

**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ MECHANICKÝCH  
SOUSTAV**

MATHEMATICAL MODELLING OF MECHANICAL SYSTEMS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Petr Kamarýt**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.**

**BRNO 2020**

# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Petr Kamarýt**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.**  
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Matematické modelování mechanických soustav

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Pohyb mnoha mechanických soustav lze uspokojivě popsat pomocí systémů obyčejných diferenciálních rovnic. I když se většinou jedná i o dosti složité rovnice, které nelze analyticky vyřešit, o vlastnostech jejich řešení je možné usoudit pomocí technik z teorie dynamických systémů, kvalitativní teorie diferenciálních rovnic, případně na základě numerických simulací.

### Cíle bakalářské práce:

Teoretická část:

- 1) Seznámení se se základy analytické mechaniky (zejména Lagrangeův formalismus).
- 2) Doplnění potřebných znalostí z teorie diferenciálních rovnic.

Praktická část:

- 1) Sestavení pohybových rovnic zvolené mechanické soustavy.
- 2) Analýza aproximativních systémů.
- 3) Testování citlivosti řešení nelineárního systému na změnu počátečních podmínek.

### Seznam doporučené literatury:

MORIN, D. Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions, Cambridge University Press, Cambridge, 2008, ISBN 978-0-521-87622-3.

RACHŮNKOVÁ, I., FIŠER, J. Dynamické systémy 1, Univerzita Palackého v Olomouci, 2014, ISBN 978-80-244-4338-6.

KIBBLE, T. W. B., BERKSHIRE, F. H. Classical Mechanics, Imperial College Press, 2004, ISBN 1860944248.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá matematickým modelováním mechanických soustav. V prvních dvou kapitolách je shrnuta Lagrangeova mechanika a systémy obyčejných diferenciálních rovnic. V poslední kapitole jsou odvozeny pohybové rovnice dvojitého kyvadla. Dále je analyzován aproximativní systém, speciální případy a citlivost řešení nelineárního systému na změnu počátečních podmínek.

## Abstract

This bachelor thesis deals with mathematical modelling of mechanical systems. In the first two chapters Lagrangian mechanics and system of ordinary differential equations are summarized. In the third chapter equations of motion of double pendulum are derived. Approximative system, special cases and sensitivity of solution to non-linear system on initial conditions change are further analysed.

## Klíčová slova

matematické modelování, mechanické soustavy, dvojitě kyvadlo, systémy ODR

## Keywords

mathematical modelling, mechanical systems, double pendulum, systems of ODEs

## Citace

KAMARÝT, Petr. *Matematické modelování mechanických soustav*. Brno, 2020. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/124622>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. 32 s. Vedoucí práce doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Matematické modelování mechanických soustav* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Jiřího Šremra, Ph.D. Uvedl jsem všechny literární prameny, publikace a další zdroje, ze kterých jsem čerpal.

.....

Petr Kamarýt  
25. června 2020

## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat doc. Ing. Jiřímu Šremrovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, ochotu a čas, který jí věnoval.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Lagrangeova mechanika</b>	<b>3</b>
<b>2 Systémy obyčejných diferenciálních rovnic</b>	<b>6</b>
2.1 Systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic . . . . .	7
2.2 Systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty	8
<b>3 Dvojité kyvadlo</b>	<b>10</b>
3.1 Vytvoření modelu . . . . .	10
3.2 Pomocná tvrzení . . . . .	12
3.3 Aproximativní systém . . . . .	14
3.4 Speciální případy . . . . .	17
3.5 Testování citlivosti řešení na změnu počátečních podmínek . . . . .	22
<b>Závěr</b>	<b>25</b>
<b>Literatura</b>	<b>26</b>

# Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá matematickým modelováním mechanických soustav. Mechanickou soustavou rozumíme soustavu částic nebo těles, jejichž pohyb chceme modelovat. Pomocí Lagrangeovy metody nebo pomocí druhého Newtonova zákona lze odvodit pohybové rovnice takové soustavy, jedná se o systém obyčejných diferenciálních rovnic. Modelování pohybu mechanických soustav je jedna z mnoha aplikací systémů obyčejných diferenciálních rovnic. Tyto systémy jsou často velmi složité a nelze je analyticky řešit, navíc tyto systémy mohou vykazovat citlivost řešení na změnu počátečních podmínek.

V bakalářské práci se budu zabývat nejprve Lagrangeovou formulací mechaniky, díky které budu schopen odvodit pohybové rovnice jednodušeji než pomocí druhého Newtonova zákona. Dále uvedu přehled teorie systémů obyčejných diferenciálních rovnic. V další části se budu věnovat dvojitému kyvadlu, jako příkladu konkrétní mechanické soustavy. Nejprve odvodím pohybové rovnice dvojitého kyvadla. Dále se budu zabývat analýzou aproximativního systému, který vznikne aproximací nelinearit. Lze ukázat, že výsledný pohyb aproximativní soustavy je složením dvojice kmitů - oscilačních módů. V další části rozeberu speciální případy aproximativních systémů a jejich oscilační módy. V poslední části práce budu testovat citlivost řešení nelineárního systému na změnu počátečních podmínek, a to pomocí numerických simulací v programu Matlab.



# Kapitola 1

## Lagrangeova mechanika

Tato kapitola se zabývá Lagrangeovou formulací mechaniky. Z Hamiltonova principu (také princip nejmenší akce) se odvodí Eulerovy-Lagrangeovy rovnice. Ty jsou v kartézských souřadnicích ekvivalentní s druhým Newtonovým zákonem, ale ukáže se, že na rozdíl od něj platí také pro jiné souřadnice. Jejich další výhodou je, že namísto vektorového pojmu síly pracují se skalární energií. Na závěr kapitoly je uveden krátký příklad, který ilustruje výhodnost Lagrangeovy metody. Nejprve definujme některé fyzikální pojmy, se kterými budeme pracovat. Čerpal jsem z [7] a [6].

*Mechanickou soustavou* rozumíme jakoukoliv soustavu částic nebo těles, jejíž pohyb chceme popisovat. Dále se budu zabývat pouze *nedisipativními soustavami*, tj. soustavami, ve kterých nedochází k tepelným ztrátám, např. třením.

*Zobecněnými souřadnicemi* nazýváme jakékoliv parametry mechanické soustavy, které popisují její pohyb. Mohou to být vzdálenosti, úhly, aj. Budeme je označovat  $q_1, q_2, \dots$ . Zobecněné souřadnice jsou většinou funkcemi času, tj.  $q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots$ . Počet nezávislých zobecněných souřadnic, které zcela popisují pohyb mechanické soustavy označíme  $f$ . Například jednoduché kyvadlo  $f = 1$ , dvojitě kyvadlo  $f = 2$ , hmotný bod v prostoru  $f = 3$ .

### Hamiltonův princip (princip nejmenší akce)

Trajektorie částice bude taková, pro kterou má funkcionál

$$S(t_A, t_B) = \int_{t_A}^{t_B} L(t, q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_f(t)) dt \quad (1.1)$$

minimální (přesněji stacionární) hodnotu. Funkci  $L$  nazýváme *Lagrangeovou funkcí* (nebo také *lagrangian*) a integrál  $S(t_A, t_B)$  *akce*. Hamiltonův princip tedy říká, že ze všech možných trajektorií částice bude realizována ta, pro kterou je akce nejmenší.

### Eulerovy-Lagrangeovy rovnice

Z variačního počtu je známo následující tvrzení. Necht funkcionál (1.1) nabývá stacionární hodnoty, pak platí

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, f. \quad (1.2)$$

---

Budeme používat označení  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$  pro první derivaci  $q_1, q_2, \dots, q_f$  podle  $t$ , druhou derivaci budeme značit  $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_f$ ,  $n$ -tou derivaci, kde  $n \geq 3$ , pak již budeme značit standardně, tj.  $q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, \dots, q_f^{(n)}$

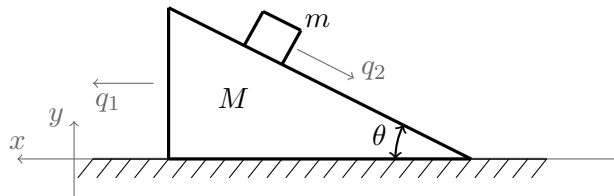
Rovnice (1.2) se nazývají *Eulerovy-Lagrangeovy rovnice*.

**Poznámka 1.1.** (a) Eulerovy-Lagrangeovy rovnice jsou nutnými podmínkami pro extrém funkcionálu (1.1).

(b) Eulerovy-Lagrangeovy rovnice jsou pohybovými rovnicemi mechanické soustavy v zobecněných souřadnicích. Jedná se o obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu. K jejich jednoznačnému vyřešení je nutné zadat  $2f$  počátečních podmínek (např. počátečních poloh a počátečních rychlostí).

(c) Úlohou mechaniky je volba vhodné Lagrangeovy funkce pro danou soustavu tak, aby řešení Eulerových-Lagrangeových rovnic odpovídalo experimentům. Pro Lagrangeovu funkci  $L = T - V$ , kde  $T$  je kinetická a  $V$  potenciální energie soustavy, dostáváme pohybové rovnice, které jsou v kartézských souřadnicích ekvivalentní s Newtonovými pohybovými rovnicemi [6].

**Příklad 1.2.** Kvádr o hmotnosti  $m$  je držen v klidu na dokonale hladkém tělese ve tvaru klínu o hmotnosti  $M$ . Klín spočívá na vodorovné podložce, která je také dokonale hladká (viz obrázek 1.1). V jednom okamžiku kvádr uvolníme. Popište pohyb této soustavy. Zadání příkladu jsem převzal z [7].



Obrázek 1.1: Soustava k příkladu 1.2

Nejprve zavedeme zobecněné souřadnice:  $q_1$  je poloha tělesa ve tvaru klínu podél vodorovné podložky a  $q_2$  je poloha kvádru podél tělesa ve tvaru klínu (viz obrázek 1.1). Vztah mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi je

$$\begin{aligned} x_M &= q_1, \\ y_M &= 0, \\ x_m &= q_1 - q_2 \cos \theta, \\ y_m &= h - q_2 \sin \theta, \end{aligned} \tag{1.3}$$

kde  $h$  je počáteční výška kvádru nad vodorovnou podložkou. Kinetická energie soustavy v kartézském souřadném systému je dána vztahem

$$T = \frac{1}{2} M(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) + \frac{1}{2} m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2). \tag{1.4}$$

Do vztahu (1.4) dosadíme z (1.3) a dostaneme

$$T = \frac{1}{2} M\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m((\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cos \theta)^2 + (\dot{q}_2 \sin \theta)^2). \tag{1.5}$$

Potenciální energie soustavy je

$$V = mgh - mgq_2 \sin \theta. \tag{1.6}$$

Lagrangeova funkce je pak tvaru

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \theta + \dot{q}_2^2) - mgh + mgq_2 \sin \theta. \quad (1.7)$$

Vypočteme příslušné derivace a dosadíme je do rovnic (1.2), čímž dostaneme

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{q}_1 - m\ddot{q}_2 \cos \theta &= 0, \\ m\ddot{q}_2 - m\ddot{q}_1 \cos \theta &= mg \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Z těchto rovnic můžeme vyjádřit  $\ddot{q}_1$  a  $\ddot{q}_2$ , tj.

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}, \\ \ddot{q}_2 &= g \sin \theta + \frac{mg \sin \theta \cos^2 \theta}{M + m \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

**Poznámka 1.3.** Příklad 1.2 je možné řešit také pomocí sil a druhého Newtonova zákona, nicméně postup řešení pomocí Lagrangeovy funkce je značně jednodušší a méně pracný, pracuje totiž se skalární energií, namísto vektorové síly.

## Kapitola 2

# Systemy obyčejných diferenciálních rovnic

Protože Eulerovy-Lagrangeovy rovnice vedou na systém obyčejných diferenciálních rovnic, budu se v této kapitole věnovat právě těmto systémům, otázce existence a jednoznačnosti jejich řešení, počátečním úlohám pro systémy lineárních diferenciálních rovnic a otázce řešení systémů lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty Eulerovou metodou vlastních čísel a vlastních vektorů. V této kapitole jsem vycházel z učebního textu [3] a ze skript [2].

**Definice 2.1.** (a) Necht  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  je vektorová funkce. Rovnici

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : G \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  je vektorová funkce, nazveme *systemem* *n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu*, zkráceně *SODR1*.

(b) Jestliže funkce  $\mathbf{f}$  v (2.1) nezávisí na čase, tj. je ve tvaru  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$ , pak nazveme systém rovnic *autonomní*.

**Definice 2.2.** (a) Řekneme, že vektorová funkce  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  je *řešením* rovnice (2.1) na intervalu  $I$ , jestliže  $\mathbf{y}$  je spojitá a spojitě diferencovatelná na intervalu  $I$  a splňuje rovnici (2.1) pro všechna  $t \in I$ .

(b) *Obecným řešením* systému (2.1) budeme rozumět vektorovou funkci s  $n$  složkami závislou na  $n$  parametrech  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , takových, že pro každou přípustnou volbu těchto konstant obdržíme řešení systému (2.1).

(c) *Partikulárním řešením* rovnice (2.1) nazveme řešení, které obdržíme z obecného řešení konkrétní volbou konstant  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

(d) Úlohu najít řešení rovnice (2.1) splňující počáteční podmínku

$$\mathbf{y}(t_0) = \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.2)$$

kde  $(t_0, \boldsymbol{\gamma}) \in G$ , nazveme *počáteční problém*.

Nalézt řešení počátečního problému pro SODR1 analyticky lze jen ve výjimečných případech, proto je užitečné vědět, zda řešení existuje a zda je jednoznačné. Následující věty dávají na tuto otázku odpověď. Věty jsem převzal z [3], tamtéž lze také najít jejich důkazy.

**Věta 2.3.** Necht v okolí bodu  $(t_0, \gamma) \in G$  jsou funkce  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  spojité, pak v okolí bodu  $t_0$  existuje řešení počátečního problému (2.1), (2.2).

**Věta 2.4.** Necht jsou splněny předpoklady věty 2.3 a navíc v okolí bodu  $(t_0, \gamma)$  jsou funkce  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  lipschitzovské v proměnných  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , pak v okolí bodu  $t_0$  existuje právě jedno řešení počátečního problému (2.1), (2.2).

**Poznámka 2.5.** (a) Každou obyčejnou diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu na intervalu  $I$  lze převést na systém  $n$  diferenciálních rovnic prvního řádu na stejném intervalu. Vskutku necht  $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$  je obyčejná diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu. Zavedeme nové proměnné  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$  tak, že položíme

$$y_1 = y, \quad y_2 = \dot{y}, \quad y_3 = \ddot{y}, \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}. \quad (2.3)$$

Prvních  $n - 1$  rovnic dostaneme zderivováním vztahu (2.5), tj.

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \quad \dot{y}_3 = y_4, \dots, \quad \dot{y}_{n-1} = y_n \quad (2.4)$$

a poslední rovnici dostaneme dosazením nových proměnných do původní rovnice

$$\dot{y}_n = f(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n). \quad (2.5)$$

Získali jsme tedy systém  $n$  obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

(b) Jsou-li navíc zadány počáteční podmínky

$$y(t_0) = \gamma_0, \quad \dot{y}(t_0) = \gamma_1, \quad \ddot{y}(t_0) = \gamma_2, \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \gamma_{n-1}, \quad (2.6)$$

pak tyto podmínky přejdou na počáteční podmínky SODR1

$$y_1(t_0) = \gamma_0, \quad y_2(t_0) = \gamma_1, \quad y_3(t_0) = \gamma_2, \dots, \quad y_n(t_0) = \gamma_{n-1}. \quad (2.7)$$

(c) Převod systému  $n$  obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu na obyčejnou diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu obecně není možný.

## 2.1 Systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic

Systém rovnic (2.1) nazveme *lineární*, jestliže jednotlivé funkce  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  jsou lineární v proměnných  $y_1, \dots, y_n$ . Systém zapíšeme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Funkce  $a_{ij}$  nazýváme *koefficienty* a funkce  $b_i$  *pravé strany*. Matici koefficientů označíme  $\mathbf{A}$ , vektor pravých stran  $\mathbf{b}$  a vektor neznámých  $\mathbf{y}$ , pak systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu lze zapsat maticově

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t). \quad (2.9)$$

Vzhledem ke tvaru funkcí  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  a jejich parciálních derivací se věta o existenci a jednoznačnosti řešení modifikuje takto:

**Věta 2.6.** Necht  $a_{ij}, b_i, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$  jsou spojité na intervalu  $I$  a  $t_0 \in I$ , pak má systém lineárních rovnic (2.9) s počáteční podmínkou (2.2) právě jedno řešení a toto řešení je definované na celém intervalu  $I$ .

**Poznámka 2.7.** Narozdíl od věty 2.5, která zaručuje existenci a jednoznačnost řešení pouze na okolí bodu  $t_0$ , zaručuje věta 2.6 existenci a jednoznačnost řešení na celém intervalu  $I$ .

**Věta 2.8.** Necht  $a_{ij}, b_i, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$  jsou funkce spojité na intervalu  $I$ . Obecné řešení systému lineárních rovnic (2.9) lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{u}_n(t) + \mathbf{y}_p(t), \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

kde  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou lineárně nezávislá řešení systému  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$  a  $\mathbf{y}_p$  je libovolné řešení systému  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ .

**Poznámka 2.9.** (a) Řešení  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  systému  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$  ve větě 2.8 nazýváme *fundamentální systém řešení*.

(b) Množina řešení rovnice  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$  tedy tvoří vektorový podprostor prostoru spojitéch vektorových funkcí na intervalu  $I$  a množina řešení rovnice  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$  je afinní podprostor ve stejném prostoru funkcí.

## 2.2 Systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

V této části budeme uvažovat systém (2.9), v níž jsou koeficienty a pravé strany konstantní, tj. systém  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ . Podle věty 2.8 potřebujeme určit fundamentální systém řešení systému  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  a nějaké partikulární řešení systému  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ . Fundamentální systém řešení lze nalézt například Eulerovou metodou vlastních čísel a vlastních vektorů, partikulární řešení lze poté určit metodou variace konstant nebo, pro speciální typy pravé strany, metodou neurčitých koeficientů. Protože se dále budu zabývat pouze systémy bez vektoru pravých stran, popíši pouze Eulerovu metodu.

### Eulerova metoda

Uvažujme systém rovnic bez pravé strany  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ , řešení těchto rovnic hledáme ve tvaru  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ , kde  $\mathbf{v}$  je sloupcový vektor konstant. Dosazením navrženého řešení do rovnice dostaneme

$$\mathbf{v}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t} \Leftrightarrow \mathbf{v}\lambda = \mathbf{A}\mathbf{v}. \quad (2.11)$$

Hledáme tedy čísla  $\lambda$ , pro která existuje nenulový vektor  $\mathbf{v}$  takový, že

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = 0. \quad (2.12)$$

Takový vektor bude existovat právě tehdy, když  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ . Polynom  $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$  nazýváme *charakteristický polynom*. Ze základní věty algebry plyne, že charakteristický polynom má právě  $n$  kořenů, tyto kořeny označíme  $\lambda_i$  a k nim příslušné vektory  $\mathbf{v}_i$ . Čísla  $\lambda_i$  nazýváme *vlastní čísla* matice  $\mathbf{A}$  a k nim příslušné vektory  $\mathbf{v}_i$  *vlastní vektory*.

Jestliže charakteristický polynom má  $n$  jednoduchých reálných kořenů  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  s příslušnými vlastními vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ , pak funkce

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad \mathbf{u}_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \quad (2.13)$$

tvoří fundamentální systém řešení systému  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ .

Jestliže charakteristický polynom má komplexní kořen  $\mu + i\nu$ , pak má také komplexně sdružený kořen  $\mu - i\nu$ . Příslušné vlastní vektory jsou také komplexně sdružené  $\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}$ . Dvojice odpovídajících řešení je tvaru  $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{v}e^{\mu t}(\cos(\nu t) + i \sin(\nu t))$ ,  $\mathbf{y}_2(t) = \bar{\mathbf{v}}e^{\mu t}(\cos(\nu t) - i \sin(\nu t))$ . Dvě reálná nezávislá řešení dostaneme jako kombinace

$$\mathbf{u}_1(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t)), \quad \mathbf{u}_2(t) = \frac{1}{2i}(\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)). \quad (2.14)$$

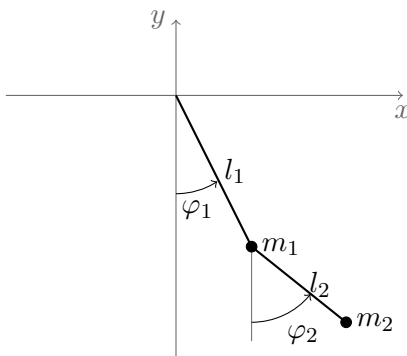
Jestliže charakteristický polynom má vícenásobný reálný kořen  $\lambda_0$ , pak je situace složitější, uvedeme zde případ, kdy má charakteristický polynom jeden dvojnásobný reálný kořen. Pokud je hodnota matice  $\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}$  rovna  $n - 2$ , lze dokázat, že existují dva nezávislé vlastní vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  příslušné  $\lambda_0$ , které dávají dvě nezávislá řešení  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1e^{\lambda_0 t}$  a  $\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{v}_2e^{\lambda_0 t}$ . Jestliže je hodnota matice  $\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}$  rovna  $n - 1$  existuje pouze jeden vlastní vektor splňující  $(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ , který dává řešení  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}e^{\lambda_0 t}$ , druhé řešení je ve tvaru  $\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{v}te^{\lambda_0 t} + \mathbf{w}e^{\lambda_0 t}$ , kde  $\mathbf{w}$  je libovolný vektor splňující  $(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$ .

## Kapitola 3

# Dvojité kyvadlo

### 3.1 Vytvoření modelu

V této podkapitole, pomocí Lagrangeovy metody, která byla popsána v první kapitole, odvodíme pohybové rovnice pro dvojité matematické kyvadlo. Odvození pohybových rovnic lze nalézt např. v [7]. Budeme postupovat analogicky jako v příkladu 1.2. Uvažujme matematické kyvadlo s délkou závěsu  $l_1$  a hmotností  $m_1$ , na jehož konci visí druhé matematické kyvadlo s délkou závěsu  $l_2$  o hmotnosti  $m_2$  (viz obrázek 3.1). Dále předpokládejme, že pohyb probíhá pouze v rovině obrázku a že gravitační síla působí v opačném směru než je orientována osa  $y$ . Výchylku prvního bodu, respektive druhého bodu ze svislé polohy označíme  $\varphi_1$ , respektive  $\varphi_2$ , přičemž výchylka proti směru hodinových ručiček je kladná.



Obrázek 3.1: Dvojité kyvadlo

Dále určíme souřadnice hmotných bodů v kartézském souřadném systému v závislosti na  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  :

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \varphi_1, \\y_1 &= -l_1 \cos \varphi_1, \\x_2 &= x_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \\y_2 &= y_1 - l_2 \cos \varphi_2 = -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2.\end{aligned}\tag{3.1}$$



Derivováním (3.1) podle času získáme složky vektoru rychlosti ve směrech os

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, \\ \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1, \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2, \\ \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Nyní napíšeme vztah pro kinetickou energii soustavy

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).\tag{3.3}$$

Dosazením (3.2) do (3.3) dostaneme následující vztah pro kinetickou energii soustavy

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_1 ((l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1)^2 + (l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 ((l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2)^2 + (l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2)^2).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Vztah (3.4) upravíme pomocí goniometrických vzorců a získáme

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)).\tag{3.5}$$

Dále odvodíme vztah pro potenciální energii. Hladinu nulové potenciální energie zvolíme v počátku souřadnic. Pak

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2.\tag{3.6}$$

Do tohoto vztahu dosadíme z (3.1) a tím získáme

$$V = m_1 g (-l_1 \cos \varphi_1) + m_2 g (-l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2).\tag{3.7}$$

V tuto chvíli již můžeme napsat lagrangián

$$\begin{aligned}L = T - V &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ &\quad + m_1 g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Nyní dosadíme do Eulerových-Lagrangeových rovnic. Vypočítáme tedy potřebné derivace a dosadíme je do (1.2). Po úpravě dostaneme

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2) l_1} \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2) l_1} \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{g}{l_1} \sin \varphi_1 = 0,\tag{3.9}$$

$$l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 \ddot{\varphi}_2 - l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + g \sin \varphi_2 = 0.$$

Získali jsme tedy autonomní systém dvou nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, který popisuje pohyb dvojitého matematického kyvadla.

## 3.2 Pomocná tvrzení

V této podkapitole budou dokázána některá pomocná tvrzení, která využijí v dalších kapitolách. Uvažujme obecný systém dvou lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu ve tvaru

$$\ddot{\varphi} = \mathbf{B}\varphi. \quad (3.10)$$

Prvky matice  $\mathbf{B}$  označíme

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Řešením tohoto systému je spojitá a dvakrát spojitě diferencovatelná funkce, která splňuje rovnici (3.10) pro všechna  $t \in \mathbb{R}$ , např.  $\varphi(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ , pro kterou platí

$$\mathbf{v}\lambda^2 e^{\lambda t} = \mathbf{B}\mathbf{v}e^{\lambda t} \Leftrightarrow \mathbf{v}\lambda^2 = \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (3.11)$$

tj.

$$(\mathbf{B} - \lambda^2 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Rovnice (3.12) má nenulové řešení  $\mathbf{v}$  právě tehdy, když  $\det(\mathbf{B} - \lambda^2 \mathbf{E}) = 0$ . Dostáváme tedy

$$(\lambda^2)_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{B}) \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2(\mathbf{B}) - 4 \det(\mathbf{B})}}{2}. \quad (3.13)$$

Podle poznámky 2.5 lze každou obyčejnou diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu převést na systém  $n$  obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, v případě lineárních obyčejných diferenciálních rovnic bez pravé strany na tvar

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}. \quad (3.14)$$

Položme tedy

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1, \\ y_2 &= \varphi_2, \\ y_3 &= \dot{\varphi}_1, \\ y_4 &= \dot{\varphi}_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pak matice  $\mathbf{A}$  je tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Podle věty 2.6 bude řešení definováno na celém intervalu  $\mathbb{R}$  a podle věty 2.8 je obecné řešení systému (3.14) tvaru

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \boldsymbol{\psi}_1(t) + C_2 \boldsymbol{\psi}_2(t) + C_3 \boldsymbol{\psi}_3(t) + C_4 \boldsymbol{\psi}_4(t), \quad (3.17)$$

kde  $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$  a  $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_3, \boldsymbol{\psi}_4$  je fundamentální systém řešení systému (3.14). Při konstrukci fundamentálního systému řešení hrají důležitou roli vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ , tj. řešení algebraické rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \xi \mathbf{E}) = 0. \quad (3.18)$$

---

V (3.13) a dále značí  $\operatorname{tr}(\mathbf{B})$  stopu matice  $\mathbf{B}$ , tj.  $\operatorname{tr}(\mathbf{B}) = b_{11} + b_{22}$  a  $\det(\mathbf{B})$  determinant matice  $\mathbf{B}$ , tj.  $\det(\mathbf{B}) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$

Determinant matice  $\mathbf{A} - \xi \mathbf{E}$  vypočteme například Laplaceovým rozvojem podle posledního sloupce a dostaneme

$$(\xi^2)_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{B}) \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2(\mathbf{B}) - 4 \det(\mathbf{B})}}{2}. \quad (3.19)$$

Předchozí odstavec lze shrnout ve větě.

**Věta 3.1.** *Nechť  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  a  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Pak  $\lambda$  je vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$ , dané vztahem (3.16), právě tehdy, když  $\lambda^2$  je vlastní číslo matice  $\mathbf{B}$ .*

**Věta 3.2.** *Nechť  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  a  $\lambda \in \mathbb{C}$  je vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$ , dané vztahem (3.16).*

- (a) *Je-li  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$ , pak  $u_3 = \lambda u_1$ ,  $u_4 = \lambda u_2$  a  $\mathbf{v} = (u_1, u_2)^T$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda^2$ .*
- (b) *Je-li  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$  vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda^2$ , pak  $\mathbf{u} = (v_1, v_2, \lambda v_1, \lambda v_2)^T$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$ .*

*Důkaz.* Jelikož je  $\lambda$  vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$ , z věty 3.1 plyne, že  $\lambda^2$  je vlastní číslo matice  $\mathbf{B}$ .

- (a) Nechť  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$ , tj.  $\mathbf{u}$  je nenulové řešení systému

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ b_{11} & b_{12} & -\lambda & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Z první a druhé rovnice plyne  $u_3 = \lambda u_1$  a  $u_4 = \lambda u_2$ . Po dosazení do třetí a čtvrté rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} (b_{11} - \lambda^2)u_1 + b_{12}u_2 &= 0, \\ b_{21}u_1 + (b_{22} - \lambda^2)u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Protože  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  a  $(u_1, u_2, u_3, u_4)^T = (u_1, u_2, \lambda u_1, \lambda u_2)^T$ , zřejmě  $(u_1, u_2)^T \neq (0, 0)^T$  a z (3.21) plyne, že  $(u_1, u_2)^T$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda^2$ .

- (b) Nechť  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda^2$ , tj.  $(v_1, v_2)^T$  je nenulové řešení systému

$$\begin{aligned} (b_{11} - \lambda^2)v_1 + b_{12}v_2 &= 0, \\ b_{21}v_1 + (b_{22} - \lambda^2)v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Přímým dosazením zjistíme, že  $(v_1, v_2, \lambda v_1, \lambda v_2)^T$  je řešení systému (3.20). Protože  $(v_1, v_2)^T \neq (0, 0)^T$ , tak  $(v_1, v_2, \lambda v_1, \lambda v_2)^T$  je jistě nenulový. Z toho plyne, že je to vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$ .

□

**Věta 3.3.** Necht  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  a  $\mu$  je jednonásobné vlastní číslo matice  $\mathbf{B}$ .

(a) Jestliže  $b_{11} - \mu \neq 0$ , pak vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  je tvaru

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{b_{12}}{b_{11}-\mu} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

(b) Jestliže  $b_{22} - \mu \neq 0$ , pak vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  je tvaru

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b_{21}}{b_{22}-\mu} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

*Důkaz.* Necht  $\mu$  je jednonásobné vlastní číslo matice  $\mathbf{B}$ . Hledáme nenulový vektor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$  příslušný k vlastnímu číslu  $\mu$ , hledáme tedy nenulové řešení systému

$$\begin{pmatrix} b_{11} - \mu & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Vzhledem k tomu, že  $\mu$  je vlastní číslo matice  $\mathbf{B}$ , tak  $\det(\mathbf{B} - \mu\mathbf{E}) = 0$ . Z čehož plyne, že rovnice systému (3.25) jsou lineárně závislé, systém tedy má nekonečně mnoho řešení.

(a) Položíme-li  $v_2 = 1$ , pak tvrzení plyne ihned z první rovnice (3.25).

(b) Položíme-li  $v_1 = 1$ , pak tvrzení plyne ihned z druhé rovnice (3.25). □

**Poznámka 3.4.** Všimněme si, že v předešlé větě jsou zahrnuty všechny případy, které mohou pro jednonásobné vlastní číslo  $\mu$  nastat. Jestliže  $b_{11} - \mu = 0$  a zároveň  $b_{22} - \mu = 0$ , pak  $b_{12} = 0$  nebo  $b_{21} = 0$  a  $\mu = b_{11} = b_{22}$ , což znamená, že  $\mu$  nemůže být jednonásobné vlastní číslo.

### 3.3 Aproximativní systém

V této podkapitole se budu věnovat systému, který vznikne z (3.9) aproximací nelinearit. Sinus úhlu nahradím jeho argumentem, kosinus jedničkou a hodnoty prvních derivací budu považovat za tak malé, že jejich druhé mocniny zanedbám. Ze systému (3.9) tak dostaneme

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2)g\varphi_1 &= 0, \\ l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Systém (3.26) je lineární vzhledem k proměnným  $\varphi_1, \varphi_2$ , lze ho tedy zapsat v maticovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1l_1} & \frac{m_2g}{m_1l_1} \\ \frac{(m_1+m_2)g}{m_1l_2} & -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Označme  $\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ ,  $\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix}$  a matici soustavy označme  $\mathbf{B}$ , tj.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1l_1} & \frac{m_2g}{m_1l_1} \\ \frac{(m_1+m_2)g}{m_1l_2} & -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1l_2} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Pak

$$\ddot{\varphi} = \mathbf{B}\varphi. \quad (3.29)$$

Po dosazení do vztahu (3.13) a úpravě získáme vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{2m_1l_1l_2} \left( (m_1+m_2)(l_1+l_2) \pm \sqrt{(m_1+m_2)(m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2)} \right). \quad (3.30)$$

Ze vztahu (3.30) je okamžitě vidět, že výraz pod odmocninou je kladný, dostaneme tedy  $\mu_1, \mu_2$  reálná různá. Nyní ukážeme, že obě vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  jsou záporná.

**Věta 3.5.** *Pro vlastní čísla  $\mu_1, \mu_2$  matice  $\mathbf{B}$  dané vztahem (3.28) platí  $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ .*

*Důkaz.* Necht

$$\mu_1 = -\frac{g}{2m_1l_1l_2} \left( (m_1+m_2)(l_1+l_2) + \sqrt{(m_1+m_2)(m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2)} \right)$$

a

$$\mu_2 = -\frac{g}{2m_1l_1l_2} \left( (m_1+m_2)(l_1+l_2) - \sqrt{(m_1+m_2)(m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2)} \right).$$

Pro číslo  $\mu_1$  je tvrzení zřejmé. Zbývá ukázat, že  $\mu_2 < 0$ . Tedy

$$-\frac{g}{2m_1l_1l_2} \left( (m_1+m_2)(l_1+l_2) - \sqrt{(m_1+m_2)(m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2)} \right) < 0. \quad (3.31)$$

Vydeme z nerovnosti

$$(l_1-l_2)^2 < (l_1+l_2)^2, \quad (3.32)$$

což pro  $l_1 > 0$  a  $l_2 > 0$  určitě platí. Obě strany vynásobíme  $m_1$  a přičteme výraz  $m_2(l_1+l_2)^2$ , tedy

$$m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2 < (m_1+m_2)(l_1+l_2)^2. \quad (3.33)$$

Obě strany vynásobíme  $(m_1+m_2)$  a odmocníme

$$\sqrt{(m_1+m_2)(m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2)} < (m_1+m_2)(l_1+l_2). \quad (3.34)$$

Vše převedeme na levou stranu a vynásobíme  $-1$

$$(m_1+m_2)(l_1+l_2) - \sqrt{(m_1+m_2)(m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2)} > 0. \quad (3.35)$$

Teď stačí vynásobit nerovnost výrazem  $-\frac{g}{2m_1l_1l_2}$  a dostaneme požadovanou nerovnost (3.31).  $\square$

Nyní dokážeme větu o tvaru obecného řešení systému (3.27).

**Věta 3.6.** *Obecné řešení systému (3.27) lze psát ve tvaru*

$$\varphi(t) = A_1 \mathbf{v}_1 \sin(\sqrt{|\mu_1|}t + \alpha_1) + A_2 \mathbf{v}_2 \sin(\sqrt{|\mu_2|}t + \alpha_2), \quad (3.36)$$

kde  $A_1, A_2 \in \langle 0, \infty \rangle$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_2g}{(m_1+m_2)g + \mu_1 m_1 l_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{m_2g}{(m_1+m_2)g + \mu_2 m_1 l_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

a  $\mu_1, \mu_2$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  daná vztahem (3.30).

*Důkaz.* Uvažujme ekvivalentní systém (3.14), kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_1} & \frac{m_2 g}{m_1 l_1} & 0 & 0 \\ \frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} & -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Obecné řešení tohoto systému je tvaru

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \boldsymbol{\psi}_1(t) + C_2 \boldsymbol{\psi}_2(t) + C_3 \boldsymbol{\psi}_3(t) + C_4 \boldsymbol{\psi}_4(t), \quad (3.39)$$

kde  $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_3, \boldsymbol{\psi}_4$  je fundamentální systém řešení (viz kapitolu 2). Z věty 3.1 a věty 3.5 plyne, že matice  $\mathbf{A}$  má dvě dvojice komplexně sdružených vlastních čísel  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{|\mu_1|}$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{|\mu_2|}$ . Z věty 3.2 plyne, že vlastní vektory příslušné těmto vlastním číslům jsou také komplexně sdružené  $\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{a}_1 \pm i\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{u}_{3,4} = \mathbf{a}_2 \pm i\mathbf{b}_2$ . Získáme tedy dvě dvojice komplexně sdružených řešení systému (3.14)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_{1,2}^*(t) &= (\mathbf{a}_1 \pm i\mathbf{b}_1)e^{\pm i\sqrt{|\mu_1|}t}, \\ \boldsymbol{\psi}_{3,4}^*(t) &= (\mathbf{a}_2 \pm i\mathbf{b}_2)e^{\pm i\sqrt{|\mu_2|}t}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Tato řešení upravíme pomocí Eulerova vzorce

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_{1,2}^*(t) &= (\mathbf{a}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t - \mathbf{b}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t) \pm i(\mathbf{a}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t + \mathbf{b}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t), \\ \boldsymbol{\psi}_{3,4}^*(t) &= (\mathbf{a}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t - \mathbf{b}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t) \pm i(\mathbf{a}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t + \mathbf{b}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Nyní vezmeme následující lineární kombinace těchto řešení

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_1(t) &= \frac{\boldsymbol{\psi}_1^*(t) + \boldsymbol{\psi}_2^*(t)}{2} = \mathbf{a}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t - \mathbf{b}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t, \\ \boldsymbol{\psi}_2(t) &= \frac{\boldsymbol{\psi}_1^*(t) - \boldsymbol{\psi}_2^*(t)}{2i} = \mathbf{a}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t + \mathbf{b}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t, \\ \boldsymbol{\psi}_3(t) &= \frac{\boldsymbol{\psi}_3^*(t) + \boldsymbol{\psi}_4^*(t)}{2} = \mathbf{a}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t - \mathbf{b}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t, \\ \boldsymbol{\psi}_4(t) &= \frac{\boldsymbol{\psi}_3^*(t) - \boldsymbol{\psi}_4^*(t)}{2i} = \mathbf{a}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t + \mathbf{b}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t \end{aligned} \quad (3.42)$$

a dostaneme tak fundamentální systém řešení systému (3.14). Po dosazení do (3.39) získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= C_1 (\mathbf{a}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t - \mathbf{b}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t) + C_2 (\mathbf{a}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t + \mathbf{b}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t) \\ &\quad + C_3 (\mathbf{a}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t - \mathbf{b}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t) + C_4 (\mathbf{a}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t + \mathbf{b}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Protože ale hledáme řešení systému (3.27), tak nás budou zajímat pouze první dvě složky vektorové funkce  $\mathbf{y}$ . Jelikož jsou vlastní vektory matice  $\mathbf{B}$  reálné, podle věty 3.2 jsou první dvě složky vektorů  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  nulové, dále podle této věty první a druhá složka vektorů  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  tvoří vlastní vektory matice  $\mathbf{B}$ . Tedy obecné řešení soustavy (3.27) můžeme napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = C_1 \mathbf{v}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t + C_2 \mathbf{v}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t + C_3 \mathbf{v}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t + C_4 \mathbf{v}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t, \quad (3.44)$$

kde  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  jsou vlastní vektory matice  $\mathbf{B}$  příslušné vlastním číslům  $\mu_1, \mu_2$ . Nyní stačí položit  $C_1 = A_1 \sin \alpha_1$ ,  $C_2 = A_1 \cos \alpha_1$  a  $C_3 = A_2 \sin \alpha_2$ ,  $C_4 = A_2 \cos \alpha_2$  a upravit pomocí

goniometrického vzorce a dostaneme (3.36). Zbývá poznamenat, že vzhledem k větě 3.3 jsou vlastní vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  tvaru

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_2 g}{(m_1 + m_2)g + \mu_1 m_1 l_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{m_2 g}{(m_1 + m_2)g + \mu_2 m_1 l_1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

□

**Poznámka 3.7.** Vektor  $\varphi$  tedy vznikne složením dvojice anizochronních kmitů (tzv. oscilačních módů [4]) s úhlovými frekvencemi  $\sqrt{|\mu_1|}, \sqrt{|\mu_2|}$ . Obecně se tedy bude jednat o velmi komplikovaný pohyb, který nemusí být periodický. Budou-li úhlové frekvence  $\sqrt{|\mu_1|}, \sqrt{|\mu_2|}$  soudělné, tj. bude-li platit

$$\frac{\sqrt{|\mu_1|}}{\sqrt{|\mu_2|}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (3.46)$$

kde  $n_1, n_2$  jsou nesoudělná přirozená čísla, pak výsledný pohyb bude periodický s periodou rovnou nejmenšímu společnému násobku jednotlivých period. Výsledný pohyb závisí také na amplitudách a fázích jednotlivých kmitů [1].

### 3.4 Speciální případy

V této podkapitole rozeberu některé speciální případy mechanické soustavy, která je popsána systémem rovnic (3.27). Využiji zde výsledků předchozích kapitol, zejména tvar vlastních čísel a větu o tvaru vlastních vektorů. Výsledný pohyb bude podle věty 3.6 složením dvou kmitavých pohybů. Budu vycházet z knihy [7], narozdíl od ní však nebudu zanedbávat první a vyšší mocniny  $\varepsilon$ .

Nejprve předpokládejme, že  $l_1 = l_2 = l$ , z (3.30) a (3.45) plyne, že vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  soustavy (3.27) jsou ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{m_1 l} (m_1 + m_2 \pm \sqrt{(m_1 + m_2)m_2}) \quad (3.47)$$

a odpovídající vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \mp \sqrt{m_2} \\ \sqrt{m_1 + m_2} \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

- Jestliže je navíc hmotnost obou hmotných bodů stejná, tj.  $m_1 = m_2 = m$ , pak vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  jsou ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{l} (2 \pm \sqrt{2}) \quad (3.49)$$

a vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

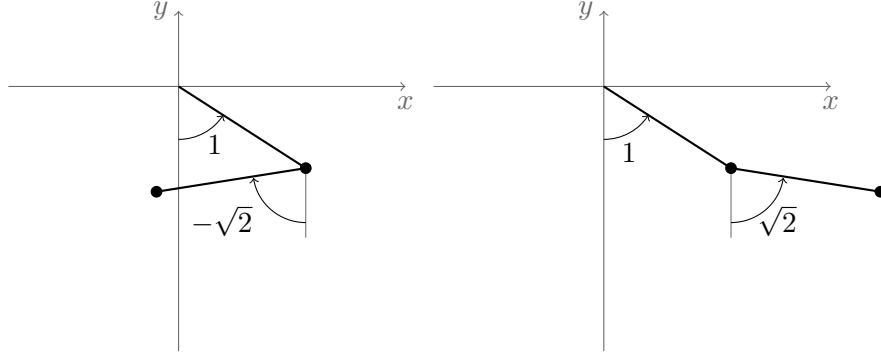
Podle věty 3.6 je pohyb soustavy složením módů

$$\varphi_1(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} (2 + \sqrt{2})t + \alpha_1 \right) \quad (3.51)$$

a

$$\varphi_2(t) = A_2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} (2 - \sqrt{2})t + \alpha_2 \right). \quad (3.52)$$

Tyto módy si můžeme představit jako periodické pohyby při nulových počátečních rychlostech a počátečních podmínkách ukázaných na obrázku 3.2 (tj.  $A_1 = A_2 = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ).



Obrázek 3.2: Oscilační módy pro  $m_1 = m_2$  a  $l_1 = l_2$

Vzhledem k poznámce 3.7 bude pohyb soustavy periodický pouze v případě, je-li  $A_1 = 0$  nebo  $A_2 = 0$ .

- Jestliže je hmotnost prvního hmotného bodu výrazně větší než hmotnost druhého hmotného bodu, tj.  $m_1 \gg m_2$  a označíme-li  $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$ , pak po úpravách dostaneme vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{l} (1 + \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon)}) \quad (3.53)$$

a vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \mp \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{1 + \varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Podle věty 3.6 je pohyb soustavy složením módů

$$\varphi_1(t) = A_1 \left( \frac{-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} (1 + \varepsilon + \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon)})t + \alpha_1 \right) \quad (3.55)$$

a

$$\varphi_2(t) = A_2 \left( \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} (1 + \varepsilon - \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon)})t + \alpha_2 \right). \quad (3.56)$$

Tyto módy jsou zobrazeny na obrázku 3.3.

Všimněme si, že

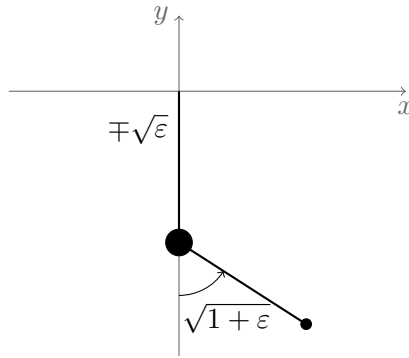
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{|\mu_{1,2}|} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3.57)$$

a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

V těchto oscilačních módech se první hmotný bod v podstatě nebude hýbat a druhý bude v podstatě kmitat jako jednoduché kyvadlo délky  $l$ .





Obrázek 3.3: Oscilační mód pro  $m_1 \gg m_2$  a  $l_1 = l_2$

- Jestliže je hmotnost prvního hmotného bodu výrazně menší než hmotnost druhého hmotného bodu, tj.  $m_1 \ll m_2$  a označíme-li  $\varepsilon = \frac{m_1}{m_2}$ , pak po úpravách dostaneme vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{\varepsilon l} (1 + \varepsilon \pm \sqrt{1 + \varepsilon}) \quad (3.59)$$

a vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \mp 1 \\ \sqrt{1 + \varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

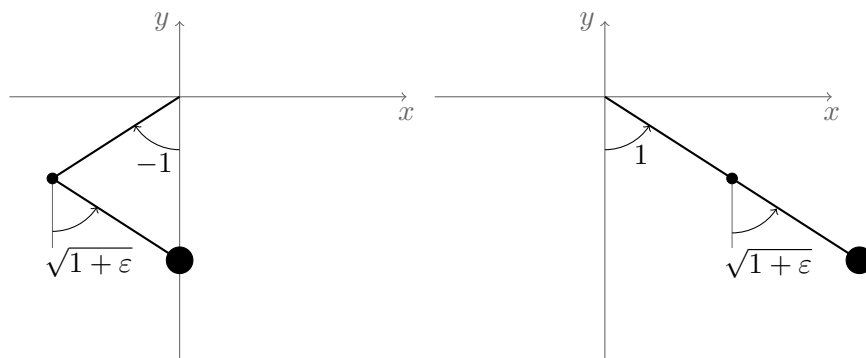
Podle věty 3.6 je pohyb soustavy složením módů

$$\varphi_1(t) = A_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{1 + \varepsilon} \end{pmatrix} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{\varepsilon l} (1 + \varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon})} t + \alpha_1 \right) \quad (3.61)$$

a

$$\varphi_2(t) = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1 + \varepsilon} \end{pmatrix} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{\varepsilon l} (1 + \varepsilon - \sqrt{1 + \varepsilon})} t + \alpha_2 \right). \quad (3.62)$$

Tyto módy jsou zobrazeny na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Oscilační módy pro  $m_1 \ll m_2$  a  $l_1 = l_2$

Všimněme si, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{|\mu_1|} = \infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{|\mu_2|} = \sqrt{\frac{g}{2l}} \quad (3.63)$$

a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

V prvním oscilačním módu se druhý hmotný bod ve směru osy  $x$  v podstatě nehýbe a první kmitá ze strany na stranu s vysokou úhlovou frekvencí, ve druhém se celá soustava chová jako jednoduché kyvadlo délky  $2l$ .

Nyní předpokládejme, že platí  $m_1 = m_2 = m$ , potom vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  soustavy (3.27) jsou tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{l_1 l_2} \left( l_1 + l_2 \pm \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \right) \quad (3.65)$$

a vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{l_2}{l_2 - l_1 \mp \sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

- Jestliže délka prvního závěsu je výrazně větší než délka druhého, tj.  $l_1 \gg l_2$  a označíme-li  $\varepsilon = \frac{l_2}{l_1}$ , pak po úpravách dostaneme vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{\varepsilon l_1} (1 + \varepsilon \pm \sqrt{1 + \varepsilon^2}) \quad (3.67)$$

a vlastní vektory ve tvaru jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1 \mp \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Podle věty 3.6 je pohyb soustavy složením módů

$$\varphi_1(t) = A_1 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1 - \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{g}{\varepsilon l_1}} (1 + \varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2}) t + \alpha_1 \right) \quad (3.69)$$

a

$$\varphi_2(t) = A_2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{g}{\varepsilon l_1}} (1 + \varepsilon - \sqrt{1 + \varepsilon^2}) t + \alpha_2 \right). \quad (3.70)$$

Tyto módy jsou zobrazeny na obrázku 3.5.

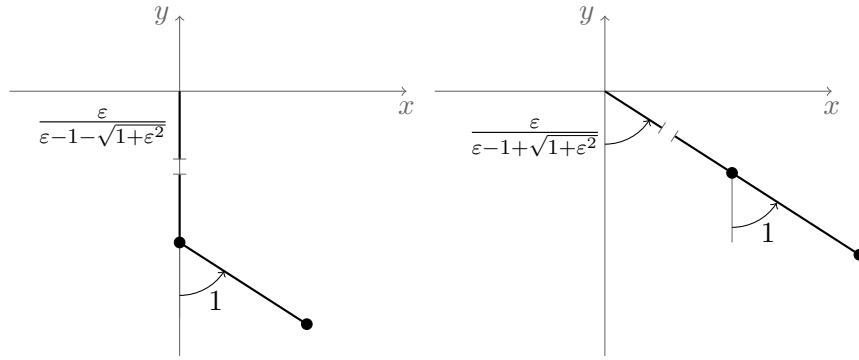
Všimněme si, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{|\mu_1|} = \infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{|\mu_2|} = \sqrt{\frac{g}{l_1}} \quad (3.71)$$

a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

V prvním oscilačním módu první těleso v podstatě stojí a druhé kmitá s vysokou úhlovou frekvencí, ve druhém módu se celá soustava chová jako jednoduché kyvadlo s délkou závěsu  $l_1$ .



Obrázek 3.5: Oscilační módy pro  $m_1 = m_2$  a  $l_1 \gg l_2$

- Jestliže délka prvního závěsu je výrazně menší než délka druhého závěsu, tj.  $l_1 \ll l_2$  a označíme-li  $\varepsilon = \frac{l_1}{l_2}$ , pak pro vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  platí

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{\varepsilon l_2} (1 + \varepsilon \pm \sqrt{1 + \varepsilon^2}) \quad (3.73)$$

a vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \varepsilon \mp \sqrt{1 + \varepsilon^2} \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

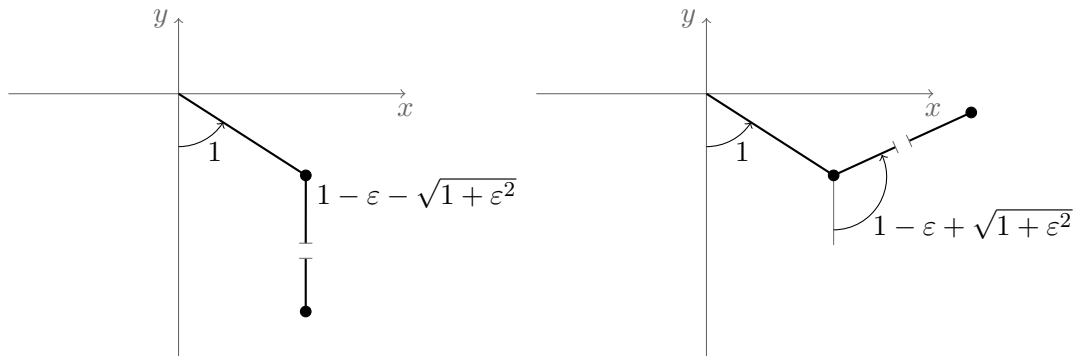
Podle věty 3.6 je pohyb soustavy složením módů

$$\varphi_1(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \varepsilon - \sqrt{1 + \varepsilon^2} \end{pmatrix} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{\varepsilon l_2} (1 + \varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2})} t + \alpha_1 \right) \quad (3.75)$$

a

$$\varphi_2(t) = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2} \end{pmatrix} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{\varepsilon l_2} (1 + \varepsilon - \sqrt{1 + \varepsilon^2})} t + \alpha_2 \right). \quad (3.76)$$

Tyto módy jsou zobrazeny na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: Oscilační módy pro  $m_1 = m_2$  a  $l_1 \ll l_2$

Všimněme si, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{|\mu_1|} = \infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{|\mu_2|} = \sqrt{\frac{g}{l_2}} \quad (3.77)$$

a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

V prvním oscilačním módu se druhý hmotný bod v podstatě nehýbe a první kmitá s vysokou úhlovou frekvencí. V případě druhého oscilačního módu kmitají oba body s periodou jako jednoduché kyvadlo délky  $l_2$ .

### 3.5 Testování citlivosti řešení na změnu počátečních podmínek

Nyní se vraťme k systému (3.9). Jedná se o nelineární autonomní systém a je známo, že vykazuje chování tzv. deterministického chaosu. Pojem deterministický chaos znamená, že pro libovolné počáteční podmínky existuje jediné řešení počáteční úlohy, toto řešení jsme schopni spočítat (numericky), nicméně stačí počáteční podmínky jen o trochu změnit a řešení se po čase mohou velmi vzdálit. Tuto citlovost na změnu počátečních podmínek u systému (3.9) jsem testoval s pomocí softwaru Matlab. Numerická řešení jsem počítal pomocí metody ode45.

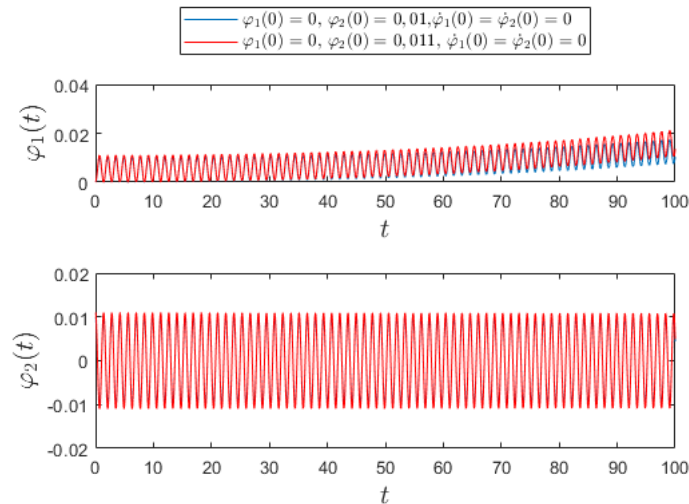
Parametry soustavy jsou  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $l_1 = l_2 = 1$  a za  $g$  jsem dosadil hodnotu 10. Nejprve jsem otestoval počáteční podmínky, které jsou velmi blízké rovnovážné poloze počáteční podmínky  $\varphi_1(0) = 0$ ,  $\varphi_2(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}_1(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}_2(0) = 0$ . Na obrázku 3.7 jsou vykreslena řešení konkrétně pro

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0,01, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (3.79)$$

a

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0,011, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0. \quad (3.80)$$

Z tohoto obrázku lze vidět, že ze začátku se řešení podobají, avšak po „delším“ čase se začínou vzdalovat.



Obrázek 3.7: Výchylinky v závislosti na čase

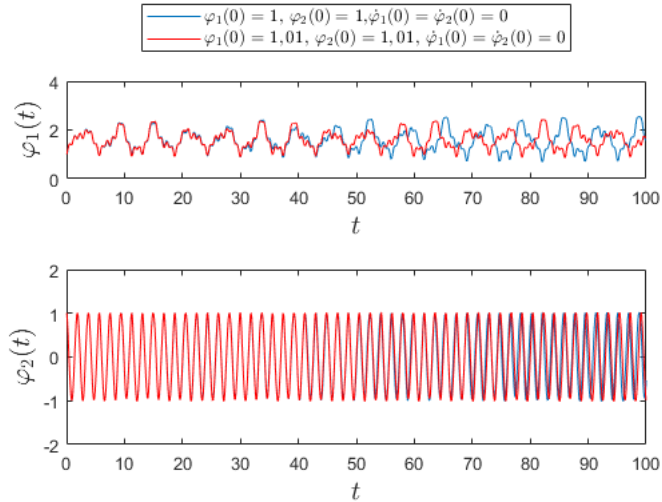
Pro stejnou soustavu jsem dále zvolil počáteční podmínky

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_2(0) = 1, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (3.81)$$

a

$$\varphi_1(0) = 1,01, \quad \varphi_2(0) = 1,01, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0. \quad (3.82)$$

Řešení jsou vykreslena na obrázku 3.8. Začnou se vzdalovat podstatně „dříve“ než v předěšlém případě.



Obrázek 3.8: Výchytky v závislosti na čase

Nakonec jsem zvolil počáteční podmínky

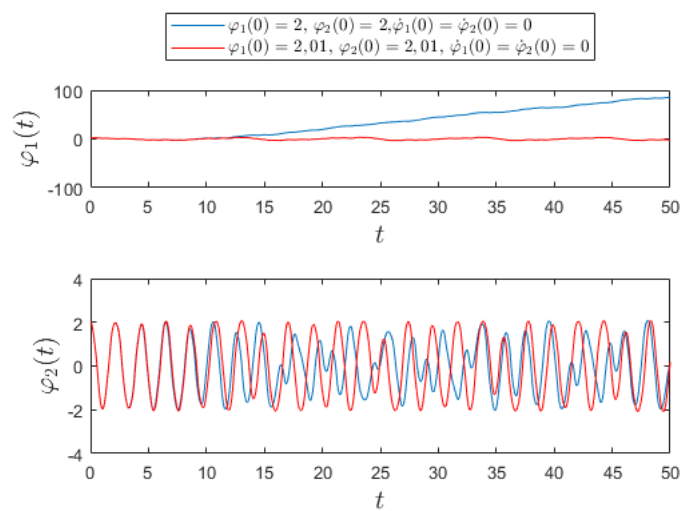
$$\varphi_1(0) = 2, \quad \varphi_2(0) = 2, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (3.83)$$

a

$$\varphi_1(0) = 2,01, \quad \varphi_2(0) = 2,01, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0. \quad (3.84)$$

Řešení jsou vykreslena na obrázku 3.9. Začnou se vzdalovat po velmi krátké době.

Toto chování je způsobeno právě nelinearitou systému diferenciálních rovnic a je pozorováno u systémů obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu dimenze alespoň tři (viz [5]). Vliv, který tato citlivost na počáteční podmínky má na globální chování celé soustavy, je často nazýván „efektem motýlých křídel“. Jako první přišel s tímto výrazem Edward Lorenz, který studoval matematické modely proudění v atmosféře Země. Poukazoval na to, že chaotické chování modelů, které studoval, činí předpovědi počasí prakticky nepoužitelné, až na krátkodobé předpovědi [5].



Obrázek 3.9: Výchylky v závislosti na čase

# Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo matematicky modelovat zvolenou mechanickou soustavu, analyzovat aproximativní systém rovnic a testovat citlivost řešení na změnu počátečních podmínek.

První kapitola se věnuje Lagrangeově formalizmu, je zde uveden Hamiltonův princip a z něj vycházející Eulerovy-Lagrangeovy rovnice. Praktické použití ilustruji na jednoduchém příkladu. Druhá kapitola je přehledem teorie systémů obyčejných diferenciálních rovnic. Jsou v ní uvedeny věty o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy, pro další části práce je také důležitá poznámka o převodu obyčejné diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu na SODR1 o  $n$  rovnicích. Dále jsou rozebrány vlastnosti lineárních SODR1 a Eulerova metoda vlastních čísel a vlastních vektorů pro řešení lineárního homogenního SODR1 s konstantními koeficienty.

Ve třetí kapitole se věnuji konkrétní mechanické soustavě tedy dvojitému kyvadlu. Odvodil jsem jeho pohybové rovnice. Jedná se o systém dvou autonomních nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu. Z nich jsem poté, aproximací nelinearit, odvodil aproximativní systém, který již je lineární. V další části je potom nejdůležitějším výsledkem věta o tvaru obecného řešení tohoto aproximativního systému. Výsledný pohyb, podle této věty, bude složením anizochronních kmitů, tzv. oscilačních módů. Pohyb bude periodický jen v případě, když budou frekvence kmitů soudělné. Dále jsou rozebrány speciální případy. Příkladem takového speciálního případu může být soustava dvojitého kyvadla, kdy mají obě tělesa stejnou hmotnost a délky závěsů jsou stejné. Pro tyto případy jsem odvodil tvar oscilačních módů. V poslední části jsem pak, pomocí numerických simulací, testoval citlivost řešení na změnu počátečních podmínek, testoval jsem celkem tři případy, počáteční podmínky blízké „malým výchylkám“, kdy se řešení od sebe začala vzdalovat po poměrně dlouhé době, dále pak počáteční podmínky, které jsou od této „rovnovážné polohy“ vzdálenější, v těchto případech se řešení začala vzdalovat po kratším čase.

Navázat na tuto bakalářskou práci by bylo možné analýzou periodičnosti pohybu ve speciálních případech, neboť kromě zmíněného příkladu, kdy obě tělesa mají stejnou hmotnost a délka závěsů je stejná, jsem tuto otázku dále nerozebíral. Dále by bylo možné podrobněji zpracovat analýzu citlivosti řešení na změnu počátečních podmínek.

# Literatura

- [1] BAJER, Jiří. *Mechanika 3*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2006. ISBN 80-244-1293-4.
- [2] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. *Matematika III*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5400-2.
- [3] FRANČŮ, Jan. Obyčejné diferenciální rovnice. Dostupné z: <http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu/>.
- [4] HAVRÁNEK, Antonín. *Klasická mechanika: Hmotný bod a tuhé těleso*. Praha: Karolinum, 2002. ISBN 80-246-0458-2.
- [5] KIBBLE, Tom W. B. a Frank H. BERKSHIRE. *Classical Mechanics*. 5. vyd. London: Imperial College Press, 2004. ISBN 1860944353.
- [6] KULHÁNEK, Petr. *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky*. Praha: AGA, 2016. ISBN 978-80-904582-8-4.
- [7] MORIN, David. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-87622-3.