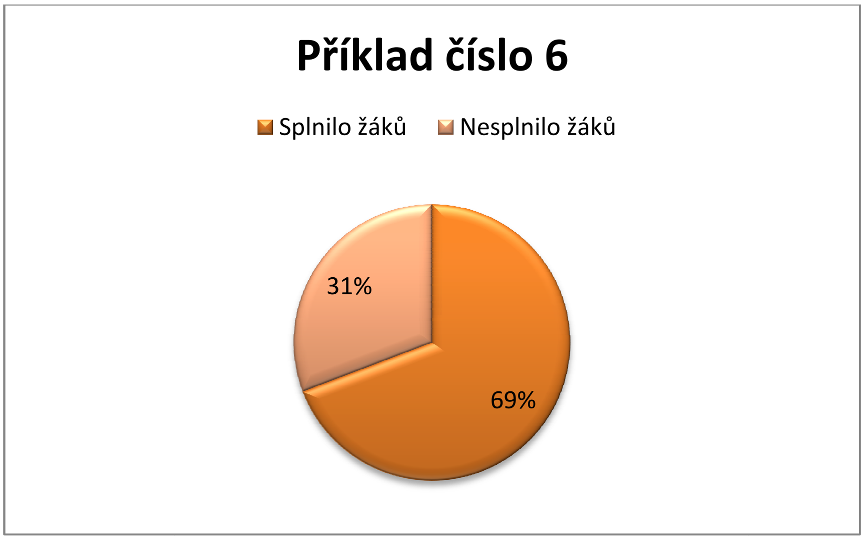
Většina vyplňujících žáků úlohu tři bez větších problémů vyřešit správně. Zbylých 15 % tuto úlohu vůbec neřešilo nebo mělo chybný výsledek.

Graf 4 ***Příklad číslo 4***

I když lineární rovnice byly jednoduché, tak žáky mohl zmást zápis čísla 196 v šedesátkové soustavě. Nakonec rovnice vyřešilo 85 % žáků.

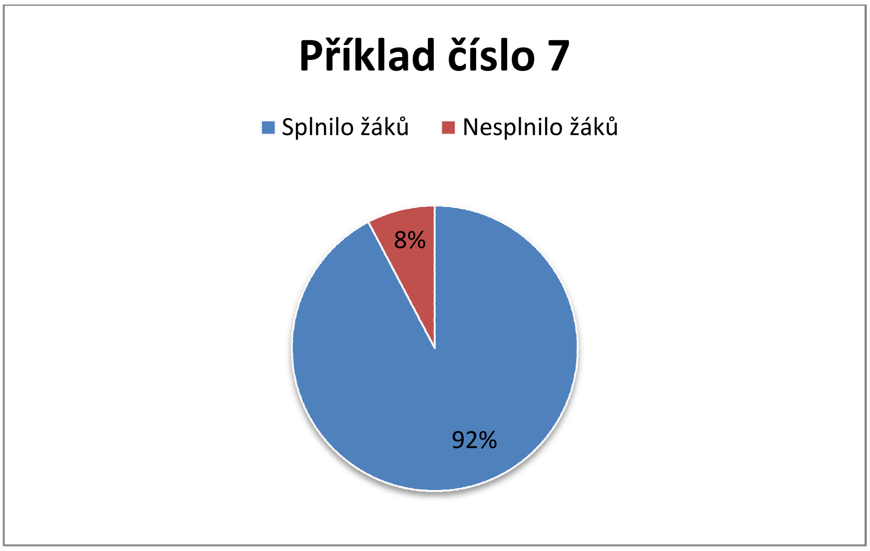
Graf 5 ***Příklad číslo 5***

Nejtěžší úlohou bylo grafické řešení kvadratických funkcí, které zvládlo bez větších problémů vyřešit 62 % žáků, dalších 38 % buď tuto úlohu neřešilo vůbec, nebo jejich řešení nebylo správné.



Graf 6 ***Příklad číslo 6***

I když soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých nebyly příliš těžké na výpočet, tak je vyřešilo pouze 69 % žáků.



Graf 7 ***Příklad číslo 7***

Jak můžeme vidět na grafu výše (viz. graf 7), tak úlohu číslo sedm vyřešilo 92%.

Z výše uvedených grafů (graf 1 – graf 7) vyčteme, že nejzajímavějšími úlohami, které vyřešilo největší procento žáků, jsou úlohy číslo jedna, dva a sedm. Největším lákadlem u úloh jedna a dvě bylo seznámení se zápisem čísel pomocí klínového písma, které pro ně představovalo něco „nového“. Úlohy tři a čtyři byly dalšími nejvíce řešenými úlohami, které měly poměrně vysoké procentuální ohodnocení.

3. 2. 1 Celkové zhodnocení pracovních listů dle bodového hodnocení

Příklad číslo	***Body***				***Získané body (13 žáků celkem)***
	0	***1***	***2***	***3***	
1	1	0	6	6	30
2	1	1	2	9	32
3	2	0	3	8	30
4	2	5	4	2	19
5	5	2	4	2	16
6	4	3	2	5	22
7	1	3	5	4	25
				Celkem	***174***

Tabulka 8

Možné maximum bodů 13 žáků	***Možné maximum bodů jednoho žáka***
273	21

Tabulka 9

Z výsledků a z reakcí žáků při vyplňování pracovních listů vyplývá dle našeho názoru, že nejvíce řešené a zajímavé úlohy byly úlohy číslo jedna, dva a sedm. Myslíme si, že to může být zapříčiněno zajímavostí a jednoduchostí daných příkladů, které ocenily i méně zdatní žáci. Na základě zjištěných informací si myslíme, že žáci devátých tříd ovládají částečně úlohy, jejichž kořeny sahají až do starověké Mezopotámie.

Dle našeho názoru pracovní listy tedy splnily svůj účel, pro který byly vytvořeny a to pro oživení, zpestření výuky a motivaci žáků při vyučování matematiky.

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo zpracovat přehled matematiky a její problémy v období starověku. Vzhledem k tomu, že starověk zahrnuje mnoho zemí s bohatou (matematickou) historií, zaměřila jsem se v teoretické části na tyto problémy pouze v Mezopotámii.

Nejdříve musel být čtenář seznámen s obdobím starověku - stručně, ovšem výstižně. Další dílčí část práce je členěná do podkapitol tak, aby informace v nich obsažené, na sebe logicky navazovaly. Od Mezopotámie, přes vznik písma a vzdělání v matematice, zrod zápisu čísel až po základní číselné operace, které dodnes využíváme.

Po prostudování podkapitoly o rovinné geometrii zjišťujeme, že už v této době počtáři v Mezopotámii využívali větu, která získala svou formu až díky Pýthagorovi. Z toho plyne dnešní označení Pýthagorova věta.

V návaznosti na teoretickou část jsem zpracovala část praktickou, která je tvořena pracovními listy pro žáky 9. tříd na základních školách. V pracovních listech se žák setkává s využitím problémů starověké matematiky v Mezopotámii v příkladech, které jsem převedla do moderní podoby.

Tyto pracovní listy byly rozdány vybranému vzorku 13 žáků na ZŠ a MŠ Tovačov a následně byly zpracovány ve výše uvedené podkapitole 3.2. Ze zjištěných výsledků je patrné, že jednotlivé úlohy neměly u žáků stejnou „atraktivitu“. Dále jsem si povšimla, že úlohy 1, 2 a 7, které se týkaly hlavně zápisu v klínovém písmu, měly nejvyšší četnost správného řešení a to podle mého názoru bylo zapříčiněno zajímavostí a jednoduchostí těchto úloh. Ostatní úlohy sice žáci taky vypočítali, ale už ne s takovou správností a četností.

Cíle mé práce byly naplněny a to zpracováním teoretické části této bakalářské práce a zpracováním pracovních listů, ve kterých jsme si mohli ověřit, jak žáci ovládají úlohy, jejichž kořeny pochází právě ze starověku.

Doufám, že vypracování obou částí mé bakalářské práce, ať už teoretické nebo praktické, je srozumitelné, jasné a motivující. Za velkou výhodu mé práce považuji to, že si žáci mohli vyzkoušet vypracování mých pracovních listů a jejich vyučovací hodina byla určitým způsobem ozvláštněna či obohacena. Samotný učitel si díky pracovním listům ověřil, jak jeho žáci ovládají, již dříve získané, znalosti.

Je zřejmé, že daná problematika je opravdu široká a že v ní mohou další studenti plynule navazovat, ať už v rámci bakalářských, případně diplomových prací.

„Všechny pravdy je snadné pochopit poté, co jsou objeveny. Potíž je v tom je objevit.“

Galileo Galilei

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam grafů

Seznam použité literatury

[1] GLASSNER, Jean-Jacques. *Mezopotámie: 34. století př. n. l. až 539 př. n. l.*Vyd. 1. Překlad Jiří Prosecký. Praha: Lidové noviny, 2004, 309 s. ISBN 8071066648.

[2] JŮVA, Vladimír a Vladimír JŮVA. *Stručné dějiny pedagogiky*. 3. rozš. vyd. Brno: Paido, 1995, 65 s. ISBN 8085931079

[3] KOLMAN, Arnošt a Marcela HEDRLÍNOVÁ. *Dějiny matematiky ve Starověku*. Praha: Academia, 1969, 224 s. Československá akademie věd.

[4] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ.*Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 23. ISBN 8071962554.

[5] Š. Znám, L. Bukovský, M. Hejný, J. Hvorecký, B. Riečan: Pohlad do dejín matematiky, ALFA, Bratislava, 1986. str. 60

[6] FOLTA, Jaroslav. *Dějiny matematiky a fyziky v obrazech*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1989, [35] listů. ISBN 8070150122.

[7] *Matematika v proměnách věků*. 1. vyd. Editor Jindřich Bečvář, Eduard Fuchs. Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004, 253 s.

[8] Dějiny matematiky (Výzkumné centrum pro dějiny vědy při AV ČR a UK), sv. 24. ISBN 8072850407.

[9] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. 2. rev. vyd. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2011, 334 s. ISBN 9788087053645.

[10] POTŮČEK, Jiří. *Historie matematiky pro učitele*. 1. vyd. Plzeň: Pedagogické centrum Plzeň, 2003, 83 s. ISBN 80-7020-127-4.

[11] KLÍMA, Josef. *Lidé Mezopotámie: cestami dávné civilizace a kultury při Eufratu a Tigridu*. 1. vyd. Editor Miroslav Flek. Praha: Orbis, 1976, 333 p., [16] leaves of plates.

[12] DOBLHOFER, Ernst. *Od obrázkov k písmu: Rozlúštenie zabudnutých písiem a jazykov*. 1. vyd. Bratislava: Obzor, 1972, 366 s

[13] SOUČEK, Vladimír. Úvod do klínového písma a babylónštiny. Praha: Academia, t. ST 1, 1973, 71 p

[14] ROBERTS, J. Ilustrované dějiny světa. Vyd. 1. V Praze: Knižní klub, 1999, 191 s. ISBN 80-717-6775-1.

[15] Toulky minulostí světa. 1. vyd. Praha: Baronet, 1999, 222 s. ISBN 80-721-4237-2.

[16] GARBINI, Giovanni. *Starověké kultury Předního východu*. Praha: Artia, 1971, 190 s. Umění světa

[17] EKSCHMITT, Werner. Paměť národů: hieroglyfy, písmo a písemné nálezy na hliněných tabulkách, papyrech a pergamenech. 1. vyd. Překlad Marie Grünfeldová. Praha: Orbis, 1974, 252 s., xl s. obr. příloh. Stopy, fakta, svědectví (Orbis)

Seznam použitých internetových zdrojů

[18] NĚMEC, Václav. Dějepis.com. [online]. [cit. 2015-01-26]. Dostupné z: http://www.dejepis.com/ucebnice/uvod-do-staroveku/

[19] NĚMEC, Václav. Dějepis.com. [online]. [cit. 2015-01-27]. Dostupné z: http://www.dejepis.com/ucebnice/mezopotamie/

[20] Babylonská věž. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2015-03-23]. Dostupné z:http://cs.wikipedia.org/wiki/Babylonsk%C3%A1_v%C4%9B%C5%BE#/media/File:Pieter_Bruegel_the_Elder_-_The_Tower_of_Babel_(Vienna)_-_Google_Art_Project_-_edited.jpg

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Marie Zubatá
Katedra:	Katedra matematiky Pedagogické fakulty UP
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2015

Název práce:	Matematika a její problémy v období starověku
Název v angličtině:	Mathematics and its problems in ancient times
Anotace práce:	Bakalářská práce má seznámit čtenáře s problematikou starověké matematiky v Mezopotámii. V rámci praktické části jsou zpracovány pracovní listy, určené pro žáky 9. tříd na ZŠ. Tyto listy byly vytvořeny v návaznosti na znalosti získané v teoretické části. Výsledkem je zhodnocení správnosti řešeni úloh, které byly zadány v těchto pracovních listech.
Klíčová slova:	starověk, Mezopotámie, matematika, pracovní listy
Anotace v angličtině:	The bachelor thesis is dedicated to teaching mathematics in the ancient Mesopotamia. The information gained in the practical part of the thesis has been used to design work sheets suitable for the primary school students in Year 9. Based on the analysis of the filled in work sheets, the correctness of the student’s solutions to the designed tasks has been evaluated.
Klíčová slova v angličtině:	antiquity, Mesopotamia, mathematics, worksheets
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	62 stran
Jazyk práce:	Český jazyk