Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Analýza metod násobení a jejich aplikace do didaktických pomůcek

Vypracoval: Bc. Anna Boudová
Vedoucí práce: doc. RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

České Budějovice 2023

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Analýza metod násobení a jejich aplikace do didaktických pomůcek jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích …………………… …………………………

Bc. Anna Boudová

NÁZEV DIPLOMOVÉ PRÁCE

Analýza metod násobení a jejich aplikace do didaktických pomůcek

ANOTACE

Cílem této diplomové práce je prozkoumat různé metody násobení. Do výběru budou zahrnuty metody současné i metody používané v historii. Metody budou zanalyzovány a vzájemně porovnány. Na základě některých metod budou vytvořeny didaktické pomůcky pro podporu výuky matematiky. Při zpracování bude zvolen následující postup:

- Studium literatury vztahující se k dané problematice
- Analýza metod násobení
- Prostudování rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání
- Analýza rozvoje násobení ve vybraných sadách učebnic
- Porovnání metod násobení
- Tvorba didaktických pomůcek

KLÍČOVÁ SLOVA

Násobení, matematika, didaktické pomůcky, metoda, základní škola, rámcové vzdělávací programy, historie matematiky, učebnice

TITLE OF DIPLOMA THESIS

Analysis of multiplication methods and their applications to didactic aids

ANNOTATION

The aim of the dissertation is to analyse various methods of multiplication. Present and historical methods of multiplication will be included in analysis. Each method will be described and then they will be compared together. Based on some selected methods didactic aids will be created to support the teaching of mathematics. There will be following process of elaboration:

- Research of literature related to the issue
- Analysis of methods of multiplication
- Study of Framework Education Programme for Basic Education
- Analysis of the development of multiplication in selected sets of textbooks
- Comparison of multiplication methods
- Creation of didactic aids

KEYWORDS

Multiplication, mathematics, didactic aids, method, primary and secondary school, Framework Education Programme, history of mathematics, textbooks

PODĚKOVÁNÍ

Mé velké poděkování patří vedoucí mé práce, doc. RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D, a to mnoha důvodů. Byla ochotná si mě vzít pod svá křídla, když jsem přišla s tím, že bych ráda psala diplomovou práci u ní, ale na téma z oboru didaktiky, na který se paní docentka nezaměřuje. Během průběhu mého psaní byla vždy vstřícná a nápomocná, kdykoliv jsem potřebovala poradit, pomoct, či motivovat. Chtěla bych tímto poděkovat za veškerou pomoc, čas a úsilí, které věnovala čtení a korekci mé práce a společným konzultacím.

Další velké poděkování patří mému partnerovi Ing. Petru Pavelkovi za podporu při psaní závěrečné práce a pomoc při tvorbě didaktických pomůcek. Mezi didaktické pomůcky z jeho dílny patří: sada pro Čínské násobení (násobící deska a sada misek na rýži) a sada magnetických Napierových tyčinek.

Dále bych chtěla poděkovat své rodině, která mě podporovala po celou dobu mého studia.

OBSAH

Úvod 8

1 Cíle a metodika 9

2 Teoretická východiska práce 10

2.1 Násobení jako matematická operace 10

2.2 Násobení z didaktického hlediska 13

2.2.1 Reprezentace násobení 14

2.2.2 Malá násobilka, velká násobilka a násobení celých nezáporných čísel 17

2.2.3 Násobení desetinných čísel 18

2.2.4 Násobení zlomků 19

2.2.5 Násobení záporných čísel 22

2.3 Násobení v historickém kontextu 24

2.3.1 Starověký Egypt 24

2.3.2 Mezopotámská kultura 25

2.3.3 Starověké Řecko a Řím 25

2.3.4 Indické násobení 26

2.3.4.1 Algoritmus *galea* neboli *batello* 26

2.3.4.2 Algoritmus *bhaskary* 28

2.3.4.3 Algoritmus *multiplicare per crocetta* 29

2.3.4.4 Algoritmus *gelosia* 29

2.3.4.5 Cikánská násobilka 31

2.3.4.6 Napierovy tyčinky 31

2.3.5 Čínské násobení 32

2.3.5.1 Čínské grafické násobení 32

2.3.5.2 Čínské početní násobení 33

2.3.6 Písemné násobení 35

2.4 Rámcové vzdělávací programy ... 36
2.4.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání ... 37
3 Analýza rozvoje operace násobení ve vybraných učebnicích ... 42
3.1 Učebnice Alter ... 42
3.2 Učebnice Fraus ... 47
3.3 Učebnice Prodos (modrá řada) ... 53
3.4 Učebnice Prometheus ... 60
3.5 Shrnutí analýzy učebnic a jejich komparace ... 67
4 Analýza a porovnání metod násobení ... 73
5 Didaktické pomůcky zaměřené na násobení ... 80
5.1 Čínské násobení ... 81
5.2 Egyptské násobení ... 82
5.3 Indické násobení a Napierovy tyčinky ... 83
6 Diskuze ... 86
7 Závěr ... 88
8 Seznam použité literatury ... 89
9 Seznam obrázků, tabulek, grafů, zkratek ... 95

ÚVOD

Násobení je jednou ze základních operací. Její znalost je nezbytná pro běžné denní výpočty i pro složitější početní operace. Přestože je možné získat výsledky násobení pomocí výpočetní techniky, jeho princip a význam by nám neměl být cizí. Na prvním stupni patří násobení mezi hlavní témata a v rámci desetinných čísel, zlomků a celých čísel se rozvíjí také na druhém stupni. Jak již bylo řečeno, jde o základní operaci, ale žáci mívají často problémy s jejím osvojením.

Vznik této práce je inspirován dvěma myšlenkami: Vytvořit podpůrný text pro učitele matematiky, ve kterém by byly shrnuty veškeré informace o operaci násobení a jejích metodách, a na tomto základě vytvořit didaktické pomůcky, které by žákům pomohli s jejím zvládnutím. Didaktické pomůcky by neměly být nápomocné pouze při nepochopení daného tématu, ale měli by rozšiřovat i znalosti u zdatnějších žáků, kteří potřebují náročnější úlohy. Jejich tvorba je založena na analýze sebraných metod násobení a analýze rozvoje násobení ve vybraných učebnicích. Tyto pomůcky se nezaměřují pouze na rozvoj násobení, ale také na rozvoj souvisejících znalostí a dovedností.

1 CÍLE A METODIKA

Cílem této diplomové práce je analýza různých metod násobení, jejich porovnání a vytvoření didaktických pomůcek na jejich základě. Nejprve bude vyhledána a prostudována příslušná literatura k této problematice. Práce se bude zabývat operací násobení, didaktickými možnostmi zpracování této operace, historií násobení, různými metodami násobení a zpracování násobení v některých sadách učebnic.

Didaktika matematiky rozděluje výuku operace násobení do několika stádií. Samotnému násobení předchází určitá propedeutika, následuje malá násobilka, na kterou navazuje násobení velkých čísel, násobení desetinných čísel, zlomků a celých čísel. Malá násobilka bude v této práci zmíněna, ale primárně se bude práce soustředit na násobení čísel víceciferných.

Pro výzkum je nezbytné zjistit, co vyžaduje naše společnost a náš stát po dětech ve znalosti operace násobení a práce s ní. Bude zjištěno, co kurikulum v tomto tématu vyžaduje a jak jej zpracovávají některé sady učebnice.

Na závěr práce budou vytvořeny didaktické pomůcky pro podporu výuky násobení. Tyto pomůcky by měly být inspirovány analyzovanými metodami násobení. Jejich koncept by měl být založen na principu hry. Taková hra by měla děti nadchnout, čímž by usnadnila jejich poznání v rámci námi zkoumaného tématu. Kromě pomůcek spojených se zkoumanými metodami násobení je možné rozšířit práci i o jiné pomůcky týkající se této operace. Všechny by však měly být založeny na principu hravosti, jak bylo již předestřeno.

Práce v sobě bude sdružovat různé metody násobení. Přínosem by měla být především pro učitele matematiky na 1. a 2. stupni ZŠ, kteří by se v ní mohli inspirovat pro vlastní výuku. Přínos by neměl být jenom sběrem a analýzou metod násobení, ale hlavně vytvořením didaktických pomůcek. Ty mohou být nápomocné jak vyučujícím a jejich žákům, tak i rodičům, kteří chtějí pomoci svým dětem se zvládnutím této operace příjemnou a nenásilnou formou.

2 TEORETICKÁ VÝCHODISKA PRÁCE

2.1 Násobení jako matematická operace

„Algoritmus násobení se již tak zmechanizoval, že někteří lidé ani nerozumějí operaci, kterou provádějí. I při své jednoduchosti není postup tak jednoduchý, jak by se zdál. Uvědomíme-li si to, lépe pochopíme obtíže, s kterými musí zápasit žák národní školy, chce-li se bezpečně naučit násobit (Jelínek, 1974, s. 72).“

Operaci násobení značíme pomocí znaménka „krát“: $\times$, $\cdot$, $*$. Princip násobení je založen na opakovaném sčítání a funguje ve všech soustavách o libovolném základu stejně. Např. $6 \cdot 3$ čteme šest násobeno třemi a zapíšeme $6 + 6 + 6$. Číslo 6 je v pozici aktivního činitele neboli operátoru, číslo 3 v pozici pasivního činitele neboli množství. Stejný příklad v sedmičkové soustavě by se řešil následovně: $6_7 \cdot 3_7 = 6_7 + 6_7 + 6_7 = 15_7 + 6_7 = 24_7$. Názorné příklady a manipulativní modely jsou výbornou pomůckou pro pochopení různých matematických operací. Jelínek (1974, s. 68) představuje násobení na svém modelu s kameny umístěnými na miskách. Tento model je dětem nápomocný při pochopení operace násobení jako obecného principu a zároveň jim rozšiřuje obzory o počítání v jiných numeračních soustavách. Počítání s tímto modelem si uvedeme na následujícím příkladu:

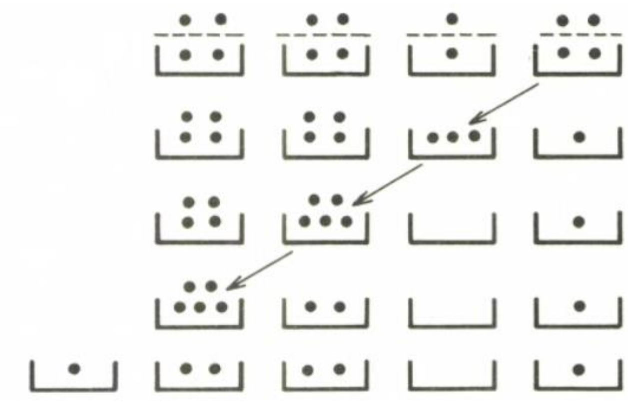
1. Mějme číslo $2\,212_3$ násobené číslem 2_3.

Obrázek 1: Číslo $2\,212_3$ vyobrazené pomocí modelu s kameny na miskách (Jelínek, 1974, s. 68)

2. Při násobení dvěma zdvojnásobíme počet kamenů na každé misce.

Obrázek 2: Zdvojnásobení kamenů v miskách při násobení $2\,212_3 \cdot 2_3$ (Jelínek, 1974, s. 68)

3. Jelikož se jedná o trojkovou soustavu, mohou být na jedné z misek maximálně dva kameny. Každé tři kameny v jedné misce (v jednom řádu) nahradíme jedním kamenem, který vložíme do misky, jež je o řád vyšší. Postupujeme systematicky zprava doleva a upravujeme počty kamenů v jednotlivých miskách.



Obrázek 3: Úprava počtu kamenů v jednotlivých miskách (řádech), podle pravidel trojkové soustavy (Jelínek, 1974, s. 68)

4. Výsledek násobení $2\,212_3 \cdot 2_3$ je $12\,201_3$ (Jelínek, 1974, s. 68).

Obrázek 4: Výsledek násobení $2212_3 \cdot 2_3$ (Jelínek, 1974, s. 68)

Násobení vyžaduje znalost pravidel pro násobení a znalost základních spojů násobení. Základní spoje můžeme získat například opakovaným sčítáním. Ve dvojkové soustavě jsou pouze 4 takové spoje a jedná se o násobky od $0 \cdot 0$ do $1 \cdot 1$. V sedmičkové soustavě to jsou násobky od $0 \cdot 0$ do $6 \cdot 6$, s celkem 49 součiny. V námi nejčastěji používané desítkové soustavě to jsou násobky od $0 \cdot 0$ do $9 \cdot 9$, obsahující 100 součinů. Je nutné si ale pamatovat všechny tyto násobky? Nikoliv. Pokud se podíváme na *tabulku 1*, která ukazuje základní spoje v desítkové soustavě, je patrné, že je tato tabulka diagonálně symetrická. To nám potvrzuje, že násobení je operací komutativní. Ve dvojkové soustavě by nám tedy stačilo znát pouze 3 různé spoje, v sedmičkové numeraci 28 takových spojů a v desítkové soustavě 55 základních spojů (Jelínek, 1974, s. 69-70).

Dominantní numerací je pro nás desítková soustava. Násobení v jiných numeracích vnímáme obecně jako náročnější a specifické. Co je ale pro všechny soustavy stejné je násobení čísly 10, 100, 1 000, apod. Pokud v desítkové soustavě vynásobíme číslo 12 číslem 10, zvýšíme řád u každé číslice. De facto připíšeme 0 za 12, čímž získáme výsledek 120. Stejným způsobem to funguje v jakékoliv jiné soustavě. Pokud bychom násobili čísla $12_4 \cdot 10_4$, pak je to jako bychom každý řád násobili číslem 4: $(1_4 \cdot 4^1 + 2_4 \cdot 4^0) \times 4^1 = 1_4 \cdot 4^2 + 2_4 \cdot 4^1 = 120_4$ (Jelínek, 1974, s. 70).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	47	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Tabulka 1: Tabulka základních spojů v desítkové soustavě

Při znalosti základních spojů nebo pomocí tabulky násobení je možné násobit kterákoliv dvě čísla. Uvedeme si postup násobení na příkladu $45 \cdot 3$:

1. Nejprve zapíšeme číslo 45 pomocí mocnin deseti:

$$45 = (4 \cdot 10 + 5)$$

2. Pak jej roznásobíme pasivním činitelem 3 a v tabulce násobení vyhledáme příslušné násobky:

$$45 \times 3 = (4 \cdot 10 + 5) \times 3 = 12 \cdot 10 + 15$$

3. Čísla opět zapíšeme pomocí mocnin 10 a upravíme:

$$(1 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 5 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 5$$
$$= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5 = 135$$

V praxi se algoritmus násobení zkrátí do této podoby:

1. Nejprve počítáme $5 \cdot 3 = 15$. Zapíšeme 5 a 10, tj. 1 desítku připočteme v dalším kroku.
2. Dále násobíme $40 \cdot 3 = 120$. Sečteme $120 + 10 = 130$, tj. 13 desítek, tedy 1 stovka a 3 desítek. Zapíšeme číslo 13 (Jelínek, 1974, s. 71-72).

Algoritmus násobení založený na rozkladu čísla pomocí mocnin základu se využívá ve všech numeracích. Jak uvádí Divíšková et al. (2021, s. 46): *„…začneme-li objevováním algoritmu pro násobení přirozených čísel v jiné než desítkové soustavě, nemusíme zafixovat postupy, které si žáci nepromyslí a které jsou navždy často svázané pouze s představou soustavy desítkové, Vedeme k objevení obecného principu."*

Pří násobení větších čísel se obvykle využívá zápisu násobení pod sebou pro jeho lepší přehlednost. Násobení pod sebou funguje na stejném principu, jaký byl ukázán výše. I zde se využívá distributivního zákonu. Je zavedené, že spodní činitel násobí horního činitele. Násobení začínáme od jednotek a postupujeme k vyšším řádům. Postup takového násobení si ukážeme na příkladu $125 \cdot 34$:

1. Nejprve vypočítáme $125 \cdot 4$:
   a. Násobíme $5 \cdot 4 = 20$. Zapíšeme 0 a 2 „držíme" do vyššího řádu.
   b. Přejdeme k desítkám: $2 \cdot 4 = 8$. K výsledku připočteme 2, které si „držíme": $8 + 2 = 10$. Zapíšeme 0 a do dalšího řádu „držíme" 1.
   c. Přejdeme ke stovkám: $1 \cdot 4 = 4$ a $4 + 1 = 5$.
   d. Výsledek násobení $125 \cdot 4 = 500$.

$$\begin{array}{r} 125 \\ \cdot\ 34 \\ \hline 500 \\ 375 \\ \hline 4\,250 \end{array}$$

2. Následně násobíme stejným principem $125 \cdot 3 = 375$. Výsledek násobení posuneme při zápisu o jednu pozici vlevo, neboť v pravém slova smyslu násobíme $125 \cdot 30$ a na pozici jednotek by tedy stála nula.
3. Mezivýsledky násobení pod sebou v řádech sečteme $500 + 3\,750 = 4\,250$ (Jelínek, 1974, s. 73).

Pro násobení platí tyto vlastnosti, operace je:

- komutativní: $x \cdot y = y \cdot x$
- asociativní: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- distributivní s ohledem na sčítání: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- s neutrálním prvkem: 1
- inverzní k operaci dělení (Beckmann, 2008b, s. 208-238).

2.2 Násobení z didaktického hlediska

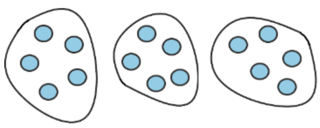
Pro starověké počtáře bylo násobení operací, kterou zvládali jen ti nejzdatnější. Přestože násobení v dnešní době ovládá na dobré úrovni většina populace, je pro nás i tak pohodlnější si čísla vynásobit na kalkulačce, než je násobit „ručně". Tyto skutečnosti je dobré mít na paměti ve chvíli, kdy žáky seznamujeme s násobením, neboť pro ně může být násobení na začátku opravdovým oříškem.

2.2.1 Reprezentace násobení

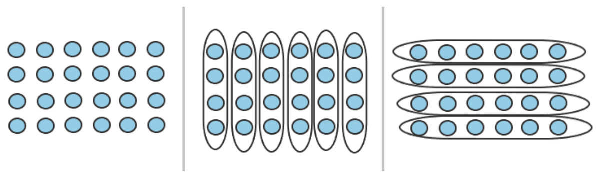
Abstraktní myšlení se u dětí formuje na 2. stupni ZŠ, ale s násobením se děti seznamují už ve 2. ročníku. V tuto dobu je jejich mysl ještě hodně zaměřena na konkrétní představy. Proto je dobré žákům předkládat konkrétní příklady a grafické i hmotné modely, kterým budou rozumět. Hejný a Kuřina (2015, s. 93-97) vyzdvihují i činnostní učení, kterým je například počítáním na prstech, reprezentace na objektech nebo krokování. Bezpochyby je důležité začít samotným principem násobení, tedy že násobení je opakovaným sčítáním určitého čísla. Pomocí jakých modelů je možné děti seznámit s násobením, rozebírá ve své knize *Mathematics for Elementary Teachers* (2008b, s. 196-219) její autorka Sybilla Beckmann. Násobení celých kladných čísel je podle ní možné reprezentovat těmito způsoby:

1. **Grupování**

   Grupování je seskupování předmětů, podle určitého pravidla. Využívá jej i Jelínkův model s kameny na miskách. Příkladem grupování je rozdělování konkrétního počtu bonbónů, mezi několik dětí. Otázkou mířící na násobení je celkový počet bonbónů rozdělených mezi dětmi.



Obrázek 5: Seskupovaní objektů (3 · 5)



Obrázek 6: Seskupování objektů (4 · 6)

2. **Organizovaný list**

   Organizovaný list je založen na informacích, které je možné strukturovat. Může obsahovat kombinace oblečení, výběru jídla (polévka, hlavní jídlo, příloha), kombinace číslic, písmen, aj. Model organizovaného listu si ukážeme na konkrétním příkladu kombinujícím oblečení. Tento příklad bude použit i u dalších modelů, aby bylo zřejmé, jak se tyto reprezentace navzájem liší, i přestože mají společné prvky.

   Příklad: *Tereza má 2 sukně (modrou – M a zelenou – Z) a 5 triček (oranžové – O, červené – Č, růžové – R, bílé – B a fialové – F). Kolika způsoby se může Tereza obléct?*

Z O	zelená sukně + oranžové tričko
Z Č	zelená sukně + červené tričko
Z R	zelená sukně + růžové tričko
Z B	zelená sukně + bílé tričko
Z F	zelená sukně + fialové tričko
M O	modrá sukně + oranžové tričko
M Č	modrá sukně + červené tričko
M R	modrá sukně + růžové tričko
M B	modrá sukně + bílé tričko
M F	modrá sukně + fialové tričko

Tabulka 2: Organizovaný list – kombinace oblečení Terezy

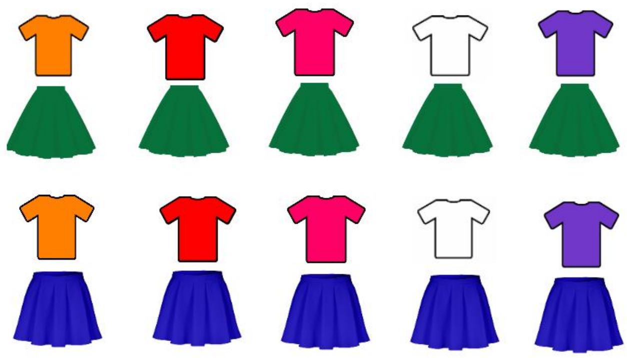
Obrázek 7: Vyobrazení kombinací oblečení Terezy podle organizovaného listu

3. **Tabulka**

Struktura násobení zanesená do tabulky je podobná organizovanému listu. Nejde ale o výčet kombinací vypsaných za sebou. V tabulce je v každém řádku a sloupci kombinován jeden prvek jedné množiny (sukně) se všemi prvky druhé množiny (trička).

Z O	Z Č	Z R	Z B	Z F
M O	M Č	M R	M B	M F

Tabulka 3: Tabulka – kombinace oblečení Terezy



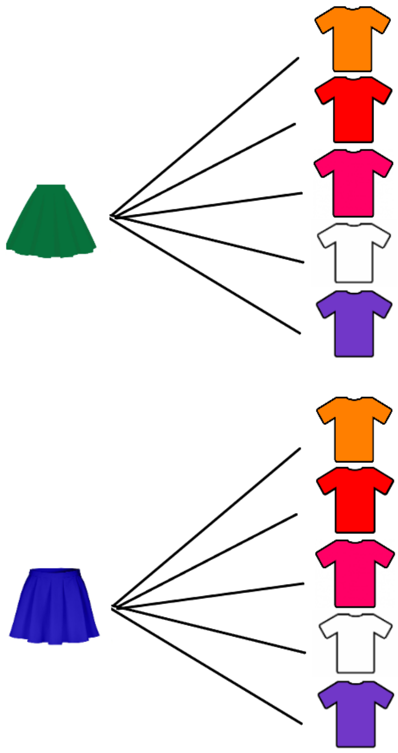
Obrázek 8: Vyobrazení kombinací oblečení Terezy podle tabulky

4. **Stromový diagram**

Organizovaný list a stromový diagram mají také hodně společného. Pokud porovnáme *tabulku 2* s *tabulkou 4*, můžeme poukázat na to, že jsme pouze modifikovali zápis informací. Nejedná se o výčet kombinací, jako je tomu u organizovaného listu, ale jde o postupný výběr z několika možností při hledání všech kombinací. Tereza se nejprve rozhoduje, kterou sukni si oblékne a ke každé sukni si může vybrat jedno z pěti triček.

zelená sukně	oranžové tričko
	červené tričko
	růžové tričko
	bílé tričko
	fialové tričko
modrá sukně	oranžové tričko
	červené tričko
	růžové tričko
	bílé tričko
	fialové tričko

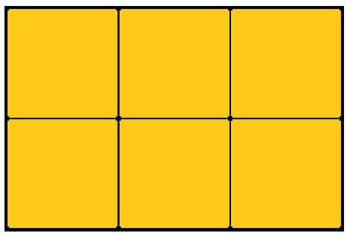
Tabulka 4: Stromový diagram – kombinace oblečení Terezy



Obrázek 9: Vyobrazení kombinací oblečení Terezy podle stromového diagramu

5. **Obsah obdélníku**

Jednou z běžných ukázek násobení v praxi je počítání obsahů ploch. Pro výpočet plochy je nezbytné zvolit nějakou měrnou plošnou jednotku. Na *obrázku 10* máme obdélník rozdělený na 6 čtverců, uspořádaných ve dvou řadách a třech sloupcích. Pokud určíme, že jeden čtverec je základní měrnou jednotkou s obsahem



Obrázek 10: Obsah obdélníku $2 \cdot 3 = 6$

1 j^2, pak má celý obdélník obsah 6 j^2. Na obsah plochy navazuje objem tělesa, který využívá třetího rozměru a zavádíme jej pomocí základní objemové jednotky.

I tato reprezentace má své vazby na jiné modely. Při porovnání *obrázku 6, 10* a *tabulky 3* zjistíme, že grupování, zobrazení násobení pomocí tabulky a model využívající obsahu obdélníku mají společné uspořádání prvků do řad a do sloupců.

Je vhodné podávat žákům informace propojeně již od začátku. Uvedené reprezentace násobení rozšiřují učivo prezentující operaci násobení o kombinatorické a geometrické znalosti. Slouží tak i jako průprava pro další oblasti matematiky.

2.2.2 Malá násobilka, velká násobilka a násobení celých nezáporných čísel

Malou násobilkou označujeme násobky čísel od 1 do 10 v desítkové soustavě a obvykle se uvádí v určitém souboru, například tabulce. Malá násobilka vychází ze základních spojů této soustavy. Násobení je uvedeno jako opakované sčítání a pracuje s pojmy množství a operátor. Znalost tohoto algoritmu počítání je zásadní pro následující rozvoj. Po pochopení a osvojení si této operace následuje automatizace. Děti u opakovaného sčítání mohou zůstat, nebo se učí malou násobilku zpaměti. Výhodou první metody je, že žáci rozumí mechanismu násobení a nezapomenou jej, nevýhodou je časová náročnost takového výpočtu. U učení malé násobilky zpaměti je tomu přesně naopak. Stává se, že žáci zapomenou princip operace, nebo jej dokonce nestihnou ani pochopit a už se učí násobky nazpaměť. Výhodou je naopak rychlé počítání, které usnadňuje i následující násobení mnohociferných čísel.

Velkou násobilkou označujeme násobky od 11 do 20. Stejně tak jako malá násobilka je položena na základech ovládnutí sčítání, velká násobilka staví na malé násobilce. Je přípravou pro násobení velkých a víceciferných čísel. Po zvládnutí velké násobilky se žáci seznamují s násobením dvojciferného čísla číslem jednociferným, trojciferného čísla číslem jednociferným, dvojciferného čísla číslem dvojciferným a pak již plynule přecházejí k násobení čísel o libovolném počtu cifer. Jakým způsobem funguje násobení čísel velké násobilky o libovolných víceciferných čísel, bylo vysvětleno v kapitole *2.1 Násobení jako matematická operace*, a proto se na tuto kapitolu pouze odkážeme.

2.2.3 Násobení desetinných čísel

Je nutné probrat násobení desetinných čísel, jako samostatnou kapitolu? Ano i ne. Jestliže zasvětíme dítě do světa převodů jednotek, pochopí, že násobení čísel 2,5 cm a 1,1 cm je to samé jako 25 mm a 11 mm, jako 0,25 dm a 0,11 dm, i jako 0,000 025 km a 0,000 011 km. Vše nám dá výměru jednoho a toho samého obdélníku, jenom na něj vždy nahlížíme z jiného rozměru. Pokud má tedy žák násobit desetinná čísla, vynásobí je nejprve bez desetinných čárek (jako by to byla celá čísla). Do součinu doplní desetinnou čárku podle pravidla, které říká, že: Počet desetinných míst u činitelů násobení je shodný s počtem desetinných míst u výsledného součinu.

Proč toto pravidlo platí, vysvětluje Beckmann (2008b, s. 272-275) třemi způsoby, které si ukážeme na příkladu $1{,}25 \cdot 3{,}4$:

1. **Umístění na číselné ose**
   První způsob pracuje s umístěním čísel na číselné ose. Číslo 1,25 leží na ose mezi čísly 1 a 2, číslo 3,4 leží mezi čísly 3 a 4. Násobek čísel $1{,}25 \cdot 3{,}4$ se tedy musí nacházet mezi čísly $1 \cdot 3 = 3$ a $2 \cdot 4 = 8$. Pokud bychom náhodně umisťovali desetinnou čárku do součinu 4 250, je zřejmé, že výsledkem, nemůže být číslo 0,425, neboť je příliš malé, ani čísla 42,5 a 425, která jsou naopak velká. Jediné číslo 4,25 se nachází v rozmezí 3 a 8.

2. **Násobení desetinných čísel převedených na celá čísla a zpět**
   Každé desetinné číslo převedeme na celé číslo tak, že je vynásobíme 10 tolikrát, než dostaneme číslo celé. 1,25 vynásobíme 10 dvakrát a dostaneme 125. 3,4 vynásobíme 10 jedenkrát s výsledkem 34. 125 a 34 mezi sebou vynásobíme. Součin 4250 převedeme zpět na desetinné číslo tak, že jej vydělíme 10 tolikrát, kolikrát jsme násobili 10 původní činitele, tzn. $4250 \div 10 \div 10 \div 10 = 4{,}25$.

$$\begin{array}{rcr} 1{,}25 & \xrightarrow{\times 10 \times 10} & 125 \\ \cdot\ 3{,}4 & \xrightarrow{\times 10} & \cdot\ 34 \\ \hline & & 4\,250 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 1{,}25 & & 125 \\ \cdot\ 3{,}4 & & \cdot\ 34 \\ \hline \underline{\underline{4{,}250}} & \xleftarrow{\div 10 \div 10 \div 10} & 4\,250 \end{array}$$

3. **Převod na zlomky**

   Každé desetinné číslo je možné zapsat pomocí zlomku, který bude mít ve jmenovateli mocninu 10. Násobení desetinných čísel je tak převedeno na násobení zlomků, které si podrobně vysvětlíme v následující kapitole.

$$1{,}25 = \frac{125}{100} \qquad \text{a} \qquad 3{,}4 = \frac{34}{10}$$

$$1{,}25 \cdot 3{,}4 = \frac{125}{100} \cdot \frac{34}{10} = \frac{125 \cdot 34}{100 \cdot 10} = \frac{4\ 250}{1\ 000} = 4{,}25$$

2.2.4 Násobení zlomků

Tato kapitola vychází z knihy *Mathematics for elementary teachers* (2008, s. 263-267).

Násobení se zlomky může mít více podob:

1. <u>Zlomek násobený celým číslem</u>: $\frac{1}{2} \cdot 5$

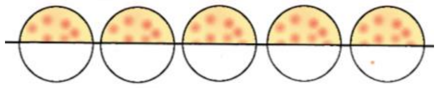
   Celkem je 5 koláčů a z každého zbyla $\frac{1}{2}$.

2. <u>Celé číslo násobené zlomkem</u>: $5 \cdot \frac{1}{2}$

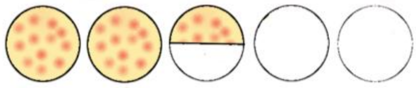
   Máme $\frac{1}{2}$ *z 5 koláčů.*

3. <u>Zlomek násobený zlomkem</u>: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

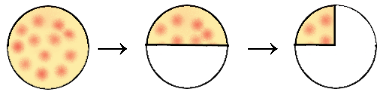
   Dostal $\frac{1}{2}$ *koláče z* $\frac{1}{2}$ *koláče.*



Obrázek 11: 5 polovin koláčů



Obrázek 12: Polovina z 5 koláčů



Obrázek 13: Jedna polovina z jedné poloviny

Princip násobení zlomků je možné vysvětlit graficky pomocí vyobrazování zlomků jako částí obdélníku, kde obdélník tvoří celek. Na konkrétním příkladu podrobně rozebereme, jak je možné násobení zlomků tímto způsobem vysvětlit. Zadání slovní úlohy:

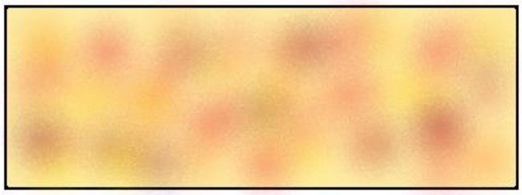
„Babička dala Magdě $\frac{4}{6}$ *ze* $\frac{3}{5}$ *buchty z celého plechu. Jakou část buchty Magda dostala?“*

Celkem je v této úloze buchta ohraničená plechem. Půdorys buchty má tvar obdélníku, který budeme rozdělovat na části. Úkolem je najít $\frac{4}{6}$ ze $\frac{3}{5}$ buchty, což podrobněji znamená, že hledáme $\frac{4}{6}$ z celku, který je tvořen $\frac{3}{5}$ z celé buchty. Žákům v tomto případě stále nemusí být jasné, jak by měli postupovat a proč volit operaci násobení. Jestliže rozvedeme kontext úlohy, žáci uvidí postup, jak se k daným zlomkům došlo a jak s nimi pracovat.

„Babička upekla buchtu. Odpoledne přišla ze školy vnoučata Petr a Magda. Petr měl velký hlad. Šel se nasvačit hned a snědl $\frac{2}{6}$ *buchty. Magda si nejprve udělala úkoly a nasvačila se až později. Na Magdu zbyly* $\frac{4}{6}$ *buchty, ale babička ví, že toho Magda moc nesní. Ukrojila jí* $\frac{3}{5}$ *z toho, co po Petrovi zbylo.“*

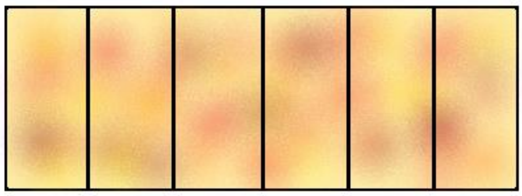
<u>Grafický rozbor úlohy</u>:

1. Babička upekla buchtu.

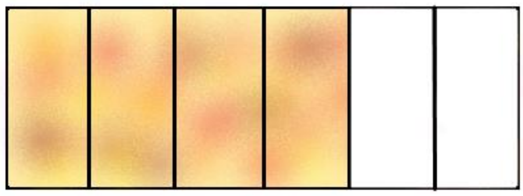


Obrázek 14: Buchta

2. Petrovi dala babička $\frac{2}{6}$ buchty: Rozdělila buchtu na 6 dílů a 2 díly dala Petrovi.

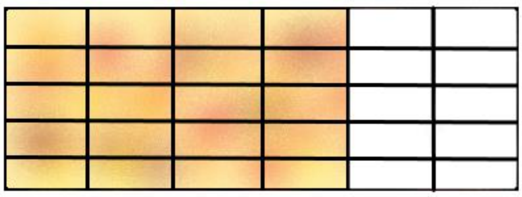


Obrázek 16: Buchta rozdělená na 6 dílů

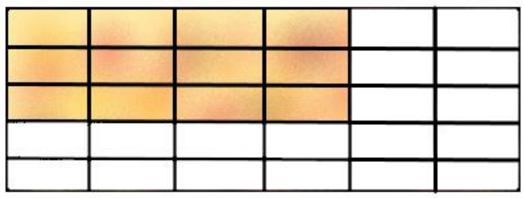


Obrázek 15: Petr dostal 2 díly buchty

3. Magdě dala babička $\frac{3}{5}$ z toho, co zbylo, když se Petr najedl: Rozdělila zbylou buchtu ($\frac{4}{6}$) na 5 dílů a 3 z nich dala Magdě.



Obrázek 18: Zbytek buchty rozdělený na 5 dílů

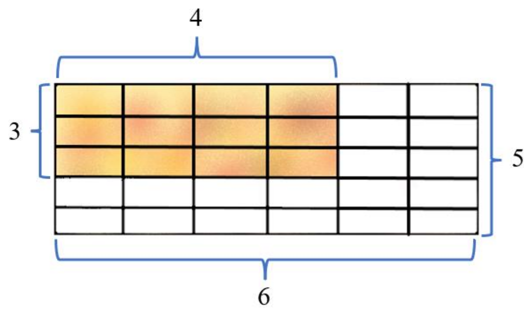


Obrázek 17: Část buchty, kterou dala babička Magdě

4. Když si díl buchty, který dostala Magda, vyobrazíme v rámci celé buchty, je patrný výsledek násobení:
   a. Celou buchtu rozdělila babička na 6 dílů a potom ještě na 5 dílů, tj. $6 \cdot 5 = 30$. Celá buchta má 30 dílů.
   b. Část, kterou dostala Magda, zabrala 4 díly na délku a 3 díly na šířku, tj. $4 \cdot 3 = 12$. Ze všech 30 dílů, dostala Magda 12 dílů.

   Z toho je již zřejmí princip násobení zlomků: Násobení čitatelů mezi sebou a násobení jmenovatelů mezi sebou.

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{12}{30}$$



Obrázek 19: Rozbor rozdělení buchty

Obecné pravidlo pro násobení zlomků tedy vychází z toho, že se násobí jednotlivé části zlomků mezi sebou: násobíme čitatele a násobíme jmenovatele:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Celé číslo můžeme zapsat jako zlomek, který má v čitateli toto číslo a ve jmenovateli číslo 1. Celé číslo a zlomek můžeme tedy násobit podle stejného algoritmu, jakým násobíme dva zlomky:

$$\frac{3}{5} \cdot 8 = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{1} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 1} = \frac{24}{5}$$

Stejně tam můžeme násobit i smíšená čísla. Nejprve převedeme smíšená čísla na zlomky, které následně vynásobíme:

$$1\frac{4}{5} \cdot 2\frac{7}{3} = \frac{9}{5} \cdot \frac{13}{3} = \frac{9 \cdot 13}{5 \cdot 3} = \frac{117}{15}$$

2.2.5 Násobení záporných čísel

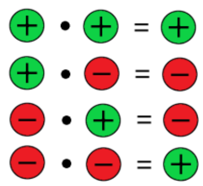
I tato kapitola vychází z knihy *Mathematics for elementary teachers* (2008b, s. 279-281) a z knihy aktivit, která ji rozšiřuje, od stejné autorky, Sybilly Beckmann (2008a, s. 178).

Násobení celých čísel se řídí těmito pravidly:

$$A \cdot (-B) = -(A \cdot B)$$

$$-A \cdot B = -(A \cdot B)$$

$$-A \cdot (-B) = A \cdot B$$



Obrázek 20: Pravidla násobení kladných a záporných čísel

Pravidla vycházejí z komutativního a asociativního zákona a znalosti, že záporné číslo $-A$ je možní zapsat jako násobek čísla -1 a kladného čísla A, tj. $-A = (-1) \cdot A$. Aby byli žáci schopni násobit s celými čísly, musejí si tato pravidla osvojit. Pro usnadnění jejich zapamatování bývají obvykle určitým způsobem zpracována. Příklad takového zpracování pomocí piktogramů můžeme vidět na *obrázku 20*.

Význam násobení celých čísel je možné vysvětlit pomocí konkrétních příkladů a situací. Na následujících řádcích budou představeny dvě série příkladů modelujících možnosti násobení kladných a záporných čísel na slovních úlohách. První série příkladů staví na situacích, které jsou dětem blízké a umějí si je tak představit – výměna bonbonů mezi kamarády. Jejich nevýhodou je však nedokonalost v ilustrování významu všech možností násobení celých čísel. Proto je uvedeno pouze násobení kladných čísel a násobení kladného čísla číslem záporným. Tuto nedokonalost překonává druhá série slovních úloh, která se zabývá přijímáním a vydáváním dárkových poukazů a faktur. Tyto úlohy celkem přesně zachycují význam jednotlivých možností násobení celých čísel. Slabým místem této série jsou ale pojmy, se kterými žáci ještě nemusejí mít zkušenost. Dárkový poukaz je běžně dostupnou věcí v mnoha obchodech. I faktura může být vystavena třeba internetovým obchodem. Ale faktura vystavená k proplacení není předmětem běžného života studenta základní školy, natož potom její vystavování.

1. série slovních úloh – Výměna bonbonů

1. **Násobení kladných čísel**:

   Mám 5 kamarádů a každý ode mě dostal 3 bonbony. Celkem jsem rozdal

   $5 \cdot 3 = 15$ *bonbonů.*

2. **Násobení kladného čísla záporným**:

   Pokud bychom alternovali výše uvedený příklad pro násobení čísel $5 \cdot (-3)$, úloha by zněla:

   Mám 5 kamarádů a každý ode mě dostal -3 bonbony.

   Co to znamená „dostat -3 bonbony“? Záporná čísla označují opačný směr. Ten si můžeme představit třeba na chůzi vzad, nebo na couvání auta. V úloze se tedy nemluví o obdarování kamarádů, nýbrž o jejich dluhu:

   Mám 5 kamarádů a každý mi dluží 3 bonbony. V minulosti jsem každému dal 3 bonbony, a aby to bylo spravedlivé, musejí i oni mně dát 3 bonbony. Celkem jsou mi všichni dlužní 15 bonbonů.

2. série slovních úloh – Dárkové poukazy a faktury

1. **Násobení kladných čísel**:

   Dostal jsem 4 dárkové poukazy, každý v hodnotě 2 tisíce korun. Dohromady jsem dostal poukazy v celkové hodnotě 8 tisíc korun.

   $$4 \cdot 2\,000 = 8\,000\ Kč$$

2. **Násobení kladného čísla záporným**:

   Přišly mi 4 faktury za nákup materiálu na stavbu (které musím zaplatit), každá je v hodnotě 2 tisíce korun. Celkem musím zaplatit 8 tisíc korun.

   $$4 \cdot (-2\,000) = -\,8\,000\ \text{Kč}$$

3. **Násobení záporného čísla kladným**:

   Odeslal jsem 4 dárkové poukazy, každý v hodnotě 2 tisíce korun. Někdo ode mě dostane dárkové poukazy a já musím zaplatit jejich hodnotu. Celkem zaplatím 8 tisíc korun.

   $$-4 \cdot 2\,000 = -8\,000$$

4. **Násobení záporných čísel**:

   Odeslal jsem 4 faktury (které mi někdo proplatí), každá je v hodnotě 2 tisíce korun. Celkem za faktury obdržím 8 tisíc korun.

   $$-4 \cdot (-2\,000) = 8\,000$$

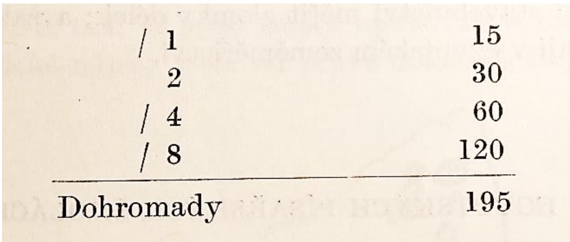
2.3 Násobení v historickém kontextu

Zemědělství bylo a je klíčovou činností zajišťující přežití všech civilizací. Není tedy divu, že i počátky násobení se váží k této činnosti. Zemědělství vyžadovalo měření délek, ploch (pozemků) i objemů (nádob, sýpek i výkopů při zemních pracích). Egypťané a Babyloňané nazývali součin „a-ša“, v překladu plocha. Arabští vzdělanci byli konkrétnější, pro součin měli slovo „sath“, tedy pravoúhelník. Sumerové k měření plochy využívali čtvercové a obdélníkové měřící pásky. Egyptští geometři byli známí jako „harpedonaptai“, čili napínači lan, neboť k vyměřování délek i ploch využívali měřické provazce (Kolman, 1969, s. 24–31).

Následující kapitoly se zaměří na vybrané civilizace, jejichž početní postupy násobení se zachovaly až do dnešní doby.

2.3.1 Starověký Egypt

První zastávku na naší cestě za poznáním uděláme ve starověkém Egyptě, zemi, která svými stavbami (pyramidy, zavlažovací kanály, přehrady, vodní nádrže atd.) dokazuje svoji matematickou vyspělost. Egypťané používali desítkovou nepoziční soustavu (nezáleželo tedy na pozici jednotlivých číslic/znaků), násobení bylo ale založené na dvojkové soustavě, kterou využívali předci Egypťanů. Vzniklo ze dvou operací: zdvojování a sčítání. Princip této operace fungoval následovně (*obr. 21*):



/ 1	15
2	30
/ 4	60
/ 8	120
Dohromady	195

Obrázek 21: Ukázka egyptského násobení na násobku čísel 15·13 (Kolman, 1969, s. 36)

1. Každý následující řádek je dvojnásobkem řádku předchozího, čehož je docíleno sečtením čísel se sebou samými.
2. Poslední číslo v levém sloupci nesmí převyšovat násobitel (v našem případě číslo 13).
3. V levém sloupci je nutné vyhledat čísla, jejichž součet dá dohromady násobitel.
   a. Postupuje se od posledního čísla nahoru a taková čísla se předznačí jakousi šikmou čárou (dnes bychom řekli lomítkem, nebo zatržením).
   b. Vynechána jsou čísla, jejichž součet s dříve zaškrtnutými čísly převyšuje daný násobitel (číslo 13).

4. Součet čísel v pravém sloupci, kterým odpovídají označená čísla v levém sloupci, je výsledným násobkem.
    a. Tento výsledek se zapíše pod pravý sloupec (Kolman, 1969, s. 24-36).

Na principu zdvojování bylo založené i dělení. Dělitel zdvojnásobovali do té doby, než označená čísla v pravém sloupci nedala příslušný dělenec. Výsledný podíl bylo následně možné získat jako součet čísel označených v levém sloupci. Pro dělení se zbytkem užívali zlomků (Kolman, 1969, s. 36).

Zdvojnásobování se v učebnicích západoevropských zemích dochovalo až do 17. století (Luhan, 1984, s. 33).

2.3.2 Mezopotámská kultura

Civilizace Mezopotámie také prokázaly svoji technologickou vyspělost, používaly systém zavlažování polí, čerpací vodní kolo, pluh se secí nálevkou k orbě a jejich stavitelským odkazem jsou stupňovité chrámy – zikkuraty. Babyloňané převzali od Sumerů šedesátkovou soustavu, ve které násobili stejně jako my podle řádů. Malá násobilka v šedesátkové soustavě obsahuje násobky od 1 do 59. Aby si nemuseli pamatovat všechny tyto násobky (celkem 1769 násobků), využívali pomocných tabulek. Tabulky byly vytvářeny pro tzv. titulní čísla, jejichž děliteli byli pouze 2, 3, 5. Výjimkou bylo číslo 7, které bylo také titulním číslem. Prvních 10 čísel (naše malá násobilka) bylo tedy titulních. Tabulky obsahovaly násobky titulních čísel od 1 do 20, 30, 40 i 50. Babyloňané využívali také tabulek převrácených hodnot, tj. zlomků. Pomocí těchto tabulek se čísla rovněž dělila (Kolman, 1969, s. 32-52).

2.3.3 Starověké Řecko a Řím

Řekové navázali na znalosti a dovednosti Egypťanů a Babyloňanů. Používali desítkovou soustavu se zápisem čísel pomocí písmen řecké alfabety. Aby je od písmen odlišili, psala se nad nimi čárka, nebo vodorovný pruh. K počítání využívali kamínků. Ty pokládali nejprve na zem a později na početní desku. Práci s kamínky nakonec nahradilo počitadlo „abakus“. (Kolman, 1969, s. 71-80).

Řekové využívali třech metod násobení. Násobili z paměti, převzatou egyptskou metodou, nebo pomocí tabulek násobení. Existovaly tabulky násobení až do 10 000. Psali zleva doprava a několikamístná čísla proto násobili odpředu, tedy od nejvyšších řádů. Nejprve vynásobily základy, poté určovali řád (Kolman, 1969, s. 80-81).

Římané se seznámili s řeckou alfabetou, ale pro zápis číslic zvolili vlastní římské číslice. Preferované bylo počítání pamětné a ke složitějšímu násobení byly využívány tabulky. Ty existovaly také pro operace se zlomky (Kolman, 1969, s. 171-173).

2.3.4 Indické násobení

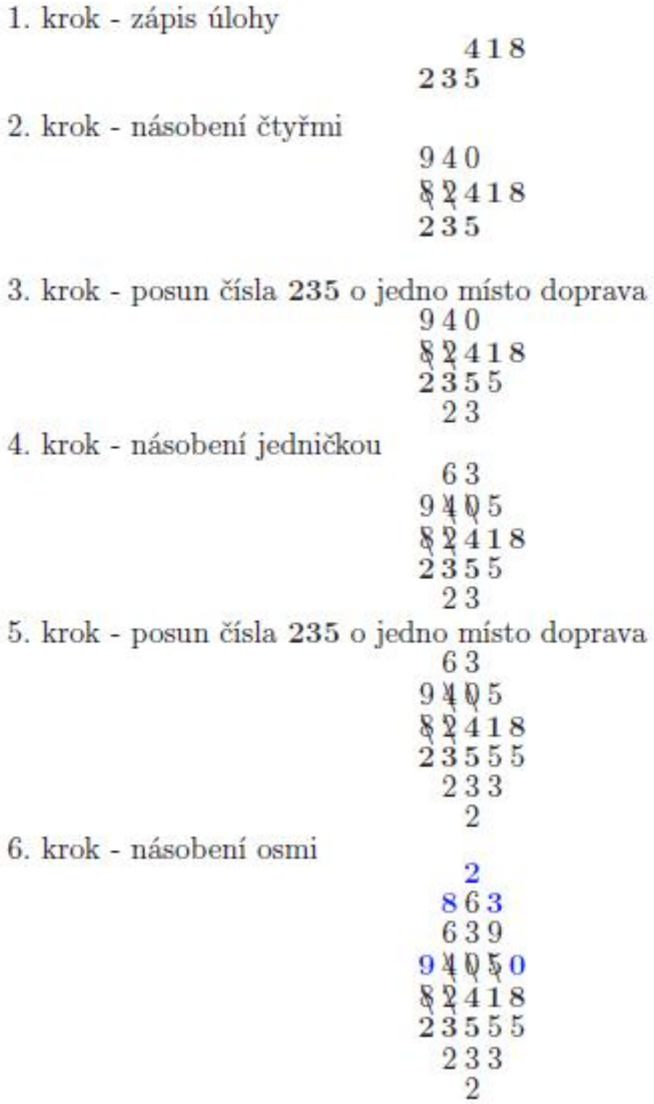
Dnešní poziční desítková soustava pochází z indické matematiky a přes arabské země se dostala až k nám. Není proto divu, že i jejich metody násobení se u nás zachovaly až do středověku (Luhan, 1984, s. 25).

2.3.4.1 Algoritmus *galea* neboli *batello*

Původní indický způsob násobení využíval mazání a přepisování částečných výsledků. To bylo možné, dokud se psalo na poprášené desky. S přechodem k psaní na papír se neplatné cifry začaly škrtat a nadepisovat. Počtář musel dopředu počítat s dostatkem prostoru nad i pod činiteli pro celý zápis. Princip si ukážeme na příkladu $418 \cdot 235$, jak jej uvádí Divíšková at al. (2021, s. 47-48) na *obrázku 22*. Násobení se provádělo zleva doprava.

1. Činitele se zapsaly pod sebe tak, že nad sebou stály poslední číslice dolního činitele a první číslice horního činitele (v našem případě číslice 4 a 5).
2. Nejprve se násobilo číslo 235 číslicí 4. Začalo se zleva $2 \cdot 4$ a výsledek 8 se nadepsal nad 2. Pokračovalo se násobením $3 \cdot 4$, výsledek 12. Číslice 2 se nadepsala nad 3 a jednička se připočetla k 8. Číslice 8 se škrtla a nad ní se nadepsal součet 9. V dalším kroku se násobila čísla $5 \cdot 4$, výsledek 20. Nula se nadepsala nad 4, dvojka se přičetla k 2. Číslice 2 se škrtla a nad ní se nadepsal součet 4.
3. Číslo 235 se posunulo o jedno místo doprava. 2 se zapsalo pod 3, 3 pod 5 a 5 pod 1.

4. Násobení dále pokračovalo stejným způsobem: Násobení čísla 235 číslicí 1. Posun činitele doprava a násobení čísla 235 číslem 8.
5. Jak je v 6. kroku na *obr. 22* vidět, výsledek násobení tvořila nepřeškrtnutá čísla na počátku každého sloupce. Výsledek našeho násobení $418 \cdot 235 = 98\,230$.



Obrázek 22: Indické násobení na příkladu (Dívíšková et al., 2021, s. 47-48)

Celý zápis připomínal svým obrysem loď, nebo člun. Z toho důvodu se tomuto algoritmu ve středověku také přezdívalo algoritmus „galea“ nebo „batello“. Tento způsob násobení byl poměrně náročný, neboť zápis byl nepřehledný a bylo jednoduché udělat početní chybu. Z toho důvodu někteří počtáři rozkládali jednoho z činitelů na menší čísla a dílčí součiny pak sečetli (využili tak distributivního zákonu), (Balada, 1959, s. 54-56).

2.3.4.2 Algoritmus *bhaskary*

Algoritmus galea zjednodušil indický matematiky Bhaskary. Jeho způsob násobení, využíval zápisu jednoho činitele na proužek papírku, který se postupně kladl k druhému činiteli a násobily se jednotlivé cifry čísel mezi sebou (Balada, 1959, s. 58-59).

Algoritmus si představíme na příkladu $462 \cdot 315$. Na papír se nejprve zapsal činitel 462 a na proužek papíru v opačném pořadí cifry činitele 315. Papírek s obráceným zápisem čísla, tj. číslem 513, se postupně přikládal pod napsaný činitel 462, jejich jednotlivé cifry se mezi sebou násobily a tyto násobky se sčítaly. Papírek se posouval zprava doleva po jednotlivých pozicích. Vypočty se zapisovaly pod sebe.

1. V prvním kroku se umístila čísla 462 a 513 tak, že číslice 5 byla pod číslicí 2, a vynásobily se cifry čísel na pozicích jednotek (nezapomínejme, že číslo 315 je při výpočtu zapsáno v opačném pořadí): $2 \cdot 5 = 10$. Číslice 0 byla zapsána jako poslední cifra hledaného součinu a 1 byla připočtena k součtu částečných násobků o řád vyšším.
2. Následovalo posunutí papírku doleva o jednu pozici. Násobily se opět cifry, které byly pod sebou a bylo k nim připočteno číslo 1: $1 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 33$.
3. Tímto způsobem se pokračovalo až na do posledního možného posunutí, kdy pod sebou byly číslice 4 a 3.
4. Výsledek násobení byl čten v zápisu výpočtů zdola nahoru a tvořily jej, až na poslední výpočet vždy jen poslední cifry. Výsledkem násobení je číslo $145\,530$ a v „zápisu výpočtů“ níže je zvýrazněn tučně (Balada, 1959, s. 58-60).

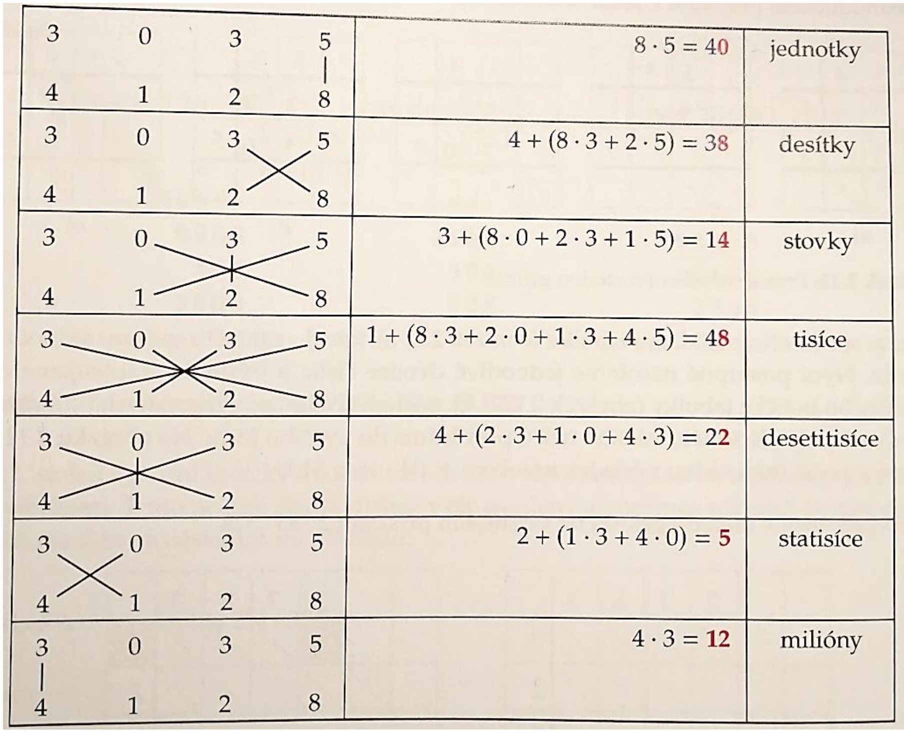
1. pozice	2. pozice	3. pozice	4. pozice	5. pozice
462 $\;\;\;513$	462 $\;\;513$	462 513	$\;\;462$ 513	$\;\;\;462$ 513

Tabulka 5: Tabulka pozic zápisu čísel při násobení metodou bhaskari

<u>Zápis výpočtů:</u>

$$2 * 5 = 1\mathbf{0}$$
$$1 + 6 * 5 + 2 * 1 = 3\mathbf{3}$$
$$3 + 4 * 5 + 6 * 1 + 2 * 3 = 3\mathbf{5}$$
$$3 + 4 * 1 + 6 * 3 = 2\mathbf{5}$$
$$2 + 4 * 3 = \mathbf{14}$$

2.3.4.3 Algoritmus *multiplicare per crocetta*



3 0 3 5 / 4 1 2 8	$8 \cdot 5 = 40$	jednotky
3 0 3 5 / 4 1 2 8	$4 + (8 \cdot 3 + 2 \cdot 5) = 38$	desítky
3 0 3 5 / 4 1 2 8	$3 + (8 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5) = 14$	stovky
3 0 3 5 / 4 1 2 8	$1 + (8 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 5) = 48$	tisíce
3 0 3 5 / 4 1 2 8	$4 + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3) = 22$	desetitisíce
3 0 3 5 / 4 1 2 8	$2 + (1 \cdot 3 + 4 \cdot 0) = 5$	statisíce
3 0 3 5 / 4 1 2 8	$4 \cdot 3 = 12$	milióny

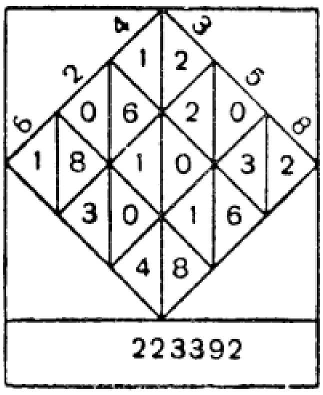
Obrázek 23: Metoda násobení "multiplicare per crocetta" (Divíšková et. al., 2021, s. 50)

Zjednodušené metodě bhaskary se říkalo „multiplicare per crocetta“ (crocetta = křízek) nebo „multiplicare per casella“ (casella = schránka). Jak tato metoda fungovala, můžeme vidět na *obrázku 23*. Levý sloupec vyobrazuje zjednodušený způsob násobení „multiplicare per crocetta“, prostřední sloupec obsahuje zápis výpočtů metody „bhaskary“ a v pravém sloupci máme zapsány pozice mezivýsledků v rámci celého násobku. Obě metody jsou založené na stejném principu násobení. Tento algoritmus je však náročnější na představivost a krátkodobou paměť pro udržování mezivýsledků v paměti. Zdatný počtář, který tento algoritmus ovládnul, se nezdržoval zapisováním mezivýsledků a rovnou zapisoval výsledný násobek. Proto se této metodě také říkalo „blesková metoda“ (Balada, 1959, s. 60).

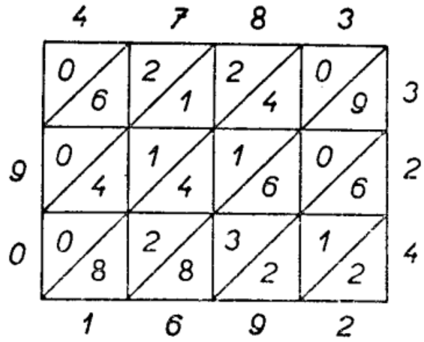
2.3.4.4 Algoritmus *gelosia*

„Gelosia“ znamená žárlivost. Tak pojmenoval tuto metodu násobení ve 14. století italský matematik Luca Pacioli, neboť mu svým zápisem do čtvercové sítě, připomínala mříže v oknech benátských nevěstinců. Jiní matematici tuto metodu nazývali „multiplicare per graticola“ – násobení po způsobu dlaždice nebo „multiplicare per quadrilatero“ –

násobení ve čtvercích. Jak je patrné, základem tohoto násobení je čtvercová síť/ tabulka. Perský astronom zvaný Al Kaši tuto tabulku otočil o 45° doprava, čtvercová tabulka tak nestála na vrcholu, ale na straně čtvercové sítě. Tento otočený zápis se udržel a pokud bychom v dnešní době s někým hovořili o indickém násobení, pak bychom mluvili právě o tomto zápisu násobení (Balada, 1959, s. 56-58).



Obrázek 24: Muliplicare gelosia zapisovaný italským způsobem (Balada 1959, s. 57)



Obrázek 25*:* Multiplicare gelosia zapisovaný podle Al Kašiho (Balada, 1959, s. 57)

Základem tohoto násobení je čtvercová síť (tabulka), jejíž čtverce jsou úhlopříčně rozděleny na dva trojúhelníky – levý horní a pravý dolní. Cifry aktivního činitele se zapisovaly nad sloupce této tabulky, cifry pasivního činitele psaly shora dolů za řádky tabulky.

1. Součiny jednotlivých cifer se zapisovaly do čtverců v příslušném řádku a sloupci násobených cifer, přičemž jednotky násobku se zapsaly do pravého dolního trojúhelníku a desítky do levého horného trojúhelníku.
2. Po vynásobení všech cifer činitelů se sčítaly cifry v úhlopříčných pásech. Začínalo se vpravo dole a postupovalo se doleva nahoru. Jednotky součtů cifer se zapisovaly pod nebo před příslušné úhlopříčné pásy. Desítky se přičítaly k součtu cifer v následujícím pásu.
3. Výsledek násobení se četl shora dolů (nalevo od tabulky) a zleva doprava (pod tabulkou). Pro námi uvedený příklad na *obr. 29*, je výsledkem číslo 901 692 (Balada, 1959, s. 56-57).

2.3.4.5 Cikánská násobilka

Algoritmy násobení založené na indickém číselném systému pracovali s tím, že počtář dovede používat malou násobilku. Pamětní učení součinů od $1 \cdot 1$ do $9 \cdot 9$ bylo pro počtáře raného novověku náročným úkolem, a proto se hledaly pomůcky, které by tento úkol usnadnily. Využívalo se tabulek násobení, ale i jiných pomůcek. Pokud počtář ovládal násobení do 5, pak mohl pro zbytek malé násobilky využit tzv. cikánské násobilky, využívající prstů obou rukou. Jak tento způsob výpočtu funguje, si ukážeme na násobení čísel $7 \cdot 9$. Počtář zvedne na jedné ruce tolik prstů, o kolik je daný činitel větší než 5. Na jedné ruce tedy vztyčí 2 prsty a na druhé 4 prsty. Součet vztyčených prstů udává počet desítek (6), součin nevztyčených prstů tvoří jednotky (3) - jedná se o doplňky obou čísel. Výsledkem je číslo 63 (Balada, 1959, s. 54).

2.3.4.6 Napierovy tyčinky

Inspirací autorovi tohoto způsobu násobení, Johnu Napierovi, byl indický způsob násobení – algoritmus gelosia. Napier byl středověký matematik a astronom, který potřeboval ke svým astronomickým výpočtům nalézt takovou metodu násobení, jež bude eliminovat chyby z nepozornosti právě svojí jednoduchostí. Využil tabulku malé násobilky, ze které vynechal násobky 10 a kterou zapsal po způsobu algoritmu gelosia: Políčka čtvercové tabulky diagonálně rozdělil na dva trojúhelníky. Desítky násobku daných čísel zapisoval do levého horního trojúhelníku, jednotky do pravého dolního trojúhelníku. Tabulku navrhoval rozřezat na svislé proužky, se kterými by se násobilo. Místo proužků se uchytily tyčinky čtvercového průřezu – odtud Napierovy tyčinky (Divíšková et al., 2021, s. 95).

Jak se násobí pomocí Napierových tyčinek, si ukážeme na následujících příkladech s doprovodným vyobrazením na *obr. 26*.

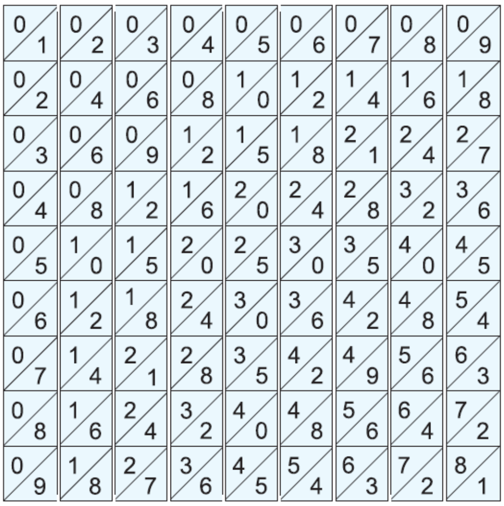
1. V prvním příkladu budeme násobit čísla 362 a 3. Nejprve jsou vybrány tyčinky s násobky 3, 6 a 2 a v tomto pořadí jsou seřazeny za sebou. Trojnásobek čísla 362 získáme ze třetího řádku pomocí metody *gelosia*. Výsledkem je číslo 1086.
2. V druhém příkladu zvolíme čísla 362 a 35. Při násobení dvojciferným číslem využijeme distributivního zákonu:

$$362 \cdot 35 = 362 \cdot (30 + 5) = 362 \cdot 30 + 362 \cdot 5.$$

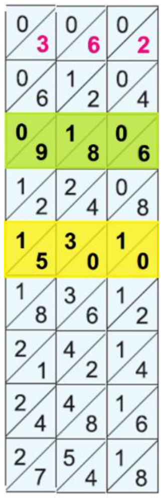
Nejprve vynásobíme číslo 362 třemi a výsledek vynásobíme 10. Poté vynásobíme číslo 362 pěti. Výsledné násobky společně sečteme:

$$(362 \cdot 3) \cdot 10 + 362 \cdot 5 = 1\,086 \cdot 10 + 1810 = 12\,670.$$

3. Stejným způsobem funguje násobení jakýchkoliv dvou víceciferných čísel (Divíšková et al., 2021, s. 96).



Obrázek 27: Soustava Napierových tyčinek (Divíšková et al., 2021, s. 95)



Obrázek 26: Ukázka počítání s Napierovými tyčinkami

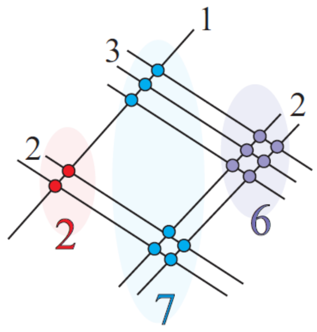
2.3.5 Čínské násobení

Staří Číňané zaznamenávali informace pomocí zářezů do kostí, nebo je vyrývali na krunýře želv. K výpočtům využívali šňůrky, provázky s uzlíky, tyčinky z bambusu, ze dřeva, ze slonoviny aj. Na tento styl zápisu odkazuje i dnešní čínské písmo a odpovídá mu i původní čínské násobení přenesené na papír (Křížek a Liu, 1997, s. 223).

2.3.5.1 Čínské grafické násobení

V principu jde o stejný algoritmus, s jakým jsme se seznámili v kapitole *2.3.4.4 Algoritmus gelosia*, ale liší se svým grafickým provedením. Násobená čísla byla vyobrazena pomocí čar, jako je tomu na *obrázku 28*, kde jsou násobena čísla 12 a 23.

1. Čáry črtáme diagonálně, v jednom směru jedno číslo, v druhé směru druhé číslo, s tím, že od sebe oddělujeme čáry zobrazující jednotlivé řády čísla mezerou. Načrtnutá násobená čísla se překrývají, jako je tomu na obrázku.
2. Průniky čar vyznačíme body. Jednotlivé body ve sloupcích, zde vyznačeny stejnou barvou, spadají do příslušných řádů výsledného násobku.
    a. V našem příkladu náleží do řádu jednotek 6 bodů, do řádu desítek dva shluky bodů po 3 a 4 bodech, dohromady 7 bodů, a do řádu stovek 2 body. Výsledným násobkem čísel je tedy číslo 276.
    b. Pokud by součet počtu bodů přesáhl desítku, pak se tyto desítky převedou do řádu o jeden vyšší.



Obrázek 28: Čínské násobení (Divíšková et al., 2021, s. 53)

Nevýhodou této metody je nepřehlednost při násobení větších čísel. U takových čísel nastávají komplikace s udržováním řádů pod sebou a převáděním mezivýsledků překračujících 10 do dalších řádů (Divíšková et al., 2021, s. 53).

2.3.5.2 Čínské početní násobení

Čínské početní násobení využívalo k násobení tabulku o třech řádcích a několika sloupcích – jejich počet byl závislí na velikosti násobeného čísla. Do těchto sloupců byly původně vkládány dřevěné, či kostěné tyčinky, které znázorňovaly čísla. My si princip násobení ukážeme na arabských číslicích, na která jsme zvyklí. Algoritmus násobení probíhal od násobení nejvyšších cifer k nejnižším. Celý princip násobení si ukážeme na příkladu 362 · 35 zapsaným v *tabulce 6*. Pořadová čísla nad tabulkou označují jednotlivé kroky algoritmu, které jsou níže popsány (Aritmetika včera a dnes, 2004).

1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*
362	362	62	62	2	2	
	105	105	1260	1068	12670	12670
35	35	35	35	35	35	

Tabulka 6: Násobení čísel 362·35 čínským početním způsobem

1. Do prvního políčka tabulky se na první řádek vpravo zapíše aktivní činitel (362) a na třetí řádek vpravo pasivní činitel (35).
2. S násobením se začíná zleva a první cifra aktivního činitele násobí pasivní činitel:

$$3 \cdot 3 = 9$$

$$5 \cdot 3 = 15$$

1 přičteme k 9

   Výsledkem prvního násobení je číslo 105, které se zapíše do druhého řádku vlevo. Činitel 362 zůstává na stejné pozici, jako v prvním políčku tabulky, ale činitel 35 se posouvá pod násobek 105.
3. V kroku 3. se upraví čísla pro další výpočet: U činitele 362 se umaže číslice 3, neboť již byla využita, a číslo 35 se posune o jednu pozici doprava tak, že 3 je pod 5.
4. Druhá cifra aktivního činitele – 6 násobí činitel 35:

$$3 \cdot 6 = 18$$

$$5 \cdot 6 = 30$$

$$18 + 3 = 21$$

   Výsledek 210 přičteme k předchozímu výpočtu. Nesmíme zapomenout na to, že číslo 210 je o jednu pozici posunuté vpravo (poslední cifra čísla 105 je na pozici stovek výsledného násobku, poslední cifra čísla 210 je na pozici desítek).

$$\begin{array}{r} 105 \\ \underline{+\,210} \\ 1\,260 \end{array}$$

5. Upravíme činitele pro další násobení, stejně jako v kroku 4.
6. Poslední cifra čísla 362 násobí činitel 35:

$$35 \cdot 2 = 70$$

$$\begin{array}{r} 1\,260 \\ \underline{+\,70} \\ 12\,670 \end{array}$$

7. Výsledek 12 670 zapíšeme do posledního políčka tabulky samostatně.

Jako je tomu u všech způsobů násobení, které začínají zleva, i tento způsob vede počtáře k přepisování mezivýsledků. Při práci s manipulativním modelem, kdy byly do tabulky kladeny kůstky, nebo dřevěné tyčinky, nebylo těžké se ve výpočtech orientovat, neboť počtář mohl tyto předměty přesouvat, jak potřeboval. Pokud u mezivýpočtu $6 \cdot 35$ prvně vynásobil $6 \cdot 3$, mohl pohodlně 18 přičíst k mezivýsledku z předchozí tabulky a upravit jej ještě jednou po vynásobení $6 \cdot 5$. S tužkou a papírem není toto počítání tak obratné a je nutné získat výsledek násobení $6 \cdot 35$ celý, než je připočten k předchozímu mezivýsledku, aby nedocházelo ke škrtání a přepisování. Avšak kdybychom při násobení pasivního činitele ciframi aktivního činitele využili násobení zprava, pak nám tento problém odpadá (Aritmetika včera a dnes, 2004).

2.3.6 Písemné násobení

Písemné násobení čili násobení tak, jak jej známe ze školy. Kolman (1969) uvádí, že náš způsob násobení velkých čísel od nižších řádů k vyšším jsme převzali od Indů prostřednictvím arabských vědců. Balada (1959) uvádí, že jeho podoba se k nám dostala od italských učenců. Násobení nejprve probíhalo odpředu (od nejvyšších řádů) a mezivýsledky se musely stále přepisovat. Tzv. *německý způsob* využíval násobení operátoru ciframi množství odzadu. Cifry množství byly vybírány odpředu i odzadu. První možnost je vyobrazena níže vlevo. Sčítání mezisoučtů je přehlednější v porovnání s druhou variantou (níže vpravo), neboť jsou příslušné řády psány pod sebe.

$319 \cdot 426$		$319 \cdot 426$
127 6		1914
6 38	x	638
1 914		1276
135 894		135 894

Německé násobení se na českých školách učilo až do poloviny 20. století. S rokem 1953 u nás byl zaveden způsob násobení, který byl tehdy používán ve Francii a Sovětském svazu – násobení pod sebou.

$$\begin{array}{r} 319 \\ \cdot\ 426 \\ \hline 1\,914 \\ 6\,38 \\ 127\,6 \\ \hline 135\,894 \end{array}$$

Násobení pod sebou násobí oba činitele od nejnižších řádů a postupuje k vyšším řádům. Výslední součin je součtem mezivýsledků se zachováním pozic v řádek (Divíšková et al., 2021, s. 56-57).

2.4 Rámcové vzdělávací programy

„*Rámcové vzdělávací programy (dále jen RVP) vymezují závazné rámce vzdělání pro předškolní, základní a střední vzdělávání. Tyto rámce jsou dále zpracovány jednotlivými školami do školních vzdělávacích programů (ŠVP), které si každá škola zpracovává dle vlastní školní politiky a přístupu ke vzdělání. Umožňují školám pedagogickou autonomii a profesní odpovědnost učitelů za výsledky vzdělávání. RVP definují očekávanou úroveň vzdělání pro všechny absolventy, zdůrazňují klíčové kompetence, které mají být rozvíjeny společně se vzdělávacím obsahem a uplatněním vědomostí a dovedností v praktickém životě. Celá koncepce vychází z celoživotního učení.*

RVP stanoví zejména:

- *konkrétní cíle a formy vzdělávání*
- *délku a povinný obsah vzdělávání (všeobecného i odborného)*
- *organizační uspořádání*
- *profesní profil*
- *podmínky průběhu a ukončování vzdělávání*
- *zásady pro tvorbu ŠVP*
- *podmínky pro žáky se speciálními vzdělávacími potřebami*
- *materiální, personální a organizační podmínky*
- *podmínky bezpečnosti a ochrany zdraví*

RVP musí reflektovat nejnovější poznatky:

- *vědních disciplín (základy a praktické využití)*
- *pedagogiky a psychologie o účinných metodách a organizačním uspořádání vzdělávání úměrně věku a vývoji vzdělávaného (Boudová, 2021, s. 20-21).“*

Jelikož se tato práce zabývá metodami násobení, bude nás zajímat pouze RVP pro základní vzdělávání, ve kterém se výuka násobení realizuje.

2.4.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Základní škola by měla mladé lidi vybavit do života znalostmi a dovednostmi, které jsou společností považovány za základní. Žáci by tedy měli získat všeobecný přehled ve všech oblastech lidského bytí. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV) vymezuje očekávané výstupy a učivo. Zároveň se zabývá také klíčovými kompetencemi, kterými by měli být žáci vybaveni. RVP ZV navazuje na předškolní vzdělávání a předpokládá se pokračování v sekundárním typu studia. Základní vzdělávání se netýká pouze základních škol, ale i odpovídajících ročníků víceletých středních škol. Toto vzdělávání se realizuje ve dvou obsahově, organizačně a didakticky navazujících stupních – 1. a 2. stupeň. Očekávané výstupy jsou pro 1. stupeň navíc specifikovány ve dvou obdobích – 1. období určuje očekávané výstupy pro ukončený 3. ročník a 2. období je specifikuje pro celkové dokončení 1. stupně (Balada et al., 2021, s. 6-9).

Klíčovými kompetencemi v primárním typu studia jsou:

- Kompetence k učení
- Kompetence k řešení problémů
- Kompetence komunikativní
- Kompetence sociální a personální
- Kompetence občanské
- Kompetence pracovní
- Kompetence digitální (Balada et al., 2021, s. 10)

RVP ZV obsahuje celkem devět vzdělávacích oblastí, přičemž matematika tvoří jednu z nich „Matematika a její aplikace“. Tato vzdělávací oblast by měla žákům poskytovat především vědomosti a dovednosti, které uplatní v reálných situacích. Kromě toho že je zaměřena na praktický život, u žáků také rozvíjí matematickou gramotnost. Ve výuce matematiky nejde tedy jen o pochopení určitých principů, ale rozšiřuje se i repertoár myšlenkových postupů a kreativních řešení, dochází k osvojování terminologie a matematických pojmů, na kterých je možné dále stavět, zlepšuje se schopnost prostorové představivosti, aj. (Balada et al., 2021, s. 30).

Vzdělávací obor „Matematika a její aplikace“ se dělí na čtyři tematické okruhy. Operace násobení, kterou se tato práce zabývá je zařazena na 1. stupeň do okruhu „Čísla a početní operace“. Učivo je prohlubováno na 2. stupni v navazujícím tematickém okruhu „Číslo a proměnná“. Na níže uvedených screenshotech jsou uvedeny požadavky na učivo těchto dvou okruhů (Balada et al., 2021, s. 30).

1. stupeň

ČÍSLO A POČETNÍ OPERACE

Očekávané výstupy – 1. období

žák

M-3-1-01 ***používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků***

M-3-1-02 ***čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti***

M-3-1-03 ***užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose***

M-3-1-04 ***provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly***

M-3-1-05 ***řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace***

Minimální doporučená úroveň pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření:

žák

M-3-1-01p *porovnává množství a vytváří soubory prvků podle daných kritérií v oboru do 20*

M-3-1-02p *čte, píše a používá číslice v oboru do 20, numerace do 100*

M-3-1-02p *zná matematické operátory + , − , = , < , > a umí je zapsat*

M-3-1-04p *sčítá a odčítá s užitím názoru v oboru do 20*

M-3-1-05p *řeší jednoduché slovní úlohy na sčítání a odčítání v oboru do 20*
umí rozklad čísel v oboru do 20

Obrázek 29: Očekávané žákovské výstupy tematického okruhu „Číslo a početní operace“ pro 1. období podle RVP ZV (zdroj: http://www.nuv.cz/file/4982/, screenshot RVP ZV (Balada et al., 2021, s. 31))

Očekávané výstupy – 2. období

žák

M-5-1-01	***využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení***
M-5-1-02	***provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel***
M-5-1-03	***zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel***
M-5-1-04	***řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel***
M-5-1-05	***modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku***
M-5-1-06	***porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel***
M-5-1-07	***přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty***
M-5-1-08	***porozumí významu znaku „–" pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose***

Minimální doporučená úroveň pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření:

žák

M-5-1-02p	*čte, píše a porovnává čísla v oboru do 100 i na číselné ose, numerace do 1000*
M-5-1-02p	*sčítá a odčítá zpaměti i písemně dvouciferná čísla*
M-5-1-02p	*zvládne s názorem řady násobků čísel 2 až 10 do 100*
M-5-1-03p	*zaokrouhluje čísla na desítky i na stovky s využitím ve slovních úlohách*
M-5-1-03p	*tvoří a zapisuje příklady na násobení a dělení v oboru do 100*
M-5-1-04p	*zapíše a řeší jednoduché slovní úlohy*
M-5-1-04p	*rozeznává sudá a lichá čísla*
-	*používá kalkulátor*

Obrázek 30: Očekávané žákovské výstupy tematického okruhu „Číslo a početní operace" pro 2. období podle RVP ZV (zdroj: http://www.nuv.cz/file/4982/, screenshot RVP ZV (Balada et al., 2021, s. 32))

Učivo

- přirozená čísla, celá čísla, desetinná čísla, zlomky
- zápis čísla v desítkové soustavě a jeho znázornění (číselná osa, teploměr, model)
- násobilka
- vlastnosti početních operací s čísly
- písemné algoritmy početních operací

Obrázek 31: Učivo tematického okruhu „Číslo a početní operace" podle RVP ZV (zdroj: http://www.nuv.cz/file/4982/, screenshot RVP ZV (Balada et al., 2021, s. 32))

2. stupeň

ČÍSLO A PROMĚNNÁ

Očekávané výstupy

žák

M-9-1-01	***provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu***
M-9-1-02	***zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor***
M-9-1-03	***modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel***
M-9-1-04	***užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)***
M-9-1-05	***řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů***
M-9-1-06	***řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)***
M-9-1-07	***matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním***

Obrázek 32: 1. část očekávaných žákovský výstupů tematického okruhu „Číslo a proměnná“ podle RVP ZV (zdroj: http://www.nuv.cz/file/4982/, screenshot RVP ZV (Balada et al., 2021, s. 34))

M-9-1-08 ***formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav***

M-9-1-09 ***analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel***

Minimální doporučená úroveň pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření:

žák

M-9-1-01p *písemně sčítá, odčítá, násobí a dělí víceciferná čísla, dělí se zbytkem*

M-9-1-01p *pracuje se zlomky a smíšenými čísly, používá vyjádření vztahu celek–část (zlomek, desetinné číslo, procento)*

M-9-1-01p *čte desetinná čísla, zná jejich zápis a provádí s nimi základní početní operace*

M-9-1-02p *provádí odhad výsledku, zaokrouhluje čísla*

M-9-1-02p *píše, čte, porovnává a zaokrouhluje čísla v oboru do 1 000 000*

M-9-1-05p *používá měřítko mapy a plánu*

M-9-1-06p *řeší jednoduché úlohy na procenta*

\- *zvládá orientaci na číselné ose*

Učivo

- **dělitelnost přirozených čísel** – prvočíslo, číslo složené, násobek, dělitel, nejmenší společný násobek, největší společný dělitel, kritéria dělitelnosti
- **celá čísla** – čísla navzájem opačná, číselná osa
- **desetinná čísla, zlomky** – rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě; převrácené číslo, smíšené číslo, složený zlomek
- **poměr** – měřítko, úměra, trojčlenka
- **procenta** – procento, promile; základ, procentová část, počet procent; jednoduché úrokování
- **mocniny a odmocniny** – druhá mocnina a odmocnina
- **výrazy** – číselný výraz a jeho hodnota; proměnná, výrazy s proměnnými, mnohočleny
- **rovnice** – lineární rovnice, soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Obrázek 33: 2. část očekávaných žákovský výstupů a učivo tematického okruhu „Číslo a proměnná“ podle RVP ZV (zdroj: http://www.nuv.cz/file/4982/, screenshot RVP ZV (Balada et al., 2021, s. 35))

3 ANALÝZA ROZVOJE OPERACE NÁSOBENÍ VE VYBRANÝCH UČEBNICÍCH

Stejně jako škola zpracovává kurikulum do školního vzdělávacího programu, tak si také autoři učebnic musejí zvolit vhodné rozložení učiva s logickou návazností a jeho prezentací a vybrat příklady, které budou žákům nápomocné při pochopení daného učiva. Úkolem analýzy vybraných učebnic je zjistit, jak se autoři rozhodli učivo násobení pojmout a jakou výstavbu této operace zvolili.

Každá sada učebnic pojímá učivo svým způsobem. Některé sady mají samostatné učebnice pro aritmetiku a geometrii, jiné kombinuji v jedné učebnici kapitoly z obou oborů. Do našeho zkoumaní budou zahrnuty pouze učebnice a kapitoly v učebnicích, které primárně rozvíjejí znalosti a dovednosti v oblasti násobení. I geometrie samozřejmě využívá operace násobení a rozvíjí ji (při výpočtu obsahů a objemů, při určování vzájemných vlastností mezi částmi geometrických útvarů, či objektů). Násobení však není v tomto vztahu předmětem učiva, ale nástrojem k dosažení požadovaných výsledků, a proto nejsou tyto učebnice/ kapitoly zahrnuty do našeho zkoumání[1,2].

3.1 Učebnice Alter

Nakladatelství Alter se zaměřuje pouze na učebnice matematiky pro 1. stupeň ZŠ. Učebnice pro 1. a 2. ročník jsou velkoformátové (A4). Celkem je tvoří 7 dílů a poslední z nich může být použit i ve 3. ročníku. Učebnice pro 3. – 5. ročník mají menší formát (165 x 230 mm) a jsou ve dvou verzích: První verze pracuje s učebnicemi rozdělenými do třech dílů pro každý ročník, druhá verze shrnuje všechny tyto díly do jedné učebnice. Pro tyto učebnice je typické, že probíraná témata berou po částech a vícekrát se k nim vracejí. Stejná témata tak můžeme nalézt v několika učebnicích. Ve všech učebnicích se střídají kapitoly aritmetiky a geometrie. Pro analýzu učebnic v této práci byly vybrány učebnice rozdělené do 3 dílů (Nakladatelství Alter, 2020).

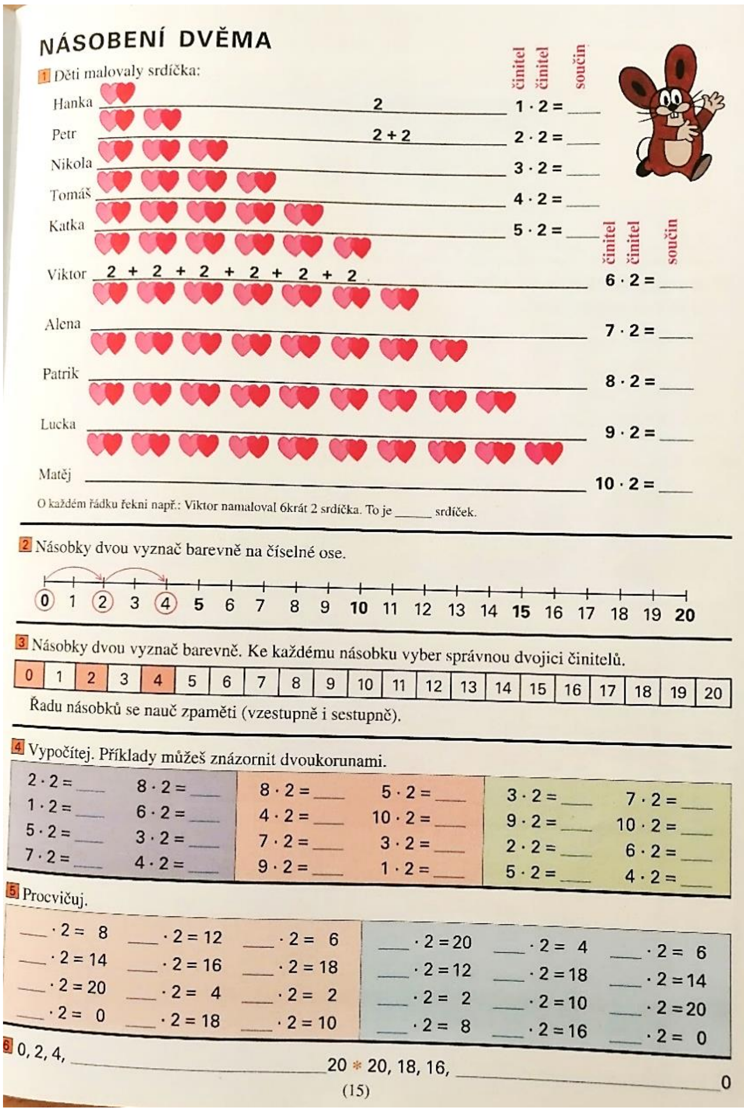
Rozvoj operace násobení nalezneme v těchto učebnicích:

---

[1] Učebnice jsou zkoumány jako celek – od začátku do konce, v odkazech na bibliografické citace proto není uveden rozsah stran.

[2] Všechny fotografie a skeny učebnic uvedené v následujících kapitolách byly použity s výhradním svolením jednotlivých nakladatelství.

- Matematika, pro 2. ročník ZŠ, sešit č. 6
- Matematika, pro 2. (3.) ročník ZŠ, sešit č. 7
- Matematika, pro 3. ročník, 1. díl
- Matematika, pro 3. ročník, 3. díl
- Matematika, pro 4. ročník, 1. díl
- Matematika, pro 4. ročník, 2. díl
- Matematika, pro 4. ročník, 3. díl
- Matematika, pro 5. ročník, 1. díl
- Matematika, pro 5. ročník, 3. díl


NÁSOBENÍ DVĚMA

1 Děti malovaly srdíčka:

Hanka 2 1 · 2 = ___
Petr 2 + 2 2 · 2 = ___
Nikola 3 · 2 = ___
Tomáš 4 · 2 = ___
Katka 5 · 2 = ___
Viktor 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 6 · 2 = ___
Alena 7 · 2 = ___
Patrik 8 · 2 = ___
Lucka 9 · 2 = ___
Matěj 10 · 2 = ___

činitel činitel součin

O každém řádku řekni např.: Viktor namaloval 6krát 2 srdíčka. To je ___ srdíček.

2 Násobky dvou vyznač barevně na číselné ose.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

3 Násobky dvou vyznač barevně. Ke každému násobku vyber správnou dvojici činitelů.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Řadu násobků se nauč zpaměti (vzestupně i sestupně).

4 Vypočítej. Příklady můžeš znázornit dvoukorunami.

2 · 2 = ___	8 · 2 = ___	8 · 2 = ___	5 · 2 = ___	3 · 2 = ___	7 · 2 = ___
1 · 2 = ___	6 · 2 = ___	4 · 2 = ___	10 · 2 = ___	9 · 2 = ___	10 · 2 = ___
5 · 2 = ___	3 · 2 = ___	7 · 2 = ___	3 · 2 = ___	2 · 2 = ___	6 · 2 = ___
7 · 2 = ___	4 · 2 = ___	9 · 2 = ___	1 · 2 = ___	5 · 2 = ___	4 · 2 = ___

5 Procvičuj.

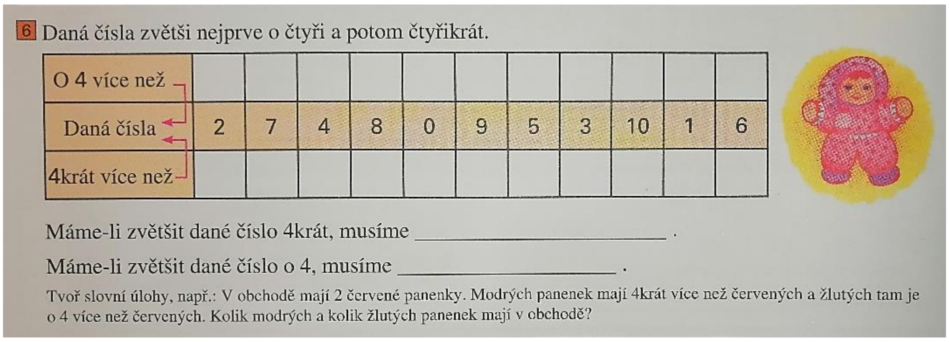
___ · 2 = 8	___ · 2 = 12	___ · 2 = 6	___ · 2 = 20	___ · 2 = 4	___ · 2 = 6
___ · 2 = 14	___ · 2 = 16	___ · 2 = 18	___ · 2 = 12	___ · 2 = 18	___ · 2 = 14
___ · 2 = 20	___ · 2 = 4	___ · 2 = 2	___ · 2 = 2	___ · 2 = 10	___ · 2 = 20
___ · 2 = 0	___ · 2 = 18	___ · 2 = 10	___ · 2 = 8	___ · 2 = 16	___ · 2 = 0

6 0, 2, 4, ___ 20 * 20, 18, 16, ___ 0

(15)

Obrázek 34: Ukázka z učebnice Matematika pro 2. ročník ZŠ, 6. díl, nakladatelství Alter (Eichlerová, Staudková a Vlček, 2021, s. 15)

V sadě učebnic nakladatelství Alter se žáci poprvé seznamují s násobením v učebnici *Matematiky* pro 2. ročník, v sešitě č. 6. Samotnému násobení předchází kapitola *Příprava na násobení* s grafickým znázorněním opakujících se skupin stejných objektů. Tato učebnice seznamuje s násobením čísly 2, 3 a 4. Jak jsou tyto kapitoly vystavěny můžeme vidět na ukázce *Násobení dvěma* na *obrázku 38*. V každé kapitole jsou příslušné násobky nejprve představeny pomocí dvojic/ trojic/ čtveřic objektů, které se několikrát opakují. Základní násobky daného čísla od 0 do 10 si žáci zanesou na osu a vyznačí si je v řadě čísel. Další cvičení v této kapitole pracují s procvičováním na početních příkladech a jednoduchých slovních úlohách. Jedním z typických cvičení je práce s tabulkou *(obr. 39)*. Na kapitoly násobení bezprostředně navazují kapitoly dělení příslušným číslem. Učebnice obsahuje i vloženou přílohu „vylamovacích kartiček" pro procvičování násobků čísel 2, 3, 4, 5 a 6 (Eichlerová, Staudková a Vlček, 2021).


6 Daná čísla zvětši nejprve o čtyři a potom čtyřikrát.

O 4 více než											
Daná čísla	2	7	4	8	0	9	5	3	10	1	6
4krát více než											

Máme-li zvětšit dané číslo 4krát, musíme ______________________ .

Máme-li zvětšit dané číslo o 4, musíme ____________________ .

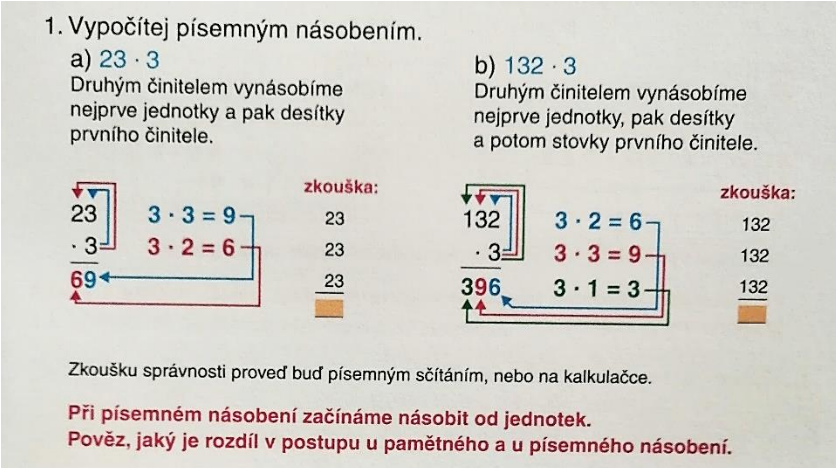
Tvoř slovní úlohy, např.: V obchodě mají 2 červené panenky. Modrých panenek mají 4krát více než červených a žlutých tam je o 4 více než červených. Kolik modrých a kolik žlutých panenek mají v obchodě?

Obrázek 35: Práce s tabulkou (Eichlerová, Staudková a Vlček, 2021, s. 28)

Následující učebnice, sešit č. 7, obsahuje zbylé „vylamovací kartičky" násobků čísel 7, 8, 9, a 10. Začíná opakováním násobení a dělení 2, 3, a 4 a zavádí násobení čísly 5, 6, 7, 8, 9 ve stejném duchu, jako tomu bylo v předchozí učebnici. Reprezentace pomocí několika skupin stejných objektů o stejném počtu je v některých případech nahrazena vyznačováním násobků ve čtvercové síti a jinde zcela chybí. Stejně tak chybí nanášení násobků čísel na osu. V závěrečné kapitole je uvedeno *Násobení a dělení jednou a deseti* (Eichlerová, Staudková a Vlček, 2022).

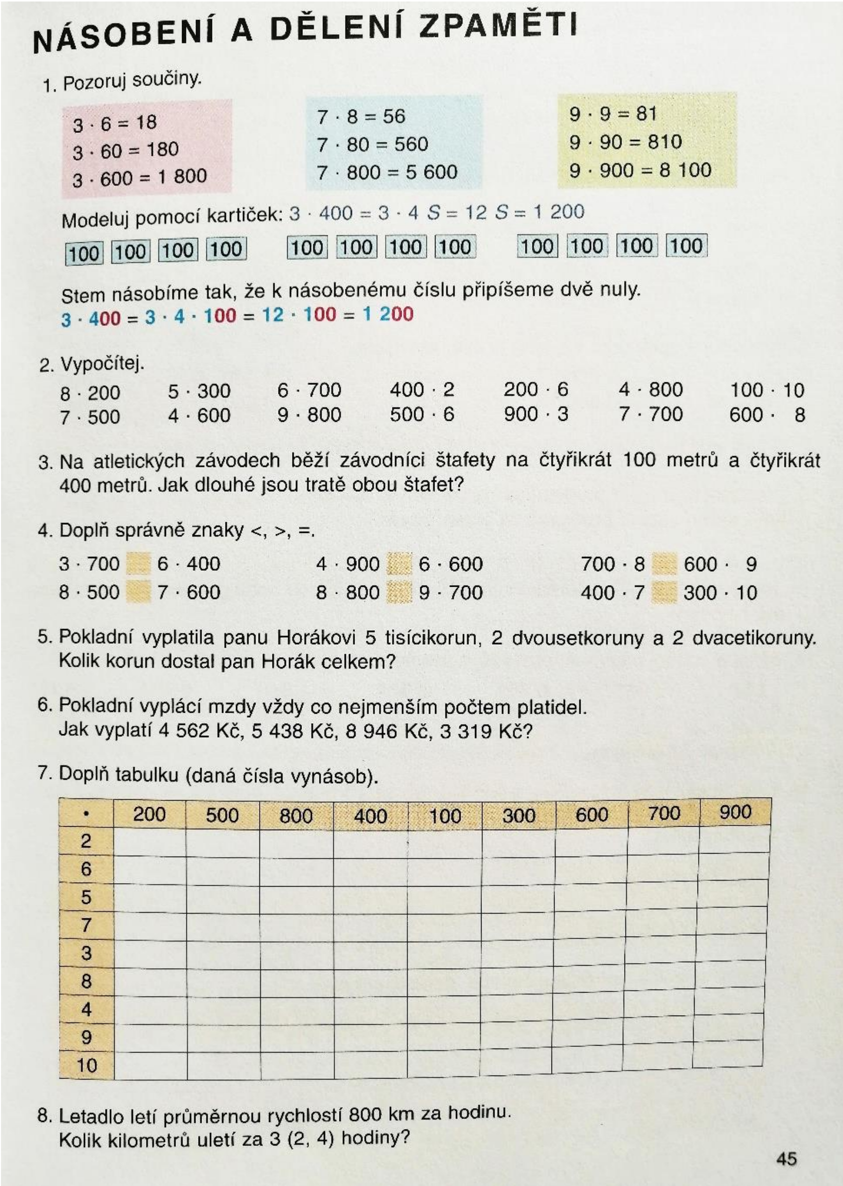
1. díl učebnice pro 3. ročník opakuje násobení a dělení malé násobilky na již známých typech příkladů. Začíná opakováním násobení čísel od 1 do 5 a následující násobky 6, 7, 8 a 9 probírá podrobněji. Tento díl učebnice klade důraz na správný zápis slovních úloh (zápis, výpočet, dopověď). Pro procvičování násobení a dělení 10 jsou zařazeny i příklady na převody jednotek délky. 2. díl učebnice pro 3. ročník rozšiřuje znalosti počítání o

zaokrouhlování, pamětném i písemném sčítáním a odčítáním. Násobení a dělení je zařazeno pouze jako opakování. Na ně se naopak soustředí 3. díl. První kapitola, která se zabývá násobením, rozšiřuje znalosti o násobení násobků deseti. Na to je navázáno násobením dvojciferných čísel jednociferným činitelem a násobením trojciferných čísel jednociferným činitelem, která využívají distributivního zákonu. Žáci se také seznámí s písemným násobením jednociferným činitelem (Blažková et al., 2018a; Blažková et al., 2018b; Blažková et al., 2018c).



Obrázek 36: Písemné násobení jednociferným činitelem (Blažková et al., 2018b, s. 45)

První učebnice pro 4. ročník začíná opakováním písemného násobení, na které navazuje také písemné dělení. Na konci tohoto dílu jsou dvě kapitoly pro připomenutí pamětného i písemného násobení a dělení. Druhý díl se zabývá čísly většími než 10 000. Na to navazuje také pamětné násobení čísel, která jsou zakončena na jednu a více nul (až do statisíců). Písemné násobení se posouvá na další úroveň a žáci se seznámí s písemným násobením dvojciferným činitelem. K procvičování násobení dochází i v kapitolách, které se zaměřují na převody jednotek délky, hmotnosti, objemu a času. 3. díl učebnice pro 4. ročník shrnuje početní úkony s přirozenými čísly. V rámci tohoto souhrnu jsou uvedena i pravidla pro násobení: komutativnost, asociativnost a distributivita s operací sčítání a odčítání. Násobení je procvičováno v rámci témat: přímá úměrnost, zlomky, aritmetický průměr, obsah čtverce a obdélníku, povrch krychle a kvádru (Blažková, Matoušková a Vaňourová, 2018a; Blažková, Matoušková a Vaňourová, 2018b; Blažková, Matoušková a Vaňourová, 2018c).



NÁSOBENÍ A DĚLENÍ ZPAMĚTI

1. Pozoruj součiny.

3 · 6 = 18
3 · 60 = 180
3 · 600 = 1 800

7 · 8 = 56
7 · 80 = 560
7 · 800 = 5 600

9 · 9 = 81
9 · 90 = 810
9 · 900 = 8 100

Modeluj pomocí kartiček: 3 · 400 = 3 · 4 S = 12 S = 1 200

100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100

Stem násobíme tak, že k násobenému číslu připíšeme dvě nuly.
3 · 400 = 3 · 4 · 100 = 12 · 100 = 1 200

2. Vypočítej.

8 · 200	5 · 300	6 · 700	400 · 2	200 · 6	4 · 800	100 · 10
7 · 500	4 · 600	9 · 800	500 · 6	900 · 3	7 · 700	600 · 8

3. Na atletických závodech běží závodníci štafety na čtyřikrát 100 metrů a čtyřikrát 400 metrů. Jak dlouhé jsou tratě obou štafet?

4. Doplň správně znaky <, >, =.

3 · 700 ☐ 6 · 400	4 · 900 ☐ 6 · 600	700 · 8 ☐ 600 · 9
8 · 500 ☐ 7 · 600	8 · 800 ☐ 9 · 700	400 · 7 ☐ 300 · 10

5. Pokladní vyplatila panu Horákovi 5 tisícikorun, 2 dvousetkoruny a 2 dvacetikoruny. Kolik korun dostal pan Horák celkem?

6. Pokladní vyplácí mzdy vždy co nejmenším počtem platidel. Jak vyplatí 4 562 Kč, 5 438 Kč, 8 946 Kč, 3 319 Kč?

7. Doplň tabulku (daná čísla vynásob).

·	200	500	800	400	100	300	600	700	900
2									
6									
5									
7									
3									
8									
4									
9									
10									

8. Letadlo letí průměrnou rychlostí 800 km za hodinu. Kolik kilometrů uletí za 3 (2, 4) hodiny?

45

Obrázek 37: Ukázka z učebnice Matematiky pro 4. ročník, 1. díl, nakladatelství Alter (Blažková, Matoušková a Vaňourová, 2018a, s. 45)

1. díl učebnice pro 5. ročník znovu připomíná vlastnosti násobení a dokončuje písemné násobení – násobit můžeme kterákoliv dvě čísla. Jednoduché násobení je opět trénované na převodech jednotek délky, hmotnosti a času. V kapitole, která se zabývá zlomky, se žáci učí základům pro násobení zlomků. 2. díl se násobením jako takovým nezabývá. Zaměřuje se na operaci dělení a práci s desetinnými čísly: seznámení s desetinnými čísly, jejich porovnávání, zaokrouhlování, sčítání a odčítání. Na to navazuje 3. díl, který se zabývá násobením desetinných čísel. Začíná s násobením desetinných čísel deseti a stem a pokračuje násobením desetinných čísel přirozeným číslem (Justová, 2016; Justová 2018; Justová 2019).

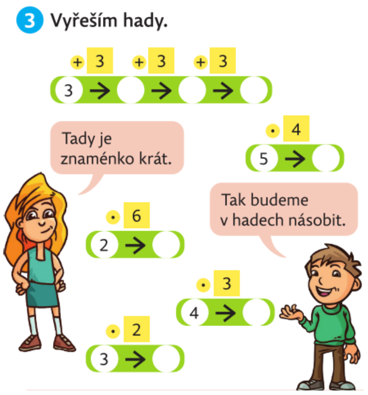
3.2 Učebnice Fraus

Nakladatelství Fraus nabízí 2 sady učebnic pro 1. stupeň ZŠ: Matematika se čtyřlístkem a Matematika podle prof. Hejného. Vybrány byly učebnice Matematiky podle prof. Hejného. Ty byly v letech 2019–2022 nově přepracovány do tzv. hybridních pracovních učebnic, které jsou také v elektronické verzi. Na 2. stupni ZŠ jsou učebnice matematiky pro jednotlivé ročníky rozděleny do dvou dílů na Aritmetiku a Geometrii (Fraus, 2023).

Tématika násobení se probírá v těchto učebnicích:

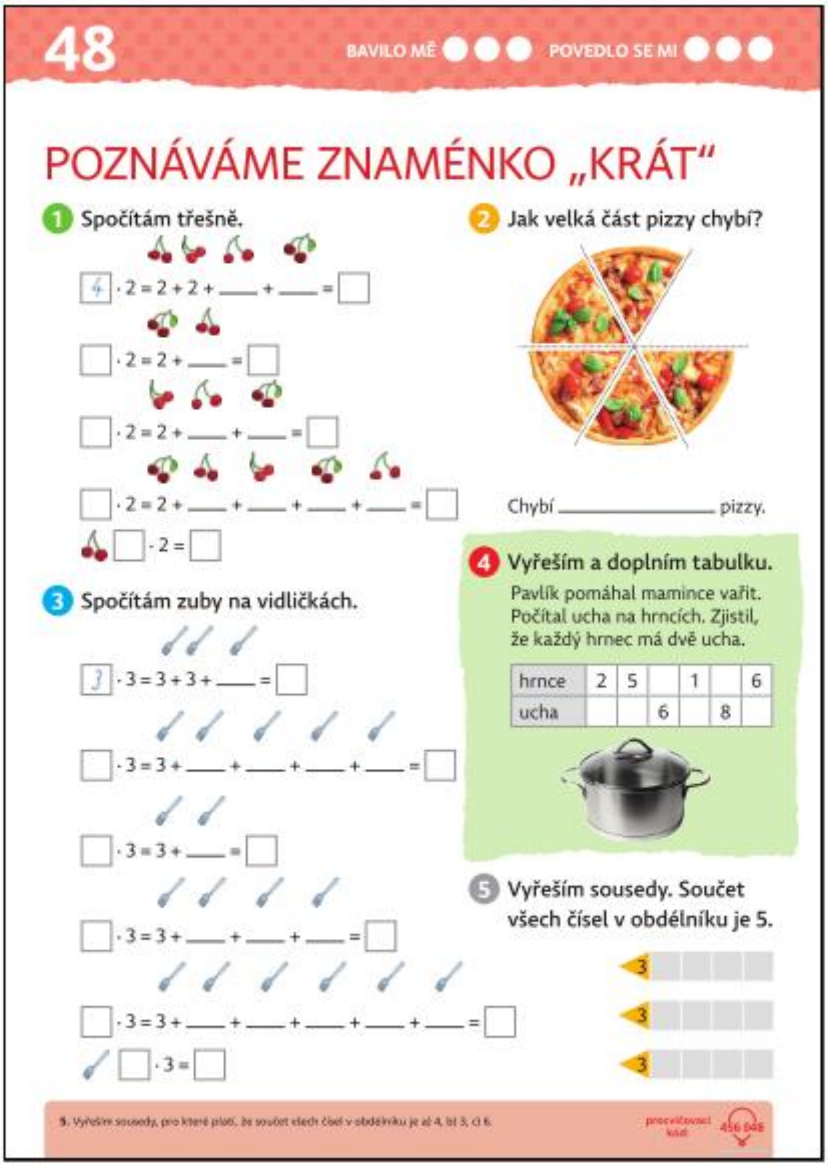
- Matematika 2, 1. díl
- Matematika 2, 2. díl
- Matematika 3
- Matematika 4
- Matematika 5
- Matematika 6, Aritmetika
- Matematika 7, Aritmetika

Ve Frausovských učebnicích se poprvé setkáváme s operací násobení v 1. díle *Matematiky 2* na s. 47 v kapitole s názvem *Poznáváme znaménko „krát“*. Tematika násobení je předestřena jako sčítání stejných celků, které se dají samostatně dělit na stejně velké díly. Příkladem jsou, jak je vidět na ukázce (*obr. 44*), dvojice spojených třešní nebo hroty vidliček. K této tématice se děti dostanou po probrání sčítání a odčítání do 40. Postupně děti probírají násobení číslem 2, 3, 4, 5, 6, procvičují je na příkladech a navazují na typy úkolů, které již znají s operací sčítání. Takovými úkoly jsou například tzv. hadi (*obr. 42*), autobus, čí třídění věcí. Objevují se i nové typy úloh, jako jsou násobilkové čtverce (*obr. 43*), (Hejný et al., 2019a).



Obrázek 39: Typ úlohy "hadi" (Hejný et al., 2019a, s. 60)

Obrázek 38*:* Násobilkové čtverce (Hejný et al., 2019a, s. 62)


48 BAVILO MĚ POVEDLO SE MI

POZNÁVÁME ZNAMÉNKO „KRÁT“

1 Spočítám třešně.

4 · 2 = 2 + 2 + ___ + ___ = □

□ · 2 = 2 + ___ = □

□ · 2 = 2 + ___ + ___ = □

□ · 2 = 2 + ___ + ___ + ___ + ___ = □

□ · 2 = □

2 Jak velká část pizzy chybí?

Chybí ___________ pizzy.

3 Spočítám zuby na vidličkách.

3 · 3 = 3 + 3 + ___ = □

□ · 3 = 3 + ___ + ___ + ___ + ___ = □

□ · 3 = 3 + ___ = □

□ · 3 = 3 + ___ + ___ + ___ = □

□ · 3 = 3 + ___ + ___ + ___ + ___ + ___ = □

□ · 3 = □

4 Vyřeším a doplním tabulku.

Pavlík pomáhal mamince vařit. Počítal ucha na hrncích. Zjistil, že každý hrnec má dvě ucha.

hrnce	2	5		1		6
ucha			6		8	

5 Vyřeším sousedy. Součet všech čísel v obdélníku je 5.

3

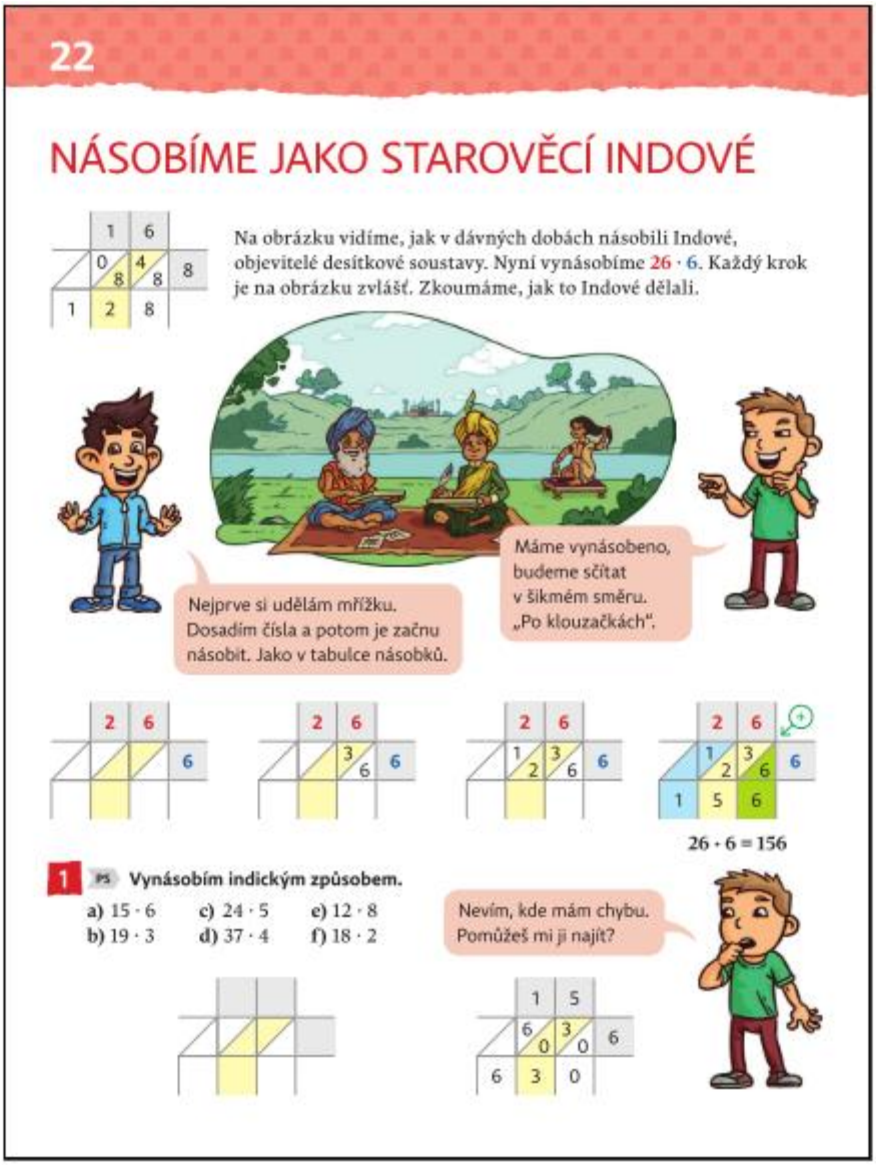
3

3

Obrázek 40: Ukázka z učebnice Matematika 2, nakladatelství Fraus (Hejný et al., 2019a, s. 48)

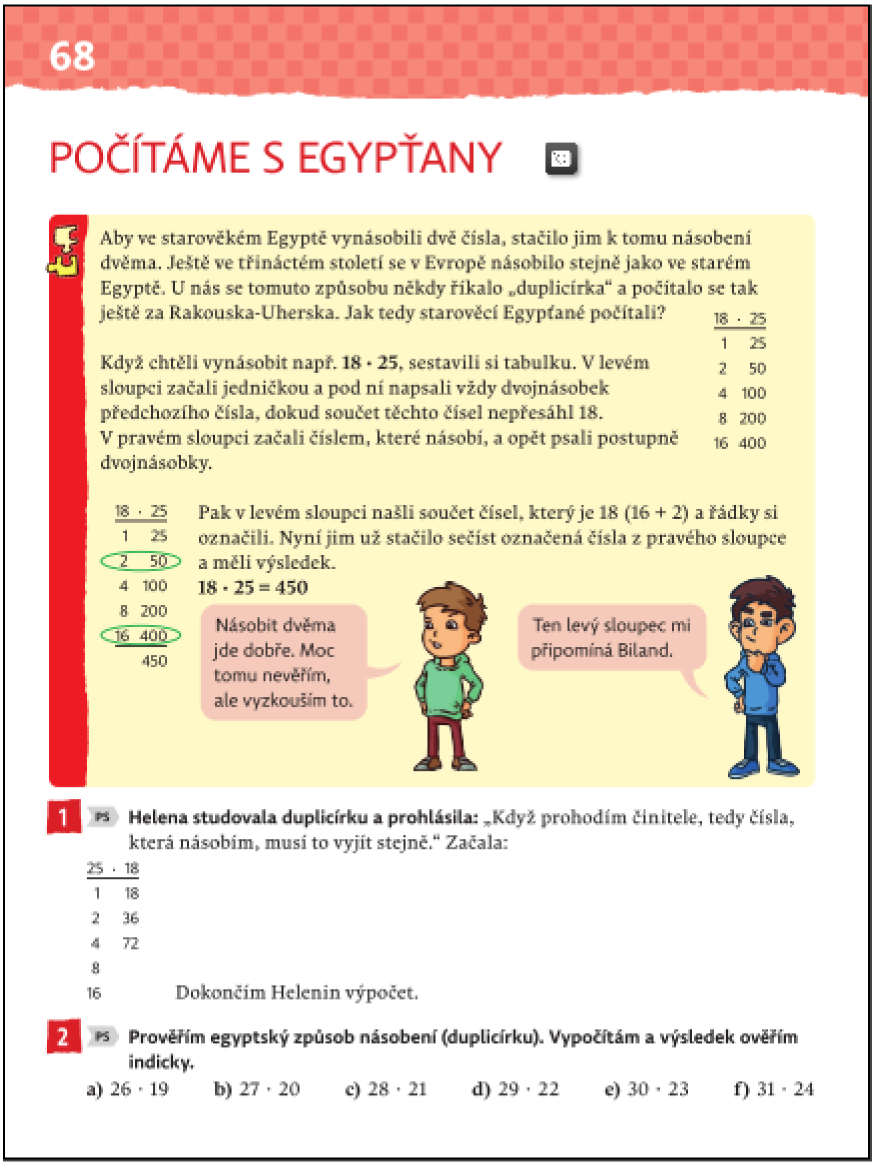
2. díl *Matematiky 2* navazuje tam, kde se skončilo v 1. díle. Pokračuje se v násobení číslem 7, 8, 9, 10 a rozšiřují se i variace příkladů s násobením o slovní úlohy, či hru „sova“. Po probrání násobku 10 se učebnice dostává k tématu dělení, jako opačné operaci k násobení (Hejný et al., 2019b).

Matematika 3 překračuje hranice malé násobilky a zabývá se násobením velkých čísel. Autoři se zde inspirovali historií a přinášejí žákům netradiční způsob násobení – indické násobení (*obr. 45*). Začíná se s násobením dvojciferných a trojciferných čísel číslem jednociferným a postupně se přechází i na násobení dvojciferných čísel čísly dvojcifernými. Zhruba v polovině učebnice se rozšiřují matematické obzory násobení o další přístup – písemné násobení. Postupně se žáci dostanou k příkladům, které obsahují násobení i sčítání a odčítání, a dozví se pravidlo, že násobení má před těmito dvěma operacemi přednost. V této učebnici je násobení realizováno již i v rámci geometrie. Pomocí čtvercové sítě žáci určují obsahy útvarů v této síti (Hejný et al., 2020).



Obrázek 41: Indické násobení (Hejný et al., 2020, s. 22)

V učebnici pro 4. ročník se objevuje čím dál tím více slovních úloh na násobení. Žáci pracují s typy úloh, které již znají a dále je rozšiřují. Z úlohy „hadi" je vytvořen stočený had = šipkový graf. V této učebnici se žáci seznámí s dalším metodou násobení – egyptským násobením (*obr. 46*). Jak je z obrázku patrné, děti mají díky tomuto typu násobení možnost propojit znalosti o násobení v desítkové soustavě se znalostmi o soustavě dvojkové, se kterou mají zkušenost z předchozí učebnice v rámci tzv. Bilandu (Hejný et al., 2021).


68

POČÍTÁME S EGYPŤANY

Aby ve starověkém Egyptě vynásobili dvě čísla, stačilo jim k tomu násobení dvěma. Ještě ve třináctém století se v Evropě násobilo stejně jako ve starém Egyptě. U nás se tomuto způsobu někdy říkalo „duplicírka“ a počítalo se tak ještě za Rakouska-Uherska. Jak tedy starověcí Egypťané počítali?

18 ·	25
1	25
2	50
4	100
8	200
16	400

Když chtěli vynásobit např. **18 · 25**, sestavili si tabulku. V levém sloupci začali jedničkou a pod ní napsali vždy dvojnásobek předchozího čísla, dokud součet těchto čísel nepřesáhl 18. V pravém sloupci začali číslem, které násobí, a opět psali postupně dvojnásobky.

18 ·	25
1	25
2	50
4	100
8	200
16	400
	450

Pak v levém sloupci našli součet čísel, který je 18 (16 + 2) a řádky si označili. Nyní jim už stačilo sečíst označená čísla z pravého sloupce a měli výsledek.

18 · 25 = 450

1 **Helena studovala duplicírku a prohlásila:** „Když prohodím činitele, tedy čísla, která násobím, musí to vyjít stejně.“ Začala:

25 ·	18
1	18
2	36
4	72
8	
16	

Dokončím Helenin výpočet.

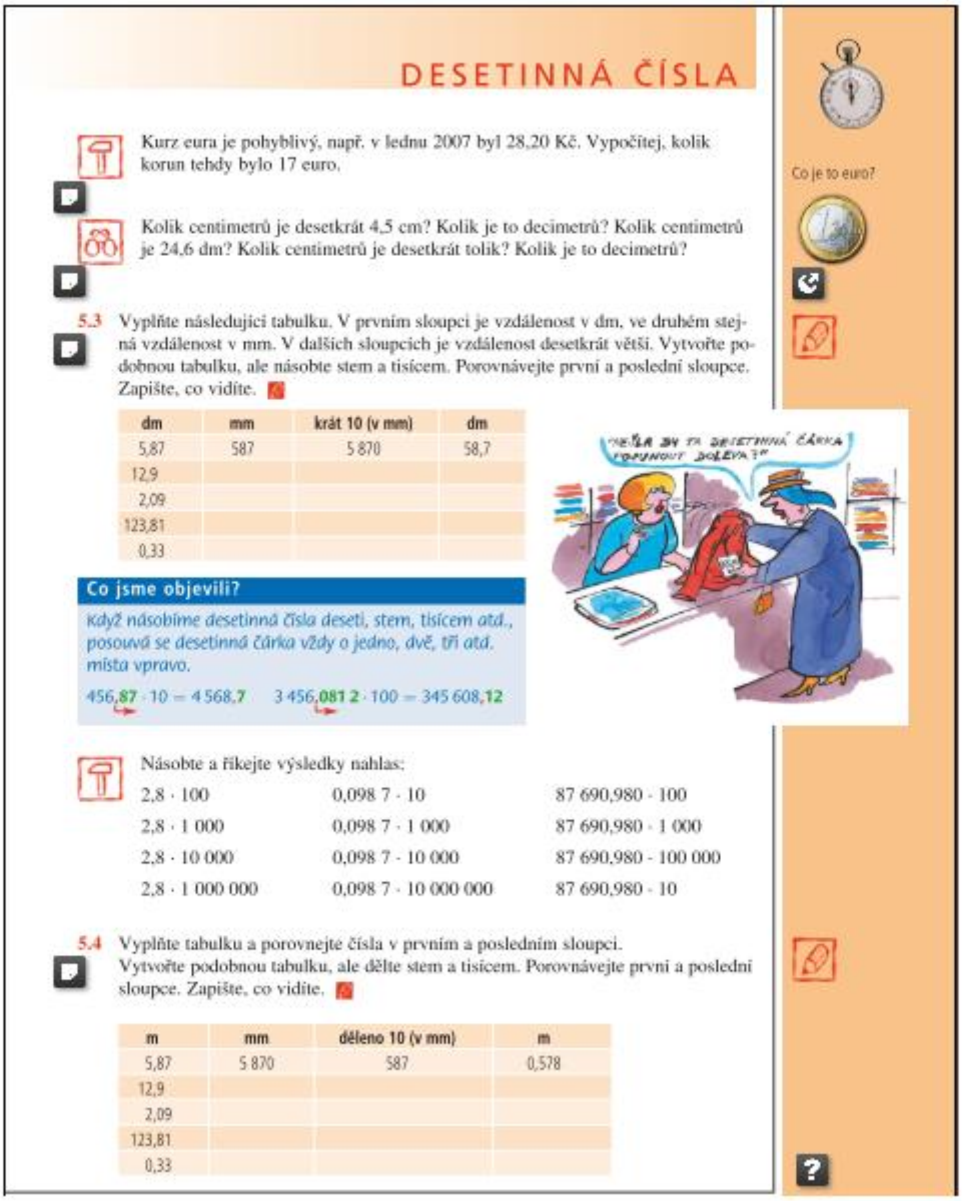
2 **Prověřím egyptský způsob násobení (duplicírku). Vypočítám a výsledek ověřím indicky.**

a) 26 · 19 b) 27 · 20 c) 28 · 21 d) 29 · 22 e) 30 · 23 f) 31 · 24

Obrázek 42: Egyptské násobení neboli duplicírka (Hejný et al., 2021, s. 68)

V jedné z kapitol Hejného *Matematiky 5* od nakladatelství Fraus jsou zkoumána velká čísla. V rámci tohoto tématu je s dětmi procvičováno násobení velkých čísel končících na jednu nebo více nul. Násobení takových čísel je možné zjednodušit tak, že mezi se sebou vynásobí čísla bez nul a do výsledku se tyto nuly připíší za násobek. Tyto učebnice také navádí žáky k odhadu. Některé příklady přímo vyžadují odhad výsledného násobku jako hlavní úkol a výpočet je ověřením správnosti odhadu. V geometrii již nestačí počítat obsahy pomocí čtverců. Jednotky míry jsou zavedeny dříve, ale nyní jsou zavedeny převody jednotek. Objevuje se také násobení desetinných čísel (Hejný et al., 2022).

Začátek 2. stupně ZŠ otevírá v *Matematice 6* téma desetinných čísel (*obr. 47*), a tedy i jejich násobení. Princip takového násobení je zaveden pomocí převodu jednotek. Navazující kapitola pracuje s tématy: dělitel, násobek, prvočísla, složená čísla, nejmenší společný násobek a nejmenší společný dělitel (Binterová, Fuchs a Tlustý, 2007).



DESETINNÁ ČÍSLA

Kurz eura je pohyblivý, např. v lednu 2007 byl 28,20 Kč. Vypočítej, kolik korun tehdy bylo 17 euro.

Kolik centimetrů je desetkrát 4,5 cm? Kolik je to decimetrů? Kolik centimetrů je 24,6 dm? Kolik centimetrů je desetkrát tolik? Kolik je to decimetrů?

5.3 Vyplňte následující tabulku. V prvním sloupci je vzdálenost v dm, ve druhém stejná vzdálenost v mm. V dalších sloupcích je vzdálenost desetkrát větší. Vytvořte podobnou tabulku, ale násobte stem a tisícem. Porovnávejte první a poslední sloupce. Zapište, co vidíte.

dm	mm	krát 10 (v mm)	dm
5,87	587	5 870	58,7
12,9			
2,09			
123,81			
0,33			

Co jsme objevili?

Když násobíme desetinná čísla deseti, stem, tisícem atd., posouvá se desetinná čárka vždy o jedno, dvě, tři atd. místa vpravo.

456,87 · 10 = 4 568,7 3 456,081 2 · 100 = 345 608,12

Násobte a říkejte výsledky nahlas:

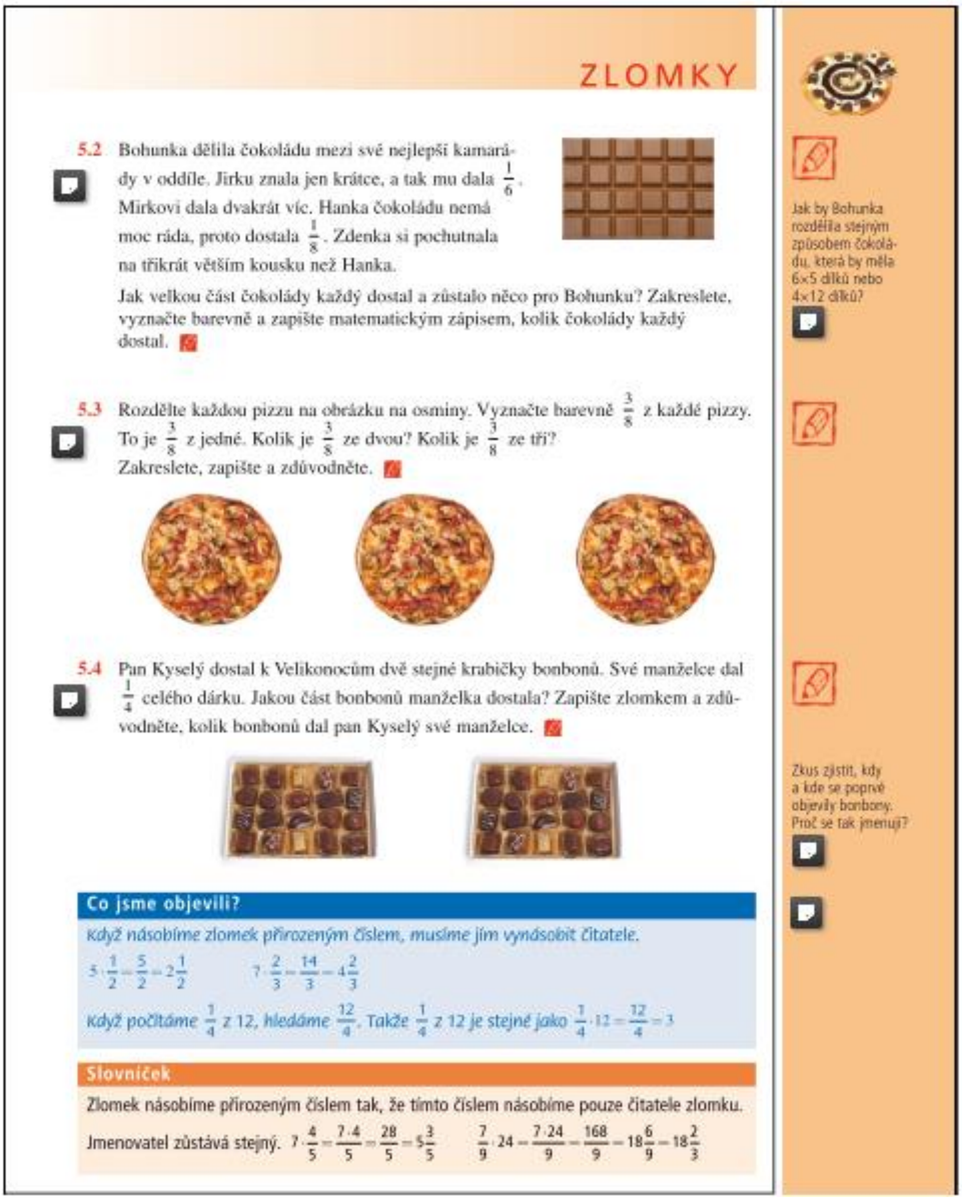
2,8 · 100	0,098 7 · 10	87 690,980 · 100
2,8 · 1 000	0,098 7 · 1 000	87 690,980 · 1 000
2,8 · 10 000	0,098 7 · 10 000	87 690,980 · 100 000
2,8 · 1 000 000	0,098 7 · 10 000 000	87 690,980 · 10

5.4 Vyplňte tabulku a porovnejte čísla v prvním a posledním sloupci. Vytvořte podobnou tabulku, ale dělte stem a tisícem. Porovnávejte první a poslední sloupce. Zapište, co vidíte.

m	mm	děleno 10 (v mm)	m
5,87	5 870	587	0,578
12,9			
2,09			
123,81			
0,33			

Obrázek 43: Ukázka z učebnice Matematika 6 Aritmetika, nakladatelství Fraus (Binterová, Fuchs a Tlustý, 2007, s. 25)

Učebnice *Matematika 7* přináší téma celých čísel. Násobení je realizováno jak v rámci kladných čísel, tak také na v rámci čísel záporných. Žáci si musejí osvojit pravidla násobení čísel kladných se zápornými (a opačně) a násobení dvou čísel záporných. Dále se učí počítat se zlomky. V tomto ročníku se naučí rozšiřování a krácení zlomků i jejich násobení. Na tato dvě témata navazuje celek s názvem „poměr“. Matematické dovednosti násobení, které za tuto dobu žáci nabyli, mají nyní možnost aplikovat v úlohách, které jsou zaměřeny prakticky. Většinou jsou úlohy zadány slovně, aby byly informace podány v kontextu, a s doplňujícími grafy, tabulkami, obrázky, či fotografiemi. Mezi takové úlohy patří také úlohy o úměrnostech (přímé a nepřímé) s využitím trojčlenky (Binterová, Fuchs a Tlustý, 2008).



ZLOMKY

5.2 Bohunka dělila čokoládu mezi své nejlepší kamarády v oddíle. Jirku znala jen krátce, a tak mu dala $\frac{1}{6}$. Mirkovi dala dvakrát víc. Hanka čokoládu nemá moc ráda, proto dostala $\frac{1}{8}$. Zdenka si pochutnala na třikrát větším kousku než Hanka.
Jak velkou část čokolády každý dostal a zůstalo něco pro Bohunku? Zakreslete, vyznačte barevně a zapište matematickým zápisem, kolik čokolády každý dostal.

Jak by Bohunka rozdělila stejným způsobem čokoládu, která by měla 6×5 dílků nebo 4×12 dílků?

5.3 Rozdělte každou pizzu na obrázku na osminy. Vyznačte barevně $\frac{3}{8}$ z každé pizzy. To je $\frac{3}{8}$ z jedné. Kolik je $\frac{3}{8}$ ze dvou? Kolik je $\frac{3}{8}$ ze tří?
Zakreslete, zapište a zdůvodněte.

5.4 Pan Kyselý dostal k Velikonocům dvě stejné krabičky bonbonů. Své manželce dal $\frac{1}{4}$ celého dárku. Jakou část bonbonů manželka dostala? Zapište zlomkem a zdůvodněte, kolik bonbonů dal pan Kyselý své manželce.

Zkus zjistit, kdy a kde se poprvé objevily bonbony. Proč se tak jmenují?

Co jsme objevili?

Když násobíme zlomek přirozeným číslem, musíme jím vynásobit čitatele.

$5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ $\quad 7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

Když počítáme $\frac{1}{4}$ z 12, hledáme $\frac{12}{4}$. Takže $\frac{1}{4}$ z 12 je stejné jako $\frac{1}{4} \cdot 12 = \frac{12}{4} = 3$

Slovníček

Zlomek násobíme přirozeným číslem tak, že tímto číslem násobíme pouze čitatele zlomku. Jmenovatel zůstává stejný. $7 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7 \cdot 4}{5} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$ $\quad \frac{7}{9} \cdot 24 = \frac{7 \cdot 24}{9} = \frac{168}{9} = 18\frac{6}{9} = 18\frac{2}{3}$

Obrázek 44: Ukázka z učebnice Matematika 7 Aritmetika, nakladatelství Fraus (Binterová, Fuchs a Tlustý, 2008, s. 55)

Sedmou třídou je téma násobení uzavřeno. V učebnicích pro 8. a 9. ročník je dál upevňováno a rozvíjeno navazujícím učivem, které tuto dovednost vyžadují ke složitějším operacím. Mezi taková témata z příslušných ročníků bychom mohli zařadit:

- Mocniny a odmocniny
- Mnohočleny, výrazy a lomené výrazy
- Rovnice a soustavy rovnic
- Finanční matematika (procenta, promile, úroky, statistika – aritmetický průměr), (Binterová, Fuchs a Tlustý, 2009; Binterová, Fuchs a Tlustý, 2010).

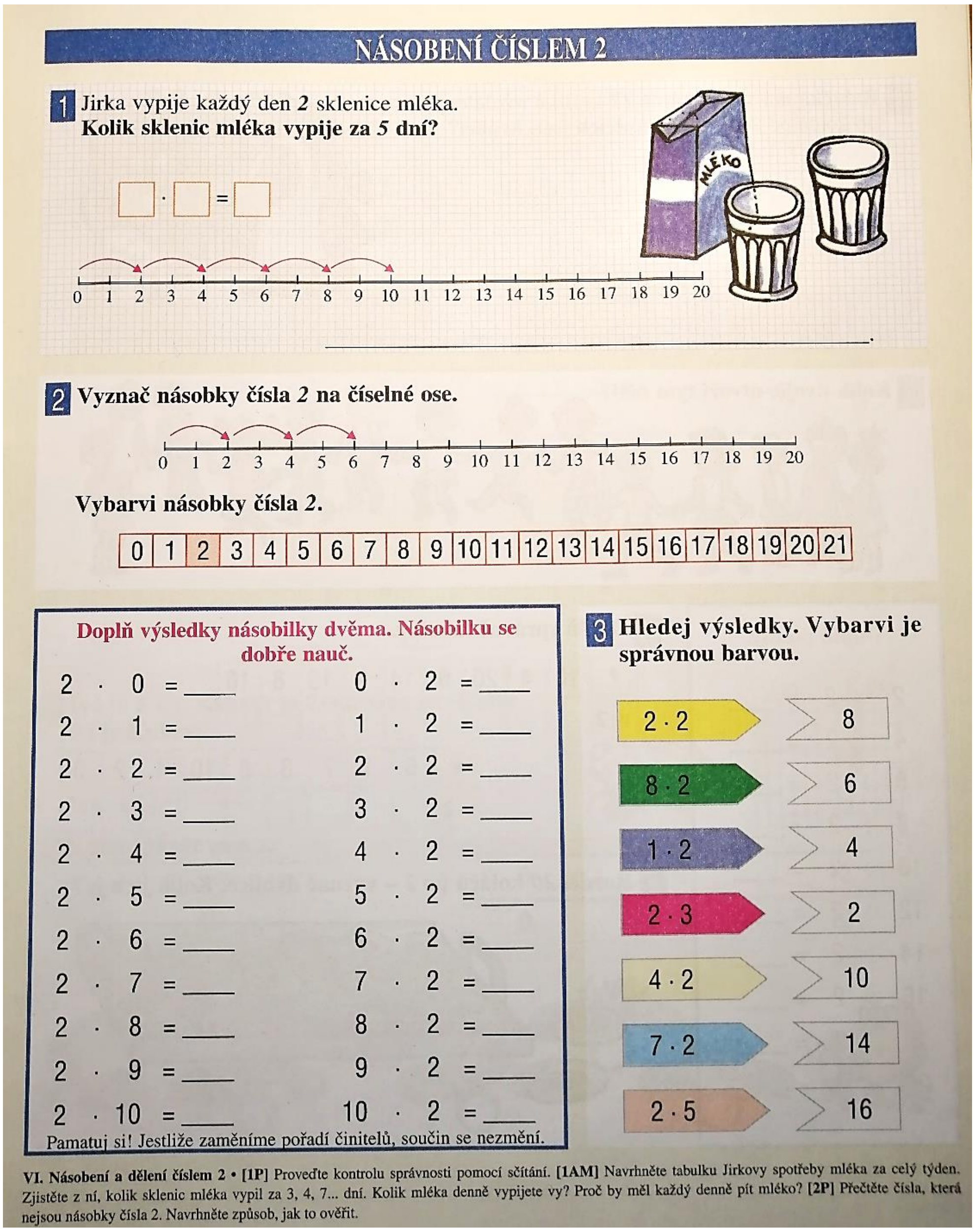
3.3 Učebnice Prodos (modrá řada)

Sada učebnic z nakladatelství Prodos má svoji starší a novější verzi. Stejně jako u předchozí řady učebnic pro 1. stupeň ZŠ, i zde byla pro analýzu vybrána novější verze, tzv. „modrá řada“. Na rozdíl od učebnic nakladatelství Fraus pro 2. stupeň ZŠ, nejsou učebnice z této řady rozděleny na aritmetiku a geometrii. Kapitoly z těchto dvou oblastí matematiky se v učebnicích pravidelně střídají.

Rozvoj operace násobení nalezneme v těchto učebnicích:

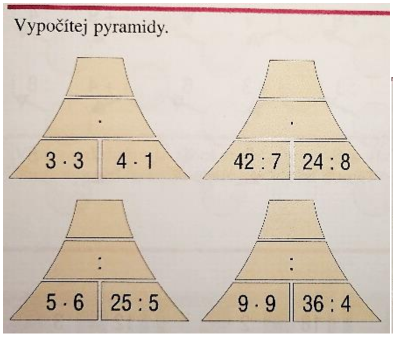
- Matematika a její aplikace 2. ročník, 3. díl
- Matematika a její aplikace 3. ročník, 1. díl
- Matematika a její aplikace 3. ročník, 3. díl
- Matematika a její aplikace 4. ročník, 1. díl
- Matematika a její aplikace 4. ročník, 3. díl
- Matematika a její aplikace 5. ročník, 1. díl
- Matematika a její aplikace 6. ročník
- Matematika a její aplikace 7. ročník

S operací násobení se poprvé setkáme v učebnici pro 2. ročník 3. díl. Nejprve je násobení zavedeno jako matematická operace „činitel x činitel = součin“. Hned na to navazují slovní úlohy obsahující číselnou osu, pomocí které se děti orientují mezi čísly. Operace je zavedena na dvou stránkách a hned ji následuje zavedení dělení ve stejném duchu. Dělení je reverzní operací k operaci násobení, a tak je i logické, že jsou tyto operace dětem představovány zároveň. Po obecném zavedení se žáci seznamují s násobením a dělením číslem 2,3,4,5,1 a s násobením číslem 0 (Molnár a Mikulenková, 2007a).

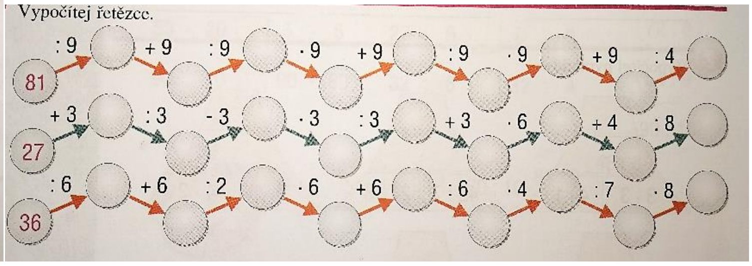


Obrázek 45: Ukázka z učebnice Matematika a její aplikace pro 2. ročník, 3. díl, Prodos, modrá řada (Molnár a Mikulenková, 2007a, s. 31)

1. díl učebnice matematiky pro 3. ročník opakuje, co se žáci naučili ve 2. třídě a dokončuje násobení a dělení malé násobilky. Stejně tak jako v předchozí učebnici i tyto kapitoly jsou vystavěny na slovních úlohách, doplňování správných násobků, činitelů, dělenců, podílů apod. do tabulek, určování násobků pomocí číselné osy, vyjadřování příkladů násobení a dělení pomocí obsahů daných čtvercovou sítí, počítání s tzv. řetězci, či pyramidami. (Molnár a Mikulenková, 2007b).

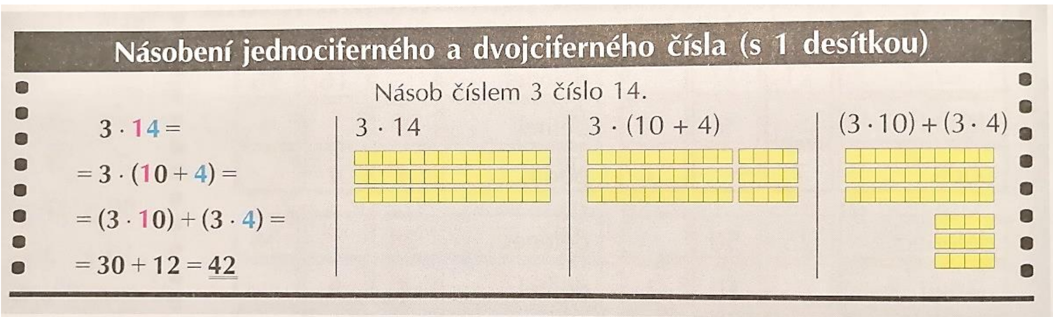


Obrázek 47: Pyramidy (Molnár a Mikulenková, 2007b, s. 43)



Obrázek 46: Úloha s počítáním v řetězcích (Molnár a Mikulenková, 2007b, s. 44)

2. díl se násobením nezabývá, rozšiřuje znalosti o sčítání a odčítání a rozšiřuje znalost čísel do 1000. Sčítání a odčítání do 1000 je uvedeno na začátku 3. dílu, na což může navázat násobení (a dělení) velkých čísel. Téma je otevřeno rozklady čísel na činitele a asociativitou násobení. Začíná se od jednoduchého násobení (a dělení) 10 a 100. Na ně navazuje násobení čísly končícími nulou: 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. Celý 3. ročník je zakončen tématy násobení jednociferného a dvojciferného čísla s jednou desítkou a dělením dvojciferného čísla číslem jednociferným (Molnár a Mikulenková, 2007c; Molnár a Mikulenková, 2007d).



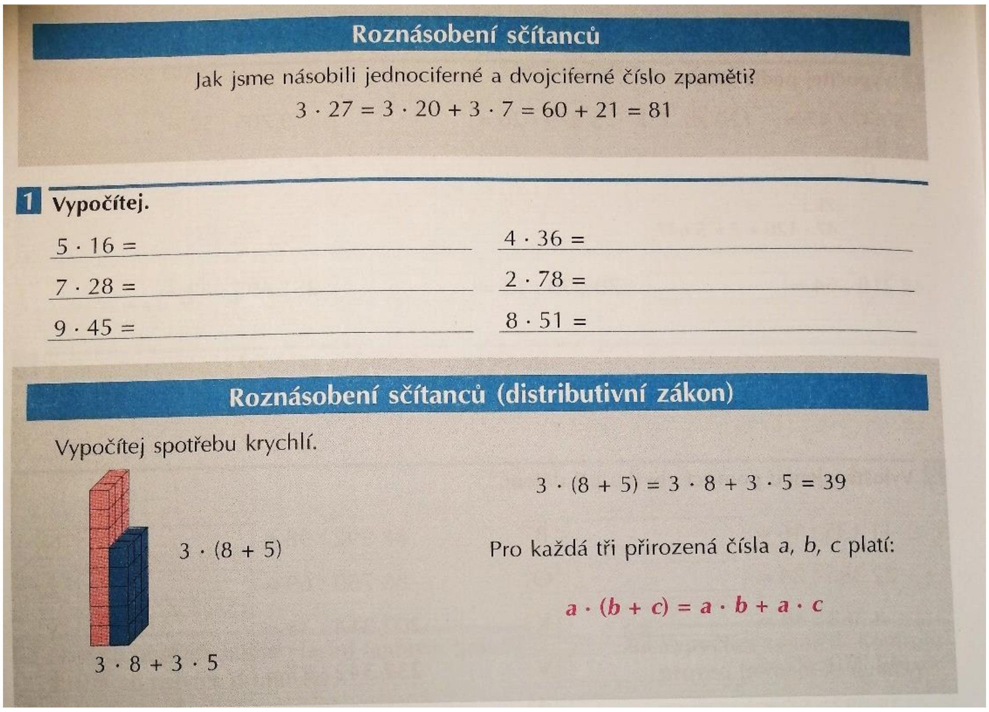
Obrázek 48: Výklad násobení jednociferného a dvojciferného čísla s 1 desítkou (Molnár a Mikulenková, 2007e, s. 14)

4. ročník začíná shrnutím násobení jednociferného čísla číslem dvojciferným, zakončeným na nulu. Následující kapitola se zaměřuje na násobení jednociferného a dvojciferného čísla s jednou desítkou, přičemž využívá rozkladu čísla na desítky a jednotky a distributivního zákonu. V dalším kroku se přidají dvojciferná čísla s více desítkami. Příklady na procvičování se rozšiřují o úlohy podporující odhady výsledků, porovnávaní výsledků dvou příkladů (<,>,=), rozkládání součinu na různé činitele, nebo vyjadřování určitého čísla různými způsoby (např. číslo 24 vyjádřete pomocí tří osmiček a pomocí tří dvojek). Žáci se dozví pravidlo, že operace v závorkách mají vždy přednost

před operacemi mimo ně. Učí se také násobit zpaměti do 1000, tedy že se součin zvětší desetkrát, pokud se zvětší jeden z činitelů desetkrát. Na závěr učebnice je kapitola zabývající se převody jednotek času (Molnár a Mikulenková, 2007e).

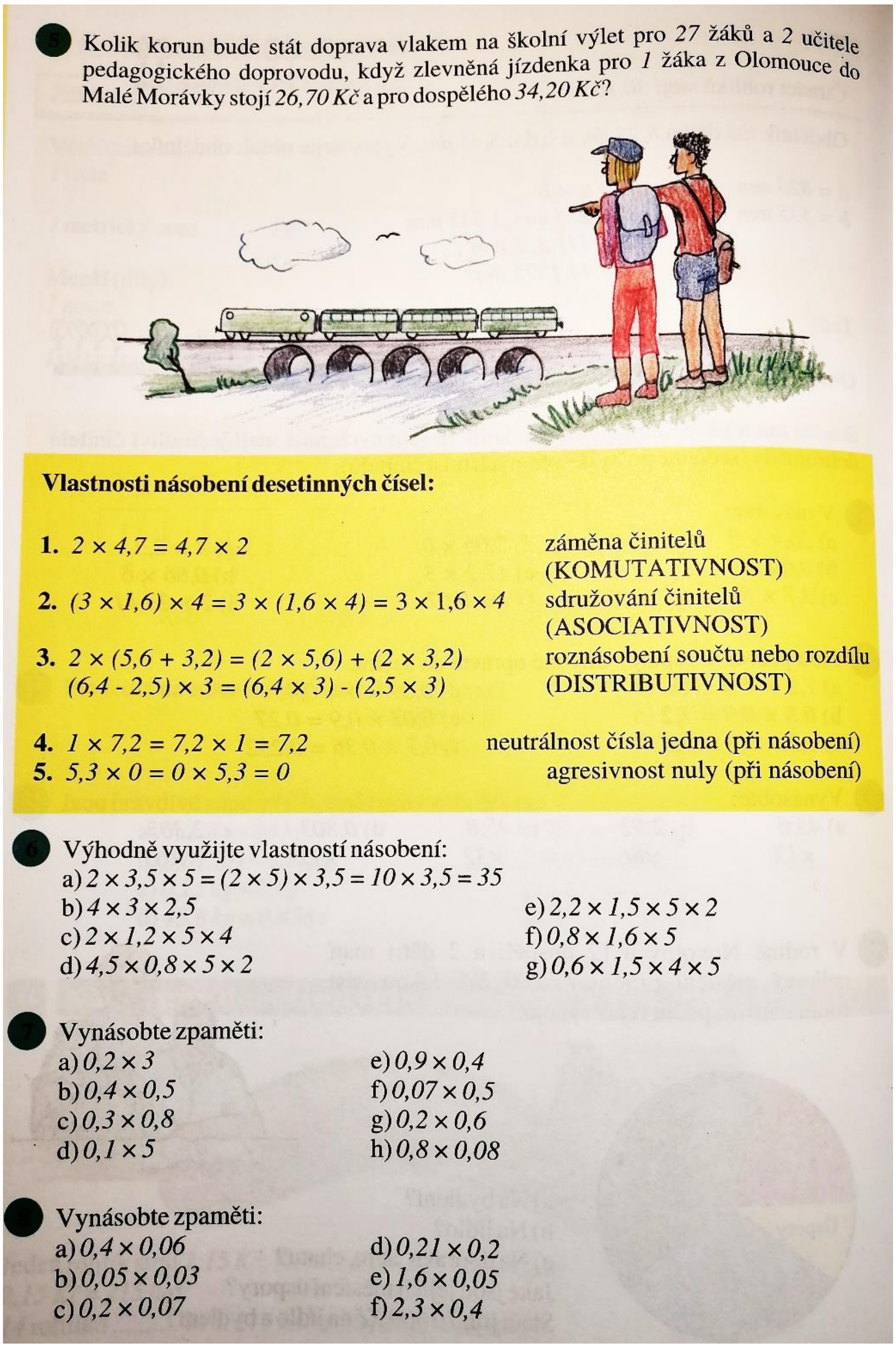
2. díl matematiky pro 4. ročník přeskočíme, neboť neobsahuje látku násobení. První kapitolou zabývající se násobením ve 3. díle je „Násobení do milionu zpaměti“, ve které se žáci učí rychlé orientaci v násobení čísel, jež končí na jednu a více nul. Doteď bylo násobení prováděno pomocí distribučního zákonu, nebo zpaměti (v případě jednoduchých čísel, končících nulami). V tomto díle se žáci dostávají k písemnému násobení pod sebou. Postupují od násobení činiteli jednocifernými, dvojcifernými až k činitelům trojciferným. Důležitou informací je pro tuto operaci komutativní zákon, tedy že pořadí činitelů může být libovolné a součin se nezmění. Závěrečná kapitola se zabývá jednotkami obsahu a jejich převody. (Molnár a Mikulenková, 2007f; Molnár a Mikulenková, 2007g).

Asociativní zákon je prvním tématem 5. ročníku. V některých úlohách na procvičení je přímo uveden pokyn k využití tohoto pravidla k nalezení výhodného postupu výpočtu. Pro výpočet výrazů kombinujících základní matematické operace je představeno pravidlo, které říká, že násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním. Operaci násobení také využívají převody jednotek objemu a obsahů pravidelných mnohoúhelníků (Molnár a Mikulenková, 2018a).



Obrázek 49: Ukázka z učebnice Matematik a její aplikace pro 5. ročník, 2. díl, Prodos, modrá řada (Molnár a Mikulenková, 2018b, s. 12)

Další učebnice pro 5. ročník znovu přináší distributivní zákon a aplikuje jej při roznásobení sčítanců (*obr. 53*). Poslední díl této řady učebnic především opakuje probranou látku a připravuje děti na přechod na 2. stupeň ZŠ (Molnár a Mikulenková, 2018b; Molnár a Mikulenková, 2018c).



5 Kolik korun bude stát doprava vlakem na školní výlet pro *27* žáků a *2* učitele pedagogického doprovodu, když zlevněná jízdenka pro *1* žáka z Olomouce do Malé Morávky stojí *26,70 Kč* a pro dospělého *34,20 Kč*?

Vlastnosti násobení desetinných čísel:

1. $2 \times 4{,}7 = 4{,}7 \times 2$ — záměna činitelů (KOMUTATIVNOST)

2. $(3 \times 1{,}6) \times 4 = 3 \times (1{,}6 \times 4) = 3 \times 1{,}6 \times 4$ — sdružování činitelů (ASOCIATIVNOST)

3. $2 \times (5{,}6 + 3{,}2) = (2 \times 5{,}6) + (2 \times 3{,}2)$
$(6{,}4 - 2{,}5) \times 3 = (6{,}4 \times 3) - (2{,}5 \times 3)$ — roznásobení součtu nebo rozdílu (DISTRIBUTIVNOST)

4. $1 \times 7{,}2 = 7{,}2 \times 1 = 7{,}2$ — neutrálnost čísla jedna (při násobení)

5. $5{,}3 \times 0 = 0 \times 5{,}3 = 0$ — agresivnost nuly (při násobení)

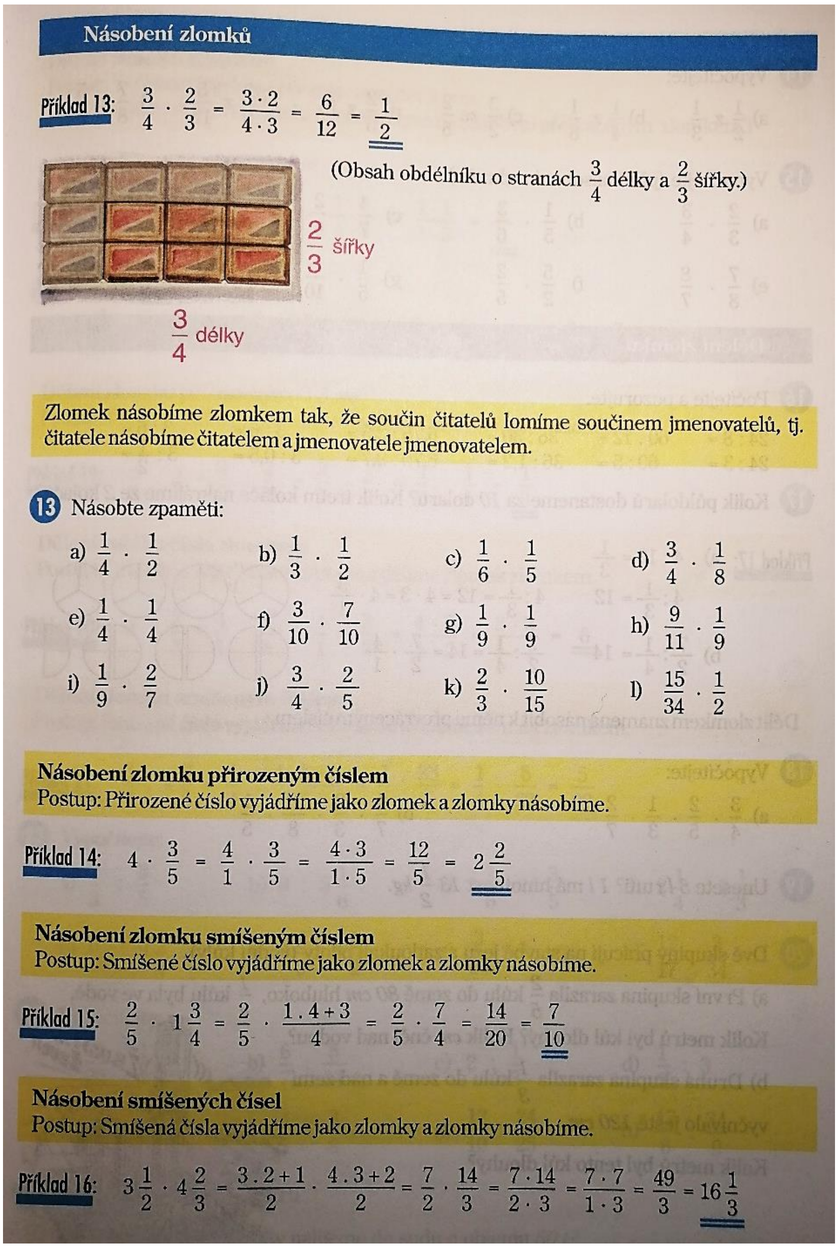
6 Výhodně využijte vlastností násobení:
a) $2 \times 3{,}5 \times 5 = (2 \times 5) \times 3{,}5 = 10 \times 3{,}5 = 35$
b) $4 \times 3 \times 2{,}5$
c) $2 \times 1{,}2 \times 5 \times 4$
d) $4{,}5 \times 0{,}8 \times 5 \times 2$
e) $2{,}2 \times 1{,}5 \times 5 \times 2$
f) $0{,}8 \times 1{,}6 \times 5$
g) $0{,}6 \times 1{,}5 \times 4 \times 5$

7 Vynásobte zpaměti:
a) $0{,}2 \times 3$
b) $0{,}4 \times 0{,}5$
c) $0{,}3 \times 0{,}8$
d) $0{,}1 \times 5$
e) $0{,}9 \times 0{,}4$
f) $0{,}07 \times 0{,}5$
g) $0{,}2 \times 0{,}6$
h) $0{,}8 \times 0{,}08$

Vynásobte zpaměti:
a) $0{,}4 \times 0{,}06$
b) $0{,}05 \times 0{,}03$
c) $0{,}2 \times 0{,}07$
d) $0{,}21 \times 0{,}2$
e) $1{,}6 \times 0{,}05$
f) $2{,}3 \times 0{,}4$

Obrázek 50: Ukázka z učebnice Matematika 6, nakladatelství Prodos (Molnár et al., 1998, s. 48)

Učebnice pro 6. ročník navazuje na učebnice pro 1. stupeň ZŠ opakováním. Znalosti operace násobení prohlubuje ve třetí kapitole, která se zabývá desetinnými čísly. Nejprve se žáci seznamují s násobením desetinných čísel čísly 10, 100, 1000 a propojí tyto znalosti s převody jednotek, se kterými se již setkali. Poté se učí násobení desetinných čísel čísly přirozenými, a nakonec i desetinnými. Učebnice je seznámí i s vlastnostmi násobení takových čísel (*obr. 54*). „Dělitelnost“ je další kapitolou, která využívá operace násobení. Žáci se seznámí s těmito pojmy i jak s nimi pracovat: násobek, dělitel, prvočísla, složená čísla, znaky dělitelnosti, soudělná a nesoudělná čísla, největší společní dělitel a nejmenší společný násobek (Molnár et al., 1998).



Násobení zlomků

Příklad 13: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

(Obsah obdélníku o stranách $\frac{3}{4}$ délky a $\frac{2}{3}$ šířky.)

$\frac{2}{3}$ šířky

$\frac{3}{4}$ délky

Zlomek násobíme zlomkem tak, že součin čitatelů lomíme součinem jmenovatelů, tj. čitatele násobíme čitatelem a jmenovatele jmenovatelem.

13 Násobte zpaměti:

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ f) $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}$ g) $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$ h) $\frac{9}{11} \cdot \frac{1}{9}$

i) $\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{7}$ j) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$ k) $\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{15}$ l) $\frac{15}{34} \cdot \frac{1}{2}$

Násobení zlomku přirozeným číslem
Postup: Přirozené číslo vyjádříme jako zlomek a zlomky násobíme.

Příklad 14: $4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

Násobení zlomku smíšeným číslem
Postup: Smíšené číslo vyjádříme jako zlomek a zlomky násobíme.

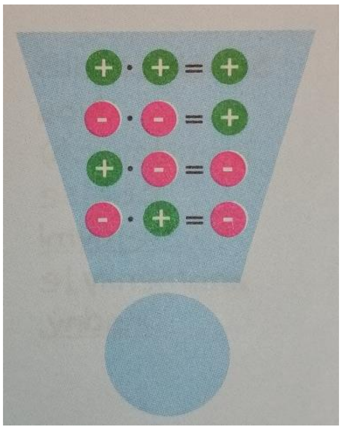
Příklad 15: $\frac{2}{5} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1.4+3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

Násobení smíšených čísel
Postup: Smíšená čísla vyjádříme jako zlomky a zlomky násobíme.

Příklad 16: $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{3.2+1}{2} \cdot \frac{4.3+2}{2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{14}{3} = \frac{7 \cdot 14}{2 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 7}{1 \cdot 3} = \frac{49}{3} = 16\frac{1}{3}$

Obrázek 51: Ukázka učebnice Matematika 7, nakladatelství Prodos (Molnár et al., 1999, s. 36)

Se zlomky se žáci setkali poprvé ve 4. ročníku a učili se je poznávat. V 7. ročníku jsou zlomky představeny jako komplexní téma. Žáci se nejprve učí jejich rozšiřování a krácení, poté hledání společného jmenovatele dvou zlomků. Násobení dvou zlomků je uvedeno příkladem pro výpočet obsahu části obdélníku a pravidlem pro násobení zlomků (*obr. 55*). Jak je z obrázku patrné, nejsou opomenuty případy, kdy se násobí zlomek přirozeným číslem, či číslem smíšeným, a případy, v nichž se násobí dva zlomky smíšené. Se složeným zlomkem se žáci seznámí u operace dělení. Celá čísla jsou kapitolou, ve které se žáci seznámí se zápornými čísly. Pravidla násobení celých čísel jsou zavedena slovně i graficky (*obr. 56*). Racionální čísla shrnují poznatky o násobení desetinných čísel, zlomků i čísel celých jsou kapitolou a studenti tak dovršují své znalosti o operaci násobení (Molnár et al., 1999).



Obrázek 52: Pomůcka pro zapamatování si pravidel násobení celých čísel (Molnár et al., 1999, s. 63)

Další kapitoly operaci násobení již nerozvíjí, ale využívají ji k dosažení výsledků složitějších operací. V učebnici pro 7. ročník to jsou kapitoly:

- Poměr, přímá a nepřímá úměrnost (a trojčlenka)
- Procenta, (Molnár et al., 1999).

V učebnicích pro 8. a 9. ročník bychom mezi takové kapitoly mohli řadit:

- Mnohočleny, výrazy a lomené výrazy
- Lineární rovnice, rovnice s neznámou ve jmenovateli
- Soustavy lineárních rovnic
- Mocniny a odmocniny
- Statistika
- Finanční matematika, (Molnár et al., 2000; Molnár et al., 2001).

3.4 Učebnice Prometheus

Sada učebnic pro 1. stupeň ZŠ obsahuje pět učebnic, tedy pro každý ročník jednu učebnici. Učebnice jsou děleny do 3-5 kapitol, přičemž každá nese název určitého tématu z aritmetiky. Podkapitoly v obsahu uvedeny nejsou, což znesnadňuje orientaci v učebnicích především pro témata z geometrie. Ta se v některých případech realizují v rámci podkapitol, ale v mnoha dalších případech je nalezneme volně vložená mezi cvičení z aritmetiky. Učebnice využívají ve svých cvičeních přílohy, které ale nejsou součástí učebnice – jsou vydávány samostatně.

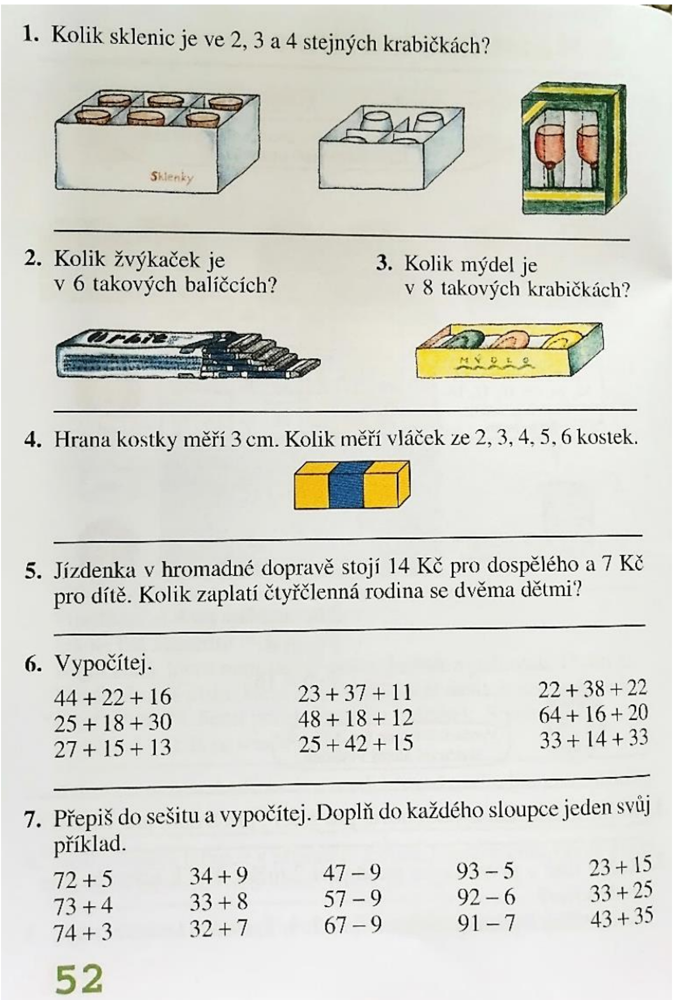
Pro 2. stupeň ZŠ vydává nakladatelství Prometheus tři sady učebnic od různých autorů. Jedna sada učebnic je přímo určená pro nižší ročníky gymnázií, další dvě sady se obecně zaměřují na učivo 2. stupně ZŠ. Pro analýzu učebnic byla vybrána řada učebnic od autorů Odvárka a Kadečka zaměřující se svým obsahem obecně na 2. stupeň ZŠ. Učebnice jsou pro každý ročník rozděleny do 3. dílů. Dva díly se soustředí na témata z aritmetiky a třetí díl je vyhrazen pro geometrii.

Operace násobení je rozvíjena v rámci těchto učebnic:

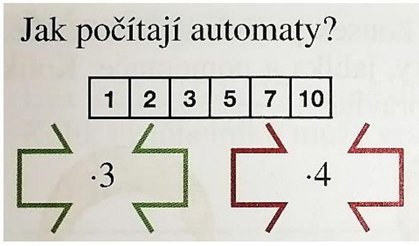
- Svět čísel a tvarů: Matematika pro 2. ročník
- Svět čísel a tvarů: Matematika pro 3. ročník
- Svět čísel a tvarů: Matematika pro 4. ročník
- Svět čísel a tvarů: Matematika pro 5. ročník
- Matematika pro 6. ročník ZŠ, 1. díl
- Matematika pro 6. ročník ZŠ, 2. díl
- Matematika pro 7. ročník ZŠ, 1. díl

Počátkům operace násobení se věnuje učebnice pro 2. ročník. V kapitole *Počítáme do 100* je podkapitola *Dvojciferná čísla*, ve které jsou cvičení využívají seskupování objektů do desítek a jednotek. Tyto příklady jsou průpravou pro budoucí násobení. Třetí kapitolou v této učebnici je kapitola *Násobíme a dělíme*. Násobení je představeno ve svém principu, pomocí stejně počtených opakujících se skupin objektů (např. 2 sad sklenic po 6 kusech). Následující podkapitola představuje stejným způsobem dělení. Až poté jsou uvedeny podkapitoly zabývající se jednotlivými násobky: *Násobky 2, Násobky 4, Násobky 3* a *Násobky 5* (v tomto pořadí). Většina cvičení v učebnici je založena na slovních úlohách s případným grafickým doprovodem. Typickým cvičením pro učebnici, které se objevuje i u násobení jsou tzv. automaty (*obr. 58*), (Divíšek, Hošpesová a Kuřina, 1997).

Obrázek 53: Seskupování objektů do desítek a jednotek (Divíšek, Hošpesová a Kuřina, 1997, s. 32)

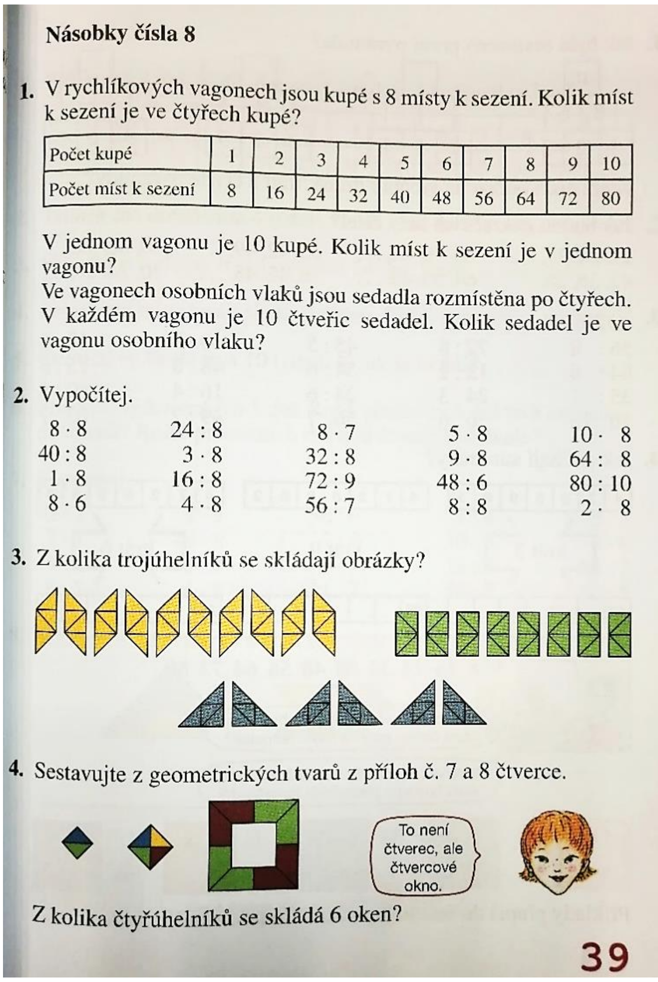


Obrázek 55: Ukázka z učebnice Svět čísel a tvarů: Matematika pro 2. ročník, nakladatelství Prometheus (Divíšek, Hošpesová a Kuřina, 1997, s. 52)



Obrázek 54: Automaty (Divíšek, Hošpesová a Kuřina, 1997, s. 65)

Na začátku učebnice pro 3. ročník je opakování probraných témat z 2. ročníku. Kapitola *Násobení a dělení* je opět uvedena grafickými příklady využívajícími množství a operátor. Příklady tentokrát směřují k násobkům druhé poloviny malé násobilky, tj. násobkům 6 – 9. Malá násobilka je v této učebnici dokončena a násobky jsou i zde představeny v netradičním pořadí: násobky čísla 6, 9, 8, 7, 1 a 0. Násobky jsou vždy uvedeny pomocí konkrétní slovní úlohy, která pracuje s tabulkou. Žáci se s konkrétními násobky čísel seznamují také pomocí skupin geometrických objektů, slovních úloh i početních příkladů. I zde je majoritní využití slovních zadání. V učebnici se žáci dále seznámí s násobením a dělením dvojciferných čísel číslem jednociferným. Nejprve začínají s násobením dvojciferných čísel končících nulou a postupně přecházejí k libovolným dvojciferným číslům. Na tuto podkapitolu později naváže *Násobení a dělení do 1000*, které začíná s násobením trojciferných čísel zakončených na nul jednociferným číslem (Hošpesová, Divíšek a Kuřina, 1998).



Násobky čísla 8

1. V rychlíkových vagonech jsou kupé s 8 místy k sezení. Kolik míst k sezení je ve čtyřech kupé?

Počet kupé	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Počet míst k sezení	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

V jednom vagonu je 10 kupé. Kolik míst k sezení je v jednom vagonu?
Ve vagonech osobních vlaků jsou sedadla rozmístěna po čtyřech. V každém vagonu je 10 čtveřic sedadel. Kolik sedadel je ve vagonu osobního vlaku?

2. Vypočítej.

8 · 8	24 : 8	8 · 7	5 · 8	10 · 8
40 : 8	3 · 8	32 : 8	9 · 8	64 : 8
1 · 8	16 : 8	72 : 9	48 : 6	80 : 10
8 · 6	4 · 8	56 : 7	8 : 8	2 · 8

3. Z kolika trojúhelníků se skládají obrázky?

4. Sestavujte z geometrických tvarů z příloh č. 7 a 8 čtverce.

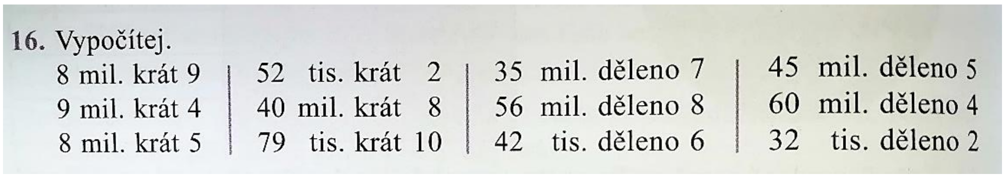
Z kolika čtyřúhelníků se skládá 6 oken?

39

Obrázek 56: Ukázka z učebnice Svět čísel a tvarů: Matematika pro 3. ročník (Hošpesová, Divíšek a Kuřina, 1998, s. 39)

Prvním kapitolou učebnice pro 4. ročník, po počátečním opakování, je počítání s velkými čísly. V rámci této kapitoly se žáci postupně seznamují s čísly do 10 000, 100 000 a do 1 000 000. Celá kapitola pracuje především se zaokrouhlování, porovnáváním čísel, sčítáním a odčítáním. Násobení je procvičováno v rámci převodů jednotek u měření délek a obsahů. Postupně se žáci dostanou k násobení trojciferných čísel čísly jednocifernými, dvojcifernými i trojcifernými. Pracuje se s takovými čísly, které je snadné násobit – alespoň jeden z činitelů je zakončen na jednu a více nul (př. $39 \cdot 200$; $300 \cdot 530$; $185 \cdot 20$). Dojde i na násobení čtyřciferných čísel ve stejném duchu (např. $1400 \cdot 50$). V kapitole *Počítáme písemně* se žáci naučí písemnému násobení, tedy násobení pod sebou. I zde počítají nejprve s trojcifernými čísly, které násobí čísly jednocifernými, a postupně se přejdou k násobení libovolných trojciferných čísel čísly trojcifernými. V kapitole *Zlomky* se objevují prvopočátky pro násobení zlomků v příkladech hledajících část z celku (př. $\frac{1}{2}$ ze 120). Závěrečná opakovací kapitola přináší netradiční cvičení a projekty. V ní se žáci seznámí s indickým způsobem násobení (algotimus gelosia), (Divíšek, Hošpesová a Kuřina, 1999).

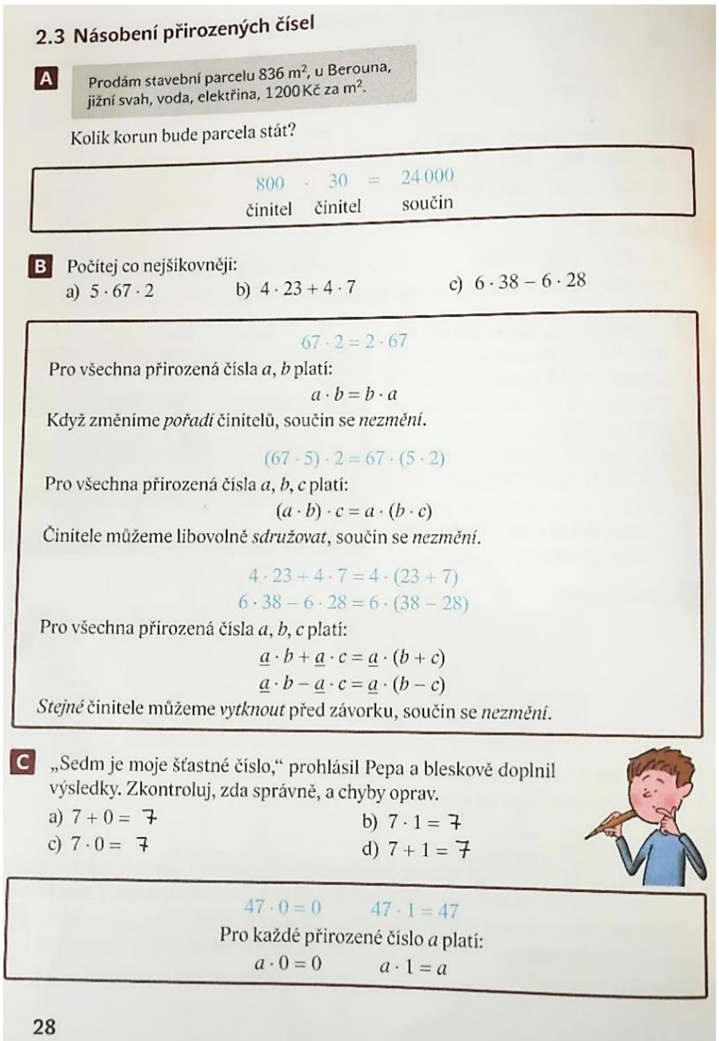
Stejně jako v předchozích učebnicích je i v učebnici pro 5. ročník opakování učiva z předešlého ročníku. Opakování sestává z pestré palety cvičení, příkladů a projektů. Z násobení se zde setkáme s násobením pěticiferných čísel a s odhadem výsledných násobků víceciferných čísel. V posledním ročníku 1. stupně ZŠ se žáci seznamují s čísli do miliardy, a tedy i s násobením takových čísel čísly jednocifernými a dvojcifernými. Násobení je také procvičováno na převodech jednotek objemu a plochy. Novým tématem jsou desetinná čísla, jejich sčítání, odčítání, zaokrouhlování, násobení a dělení 10 a 100, a později také 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. Další kapitoly rozvíjejí jiné učivo, ale násobení se stále objevuje v rámci opakování (Hošpesová, Divíšek a Kuřina, 2000).


16. Vypočítej.

8 mil. krát 9	52 tis. krát 2	35 mil. děleno 7	45 mil. děleno 5
9 mil. krát 4	40 mil. krát 8	56 mil. děleno 8	60 mil. děleno 4
8 mil. krát 5	79 tis. krát 10	42 tis. děleno 6	32 tis. děleno 2

Obrázek 57: Násobení a dělení čísel do miliardy (Hošpesová, Divíšek a Kuřina, 2000. s. 62)

S přechodem na 2. stupeň ZŠ je spojené opakování učiva 1. stupně a někdy i doplnění případných mezer. 1. díl učebnice pro 6. ročník se zaměřuje právě na opakování aritmetiky a geometrie prvního stupně. V tomto díle se aritmetika zaměřuje na přirozená čísla. Násobení přirozených čísel je uvedeno souhrnem základních informací o násobení, který následuje soubor cvičení. 2. díl se zaměřuje na desetinná čísla a dělitelnost. Násobení desetinných čísel začíná převody jednotek délky, hmotnosti a obsahu, tedy násobením a dělením 10, 100 a 1000. Následuje násobení desetinných čísel čísly přirozenými, přičemž je kladen důraz i na odhady. Uzavírajícím tématem je násobení desetinných čísel desetinnými čísly. Kapitola vysvětluje postup takového násobení, vlastnosti násobení desetinných čísel a procvičuje tuto operaci na příkladech. Druhá část učebnice se zabývá dělitelností, která násobení využívá. Přináší pojmy dělitel a násobek a seznamuje se znaky dělitelnosti čísel 10, 5, 2 a 3. Následuje kapitola zabývající se prvočísly, složenými čísly, soudělnými a nesoudělnými čísly, společným dělitelem, největším společným dělitelem, společným násobkem a nejmenším společným násobkem (Odvárko a Kadleček, 2010; Odvárko a Kadleček, 1997).



2.3 Násobení přirozených čísel

A Prodám stavební parcelu 836 m², u Berouna, jižní svah, voda, elektřina, 1200 Kč za m².

Kolik korun bude parcela stát?

$800 \cdot 30 = 24\,000$

činitel činitel součin

B Počítej co nejšikovněji:

a) $5 \cdot 67 \cdot 2$ b) $4 \cdot 23 + 4 \cdot 7$ c) $6 \cdot 38 - 6 \cdot 28$

$67 \cdot 2 = 2 \cdot 67$

Pro všechna přirozená čísla a, b platí:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Když změníme *pořadí* činitelů, součin se *nezmění*.

$(67 \cdot 5) \cdot 2 = 67 \cdot (5 \cdot 2)$

Pro všechna přirozená čísla a, b, c platí:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Činitele můžeme libovolně *sdružovat*, součin se *nezmění*.

$4 \cdot 23 + 4 \cdot 7 = 4 \cdot (23 + 7)$

$6 \cdot 38 - 6 \cdot 28 = 6 \cdot (38 - 28)$

Pro všechna přirozená čísla a, b, c platí:

$$\underline{a} \cdot b + \underline{a} \cdot c = \underline{a} \cdot (b + c)$$
$$\underline{a} \cdot b - \underline{a} \cdot c = \underline{a} \cdot (b - c)$$

Stejné činitele můžeme *vytknout* před závorku, součin se *nezmění*.

C „Sedm je moje šťastné číslo," prohlásil Pepa a bleskově doplnil výsledky. Zkontroluj, zda správně, a chyby oprav.

a) $7 + 0 = 7$ b) $7 \cdot 1 = 7$

c) $7 \cdot 0 = 7$ d) $7 + 1 = 7$

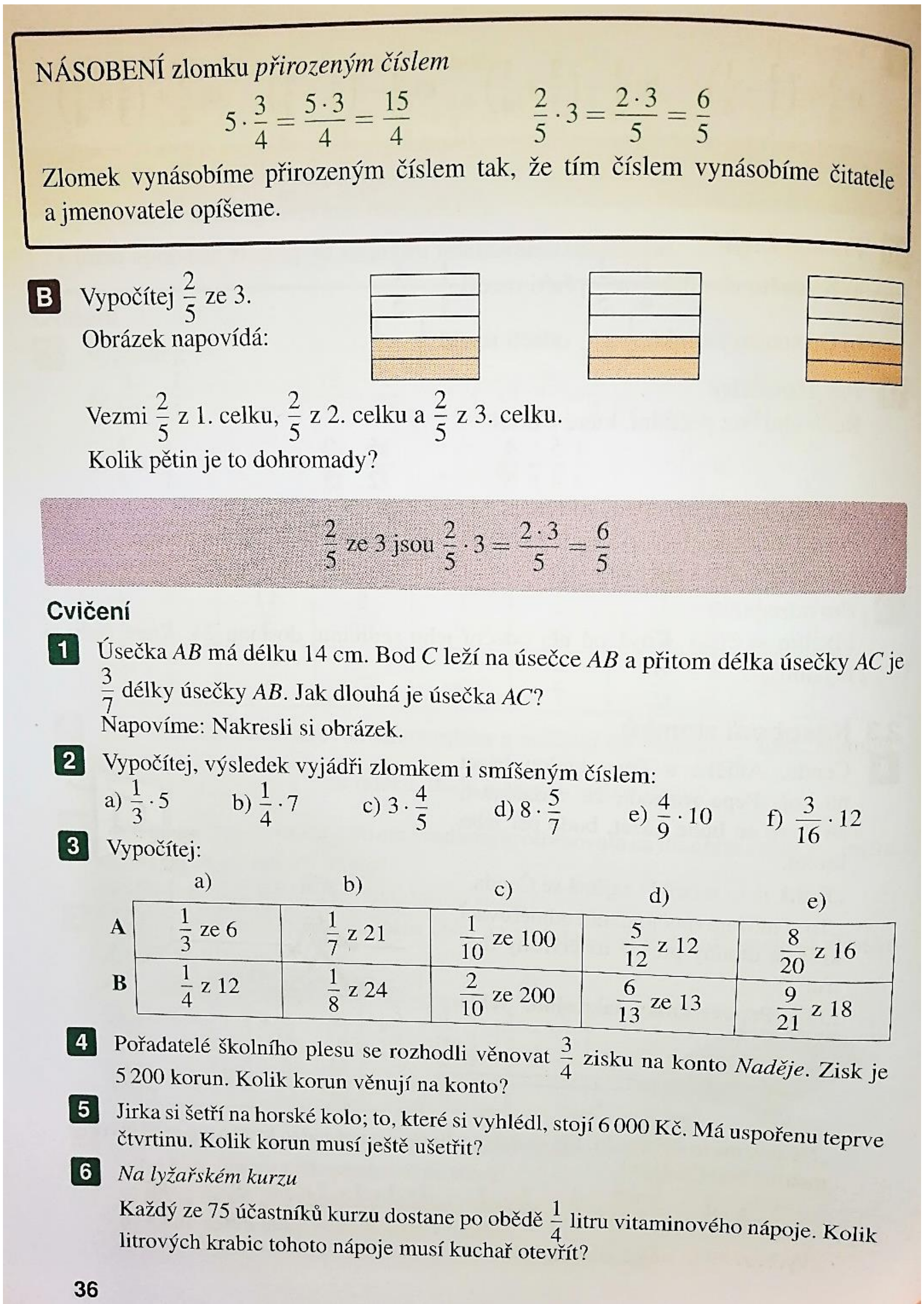
$47 \cdot 0 = 0$ $47 \cdot 1 = 47$

Pro každé přirozené číslo a platí:

$a \cdot 0 = 0$ $a \cdot 1 = a$

28

Obrázek 58: Ukázka z učebnice Matematika pro 6. ročník ZŠ, 1. díl, nakladatelství Prometheus (Odvárko a Kadleček, 2010, s. 28)



NÁSOBENÍ zlomku *přirozeným číslem*

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4} \qquad \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$$

Zlomek vynásobíme přirozeným číslem tak, že tím číslem vynásobíme čitatele a jmenovatele opíšeme.

B Vypočítej $\frac{2}{5}$ ze 3.

Obrázek napovídá:

Vezmi $\frac{2}{5}$ z 1. celku, $\frac{2}{5}$ z 2. celku a $\frac{2}{5}$ z 3. celku.

Kolik pětin je to dohromady?

$$\frac{2}{5} \text{ ze 3 jsou } \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$$

Cvičení

1 Úsečka *AB* má délku 14 cm. Bod *C* leží na úsečce *AB* a přitom délka úsečky *AC* je $\frac{3}{7}$ délky úsečky *AB*. Jak dlouhá je úsečka *AC*?
Napovíme: Nakresli si obrázek.

2 Vypočítej, výsledek vyjádři zlomkem i smíšeným číslem:
a) $\frac{1}{3} \cdot 5$ b) $\frac{1}{4} \cdot 7$ c) $3 \cdot \frac{4}{5}$ d) $8 \cdot \frac{5}{7}$ e) $\frac{4}{9} \cdot 10$ f) $\frac{3}{16} \cdot 12$

3 Vypočítej:

	a)	b)	c)	d)	e)
A	$\frac{1}{3}$ ze 6	$\frac{1}{7}$ z 21	$\frac{1}{10}$ ze 100	$\frac{5}{12}$ z 12	$\frac{8}{20}$ z 16
B	$\frac{1}{4}$ z 12	$\frac{1}{8}$ z 24	$\frac{2}{10}$ ze 200	$\frac{6}{13}$ ze 13	$\frac{9}{21}$ z 18

4 Pořadatelé školního plesu se rozhodli věnovat $\frac{3}{4}$ zisku na konto *Naděje*. Zisk je 5 200 korun. Kolik korun věnují na konto?

5 Jirka si šetří na horské kolo; to, které si vyhlédl, stojí 6 000 Kč. Má uspořenu teprve čtvrtinu. Kolik korun musí ještě ušetřit?

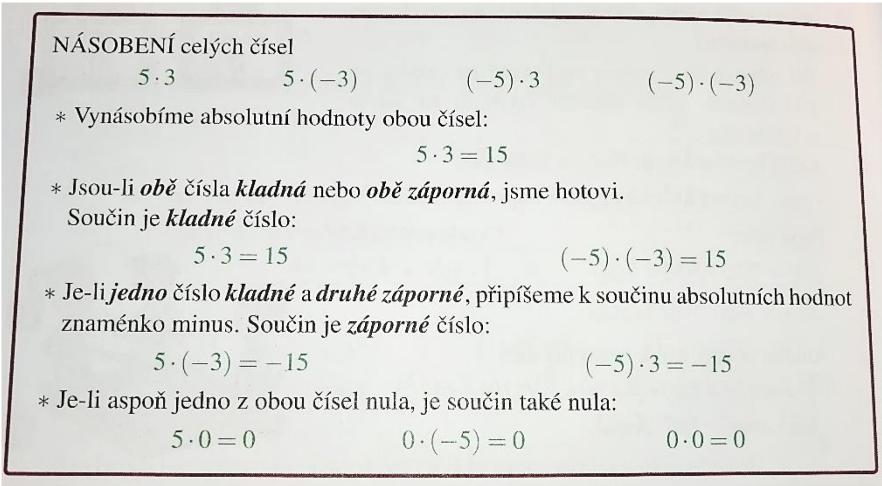
6 *Na lyžařském kurzu*
Každý ze 75 účastníků kurzu dostane po obědě $\frac{1}{4}$ litru vitaminového nápoje. Kolik litrových krabic tohoto nápoje musí kuchař otevřít?

36

Obrázek 59: Ukázka z učebnice Matematika pro 7. ročník ZŠ, nakladatelství Prometheus (Odvárko a Kadleček, 2011a, s. 36)

1. díl učebnice pro 7. ročník se věnuje zlomkům, celým číslům a racionálním číslům. První operace se zlomky pojící se k násobení je rozšiřování (a krácení) zlomků. Kapitola *Zlomky, desetinná čísla a smíšená čísla* pracuje s převáděním čísel mezi těmito jejich podobami a předchází operacím se zlomky. S násobením zlomků přirozenými čísly se žáci nepřímo setkali již na 1. stupni ZŠ při určování dané části z celku (př. $\frac{2}{5}$ ze 30). V kapitole *Násobení zlomků* je toto násobení definované i s početním postupem. Na něj

navazuje násobení zlomků zlomky, které se úzce pojí s kapitolou krácení zlomků. Dělení zlomků se převádí na násobení převráceným zlomkem dělitele. Kladná čísla žáci již znají. V rámci celých čísel se nově seznámí se zápornými čísly a také s pojmy absolutní hodnota a číslo opačné. Pravidla pro násobení celých čísel jsou uvedena v tabulce (početně i slovně), (*obr. 63* a *64*), stejně jako vlastnosti násobení celých čísel. Racionální čísla shrnují pravidla pro práci s desetinnými čísly, zlomky a celými čísly, čímž je poznání operace násobení dokončeno (Odvárko a Kadleček, 2011a).



NÁSOBENÍ celých čísel

$5 \cdot 3$ $\quad 5 \cdot (-3)$ $\quad (-5) \cdot 3$ $\quad (-5) \cdot (-3)$

* Vynásobíme absolutní hodnoty obou čísel:

$5 \cdot 3 = 15$

* Jsou-li ***obě*** čísla ***kladná*** nebo ***obě záporná***, jsme hotovi. Součin je ***kladné*** číslo:

$5 \cdot 3 = 15$ $\quad (-5) \cdot (-3) = 15$

* Je-li ***jedno*** číslo ***kladné*** a ***druhé záporné***, připíšeme k součinu absolutních hodnot znaménko minus. Součin je ***záporné*** číslo:

$5 \cdot (-3) = -15$ $\quad (-5) \cdot 3 = -15$

* Je-li aspoň jedno z obou čísel nula, je součin také nula:

$5 \cdot 0 = 0$ $\quad 0 \cdot (-5) = 0$ $\quad 0 \cdot 0 = 0$

Obrázek 60: Pravidla pro násobení celých čísel (Odvárko a Kadleček, 2011a, s. 68)

Ve zbývajících učebnicích pro 7., 8. a 9. ročník není násobení předmětem učiva. Vybrané kapitoly využívají násobení v rámci složitějších operací. Mezi takové kapitoly patří:

- Poměr, přímá a nepřímá úměrnost (trojčlenka)
- Procenta, úroky
- Mocniny a odmocniny
- Pythagorova věta
- Výrazy a mnohočleny
- Lineární rovnice
- Statistika (aritmetický průměr)
- Soustavy rovnic
- Funkce
- Lomené výrazy
- Finanční matematika, (Odvárko a Kadleček, 2011b; Odvárko a Kadleček, 2012a; Odvárko a Kadleček, 2012b; Odvárko a Kadleček, 2013; Odvárko a Kadleček, 2014).

3.5 Shrnutí analýzy učebnic a jejich komparace

Každý autor, či kolektiv autorů přistupuje k tvorbě učebnic svým způsobem. Všichni mají ale společný cíl: Naplnit požadavky rámcového vzdělávacího programu tak, aby žák danému učivu porozuměl a osvojil si ho. Všechny zkoumané učebnice získaly doložku MŠMT, jak je uvedeno v tabulce 9, z čehož vyplývá, že splňují nároky dané rámcovým vzdělávacím programem. Jakým způsobem se rozhodli jednotliví autoři dané učivo žákům předat, můžeme vyčíst z následujícího srovnání analyzovaných učebnic. Informace v této kapitole vycházejí z předchozích podkapitol *Analýzy obsahu učebnic* a zdrojů, které v nich byly uvedeny.

První tabulka přináší přehled rozvoje násobení v jednotlivých sadách učebnic. Čísla v tabulkách označují učebnice pro příslušné ročníky, které dané téma začínají/ dokončují.

	První seznámení s násobením	Dokončení malé násobilky	První převody jednotek	Písemné násobení	Dokončení násobení přir. čísel	Počátky násobení zlomků	Počátky násobení des. čísel	Dokončení násobení des. čísel	Dělitelnost	Násobení zlomků	Násobení celých čísel	Násobení racionálních čísel
Alter	2.	2./3.	3.	3.	5.	5.	5.	-	-	-	-	-
Fraus	2.	2.	3.	3.	5.	4.	5.	5./6.	6.	7.	7.	7.
Prodos	2.	3.	3.	4.	5.	4.	-	6.	6.	7.	7.	7.
Prometheus	2.	3.	4.	4.	5.	4.	5.	6.	6.	7.	7.	7.

Tabulka 7: Rozvoj operace násobení v analyzovaných učebnicích

Z tabulky můžeme vyčíst, že operace násobení začíná u všech sad učebnic ve 2. ročníku. Na rozdíl od učebnic pro 2. stupeň ZŠ, které probírají násobení desetinných čísel, zlomků, celých čísel a racionálních čísel ve stejných ročnících a s podobnou následností, se učebnice pro 1. stupeň ZŠ ve svém vývoji násobení liší. Učebnice Fraus dokončují malou násobilku ve 2. ročníku. Učebnice nakladatelství Alter „sešit 7“, která dokončuje malou násobilku, je určená jak pro 2., tak pro 3. ročník. Zbylé sady učebnic dokončují malou násobilku ve 3. ročníku. S prvními převody jednotek se žáci setkají ve 3. ročníku, kromě učebnic od nakladatelství Prometheus, které je přináší až v následujícím roce. Písemné násobení je také rozvrženo individuálně. Učebnice Alter a Fraus jej přináší ve 3. ročníku, učebnice Prodos a Prometheus v ročníku čtvrtém. Násobení přirozených čísel musejí mít žáci zvládnuté předtím, než přejdou na 2. stupeň ZŠ. Vyšší stupně násobení jsou již nadstavbou a nemusejí být v učebnicích obsaženy. Přesto se počátky násobení desetinných čísel zabývají tři učebnice ze čtyř a učebnice nakladatelství Fraus jej dokonce zvládnou i dokončit. Počátkům násobení zlomků se věnují všechny učebnice ve 4. ročníku, až na učebnice od nakladatelství Alter, které toto téma řeší v 5. ročníku.

Učebnice pro 1. a 2. stupeň ZŠ vytváří různí autoři/ různé kolektivy autorů. I přestože jsou sady učebnic pro oba stupně z dílny jednoho nakladatelství, neznamená to, že na sebe sady navazují. Učebnice nakladatelství Fraus jdou na 1. stupni cestou výuky profesora Hejného, ale učebnice pro 2. stupeň jsou spíše tradičního rázu. Učebnice z nakladatelství Prometheus jsou zcela odlišně koncipované pro 1. a pro 2. stupeň ZŠ. Z toho důvodu se zaměříme na porovnání prvků učebnic, které souvisí s výkladem operace násobení, pro každý stupeň samostatně.

Porovnání učebnic 1. stupně ZŠ:

- Přehledy a tabulky: Na prvním stupni není typické definování matematických operací pomocí definic. Učebnice obvykle přináší principy násobení na konkrétních příkladech a případně zdůrazňují důležité informace barevným textem, nebo je ohraničí tabulkou. To je případ učebnic z nakladatelství Alter. Učebnice Fraus a Prometheus využívají tzv. Concept Cartoons – užití komiksových prvků pro vysvětlení látky, nebo zamyšlení se nad nějakým problémem. Naopak učebnice nakladatelství Prodos kromě typického využívání přehledů a tabulek používají také jednoduché definice.

- Rozvoj malé násobilky: Postupný rozvoj násobků malé násobilky, tak jak jdou čísla po sobě (2, 3, 4, 5, 6, …), bychom našli v učebnicích Alter a Fraus. Nemusí to být ale pravidlem. Učebnice nakladatelství Prodos přináší násobky v tomto pořadí: 2, 3, 4, 5, 1, 0, 6, 7, 8, 9, 10 a učebnice nakladatelství Prometheus zase v tomto: 2, 4, 3, 5, 6, 9, 8, 7, 1, 0.
- Operace násobení a dělení: Alter, Prodos a Prometheus uvádí dělení jako rozdělování celku na stejně velké části, tedy opačnou operaci k násobení. Toho je využito v následujících kapitolách: Alter a Prodos ve svých učebnicích pravidelně střídají kapitoly násobení a dělení, kdyžto Prometheus představuje dělení konkrétními čísly malé násobilky společně s násobením těchto čísel. Fraus zavádí dělení až po zvládnutí malé násobilky jako operaci opačnou k násobení.
- Aritmetika a geometrie: Na 1. stupni ZŠ kombinují všechny učebnice aritmetiku a geometrii.
    - U učebnice Alter pro 2. ročník na sebe kapitoly aritmetiky postupně navazují a gradují. Geometrie je mezi jednotlivé kapitoly aritmetiky pravidelně zařazována. Učebnice pro 3. – 5. ročník probírají jednotlivá témata po menších částech a vícekrát se k nim vracejí. Témata z aritmetiky jsou prokládána tématy z geometrie a většími projekty. V jednotlivých kapitolách je možné se zorientovat pomocí obsahu, který tvoří tři tematické celky: Aritmetiky, geometrie a hrajeme si.
    - Učebnice matematiky podle profesora Hejného mají netradiční přístup k učivu. Cvičení se od začátku zaměřují na průpravu různých témat z 1. i 2. stupně ZŠ. Když přijde čas na dané téma, začíná se cvičeními, které byly průpravou pro daná témata. Každá kapitola se zaměřuje na nějaké téma z aritmetiky, nebo geometrie, ale zároveň se ve všech kapitolách objevují cvičení z obou disciplín.
    - Učebnice Prodos pravidelně střídají kapitoly aritmetiky a geometrie, což je přehledně uvedené i v obsahu publikace. Kapitoly z aritmetiky na sebe logicky navazují a cvičení gradují ke složitějším úlohám.
    - Témata aritmetiky v učebnicích Prometheus na sebe plynule navazují. Geometrie se realizuje v rámci některých podkapitol, ale také ji najdeme

volně vloženou mezi cvičení z aritmetiky. V této učebnici je těžší se orientovat, neboť v obsahu jsou uvedeny pouze tematické okruhy aritmetiky.

- Slovní úlohy: Slovní úlohy se objevují ve všech učebnicích. Učebnice Alter se soustředí na správný postup při řešení slovních úloh. Ve třetím ročníku je tomu dokonce věnována značná část 1. dílu. Učebnice Fraus jsou příznačné jinými typy příkladů, ale slovní úlohy nezapomínají zařazovat. Většinou se objevují jako soubor více slovních úloh pod jedním zadáním. Učebnice Prodos pravidelně střídají slovní úlohy s jinými typy příkladů a pro učebnice nakladatelství Prometheus je typické hojné množství slovních úloh klasického rázu: Úloha o jednom řešení s případným grafickým doprovodem.
- Odhad: Na odhad kladou důraz všechny učebnice.
- Netradiční metody násobení: Učebnice Fraus pro 3. a 4. ročník zavádí vedle klasického násobení i násobení indické a egyptské, se kterými pravidelně pracují i v dalších učebnicích. Učebnice pro 4. ročník nakladatelství Prometheus seznamuje žáky s indickým násobením pouze pro zajímavost a dál s ním již nepracuje. Ostatní učebnice pracují pouze s klasickým násobení (písemným neboli pod sebou a zpaměti).
- Závěrečné opakování/ Příprava na přechod na 2. stupeň ZŠ: Učebnice nakladatelství Alter a Prometheus obsahují na konci každého dílu závěrečné opakování. Učebnice Prodos obsahuje závěrečné opakování v posledním dílu každého ročníku, a navíc vyhrazuje ve 3. dílu učebnice pro 5. ročník opakování a přípravu na 2. stupeň ZŠ. Oproti tomu „Frausovské“ učebnice obsahují pouze závěrečné shrnutí a žákovské úlohy *Žáci sobě*.

Porovnání učebnic 2. stupně ZŠ:

- Přehledy a tabulky: Prometheovské učebnice, stejně jako učebnice nakladatelství Prodos, jsou založené na přehledech a definicích, které jsou v učebnicích vyznačeny – tučně, tabulkou, zvýrazněním. Frausovské učebnice jsou více popisné ve svých přehledech – *Slovníčky, Co jsme objevili, Jak na to, Zapamatujeme si* a závěrečné přehledy *Co musíme vědět*.

- Operace násobení a dělení: Násobení a dělení je ve všech učebnicích uváděno dohromady, nebo s návazností hned po sobě.
- Aritmetika a geometrie: Frausovské a Prometheovské učebnice vydělují geometrii do vlastních učebnic. Témata z aritmetiky jsou předávána komplexně a v rámci jednoho celku. Po zvládnutí jednoho tématu se přechází na další. Učebnice Prodos kombinují kapitoly z aritmetiky a geometrie v rámci všech učebnic, stejně jako tomu bylo v učebnicích pro 1. stupeň ZŠ.
- Slovní úlohy: Poměr slovních úloh a jiných typů cvičení je ve všech učebnicích srovnatelný. Slovní úlohy ani nedominují, ani nejsou opomíjeny.
- Odhad: Učebnice 2. stupně ZŠ se na odhady již nezaměřují.
- Netradiční metody násobení: Ani jedna z učebnic 2. stupně pro ZŠ nevyužívá jiných metod násobení, než jsou klasické metody (pamětné a písemné násobení). Je to dané i tím, že násobení desetinných čísel, zlomků a celých čísel má svoje specifika.
- Závěrečné opakování/ Příprava na přechod na 2. stupeň ZŠ: Kapitoly v učebnicích Fraus jsou vždy zakončeny *Zkouškou znalostí*. V závěru učebnice je kapitola *A ještě něco navíc*, která shrnuje učivo celého ročníku. Učebnice Prometheus jsou řešeny obdobně. Každá kapitola je zakončena *Úlohami na závěr* a v na konci učebnice jsou *Souhrnná cvičení*. Na konci učebnic Prodos je *Závěrečné opakování*.

Při výběru učebnice je pro učitele důležité několik parametrů: rozdělení učiva, jeho návaznost, přehledy učiva, dostatek příkladů, výsledky příkladů, elektronická, či interaktivní verze učebnice ad. Volbu řady učebnic může ovlivnit i její formální vzhled: Pokud je učebnice rozdělena do více dílů, mohou žáci nosit pouze jeden díl, který není tak těžký jako učebnice, která je určena pro celý ročník. Pro přehled některých dalších formálních parametrů byla vytvořena následující tabulka, která zaznamenává a srovnává základní parametry jednotlivých sad učebnic z formálního pohledu a nezabývá se jejich obsahem jako takovým. Tyto hodnoty vycházejí z výše uvedených podkapitol a z webových stránek jednotlivých nakladatelství: Alter (Nakladatelství Alter, 2020), Fraus (Fraus, 2023), Prodos (Prodos, 2019), Prometheus (Prometheus, spol. s.r.o., 2020).

	Zaměření učebnic podle ročníku/ stupně ZŠ	Počet dílů učebnice pro jeden ročník	Formát učebnic	Počet stran jednoho dílu učebnice	Počet kapitol jednoho dílu učebnice	Podkapitoly	Doložka MŠMT	Elektronická verze	Interaktivní verze
Alter	1.-2. ročník	4	A4	32	16*	ne	ano	ano	ano
	3.-5. ročník	3	165x230 mm	62	20-34	ne	ano	ano	ne
Fraus	1. stupeň	1 (2. ročník má 2 díly)	195x260/ 210x297 mm	68-113	28-33	ne	ano	ano	ano
	2. stupeň	2	210x280 mm	80-127	7-9	ano	ano	ano	ano
Prodos	1. stupeň	3	200x260 mm	64	11-30	ano*	ano	ne	ne
	2. stupeň	1	200x 260 mm	114-160	8-13	ano	ano	ne	ne
Prometheus	1. stupeň	1	B5	63-135	3-6	ano*	ano	ne	ne
	2. stupeň	3	B5	80-116	6-10	ano	ano	ne	ne

Tabulka 8: Přehled formálních parametrů zkoumaných sad učebnic

* Kapitoly/ podkapitoly nejsou uvedeny v obsahu učebnice.

4 ANALÝZA A POROVNÁNÍ METOD NÁSOBENÍ

Základem pro analýzu a porovnání metod násobení je kapitola *2 Teoretická východiska práce*, kde jsou tyto metody popsány a rozebrány. Metody násobení budou v této kapitole analyzovány a komparovány, i pro výběr vhodných metod násobení pro tvorbu didaktických pomůcek.

Z malé násobilky vychází většina metod násobení víceciferných čísel. Je možné si jí osvojit následujícími způsoby:

- Zapamatování si násobků (pamětné učení)
- Násobky získáme opakovaným sčítáním (definice násobení)
- Práce s tabulkou násobení (přehled)
- Reprezentace násobení pomocí různých způsobů (kombinatorika)
    - Grupování, organizovaný list, tabulka, stromový diagram, obsah obdélníku
- Cikánská násobilka (pro zvládnutí druhé poloviny násobilky)

Více či méně jsou všechny tyto způsoby využívány při seznamování dětí s malou násobilkou, s výjimkou cikánské násobilky. Ta při svém výpočtu využívá rozklad čísel, doplňky čísel, dílčí součin i součet. Pro žáky 1. stupně ZŠ je to hodně operací najednou, které by navíc měli zvládnout zpaměti. Místo pochopení principu tohoto násobení by tak mohli snadno sklouznout k mechanickému počítání bez porozumění. Zmechanizování bez porozumění hrozí také u pamětného učení a vyhledávání násobků v tabulce. Na smysl násobení se zaměřuje princip násobení (opakované sčítání) a reprezentace násobení různými způsoby, jež využívají grafického znázornění součinu. Didaktických pomůcek a přehledů je pro malou násobilku mnoho. Svůj význam by však mohla nalézt didaktická pomůcka zaměřující se na různé reprezentace násobení.

S násobením racionálních čísel se pojí jistá specifika:

- Násobení <u>10, 100, 1 000, …</u> funguje ve všech numeracích stejně.
- Násobení <u>desetinných čísel</u> se provádí jako násobení celých nezáporných čísel a do výsledku zapíšeme desetinnou čárku tak, aby počet desetinných míst výsledku odpovídal součtu desetinných míst čitatelů.

- U násobení zlomků navzájem násobíme čitatele a jmenovatele (dle vzorce):

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

  - Z celých racionálních čísel je násobení zlomků nejvíce odlišné a žáci s ním mají velmi často problémy. V kapitole *2.2.4. Násobení zlomků* je toto násobení vysvětleno několika způsoby. Příklady, které by tímto způsobem žáky naváděly k principu násobení, by mohli pomoci k jejich pochopení.
- Násobení záporných čísel využívá komutativního zákonu, asociativního zákonu a vytýkání. Znaménko/a mínus se vytkne/ou před dané činitele a vynásobí se zvlášť. Zbydou kladná čísla, jejichž násobení již řeší klasické násobení celých nezáporných čísel.

Ve většině českých škol i učebnic se setkáme se dvěma typy násobení (klasické metody násobení): násobení rozkladem a násobení pod sebou. Po tyto dvě metody je nejefektivnější znalost násobků malé násobilky zpaměti – není potřeba vyhledávat dané násobky, odvozovat si je z definice násobení, nebo graficky znázorňovat.

Násobení rozkladem

Touto metodou se na 1. stupni ZŠ obvykle zavádí násobení víceciferných kladných čísel. Žáci již znají násobení jednociferných čísel, na což navazuje násobení rozkladem, při němž využívají distributivního, komutativního i asociativního zákona. Tento způsob násobení kvalitně vysvětluje princip násobení, ale pro víceciferná čísla není přehledný. Z toho důvodu se později přechází na násobení pod sebou.

Násobení pod sebou

Původně se násobená čísla nezapisovala pod sebou, ale vedle sebou. Výpočet se prováděl zleva doprava a zapisoval se pod čitatele. Později se přešlo na násobení zprava, ale cifry byly vybírány zleva i zprava. V původní verzi také nebyly zachovávány řády v mezivýpočtech, což bylo nepřehledné. Násobení pod sebou, u kterého se násobilo od nejnižších řádů k těm nejvyšším (zprava doleva) a začaly se dodržovat řády v částečných výpočtech, zjednodušilo a zpřehlednilo celou operaci. Princip tohoto násobení je stejný jako u násobení rozkladem, jenom jde o jiný zápis.

Egyptské násobení – duplace, zdvojování

Egypťané počítali v desítkové soustavě, a přesto si násobení ponechalo ráz původně používané dvojkové soustavy. Metoda je založena na distributivním zákonu a práci s pojmy operátor a množství. Není příliš složitá, jedná se o sčítání čísel se sebou samými (zdvojování), ale pro větší čísla je zdlouhavá a náchylná k chybám z nepozornosti. Metoda je zajímavá tím, že se počtář omezí na pouze na sčítání a vyhne se tak klasickému násobení a práci s malou násobilkou. I s ohledem na to, že tato metoda byla používána až do 17. století a zmiňuje ji i učebnice nakladatelství Fraus, by bylo vhodné žáky s touto metodou seznámit.

Mezopotámské násobení

Násobení po způsobu mezopotámských kultur, bylo podobné našemu, neboť násobili podle řádů. Jejich dominantní soustavou však byla soustava šedesátková, což znesnadňovalo práci s malou násobilkou, která má přes patnáct set násobků. K násobení využívali násobící tabulky pro vybraná čísla, aby jich nebylo tolik. Počítání v různých číselných soustavách je pro rozvoj žáků přínosné, ale jsou mnohem vhodnější soustavy k takovému počítání. Práce s násobícími tabulkami navíc nemusí vést k pochopení operace násobení.

Řecko – římské násobení

Řecká i římská civilizace se v násobení inspirovala u výše zmíněných kultur. Měli tři způsoby násobení: zpaměti, duplací a pomocí tabulek. Počítali v desítkové soustavě, což, v porovnání s mezopotámským násobením, ulehčilo práci s malou násobilkou a přiblížili se tak našemu klasickému násobení. Rozdíl zůstává v tom, že násobili zleva doprava, kvůli čemuž museli výpočty stále přepisovat. Metody, ve kterých se mezivýsledky přepisují, jsou nepřehledné a náchylné k chybování. V rámci historie vývoje klasického násobení je možné tuto metodu před dětmi zmínit, ale počítání zprava doleva je pro běžné užití výhodnější.

Galea/batello (indické násobení)

V této metodě se činitelé zapisovali pod sebe a spodní se posouval zleva doprava podle řádů. Jádrem této metody je mazání a přepisování částečných výsledků. Původně se počítání provádělo na poprášené desky. To bylo celkem přehledné, i přestože se počítalo zleva doprava. Velkou nevýhodou ale bylo, že se počtář nemohl vracet k mezivýpočtům, a pokud udělal chybu, musel počítat od začátku. Se zápisem na papír bylo možné se vracet k předchozím výpočtům, ale zápis algoritmu byl pro škrtání a nadepisování velmi chaotický. Dopředu vyžadoval správné rozvržení na papír a pro náročnost byl často využíván distributivní zákon. Jde o nejméně přehlednou metodu násobení náchylnou k chybování.

Bhaskary (Indické násobení)

Zjednodušená forma metody galea. Posun činitelů byl zajištěn pomocí proužku papíru, na který byl jeden činitel zapsán v opačném pořadí. To zpřehlednilo zápis: nic se nepřepisovalo ani neškrtalo, výpočet se psal mimo posouvající se činitele, a navíc se násobilo od jednotek k vyšším řádům. Až na způsob zápisu se v podstatě jedná o násobení pod sebou. Taková alternace klasického násobení by mohla žáky zaujmout.

Multiplicare per crocetta (indické násobení)

Zjednodušení předchozí verze bhaskary. Jedná se o stejný princip násobení, s tím rozdílem, že činitelé se podle řádů zapsali pod sebe a veškeré mezivýpočty prováděl počtář z hlavy. Zkušený počtář se tak nezdržoval s mezivýpočty, ale pro běžného počtáře se jednalo o obtížný úkol. Tento způsob násobení je náročný na představivost a vyžaduje dobrou krátkodobou paměť pro udržení částečných výsledků před jejich sečtením. Žákům, kteří mají potíže s násobením, by tento způsob v objasnění nepomohl.

Gelosia (indické násobení)

Gelosia, také zvaná indické násobení, je jedna z nejpřehlednějších metod násobení pro libovolně zvolené činitele. Počítání je rychlé a přehledné díky tabulce, se kterou se pracuje. Tabulka rozděluje činitele podle řádů a jejich částečné násobky třídí do řádů vedoucích k výsledku. Mechanismus násobení je snadné si osvojit a princip tohoto násobení je lehce vysvětlitelný. Největším zdržením je rozvržení tabulky pro násobení. Tento způsob násobení je zmíněn také v učebnicích Fraus a Prodos. Jelikož se jedná o intuitivní metodu násobení, která může být pro mnoho žáků přehlednější než klasické násobení, měla by rozhodně být inspirací pro nějakou didaktickou pomůcku.

Napierovy tyčinky

Napierovy tyčinky kombinují práci s tabulkou malé násobilky a indickým násobením (gelosia). Tyčinky představují násobky malé násobilky, z nichž se složí jeden činitel. K získání součinu čísel se využívá distributivní zákon a dílčí násobky vyčteme z příslušných řádků sestavených tyčinek. Tento způsob násobení nevyžaduje znalost malé násobilky, neboť se pracuje s její tabulkou. Násobení víceciferných čísel je přehledné a efektivní.

Čínské grafické násobení

Jediné násobení, které pro vyobrazení násobků nepoužívá čísla. Cifry jednotlivých řádů jsou představovány graficky – soustavou čar. V principu jde o indický algoritmus násobení (gelosia). Metoda já přehledná pro malá čísla. Při násobení velkých čísel, a obzvláště čísel, která obsahují číslice větší než 4, je složité se orientovat v řádech. Pro získání výsledku se navíc převádí velká čísla mezi řády. Algoritmus se dotýká i geometrie – pracuje s průniky čar (úseček). Pro svůj netradiční zápis by i tato metoda měla být představena žákům, minimálně jako zajímavost, s podmínkou použití vhodných činitelů.

Čínské početní násobení

Původně se jednalo o manipulativní práci s tyčinkami, které představovaly čísla, v tabulce o třech řádcích a několika sloupcích. Tento způsob násobení byl přehledný, i přestože se násobilo zleva doprava, neboť tyčinky bylo možné odebírat a přidávat. Při přenosu počítání na papír se operace stala složitější, neboť počítání zleva vyžaduje škrtání a přepisování, nebo počítání i složitějších násobků z hlavy. Pokud bychom počítali touto metodou, ale násobily čísla zprava, algoritmus by byl jednoduchý a přehledný. Od klasického násobení pod sebou se tato metoda liší také zápisem a pořadím násobených čísel: násobíme 2. činitel ciframi 1. činitele a výsledek násobení se zapisuje mezi tyto činitele do prostředního řádku.

Na závěr této kapitoly je uvedena tabulka shrnující vlastnosti jednotlivých typů násobení. Tabulka obsahuje několik údajů. V prvním sloupci jsou zapsány číselné soustavy, ve kterých se toto násobení původně používalo. Ostatní údaje v tabulce jsou popsány pomocí těchto znaků:

✓ násobení danou vlastnost obsahuje, nebo s ní pracuje

✗ násobení danou vlastnost neobsahuje, nebo s ní nepracuje

***1** tato vlastnost není relevantní pro daný typ násobení

***2** násobení danou vlastnost nevyužívá primárně ve svém principu (ale obecně ji může také využívat)

***3** údaje pro určení této vlastnosti nejsou známé

***4** tento typ násobení splňuje vlastnost pro malá čísla a nesplňuje ji pro čísla velká

NÁSOBENÍ	Původní soustava, ve které se počítalo	Využívá malé násobilky	Pracuje s operátorem a množstvím	Využívá násobících tabulek	Zápis násobení	Přehledné	Přepisování/ škrtání	Rychlé	Distributivní z.: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$	Komutativní zákon: $x \cdot y = y \cdot x$	Asociativní zákon: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	Vhodné pro didaktickou pomůcku
Rozkladem	*1	✓	✓	*2	→	✗	✓	✗	✓	✓	✓	✓
Pod sebou	*1	✓	✗	*2	←	✓	✗	✓	*2	*2	*2	✓
Egyptské	(2) 10	✗	✓	✗	→ i ←	✓	✗	✗	✓	*2	*2	✓
Mezopotámské	60	✓	✗	✓	←	✗	✗	✗	*2	*2	*2	✗
Řecko – římské	10	✓	✓	✓	→	✗	✗	✗	✓	*2	*2	✗
Galea/ batello	10	✓	✗	*2	→	✗	✓	✗	✓	*2	*2	✗
Bhaskary	10	✓	✗	*2	←	✓	✗	✓	*2	*2	*2	✓
Multiplicare per crocetta	10	✓	✗	✗	←	✓	✗	✓	*2	*2	*2	✗
Gelosia	10	✓	✗	*2	*1	✓	✗	✓	*2	*2	*2	✓
Napierovy tyčinky	10	✓	✓	✓	←	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓
Čínské grafické	*3	✗	✗	✗	←	*4	✗	*4	*2	✓	*2	✓
Čínské početní	*3	✓	✓	*2	→	✗	✓	✓	*2	*2	*2	✗

Tabulka 9: Tabulka shrnující vlastnosti metod násobení pro víceciferná čísla

5 DIDAKTICKÉ POMŮCKY ZAMĚŘENÉ NA NÁSOBENÍ

Didaktické pomůcky jsou předměty, které usnadňují pochopení učiva. Pro tvorbu didaktických pomůcek zaměřených na násobení je vhodné vybrat metody násobení, jejichž algoritmus je jednoduchý, snadno srozumitelný, přehledný a rychlý. V závěrečné tabulce v předchozí kapitole bylo vyhodnoceno sedm metod násobení vhodných ke tvorbě didaktických pomůcek. Z nich byly vybrány následující čtyři:

- Egyptské násobení
- Indické násobení Gelosia
- Napierovy tyčinky
- Čínské grafické násobení

Pomocí egyptského, indického a čínského násobení, i pomocí Napierových tyčinek, je možné počítat také s:

- celými čísly – pokud znaménka násobíme zvlášť
- desetinnými čísly – jestliže s nimi počítáme jako celými nezápornými čísly a desetinnou čárku doplníme do výsledku podle součtu desetinných míst obou činitelů

Násobení celých nezáporných čísel se rozvíjí na 1. stupni ZŠ. Pomůcky tedy naleznou svoje uplatnění především zde. Operace násobení se na 2. stupni ZŠ rozšiřuje o desetinná čísla, celá čísla a zlomky. Předpokladem k pochopení nástavbového učiva je zvládnutí učiva základního. Ne všichni žáci si ale stihnou plně osvojit násobení celých nezáporných čísel do 2. stupně. Pomalejším žákům, kteří mají problémy s běžným násobení rozkladem a pod sebou, mohou didaktické pomůcky pomoci s pochopením principu násobení i jeho aplikací. Pro zdatnější žáky může být práce s pomůckami naopak výzvou k objevování jiných metod násobení. Až na čínské násobení jsou pomůcky vytvořeny tak, aby se s nimi žáci 2. stupně ZŠ mohli seznámit sami. Ke každé pomůcce je vytvořen návod. Počtář se v návodu seznámí s principem dané metody násobení, s tím, jak pracovat s danou didaktickou pomůckou, a s vybranými matematickými pojmy. Pro čínské a indické násobení jsou v návodu uvedeny i vhodné příklady k procvičení s požadovaným stupňováním náročnosti. Jednotlivé didaktické pomůcky a návody k nim jsou uvedeny v přílohách. Ke každé příloze je uveden QR kód, pod kterým je uložen daný dokument v lepší kvalitě a ve správném rozměru pro tisk.

5.1 Čínské násobení

Čínské násobení je netradiční svým zápisem, neboť nevyužívá pro zápis násobení čísel ale soustavy čar. Metoda je velmi specifická: Pro čísla, která mají ve svém číselném zápise cifry od 0 do 4, je přehledná a relativně rychlá. Pro ostatní číslice se stává násobení náročnou operací. Proč byla taková metoda vybrána mezi didaktické pomůcky, když je její využití omezené? Právě pro její grafické zpracování. Jedná se totiž o jedinou metodu, která využívá grafické reprezentace činitelů, a jako jedná explicitně ukazuje komutativní zákon, neboť nezáleží na tom, které číslo si vyobrazím v jednom směru a které v druhém. Při výběru vhodných příkladů je možné žáky seznámit s tímto násobením tak, aby je pochopili a zorientovali se v něm. Didaktická pomůcka, pojmenovaná po tomto násobení, má více úrovní. Začíná se na základní úrovni, která nepracuje s malou násobilkou, neboť mezivýpočty je možné získat součtem průniků /překřížení, a která se zaměřuje na převody mezi řády. V další úrovni se již apeluje na využití malé násobilky k získání mezivýpočtů a převody mezi řády se provádějí z hlavy. Postupně s dalšími úrovněmi se nároky zvyšují s počtář se dostane až k samotnému násobení na papíře, které využívali staří Číňané.

Pomůcka zahrnuje:

- sada pro násobení – uvedena v ***příloze 1***
- zápisový lístek – uveden v ***příloze 2***
- rýžový převodník – uveden v ***příloze 3***
- návod – uveden v ***příloze 4***

Sada násobení v sobě zahrnuje násobící desku, sadu misek na rýži, dvě sady hůlek (černé a červené), čtyři sady rýží (modrá, zelená, žlutá a oranžová), zápisový lístek a rýžový převodník. V návodu je nejprve vysvětlen princip čínského násobení. Dále jsou poskytnuty informace o obsahu násobící sady a důležité informace před začátkem používání této sady. Práce se sadou je v návodu nazývána hrou a je rozdělena do několika úrovní: základní hra, 1. pokročilá hra, 2. pokročilá hra a expertní hra. Poslední podkapitola se zabývá speciálním případem násobení, ve kterém alespoň jedno z čísel obsahuje 0. V návodu také nalezneme stupňované příklady k procvičení čínského násobení i s klíčem v závěru publikace. Pro rozšíření znalostí je vložena kapitola *Zajímavá fakta* přinášející historické poznatky o čínských hůlkách a rýži. Zbylé kapitoly jsou *Slovníček pojmů* a *Zdroje*.

Didaktický rozměr pomůcky:

- Pomůcka seznamuje s historickou formou násobení
- Grafické vyobrazení čísel
- Číselné řády a jejich určování
- Převody mezi řády
- Slovní úloha
- Práce s tabulkou
- Rozvoj matematických pojmů: cifra, číselný řád, činitel, průsečík,…
- Rozvoj abstraktní představivosti
  - S postupem do vyšších úrovní hry se rozvíjí abstraktní představivost, neboť pomocné modely (zrnka rýže, hrací deska, hůlky …) jsou odstraňovány
- Ukázka směnného obchodu (směňování rýže o různé hodnotě)
- Trénink jemné motoriky (manipulace s rýží)
- Mezipředmětové vztahy se zeměpisem a dějepisem (hůlky, rýže)
- Stupňované příklady k procvičení + klíč řešení

5.2 Egyptské násobení

Didaktická pomůcka založená na egyptském násobení a po něm také pojmenovaná. Egyptské násobení je sice přehlednou metodou, ale její algoritmus je zdlouhavý. Proč byla tedy tato metoda zvolena pro didaktickou pomůcku, když není efektivní? Ze tří důvodů:

1. Metoda pracuje s principem násobení – <u>opakovaným sčítáním</u>. Opakované sčítání se realizuje zdvojováním.
2. Aby bylo možné se dostat k požadovanému výsledku pomocí zdvojování využívá tento způsob násobení <u>distributivního zákonu</u>.
3. Tím, že se metoda zabývá opakovaným sčítáním, pracuje i s pojmy <u>operátor</u> a <u>množství</u>.

I přestože není tato metoda efektivní, mohou díky ní děti rozvíjet jednotlivé prvky násobení, které zahrnuje. Pomůcka seznamuje také s historickou formou násobení, čímž si žáci rozšiřují povědomí o historii matematiky. Lidstvo muselo projít dlouhým vývojem, než se dostalo od egyptského násobení k násobení pod sebou.

Pomůcka zahrnuje:

- zápisový lístek – uveden v ***příloze 5***
- návod – uveden v ***příloze 6***

Zápisový lístek představuje předepsanou tabulku pro násobení libovolného operátoru a množství o maximální hodnotě 255. Vedle tabulky je dostatek místa pro mezivýpočty. Návod popisuje princip duplace, práci se zápisovým lístkem, obsahuje slovníček pojmů, zdroje a list pro případné poznámky.

Didaktický rozměr pomůcky:

- Pomůcka seznamuje s historickou formou násobení
- Pracuje s principem násobení – opakované sčítání (zaměřené na množství 2)
- Aplikace distributivního zákonu
- Rozvoj matematických pojmů: operátor, množství, distributivní zákon,…
- Práce s tabulkou
- Algoritmus násobení řeší posloupnost kroků a připravuje na programování
  - je nutné následovat dané kroky v určitém pořadí

5.3 Indické násobení a Napierovy tyčinky

Indické násobení bylo vybráno pro tvorbu didaktické pomůcky, neboť patří mezi nejvíce přehledné metody násobení. Princip násobení je stejný jako u násobení pod sebou, ale liší se zápisem. Přehlednost a srozumitelnost této metody je dána tabulkou, která rozděluje činitele, mezivýsledky i výsledný součin podle řádů do vlastních políček. Největším zdržením u této metody je načrtnutí tabulky. Didaktické pomůcky k indickému násobení jsou předepsané tabulky pro násobení dvojciferných čísel a trojciferných čísel. Tyto tabulky zrychlují násobení tím, že si počtář nemusí črtat vlastní tabulku. Stejně tak jako u sebe běžně nenosíme tabulku malé násobilky, nebudeme mít vždy u sebe násobící tabulky. Počtář je proto veden k tomu, aby si osvojil indické násobení i s tvorbou vlastních tabulek. Tento způsob násobení předpokládá znalost malé násobilky.

Napierovy tyčinky oproti tomu pracují s tabulkou malé násobilky, takže její znalost není nutná. Tyčinky jsou uvedeny společně s indickým násobením, neboť obsahují jeho prvky. Stejně jako u indického násobení se násobí podle řádů a explicitně navíc využívá distributivního zákona. Práce s Napierovými tyčinkami je podmíněna znalostí indického násobení a počtář by měl na princip počítání s nimi přijít sám.

Pomůcka zahrnuje:

- zápisový lístek pro dvojciferná čísla (indické násobení) – uveden v ***příloze 7***
- zápisový lístek pro trojciferná čísla (indické násobení) – uveden v ***příloze 8***
- magnetická sada (Napierovy tyčinky) – uvedena v ***příloze 9***
- šablona (Napierovy tyčinky) – uvedena v ***příloze 10***
- návod – uveden v ***příloze 11***

Zápisový lístek pro dvojciferná čísla představuje předepsanou tabulku pro násobení jednociferných až dvojciferných čísel. Zápisový lístek pro trojciferná čísla představuje předepsanou tabulku pro násobení jednociferných až trojciferných čísel. Magnetická sada Napierových tyčinek obsahuje magnetické tyčinky, které se kladou na magnetickou tabulku. Pro tvorbu vlastních Napierových tyčinek z papíru je uvedena šablona těchto tyčinek (doporučujeme podlepit tyčinky kartonem, aby se s nimi lépe pracovalo). Návod se dělí na dvě hlavní kapitoly. V první je popsáno indické násobení, ve které se počtář dozví, jaký je jeho princip. Pomocí motivačního příkladu z indické tržnice je seznámen s prací se zápisovými lístky i s tvorbou vlastních tabulek pro násobení. Podkapitola *Zajímavost k zamyšlení* vede k finanční gramotnosti a převodům měn. Na závěr jsou uvedeny příklady vhodné k procvičení indického násobení. Druhá kapitole se zabývá Napierovými tyčinkami. Práce s nimi se odvíjí od znalosti indického násobení a kapitole je vysvětlen princip práce s těmito tyčinkami. V návodu také nalezneme slovníček pojmů, zdroje a klíč k příkladům.

Didaktický rozměr pomůcky:

Indické násobení:

- Pomůcka seznamuje s historickou formou násobení
- Práce s tabulkou
- Číselné řády a jejich určování
- Převody mezi řády
- Aplikace distributivního zákonu
- Slovní úloha (rozhor slovní úlohy a její zápis)
- Třídění informací
- Rozvoj matematických pojmů: číselný řád, diagonální, distributivní zákon,…
- Mezipředmětové vztahy se zeměpisem (vybrané poznatky o Indii)
- Finanční gramotnost a převody měn
- Stupňované příklady k procvičení + klíč řešení

Napierovy tyčinky:

- Pomůcka seznamuje s historickou formou násobení
- Práce s tabulkou
- Práce s tabulkou malé násobilky
- Aplikace distributivního zákonu
- Číselné řády a jejich určování
- Převody mezi řády
- Rozvoj matematických pojmů: distributivní zákon,…

6 DISKUZE

Vytyčeným cílem této práce je analýza metod násobení, jejich porovnání a vytvoření didaktických pomůcek k těmto metodám. V první části byla vyhledána a nastudována literatura k této tématice. Operace násobení je v teoretické části zpracována z několika hledisek: rozebírá podstatu operace násobení a její princip v různých číselných soustavách, přináší možnosti reprezentace násobení, zabývá se jeho rozvojem po stránce didaktické i vývojem z historického pohledu a věnuje se také specifikům násobení racionálních čísel, tj. desetinných čísel, zlomků a záporných čísel. Publikace, ze kterých bylo čerpáno, se zaměřovali na větší celky, do kterých násobení spadalo: dějiny matematiky, matematika na základní škole, aritmetika, numerační soustavy,… Tato práce se soustředí pouze na operaci násobení, díky čemuž přináší jedinečný a podrobný přehled o této operaci. Do tohoto přehledu samozřejmě spadají i následující kapitoly, které se konkrétněji soustředí na rozbor násobení v učebnicích, analýzu metod násobení a didaktické pomůcky k těmto metodám.

Aby bylo zřejmé, jaké výstupy jsou po žácích vyžadovány, bylo nutné nastudovat rámcové vzdělávací programy. Z nich vyplývá, že úkolem žáka na prvním stupni je naučit se násobit písemně i z hlavy v oboru přirozených čísel. Žák druhého stupně pokračuje dál a jeho úkolem je osvojení si násobení racionálních čísel. Většina učebnic matematiky však přináší počátky násobení desetinných čísel a zlomků už na prvním stupni.

V bakalářské práci jsem se věnovala analýze učebnic matematiky pro střední školy. Není tedy divu, že mě zajímala výstavba násobení v učebnicích pro základní školy. Jejich analýza je zajímavou a přínosnou částí této práce: ukazuje rozdíly mezi rozvojem násobení na 1. a 2. stupni ZŠ a porovnává možnosti podání jednotlivých témat násobení v různých učebnicích. Jde pouze o vybraný vzorek učebnic, neboť cílem této práce není provést analýzu všech učebnic matematiky pro základní školy, ale tato analýza má rozšířit přehled o možnostech didaktického zpracování násobení. Byly vybrány 4 sady učebnic z nakladatelství Alter, Fraus, Prodos a Prometheus. Nakladatelství byla vybrána tak, aby vydávala učebnice pro 1. i 2. stupeň ZŠ. Výjimkou je nakladatelství Alter, které vytváří učebnice pouze pro 1. stupeň a které bylo zařazeno z osobních důvodů (*tyto učebnice jsem používala na základní škole*). Překvapivým zjištěním bylo, že i přestože nakladatelství vydávají učebnice pro 1. a 2. stupeň ZŠ, učebnice na sebe nenavazují. Je to dané tím, že s přechodem na druhý stupeň se mění styl výuky a požadavky na žáky, i tím, že učebnice vytvářejí jiné autorské kolektivy.

V teoretické části byly popsány a vysvětleny všechny sebrané metody násobení. Není pochyb o tom, že se v historii objevily i jiné metody. Některé se nedochovali a s jinými jsme se při sepisování této práce nesetkali. V kapitole *4 Analýza a porovnání metod násobení* byly zjištěné metody rozebrány a vzájemně komparovány především z pohledu efektivity, přehlednosti a rychlosti daného způsobu. Metody pro násobení čísel malé násobilky byly rozebrány jako první a na ně navázalo násobení víceciferných čísel, které ve většině případů s malou násobilkou pracuje. Analýza pracuje s předpokladem, že žák se ve škole seznámí s násobením rozkladem a s násobením pod sebou, což bylo zjištěno z analýzy učebnic. Proto jsou tyto metody rozebrány jako první. Tato analýza slouží také pro určení vhodných metod násobení k tvorbě didaktických pomůcek.

Z uvedených metod násobení byly vybrány 4 metody ke tvorbě didaktických pomůcek. Jejich výběr byl dán efektivitou, přehledností, rychlostí výpočtu, exkluzivitou zápisu, či historickým stupněm v násobení, který představují. I jiné metody násobení mají svůj potenciál pro tvorbu takových pomůcek, ale z důvodu rozsahu této práce k nim nebylo přistoupeno. Zajímavé didaktické pomůcky by bylo možné vytvořit i pro násobení zlomků, přičemž námětem by mohla být jejich reprezentace uvedená v teoretické části. Vytvořené pomůcky jsou pojmenované podle metod násobení, které prezentují. Rozvíjejí znalosti a dovednosti spojené s operací násobení. Pomůcky mohou mít různé využití. Díky těmto pomůckám, by mohli slabší žáci najít vlastní cestu k násobení a pro zdatnější žáky bude samostatná práce s pomůckami výzvou. Velké využití těchto pomůcek si umím představit při speciálních příležitostech (zaměřené dny s matematikou, popularizační akce aj.), kde je prostor pro seznámení s alternativními metodami násobení a s historií matematiky.

Tato práce by jako celkem mohla pomoci učitelům na 1. i 2. stupni základních škol při výuce násobení. Učitelé se mohou inspirovat už v teoretické části, která přináší podrobný přehled o této operaci. Smyslem didaktických pomůcek je představení principu násobení na alternativních metodách. Pomůcky by měli žákům pomoci s osvojením si násobení a dovednostech s tím spojených. Dvě tyto pomůcky jsou přímo určeny pro samostatnou práci žáků 2. stupně ZŠ.

7 ZÁVĚR

Tato závěrečná práce s zabývá operací násobení. Konkrétně se zaměřuje na metody násobení a tvorbu didaktických pomůcek pro seznámení s těmito metodami a pro zlepšení znalostí a dovedností v oblasti násobení.

V teoretické části jsou shrnuty získané informace o této operaci: definice a princip násobení, možnosti reprezentace, postupný rozvoj násobení z didaktického pohledu a specifika násobení některých čísel. V této části je také popsáno jedenáct historických forem násobení a požadavky kladené rámcovými vzdělávacími programy na základní vzdělávání ve spojitosti se zkoumanou operací.

Základní podporou ve výuce je učebnice, a proto se další část práce zabývá analýzou rozvoje násobení v učebnicích. Do výzkumu byly vybrány čtyři sady učebnic z nakladatelství Alter, Fraus, Prodos a Prometheus. Analýza se zaměřuje na rozvoj operace násobení, jeho zpracování i využití netradičních metod násobení. Učebnice pro 1. a 2. stupeň ZŠ jsou komparovány zvlášť, neboť jejich zaměření je rozdílné a tvoří je jiné kolektivy autorů.

Metody násobení jsou porovnány s ohledem na rozvoj násobení. Nejprve jsou komparovány metody pracující s malou násobilkou a až poté metody pro násobení celých nezáporných čísel. Násobení racionálních čísel má svá specifika, která jsou přednesena a vysvětlena. Díky těmto specifikům je možné využít metody pro násobení celých nezáporných čísel i pro racionální čísla.

Na základě analýzy a porovnání metod násobení i na základě analýzy učebnic byly vytvořeny tři didaktické pomůcky pojmenované po vybraných metodách násobení: Čínské násobení, Egyptské násobení a Indické násobení + Napierovy tyčinky. Tyto pomůcky přinášejí historické formy násobení, které jsou svým algoritmem přehledné a efektivní, zajímavé pro své zpracování, nebo zajímavé z pohledu historického vývoje operace s důrazem na význam násobení. Didaktické pomůcky se nezaměřují pouze na rozvoj násobení, ale také na související dovednosti jako převody jednotek, aplikace distributivního zákonu, práce s tabulkou apod.

8 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

BOUDOVÁ, Anna. *Analýza učebnic matematiky pro střední školy zabývající se vybranými funkcemi*. České Budějovice, 2021. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Vedoucí práce doc. RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

BALADA, František. *Z dějin elementární matematiky* [online]. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1959 [cit. 2022-11-22]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Historie_MFF/Balada.pdf

BALADA, Jan et al. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, leden 2021 [cit. 2022-02-07]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/4982/

BECKMANN, Sybilla. *Activities to Accompany Mathematics for Elementary Teachers*. 2. Boston: Pearson Education, Inc., Addison Wesley, 2008a. ISBN 978-0-321-44976-4.

BECKMANN, Sybilla. *Mathematics for Elementary Teachers*. 2. vydání. Boston: Pearson Education, Inc., Addison Wesley, 2008b. ISBN 978-0-321-44971-9.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *MATEMATIKA 6, Aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia* [online]. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2007 [cit. 2022-10-21]. ISBN 978-80-7238-654-3.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *MATEMATIKA 7, Aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia* [online]. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2008 [cit. 2022-10-24]. ISBN 978-80-7238-679-6.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *MATEMATIKA 8, Aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia* [online]. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2009 [cit. 2022-10-24]. ISBN 978-80-7238-684-0.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *MATEMATIKA 9, Aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia* [online]. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2010 [cit. 2022-10-24]. ISBN 978-80-7238-689-5.

BLAŽKOVÁ, Růžena et al. *Matematika pro 3. ročník ZŠ, 1. díl*. Vydání čtvrté. Všeň: Alter, 2018a. ISBN 978-80-7245-232-3.

BLAŽKOVÁ, Růžena et al. *Matematika pro 3. ročník ZŠ, 2. díl*. Vydání čtvrté. Všeň: Alter, 2018b. ISBN 978-80-7245-233-0.

BLAŽKOVÁ, Růžena et al. *Matematika pro 3. ročník ZŠ, 3 díl*. Vydání čtvrté. Všeň: Alter, 2018c. ISBN 978-80-7245-234-7.

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇOUROVÁ. *Matematika pro 4. ročník ZŠ, 1. díl*. Vydání páté. Praha: Alter, 2018a. ISBN 978-80-7245-216-3.

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇOUROVÁ. *Matematika pro 4. ročník ZŠ, 2. díl*. Vydání páté. Praha: Alter, 2018b. ISBN 978-80-7245-217-0.

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇOUROVÁ. *Matematika pro 4. ročník ZŠ, 3. díl*. Vydání páté. Praha: Alter, 2018c. ISBN 978-80-7245-218-7.

DIVÍŠEK, Jiří, Alena HOŠPESOVÁ a František KUŘINA. *Svět čísel a tvarů: Matematika pro 2. ročník*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 978-80-7196-067-6.

DIVÍŠEK, Jiří, Alena HOŠPESOVÁ a František KUŘINA. *Svět čísel a tvarů: Matematika pro 4. ročník*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 978-80-7196-157-4.

DIVÍŠKOVÁ, Michaela et al. *Z historie početních postupů a operací*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2021. Pedagogica et psychologica. ISBN 978-80-7394-902-0.

EICHLEROVÁ, Marie, Hana STAUDKOVÁ a Ondřej VLČEK. *Matematika pro 2. ročník ZŠ, sešit č. 6*. Vydání jedenácté. Všeň: Alter, 2021. ISBN 978-80-7245-367-2.

EICHLEROVÁ, Marie, Hana STAUDKOVÁ a Ondřej VLČEK. *Matematika pro 2. (3.) ročník ZŠ, sešit č. 7*. Vydání desáté. Všeň: Alter, 2022. ISBN 978-80-7245-383-2.

HEJNÝ, Milan et al. *MATEMATIKA 2, 1.díl: hybridní pracovní učebnice pro 2. ročník základní školy nová generace - 2., přepracované vydání* [online]. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2019a [cit. 2022-02-09]. ISBN 978-80-7489-547-0.

HEJNÝ, Milan et al. *MATEMATIKA 2, 2.díl: hybridní pracovní učebnice pro 2. ročník základní školy nová generace - 2., přepracované vydání* [online]. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2019b [cit. 2022-02-09]. ISBN 978-80-7489-548-7.

HEJNÝ, Milan et al. *MATEMATIKA 3: učebnice pro 3. ročník základní školy nová generace - 2., přepracované vydání* [online]. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2020 [cit. 2022-02-11]. ISBN 978-80-7489-612-5.

HEJNÝ, Milan et al. *MATEMATIKA 4: učebnice pro 4. ročník základní školy nová generace - 2., přepracované vydání* [online]. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2021 [cit. 2022-02-11]. ISBN 978-80-7489-685-9.

HEJNÝ, Milan et al. *MATEMATIKA 5: učebnice pro 5. ročník základní školy nová generace – 2., přepracované vydání* [online]. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2022 [cit. 2022-10-21]. ISBN 978-80-7489-782-5.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Třetí vydání. Praha: Portál, 2015. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-262-0901-0.

HOŠPESOVÁ, Alena, Jiří DIVÍŠEK a František KUŘINA. *Svět čísel a tvarů: Matematika pro 3. ročník.* Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-117-8.

HOŠPESOVÁ, Alena, Jiří DIVÍŠEK a František KUŘINA. *Svět čísel a tvarů: Matematika pro 5. ročník.* Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 978-80-7196-192-5.

JELÍNEK, Miloš. *Numerační soustavy*. Praha: SPN, 1974. ISBN 14-392-74.

JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník ZŠ, 1. díl*. Vydání šesté. Všeň: Alter, 2016. ISBN 978-80-7245-294-1.

JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník ZŠ, 2. díl*. Vydání šesté. Všeň: Alter, 2018. ISBN 978-80-7245-295-8.

JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník ZŠ, 3. díl*. Vydání šesté. Všeň: Alter, 2019. ISBN 978-80-7245-296-5.

KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1969. ISBN 507-21-875.

KŘÍŽEK, Michal a Liping LIU. Matematika ve starověké Číně. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 1997, 42(5), 223-233. Dostupné také z: http://dml.cz/dmlcz/139411

LUHAN, Emanuel. *Kapitoly z dějin matematiky*. České Budějovice: Pedagogická fakulta v Českých Budějovicích, 1984.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 2. ročník, 3. díl*. Olomouc: Prodos, 2007a. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-183-6.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 3. ročník, 1. díl*. Olomouc: Prodos, 2007b. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-184-3.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 3. ročník, 2. díl*. Olomouc: Prodos, 2007c. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-185-0.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 3. ročník, 3. díl*. Olomouc: Prodos, 2007d. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-186-7.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 4. ročník, 1. díl*. Olomouc: Prodos, 2007e. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-203-1.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 4. ročník, 2. díl.* Olomouc: Prodos, 2007f. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-204-8.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 4. ročník, 3. díl.* Olomouc: Prodos, 2007g. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-205-5.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 5. ročník, 1. díl*. Vydání druhé. Olomouc: Prodos, 2018a. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-430-1.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 5. ročník, 2. díl*. Vydání druhé. Olomouc: Prodos, 2018b. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-431-8.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 5. ročník, 3. díl*. Vydání druhé. Olomouc: Prodos, 2018c. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-432-5.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 6*. Olomouc: Prodos, 1998. ISBN 80-858-0698-3.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 7*. Olomouc: Prodos, 1999. ISBN 80-723-0032-6.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 8*. Olomouc: Prodos, 2000. ISBN 978-80-7230-062-4.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 9*. Olomouc: Prodos, 2001. ISBN 978-80-7230-109-6

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 1. díl*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2010. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-807-1964-100.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 2. díl*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-7196-143-4.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník ZŠ. 1. díl*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011a. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-807-1964-230.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník ZŠ, 2. díl*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011b. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-807-1964-278.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník ZŠ, 1. díl*. 2. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012a. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-807-1964-346.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník ZŠ, 2 díl*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012b. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-807-1964-353.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník ZŠ, 1. díl*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2013. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-807-1964-391.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník ZŠ, 3. díl*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2014. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-807-1964-421.

Internetové zdroje

Čínské početní násobení. *Aritmetika včera a dnes* [online]. Praha: ČVUT, 2004 [cit. 2022-11-29]. Dostupné z: https://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Nasobeni_papir/cinske_nasobeni_pocetni.html

Fraus: Učebnice [online]. Plzeň: Fraus, 2023 [cit. 2023-03-09]. Dostupné z: https://ucebnice.fraus.cz/

Nakladatelství Alter: Učebnice, učební pomůcky a výukové materiály [online]. Praha: Alter, 2020 [cit. 2023-03-09]. Dostupné z: https://www.alter.cz/shop

Prodos [online]. Olomouc: Prodos, 2019 [cit. 2023-03-09]. Dostupné z: https://ucebnice.org/

Prometheus, spol. s.r.o.: Nakladatelství učebnic matematiky a fyziky [online]. Praha: Prometheus, 2020 [cit. 2023-03-09]. Dostupné z: http://prometheus-nakl.cz/index.php?zobraz=katalog

9 SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ, ZKRATEK

Seznam obrázků

Obrázek 1: Číslo $2\,212_3$ vyobrazené pomocí modelu s kameny na miskách (Jelínek, 1974, s. 68) 10

Obrázek 2: Zdvojnásobení kamenů v miskách při násobení $2\,212_3 \cdot 2_3$ (Jelínek, 1974, s. 68) 10

Obrázek 3: Úprava počtu kamenů v jednotlivých miskách (řádech), podle pravidel trojkové soustavy (Jelínek, 1974, s. 68) 11

Obrázek 4: Výsledek násobení $2212_3 \cdot 2_3$ (Jelínek, 1974, s. 68) 11

Obrázek 5: Seskupovaní objektů $(3 \cdot 5)$ 14

Obrázek 6: Seskupování objektů $(4 \cdot 6)$ 14

Obrázek 7: Vyobrazení kombinací oblečení Terezy podle organizovaného listu 15

Obrázek 8: Vyobrazení kombinací oblečení Terezy podle tabulky 15

Obrázek 9: Vyobrazení kombinací oblečení Terezy podle stromového diagramu 16

Obrázek 10: Obsah obdélníku $2 \cdot 3 = 6$ 16

Obrázek 11: 5 polovin koláčů 19

Obrázek 12: Polovina z 5 koláčů 19

Obrázek 13: Jedna polovina z jedné poloviny 19

Obrázek 14: Buchta 20

Obrázek 15: Petr dostal 2 díly buchty 20

Obrázek 16: Buchta rozdělená na 6 dílů 20

Obrázek 17: Část buchty, kterou dala babička Magdě 20

Obrázek 18: Zbytek buchty rozdělený na 5 dílů 20

Obrázek 19: Rozbor rozdělení buchty 21

Obrázek 20: Pravidla násobení kladných a záporných čísel 22

Obrázek 21: Ukázka egyptského násobení na násobku čísel 15·13 (Kolman, 1969, s. 36) 24

Obrázek 22: Indické násobení na příkladu (Dívíšková et al., 2021, s. 47-48) 27

Obrázek 23: Metoda násobení "multiplicare per crocetta" (Divíšková et. al., 2021, s. 50) 29

Obrázek 24: Muliplicare gelosia zapisovaný italským způsobem (Balada 1959, s. 57) 30

Obrázek 25: Multiplicare gelosia zapisovaný podle Al Kašiho (Balada, 1959, s. 57) .. 30

Obrázek 26: Ukázka počítání s Napierovými tyčinkami 32
Obrázek 27: Soustava Napierových tyčinek (Divíšková et al., 2021, s. 95) 32
Obrázek 28: Čínské násobení (Divíšková et al., 2021, s. 53) 33
Obrázek 29: Očekávané žákovské výstupy tematického okruhu „Číslo a početní operace" pro 1. období podle RVP ZV (zdroj: http://www.nuv.cz/file/4982/, screenshot RVP ZV (Balada et al., 2021, s. 31)) 38
Obrázek 30: Očekávané žákovské výstupy tematického okruhu „Číslo a početní operace" pro 2. období podle RVP ZV (zdroj: http://www.nuv.cz/file/4982/, screenshot RVP ZV (Balada et al., 2021, s. 32)) 39
Obrázek 31: Učivo tematického okruhu „Číslo a početní operace" podle RVP ZV (zdroj: http://www.nuv.cz/file/4982/, screenshot RVP ZV (Balada et al., 2021, s. 32)) 39
Obrázek 32: 1. část očekávaných žákovský výstupů tematického okruhu „Číslo a proměnná" podle RVP ZV (zdroj: http://www.nuv.cz/file/4982/, screenshot RVP ZV (Balada et al., 2021, s. 34)) 40
Obrázek 33: 2. část očekávaných žákovský výstupů a učivo tematického okruhu „Číslo a proměnná" podle RVP ZV (zdroj: http://www.nuv.cz/file/4982/, screenshot RVP ZV (Balada et al., 2021, s. 35)) 41
Obrázek 34: Ukázka z učebnice Matematika pro 2. ročník ZŠ, 6. díl, nakladatelství Alter (Eichlerová, Staudková a Vlček, 2021, s. 15) 43
Obrázek 35: Práce s tabulkou (Eichlerová, Staudková a Vlček, 2021, s. 28)............... 44
Obrázek 36: Písemné násobení jednociferným činitelem (Blažková et al., 2018b, s. 45) 45
Obrázek 37: Ukázka z učebnice Matematiky pro 4. ročník, 1. díl, nakladatelství Alter (Blažková, Matoušková a Vaňourová, 2018a, s. 45) 46
Obrázek 38: Násobilkové čtverce (Hejný et al., 2019a, s. 62) 47
Obrázek 39: Typ úlohy "hadi" (Hejný et al., 2019a, s. 60) 47
Obrázek 40: Ukázka z učebnice Matematika 2, nakladatelství Fraus (Hejný et al., 2019a, s. 48) 48
Obrázek 41: Indické násobení (Hejný et al., 2020, s. 22)... 49
Obrázek 42: Egyptské násobení neboli duplicírka (Hejný et al., 2021, s. 68).............. 50
Obrázek 43: Ukázka z učebnice Matematika 6 Aritmetika, nakladatelství Fraus (Binterová, Fuchs a Tlustý, 2007, s. 25) 51

Obrázek 44: Ukázka z učebnice Matematika 7 Aritmetika, nakladatelství Fraus (Binterová, Fuchs a Tlustý, 2008, s. 55) 52
Obrázek 45: Ukázka z učebnice Matematika a její aplikace pro 2. ročník, 3. díl, Prodos, modrá řada (Molnár a Mikulenková, 2007a, s. 31) 54
Obrázek 46: Úloha s počítáním v řetězcích (Molnár a Mikulenková, 2007b, s. 44) 55
Obrázek 47: Pyramidy (Molnár a Mikulenková, 2007b, s. 43) 55
Obrázek 48: Výklad násobení jednociferného a dvojciferného čísla s 1 desítkou (Molnár a Mikulenková, 2007e, s. 14) 55
Obrázek 49: Ukázka z učebnice Matematik a její aplikace pro 5. ročník, 2. díl, Prodos, modrá řada (Molnár a Mikulenková, 2018b, s. 12) 56
Obrázek 50: Ukázka z učebnice Matematika 6, nakladatelství Prodos (Molnár et al., 1998, s. 48) 57
Obrázek 51: Ukázka učebnice Matematika 7, nakladatelství Prodos (Molnár et al., 1999, s. 36) 58
Obrázek 52: Pomůcka pro zapamatování si pravidel násobení celých čísel (Molnár et al., 1999, s. 63) 59
Obrázek 53: Seskupování objektů do desítek a jednotek (Divíšek, Hošpesová a Kuřina, 1997, s. 32) 61
Obrázek 54: Automaty (Divíšek, Hošpesová a Kuřina, 1997, s. 65) 61
Obrázek 55: Ukázka z učebnice Svět čísel a tvarů: Matematika pro 2. ročník, nakladatelství Prometheus (Divíšek, Hošpesová a Kuřina, 1997, s. 52) 61
Obrázek 56: Ukázka z učebnice Svět čísel a tvarů: Matematika pro 3. ročník (Hošpesová, Divíšek a Kuřina, 1998, s. 39) 62
Obrázek 57: Násobení a dělení čísel do miliardy (Hošpesová, Divíšek a Kuřina, 2000. s. 62) 63
Obrázek 58: Ukázka z učebnice Matematika pro 6. ročník ZŠ, 1. díl, nakladatelství Prometheus (Odvárko a Kadleček, 2010, s. 28) 64
Obrázek 59: Ukázka z učebnice Matematika pro 7. ročník ZŠ, nakladatelství Prometheus (Odvárko a Kadleček, 2011a, s. 36) 65
Obrázek 60: Pravidla pro násobení celých čísel (Odvárko a Kadleček, 2011a, s. 68) 66

Seznam tabulek

Tabulka 1: Tabulka základních spojů v desítkové soustavě 12
Tabulka 2: Organizovaný list – kombinace oblečení Terezy 15
Tabulka 3: Tabulka – kombinace oblečení Terezy 15
Tabulka 4: Stromový diagram – kombinace oblečení Terezy 16
Tabulka 5: Tabulka pozic zápisu čísel při násobení metodou bhaskari 28
Tabulka 6: Násobení čísel 362·35 čínským početním způsobem 33
Tabulka 7: Rozvoj operace násobení v analyzovaných učebnicích 67
Tabulka 8: Přehled formálních parametrů zkoumaných sad učebnic 72
Tabulka 9: Tabulka shrnující vlastnosti metod násobení pro víceciferná čísla 79

Seznam zkratek

RVP	Rámcové vzdělávací programy
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání