UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Řešené úlohy z kosoúhlého promítání zpracované v programu Geogebra

Katedra algebry a geometrie
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Marie Chodorová, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Kateřina Hönigerová**
Studijní program: Matematika pro vzdělávání
Studijní obor Matematika se zaměřením na vzdělávání / Deskriptivní geometrie se zaměřením na vzdělávání
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2024

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Kateřina Hönigerová

Název práce: Řešené úlohy z kosoúhlého promítání zpracované v programu Geogebra

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: RNDr. Marie Chodorová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2024

Abstrakt: Bakalářská práce tvoří sbírku zajímavých polohových a metrických úloh a úloh na zobrazení těles. Jednotlivé úlohy jsou zpracovány v programu Geogebra a uloženy formou dynamických pracovních listů.

Klíčová slova: Kosoúhlé promítání, řešené příklady, Geogebra

Počet stran: 33

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Kateřina Hönigerová

Title: Solved problems from oblique projection processed in the program GeoGebra

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Algebra and Geometry

Supervisor: RNDr. Marie Chodorová, Ph.D.

The year of presentation: 2024

Abstract: The bachelor's thesis is a collection of interesting positional, metric and solid representation problems. The individual tasks are processed in the program Geogebra and stored as dynamic worksheets.

Key words: Oblique projection, solved problems, Geogebra

Number of pages: 33

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní RNDr. Marie Chodorové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....
podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala RNDr. Marii Chodorové, Ph.D. za odborné vedení a věcné připomínky při zpracovávání práce.

Úvod

Tématem bakalářské práce jsou řešené úlohy z kosoúhlého promítání zpracované v programu Geogebra. Cílem práce je sestavit soubor vybraných úloh z kosoúhlého promítání a zpracovat je formou dynamických pracovních listů v programu Geogebra.

Práce je určena pro studenty deskriptivní geometrie na VŠ. U studentů se předpokládá znalost principů kosoúhlého promítání. Student při použití dynamických pracovních listů sám ovládá přesun na další krok konstrukce. Kroky konstrukce jsou zapsány v heslovitém postupu na druhé nákresně a v rámci konstrukce se postupně objevují na obrazovce. Student má možnost se v konstrukci vracet, postupovat svým tempem.

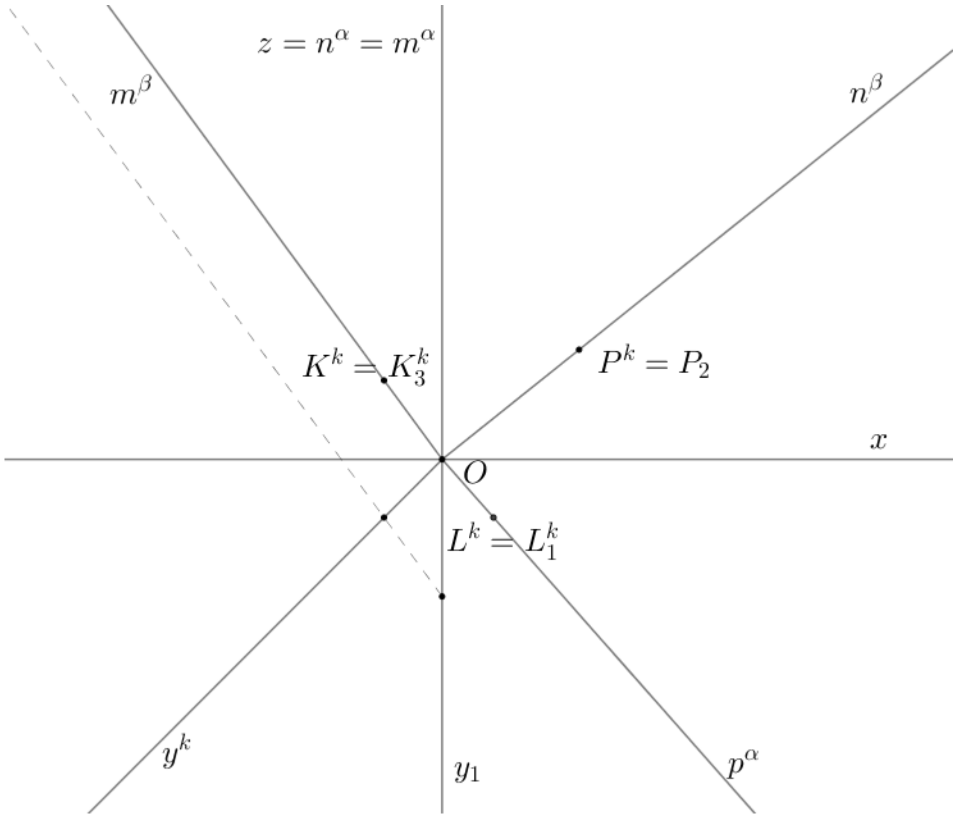
Práce je rozdělena do tří kapitol - polohové úlohy, metrické úlohy, zobrazení těles. Každý příklad je zadán pomocí souřadnic, následně je zadání zpracováno graficky. Následuje postup řešení a obrázek řešení. Před obrázkem řešení se nachází odkaz na příslušný dynamický pracovní list.

Pozn. Kosoúhlé promítání je nadále v práci i v pracovních listech označováno zkratkou KP.

Kapitola 1

Polohové úlohy

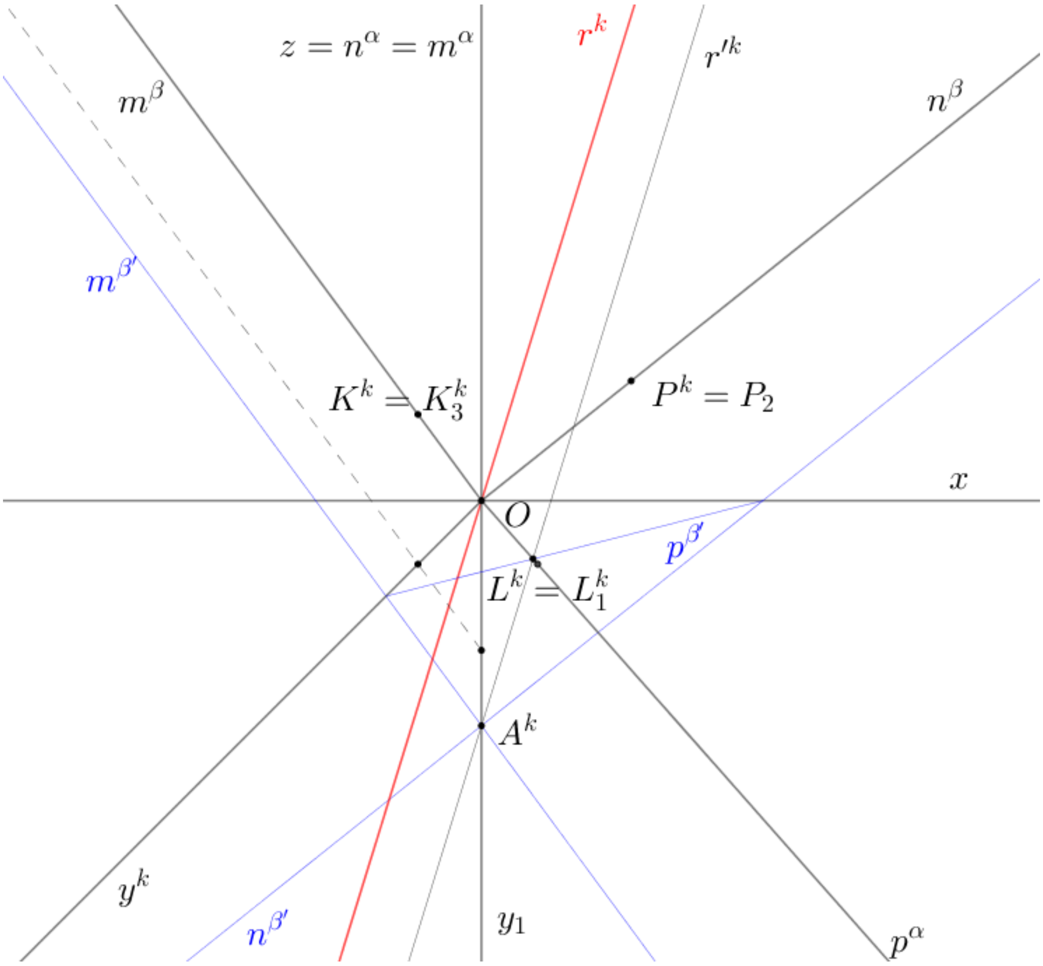
Příklad 1.1 V KP $(135°, q = \frac{3}{5})$ sestrojte průsečnici r rovin β a α.
$\alpha = \leftrightarrow zL; L[4, 5, 0]$
$\beta = \leftrightarrow OKP; O[0, 0, 0], P[5, 0, 4], K[0, 5, 5]$



Obrázek 1.1: Příklad 1.1 - zadání

Řešení: K řešení využijeme vhodně zvolenou rovinu β' rovnoběžnou s rovinou β. Průsečnice rovin β' a α bude rovnoběžná s hledanou průsečnicí r. Sestrojíme tedy průsečnici $r' = \beta' \cap \alpha$ (pomocí průsečíků příslušných stop rovin). Následně sestrojíme přímku r rovnoběžnou s r' procházející počátkem O (obě zadané roviny bod O obsahují, bude jím tedy procházet jejich průsečnice).

Postup a konstrukce řešení - viz applet Příklad 1.1

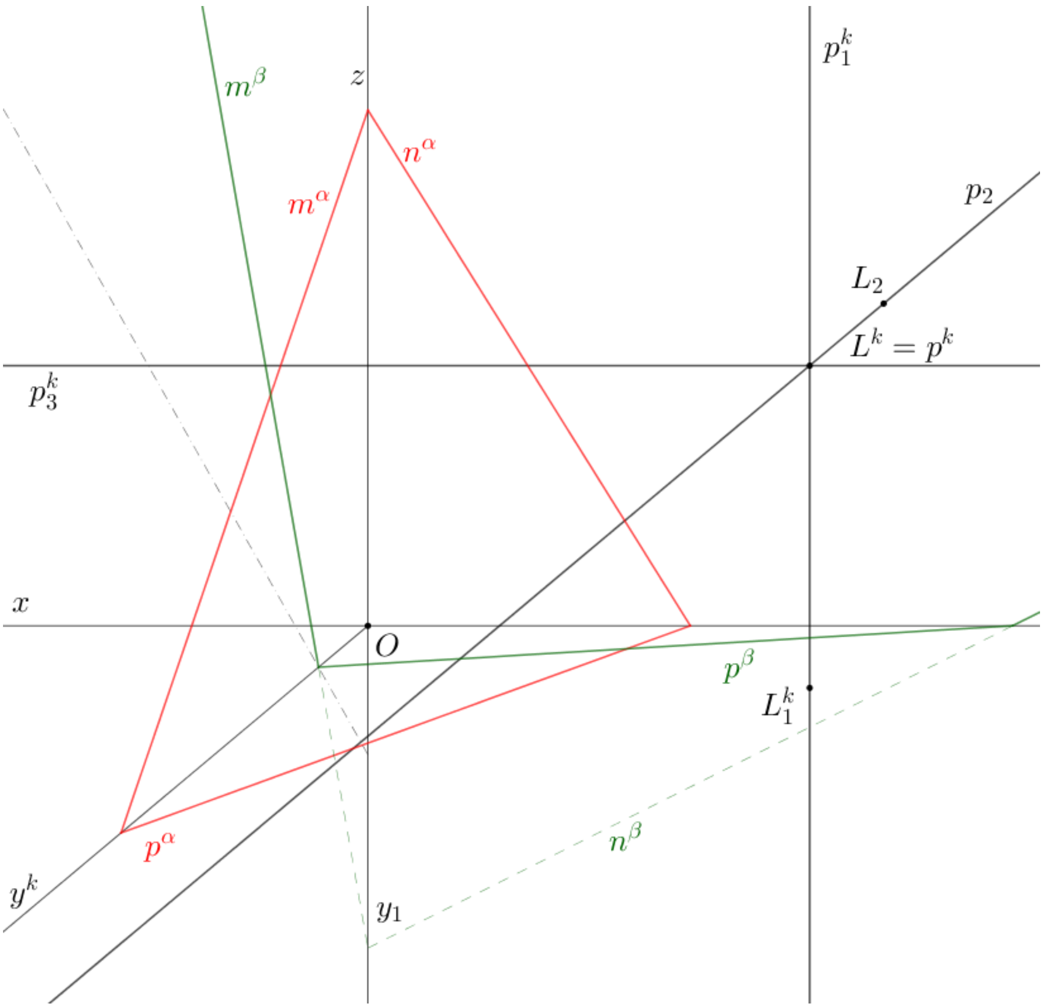


Obrázek 1.2: Příklad 1.1 - řešení

Příklad 1.2 V KP ($140°, q = \frac{1}{2}$) proložte danou přímkou p rovinu λ tak, aby dané různoběžné roviny α, β proťala v rovnoběžných přímkách. Přímka p je kosoúhle promítací.

$L \in p, L[8, 3, 5]$

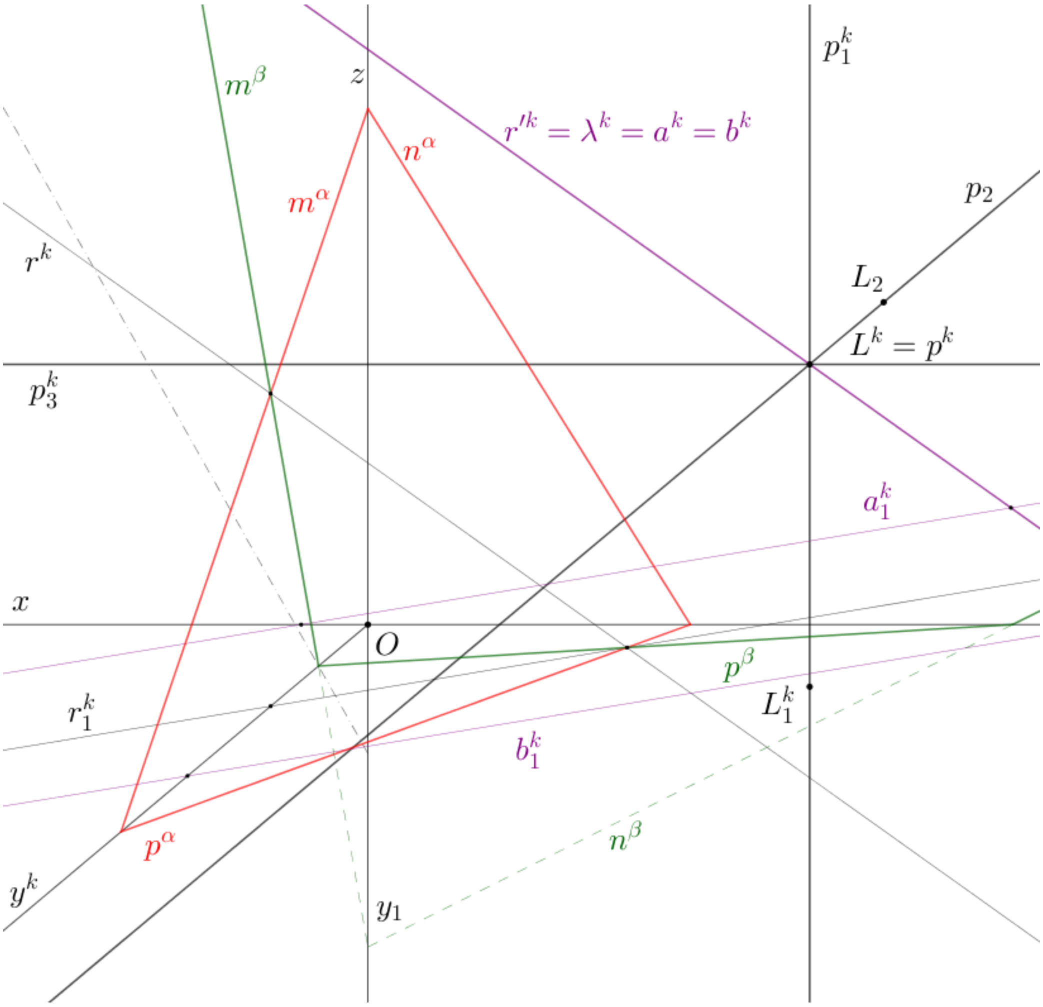
$\alpha = (5, 10, 8), \beta = (10, 2, -5)$



Obrázek 1.3: Příklad 1.2 - zadání

Řešení: Rovina protíná dvě dané různoběžné roviny v rovnoběžných přímkách, je-li rovnoběžná s průsečnicí daných rovin. Sestrojíme tedy průsečnici r rovin α, β. Hledaná rovina λ je určena přímkami p a r', kde $r' \parallel r$. Rovina λ protíná rovinu α v přímce a a rovinu β v přímce b.

Postup a konstrukce řešení - viz applet Příklad 1.2



Obrázek 1.4: Příklad 1.2 - řešení

Příklad 1.3a V KP ($140°, q = \frac{3}{5}$) sestrojte společnou příčku přímek a, b, c, d, kde a, b jsou různoběžné, jinak jsou přímky mimoběžné.

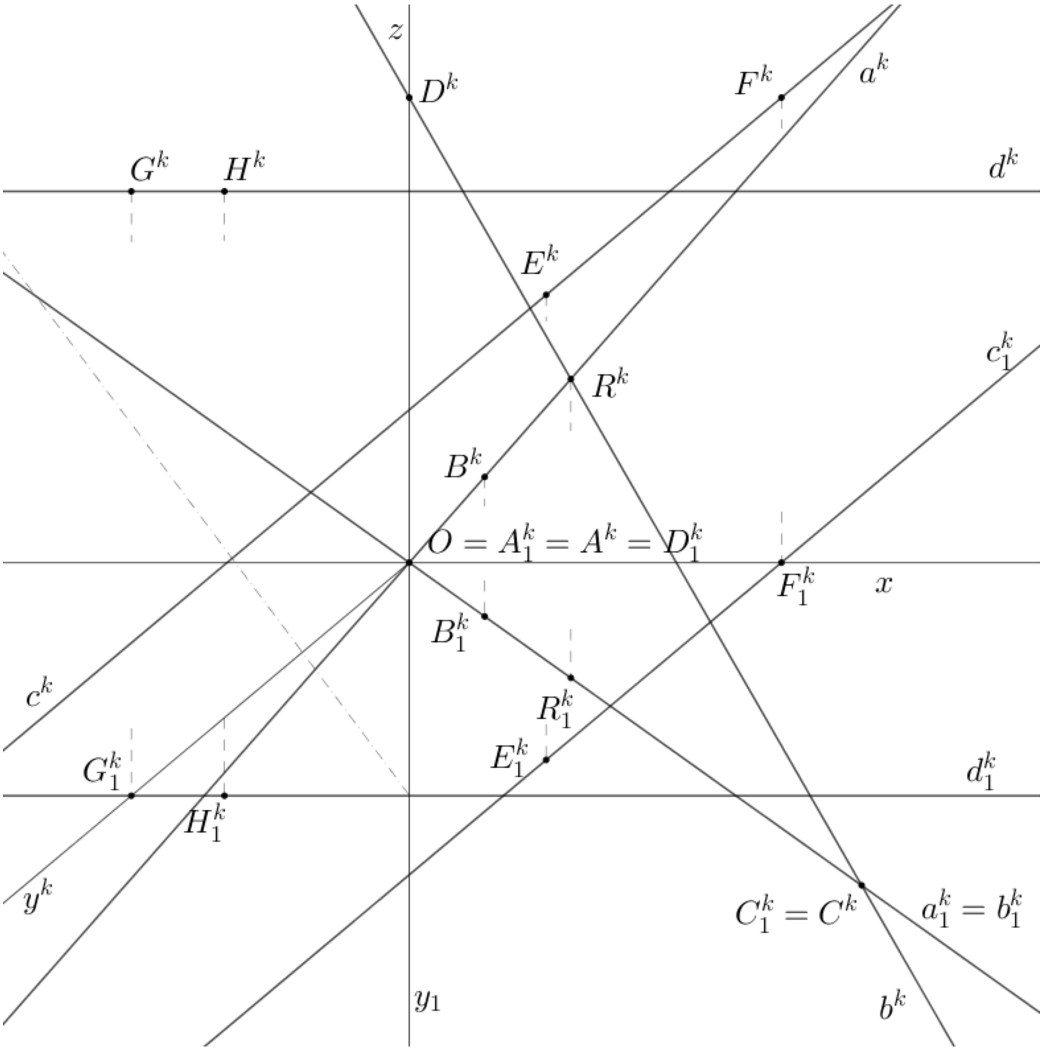
$a \cap b = R$

$a =\leftrightarrow AB; A[0,0,0], B[3,3,3]$

$b =\leftrightarrow CD; C[18,18,0], D[0,0,10]$

$c =\leftrightarrow EF; E[8,11,10], F[8,0,10]$

$d =\leftrightarrow GH; G[0,13,13], H[2,13,13]$



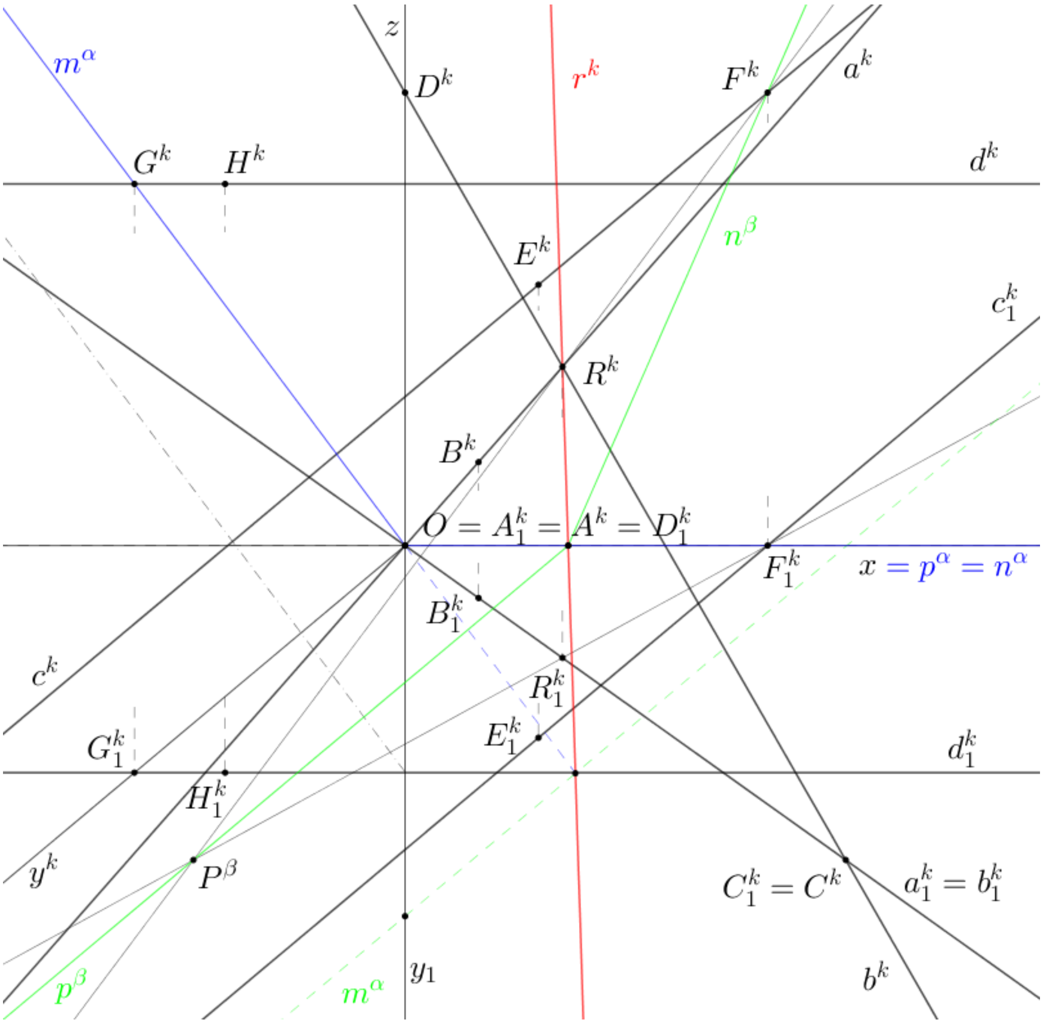
Obrázek 1.5: Příklad 1.3a - zadání

Úloha má 2 řešení. Druhé řešení je popsáno v příkladu 1.3b.

1. způsob řešení: Označme hledanou příčku jako přímku r, která má být společnou příčkou přímek a, b, c, d, bude tedy protínat a a zároveň b. Přímka r bude procházet průsečíkem R přímek a a b.

Touto úvahou převedeme úlohu na určení příčky r mimoběžných přímek c, d procházející daným bodem R. Přímka r leží v rovině β určené bodem R a přímkou c. Současně leží v rovině α určené bodem R a přímkou d. Hledaná přímka r je tedy průsečnicí rovin α a β.

Postup a konstrukce řešení - viz applet Příklad 1.3a



Obrázek 1.6: Příklad 1.3a - řešení

Příklad 1.3b V KP $(140°, q = \frac{3}{5})$ sestrojte společnou příčku přímek a, b, c, d, kde a, b jsou různoběžné, jinak jsou přímky mimoběžné.

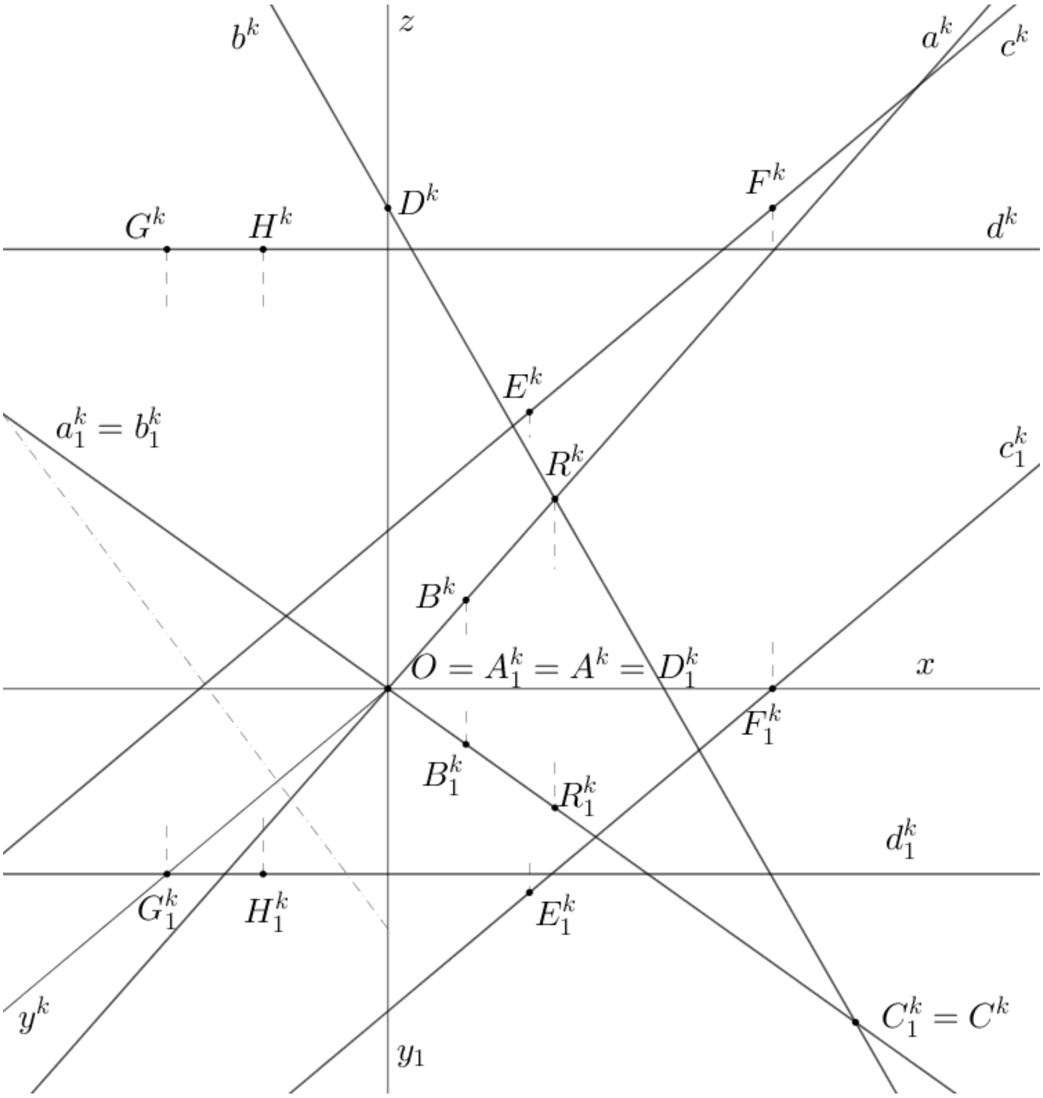
$a \cap b = R$

$a = \leftrightarrow AB; A[0,0,0], B[3,3,3]$

$b = \leftrightarrow CD; C[18,18,0], D[0,0,10]$

$c = \leftrightarrow EF; E[8,11,10], F[8,0,10]$

$d = \leftrightarrow GH; G[0,13,13], H[2,13,13]$

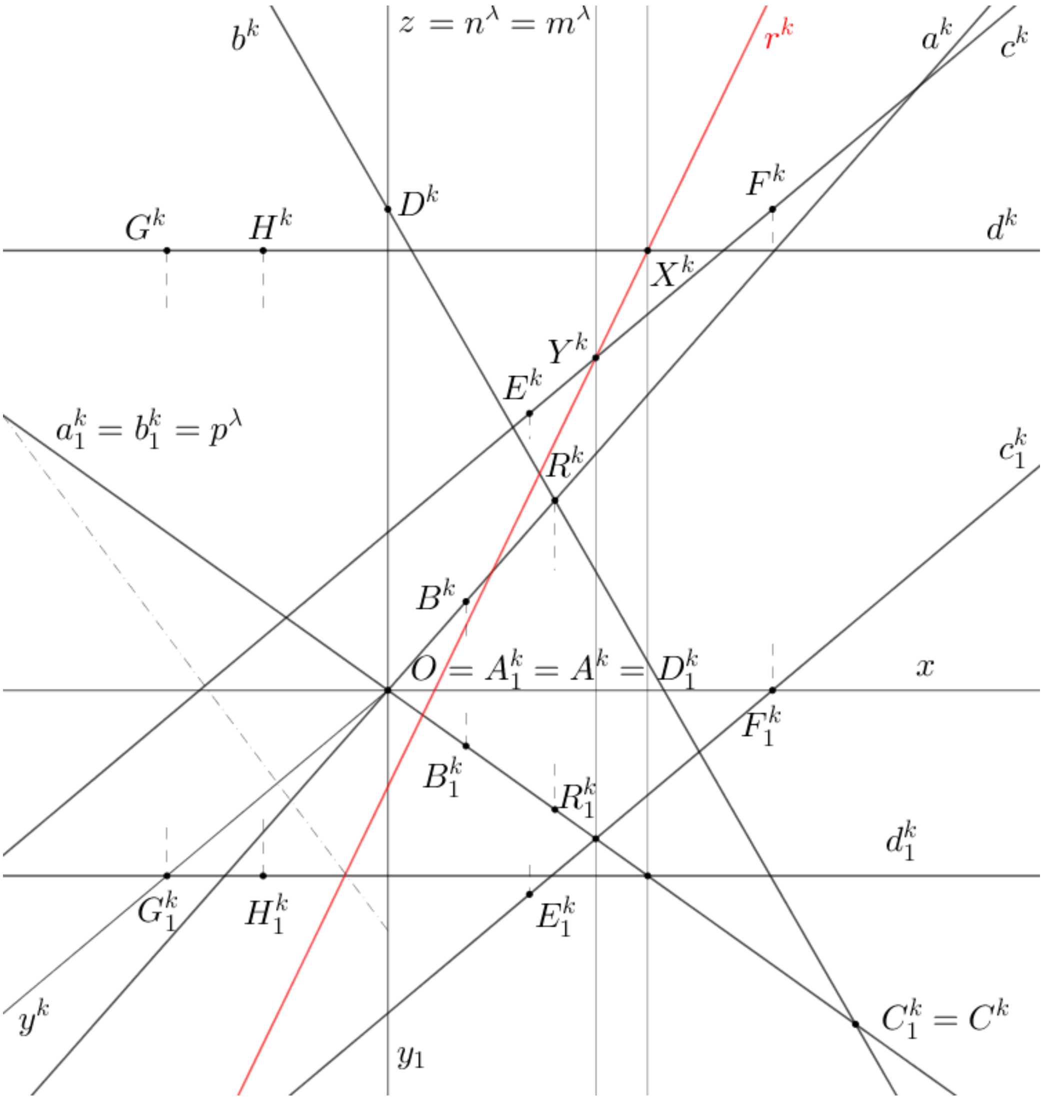


Obrázek 1.7: Příklad 1.3b - zadání

2. způsob řešení: Označme hledanou příčku jako přímku r, která má být společnou příčkou přímek a, b, c, d, bude tedy protínat a a zároveň b. Tentokrát budeme uvažovat, že $R \notin r$. Tedy hledaná příčka r bude ležet v rovině λ určené přímkami a, b.

Rovina λ protne přímky c, d po řadě v bodech Y, X. V těchto bodech bude přímka r protínat po řadě přímky c, d. Přímka r je tedy určena body X, Y.

Postup a konstrukce řešení - viz applet Příklad 1.3b



Obrázek 1.8: Příklad 1.3b - řešení

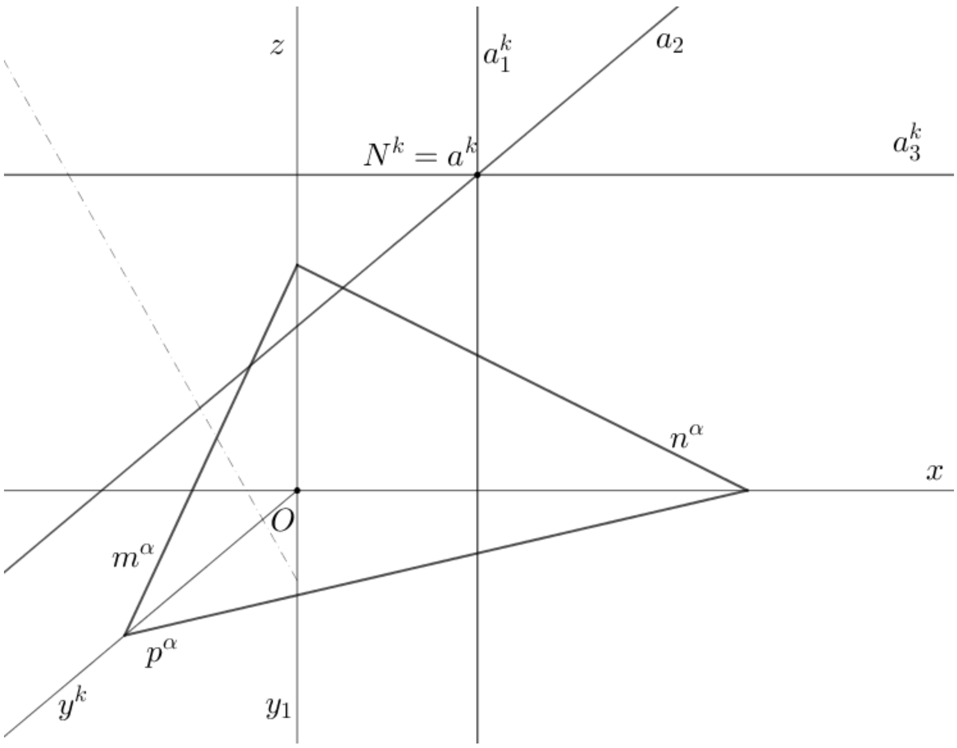
Kapitola 2

Metrické úlohy

Příklad 2.1 V KP $(140°, q = \frac{1}{2})$ určete odchylku φ kosoúhle promítací přímky a od roviny α.

$\alpha = (10, 10, 5)$

$N \in a, N[4, 0, 7]$

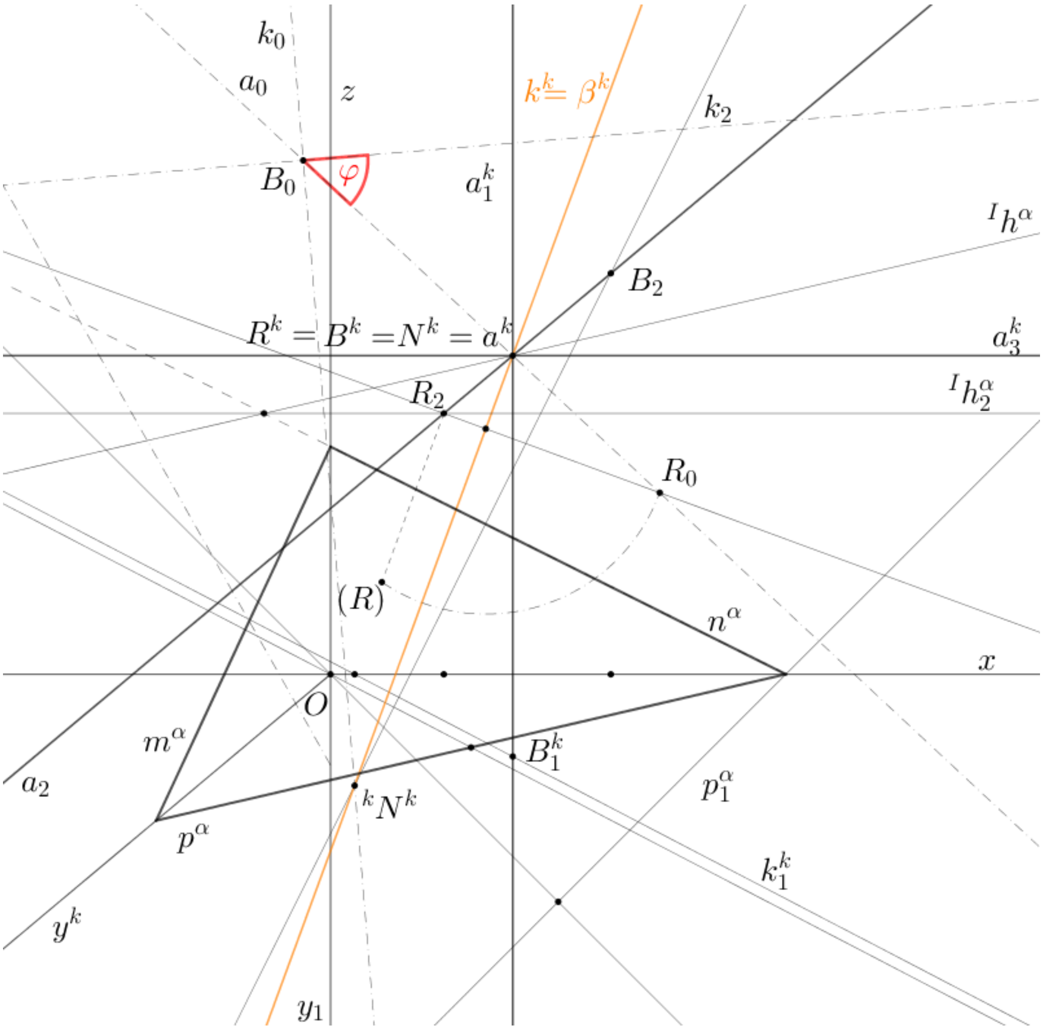


Obrázek 2.1: Příklad 2.1 - zadání

Řešení: Odchylka přímky od roviny je velikost úhlu, který svírá daná přímka se svým pravoúhlým průmětem do dané roviny. Přímkou a tedy proložíme rovinu β kolmou k rovině α. Rovina β je určena přímkou a a kolmicí k k rovině α různoběžnou s přímkou a ($a \cap k = D$).

Hledaná odchylka φ je potom velikost úhlu, který svírá přímka a s průsečnicí rovin α a β. Velikost úhlu φ určíme otočením roviny β.

Postup a konstrukce řešení - viz applet Příklad 2.1



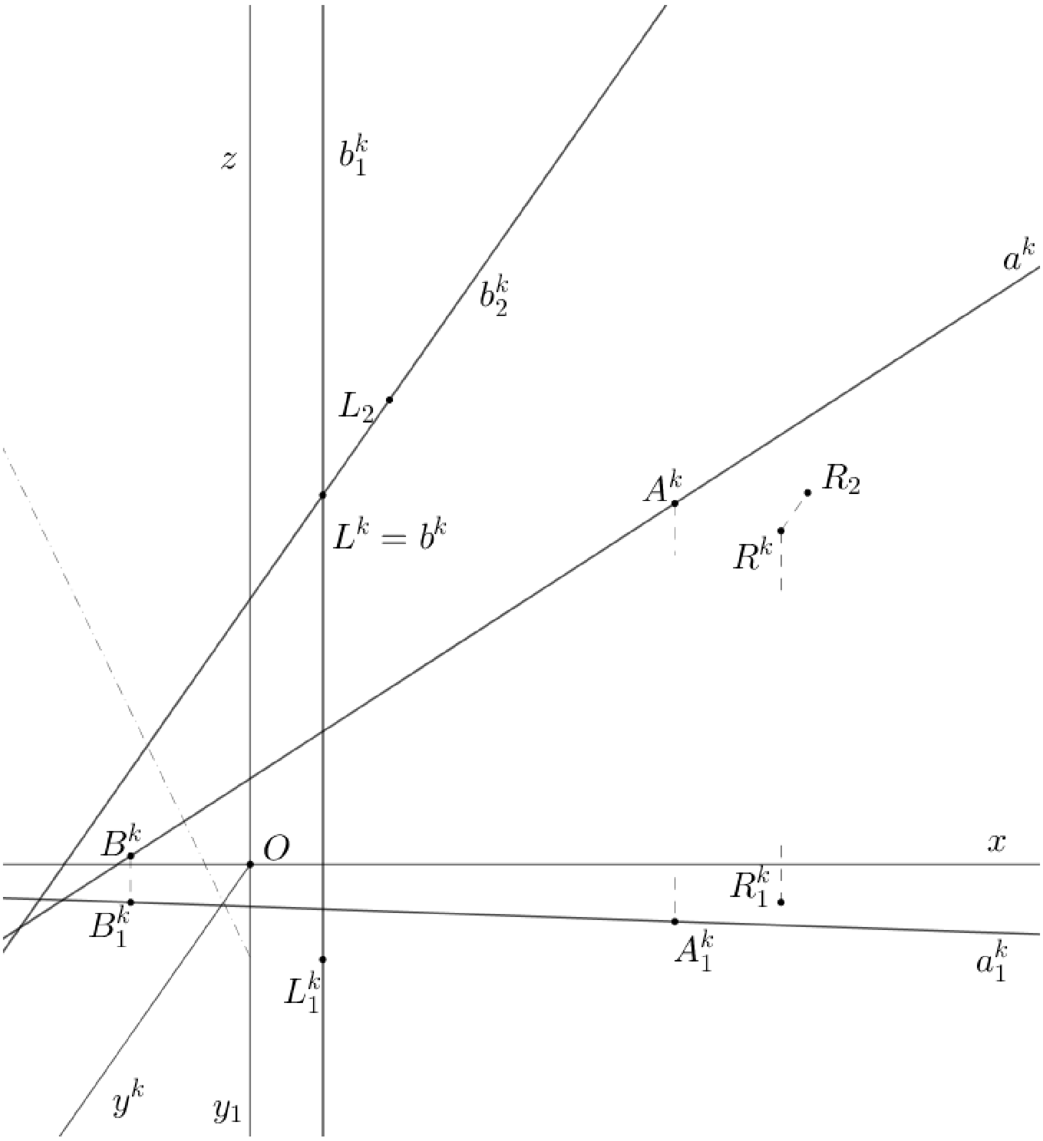
Obrázek 2.2: Příklad 2.1 - řešení

Příklad 2.2 V KP $(125°, q = \frac{1}{2})$ veďte daným bodem R příčku r mimoběžek a, b. Určete vzdálenost bodů X, Y, kde X je průsečík přímek r, a a Y průsečík přímek r, b. Přímka b je kosoúhle promítací.

$a = \leftrightarrow AB; A[8, 3, 10], B[-2, 2, 1]$

$L \in b; L[3, 5, 10]$

$R[10, 2, 5]$

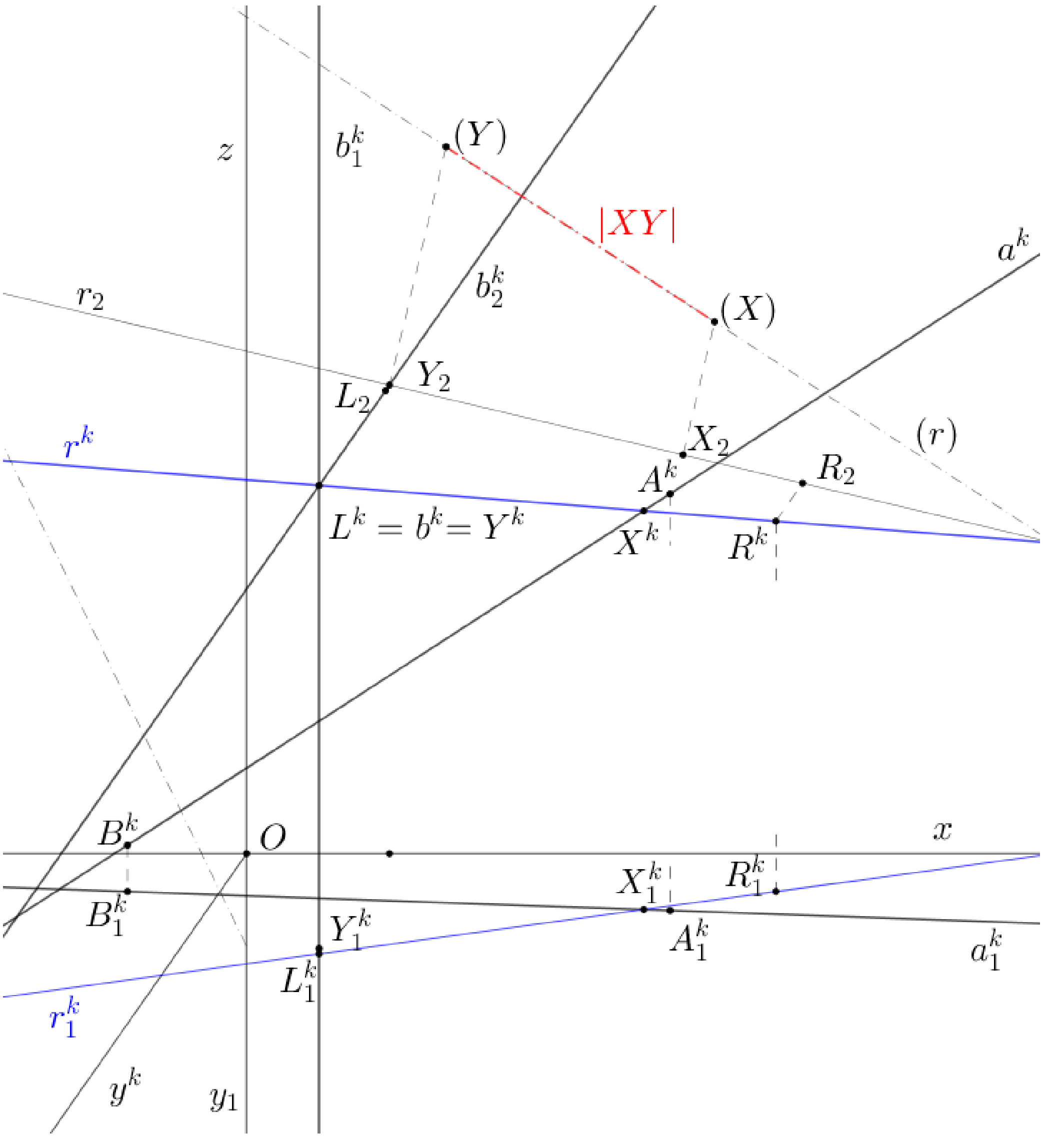


Obrázek 2.3: Příklad 2.2 - zadání

Řešení: Příčka mimoběžek r leží v rovině α určené bodem R a přímkou

a. Zároveň r leží v rovině β určené bodem R a přímkou b. Hledaná příčka r je potom průsečnicí rovin α a β. Přímka r protne přímku a v bodě X a přímku b v bodě Y. Jejich vzdálenost určíme sklopením přímky r.

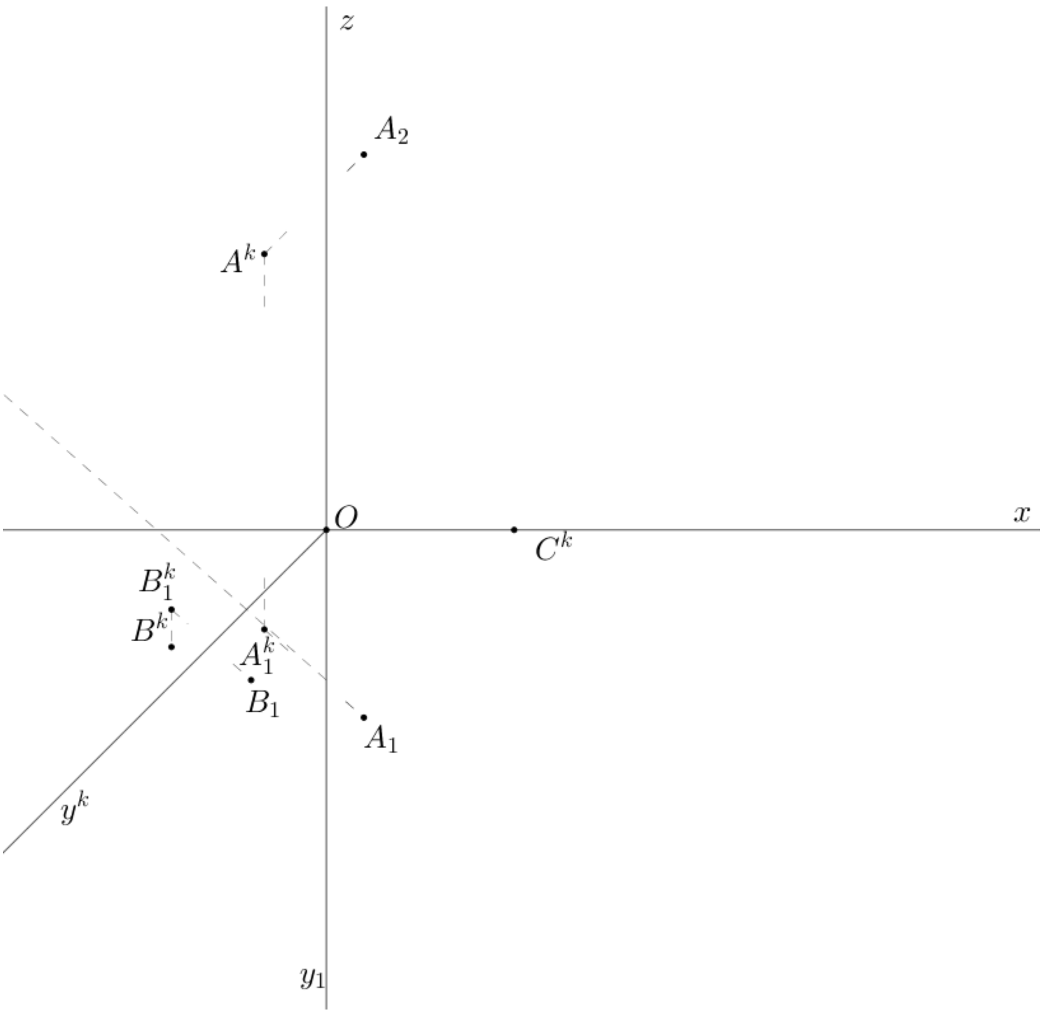
Postup a konstrukce řešení - viz applet Příklad 2.2



Obrázek 2.4: Příklad 2.2 - řešení

Příklad 2.3 V KP ($135°, q = \frac{3}{4}$) sestrojte množinu bodů v prostoru stejně vzdálených od tří daných bodů A, B, C.

$A[1, 5, 10], B[-2, 4, -1], C[5, 0, 0]$

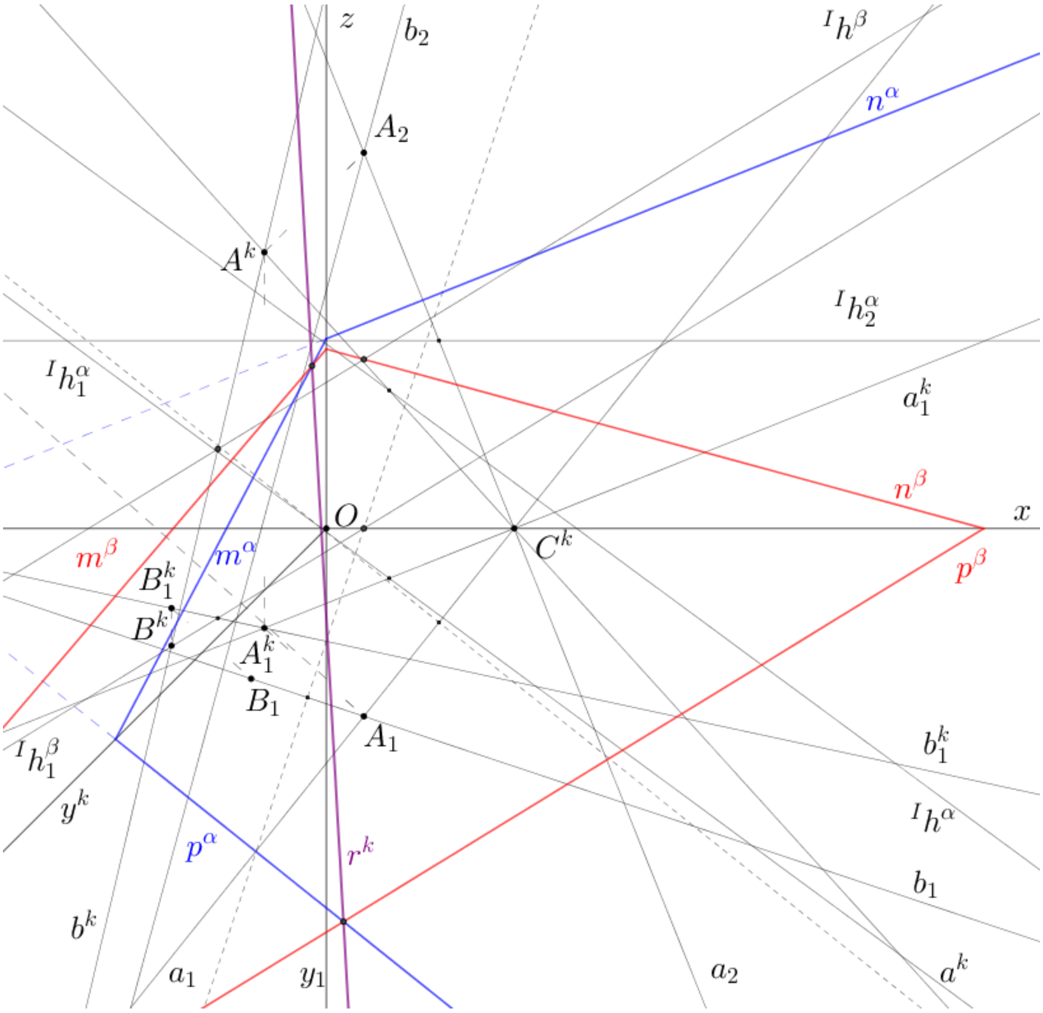


Obrázek 2.5: Příklad 2.3 - zadání

Řešení: Množina bodů v prostoru stejně vzdálených od dvou různých bodů A, C je rovina souměrnosti úsečky AC, tj. rovina α kolmá k úsečce AC procházející středem dané úsečky. Analogicky, množina bodů v prostoru stejně vzdálených od dvou různých bodů A, B je rovina souměrnosti β úsečky AB. Podle stejné úvahy sestrojíme rovinu souměrnosti γ úsečky BC.

Třetí rovina souměrnosti není k nalezení hledané množiny bodů potřeba, jelikož všechny tři roviny souměrnosti tvoří svazek rovin, osou svazku je přímka r (tj. $\alpha \cap \beta \cap \gamma = r$). Přímka r je hledanou množinou bodů v prostoru.

Postup a konstrukce řešení - viz applet Příklad 2.3



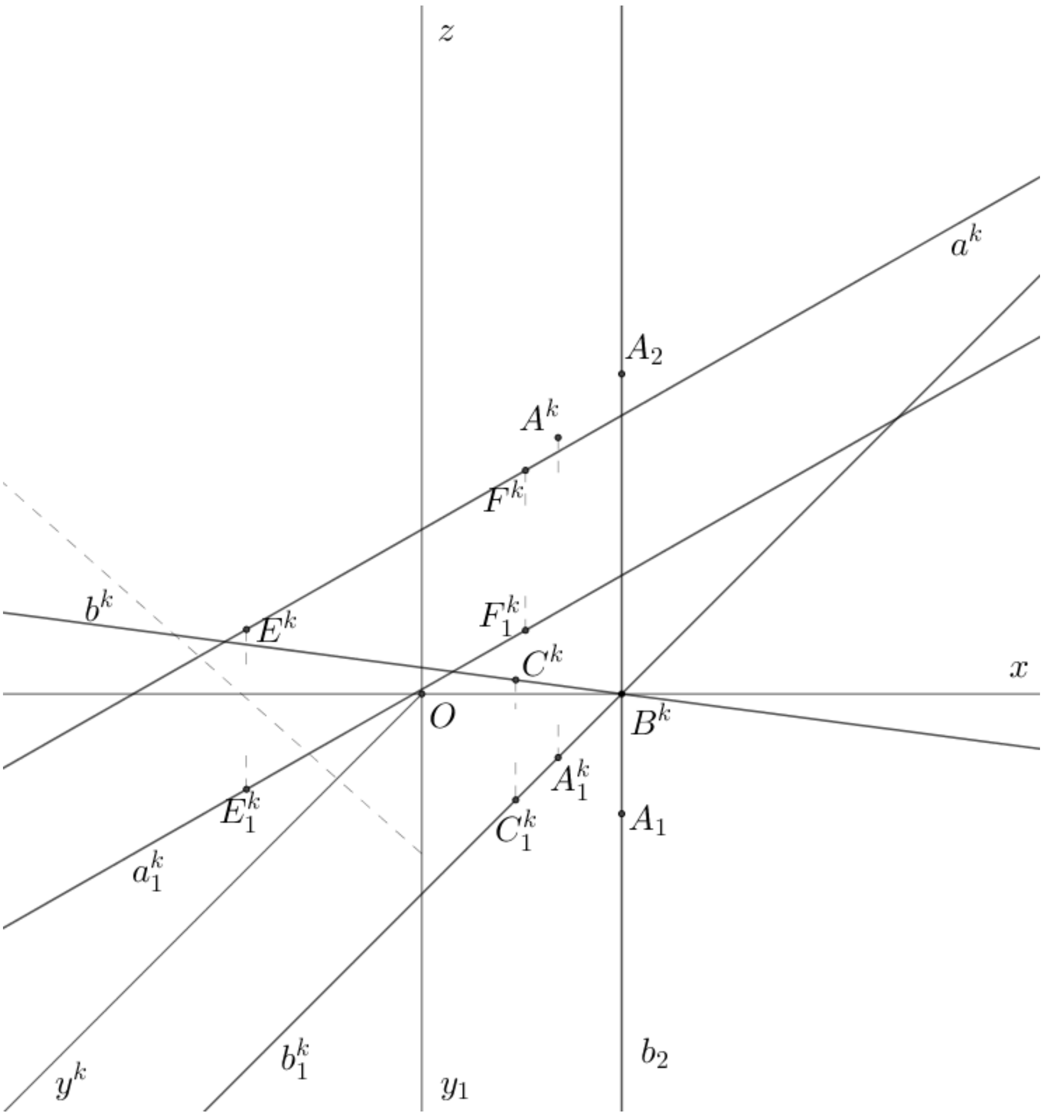
Obrázek 2.6: Příklad 2.3 - řešení

Příklad 2.4 V KP $(135°, q = \frac{3}{4})$ veďte daným bodem A přímku p, která protíná danou přímku a a je kolmá k dané přímce b.

$A[5,3,8]$

$b =\leftrightarrow BC; C[5,5,3], B[5,0,0]$

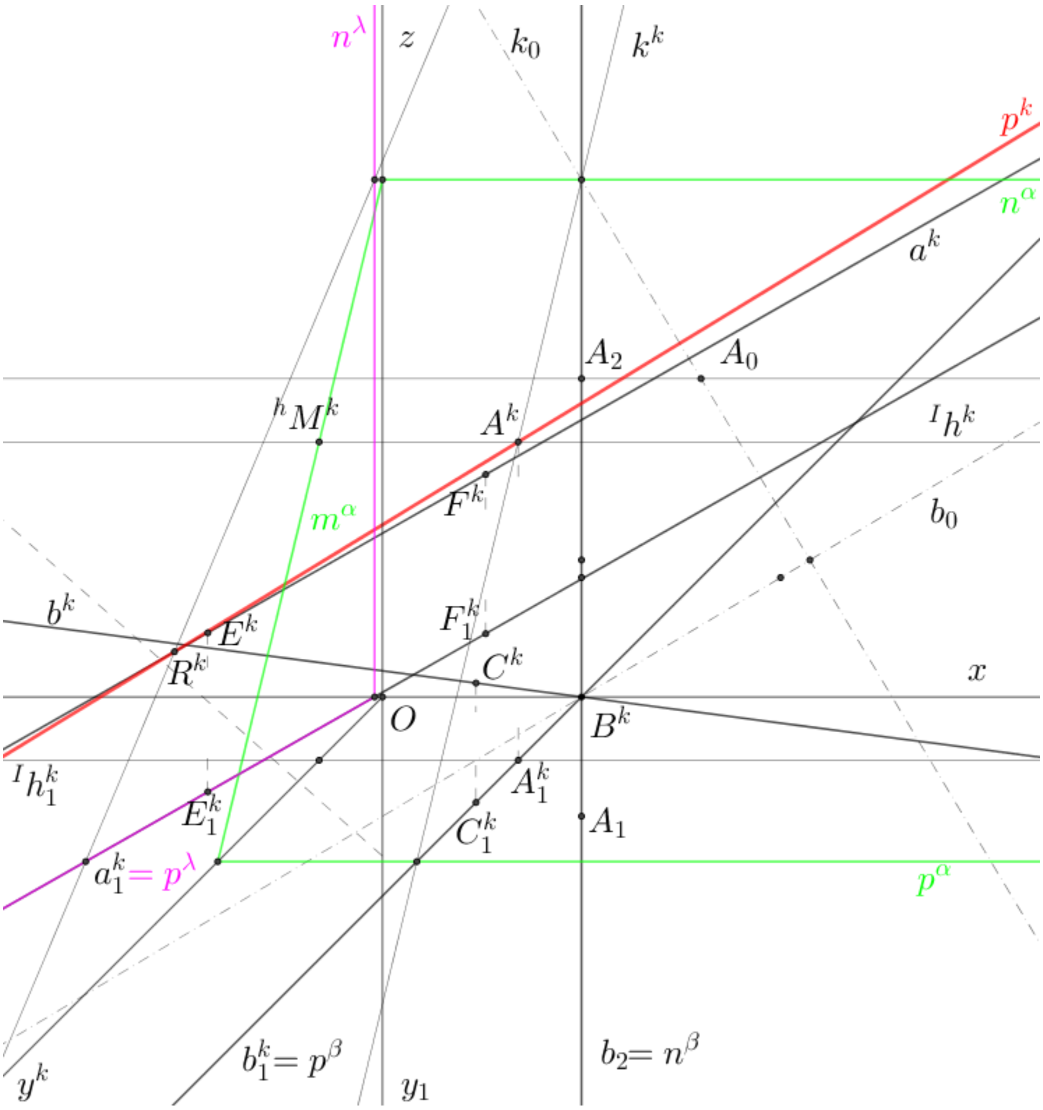
$a =\leftrightarrow EF; E[-2;4,5;4], F[1,-3,4]$



Obrázek 2.7: Příklad 2.4 - zadání

Řešení: Množina všech přímek v prostoru kolmých k dané přímce b procházejích daným bodem A tvoří rovinu α kolmou k přímce b procházející bodem A. V rovině α hledáme takovou přímku p, která je různoběžná s přímkou a, tj. $a \cap p = R$. Přímka p bude tedy procházet průsečíkem R přímky a a roviny α (průsečík určíme proložením roviny λ přímkou r). Přímka p je určena body A a R.

Postup a konstrukce řešení - viz applet Příklad 2.4

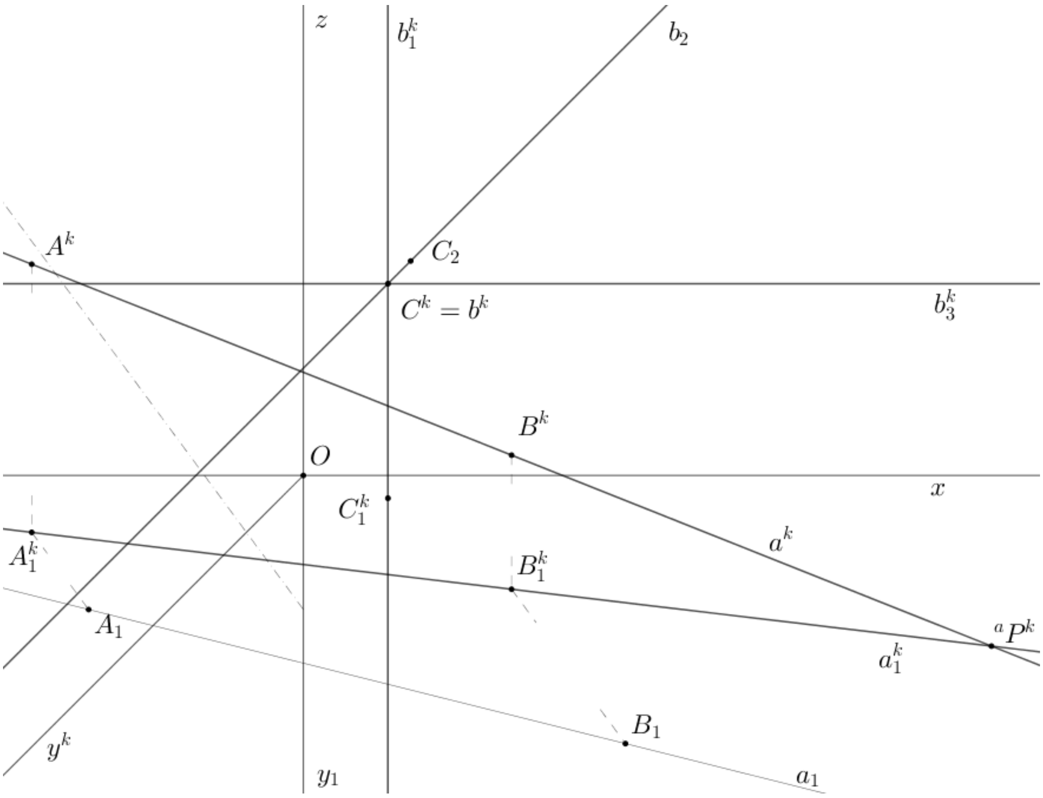


Obrázek 2.8: Příklad 2.4 - řešení

Příklad 2.5 V KP $(125°, q = \frac{1}{2})$ sestrojte osu mimoběžných přímek a, b. Přímka b je kosoúhle promítací.

$a = \leftrightarrow AB; A[8, 5, 10], B[12, 10, 5]$

$C \in b; C[4, 2, 8]$



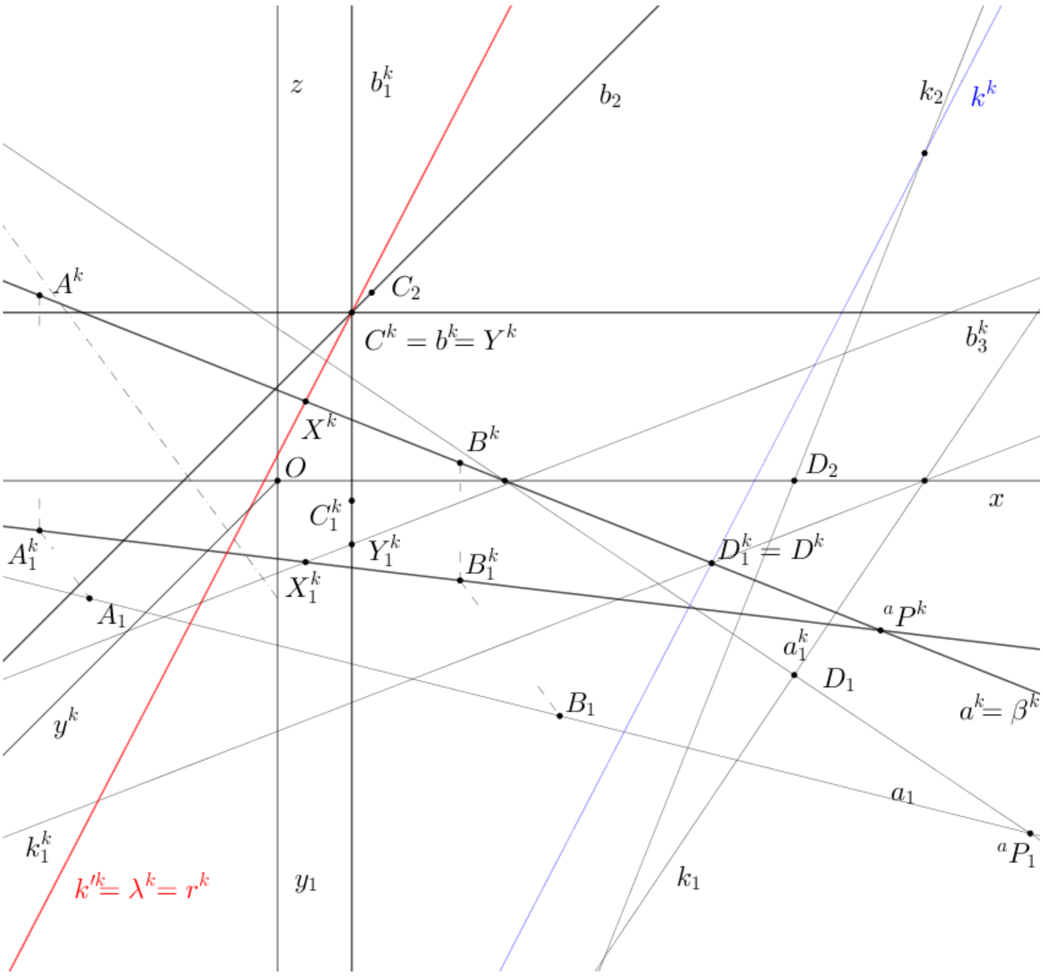
Obrázek 2.9: Příklad 2.5 - zadání

Řešení: Osa mimobežných přímek je kolmá k oběma mimoběžkám. Úlohu převedeme na příčku mimoběžných přímek daného směru.

Přímkou a proložíme rovinu β rovnoběžnou s přímkou b. V rovině β zvolíme vhodný bod D, ve kterém sestrojíme kolmici k k dané rovině. Přímka k je kolmá k oběma přímkám a a b, určuje tedy směr hledané osy mimoběžek.

Bodem C vedeme přímku k' rovnoběžnou s přímkou k. Přímky b a k' určují rovinu λ. Průsečík X roviny λ a přímky a je jedním z bodů osy mimoběžek. Osa r mimoběžných přímek prochází bodem X a je rovnoběžná s přímkou k.

Postup a konstrukce řešení - viz applet Příklad 2.5



Obrázek 2.10: Příklad 2.5 - řešení

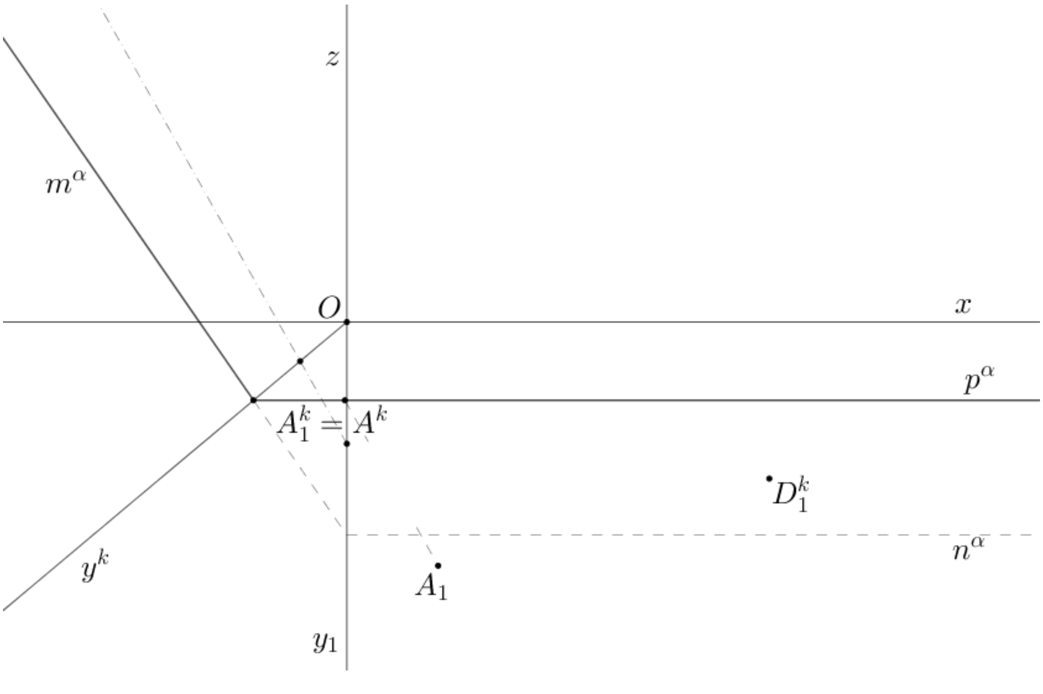
Kapitola 3

Zobrazení těles

Příklad 3.1 V KP $(140°, q = \frac{1}{2})$ sestrojte pravidelný kolmý šestiboký jehlan $ABCDEFV$ s podstavou v rovině α, jehož boční stěna ABV leží v rovině $\beta \perp \pi$.

$A[1,5;4;0], D[10;8;?]$

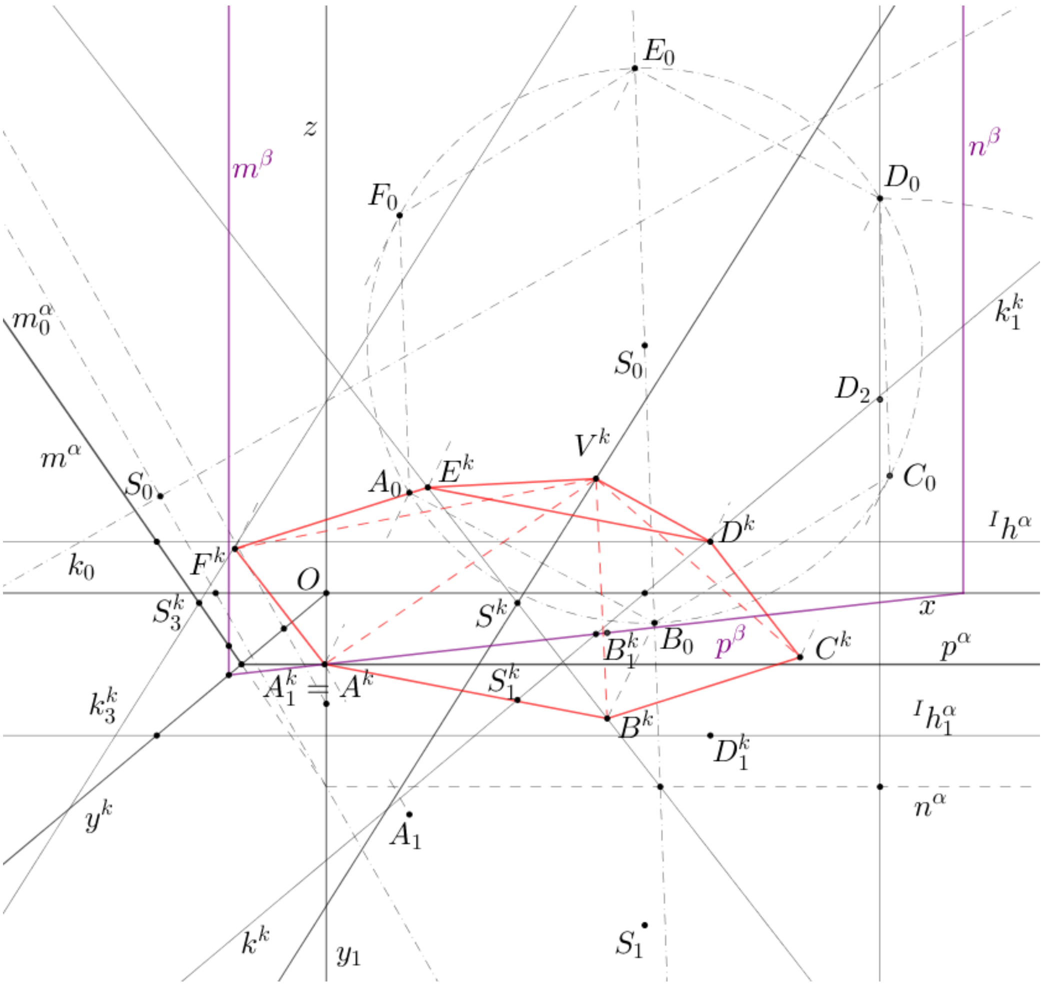
$\alpha = (\infty; 4; -3,5)$



Obrázek 3.1: Příklad 3.1 - zadání

Řešení: Rovinu α otočíme kolem nárysné stopy a v otočení sestrojíme podstavu jehlanu, šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S. Užitím afinity mezi otočením a kosoúhlým průmětem získáme průmět podstavy jehlanu. Středem S vedeme kolmici k k rovině α, na které bude ležet vrchol jehlanu V. Boční stěna jehlanu ABV leží v rovině β. Tato rovina je určena body A, B a svou polohou vzhledem k π. Vrchol V je potom průsečík roviny β a přímky k.

Konstrukce a postup řešení - viz applet Příklad 3.1



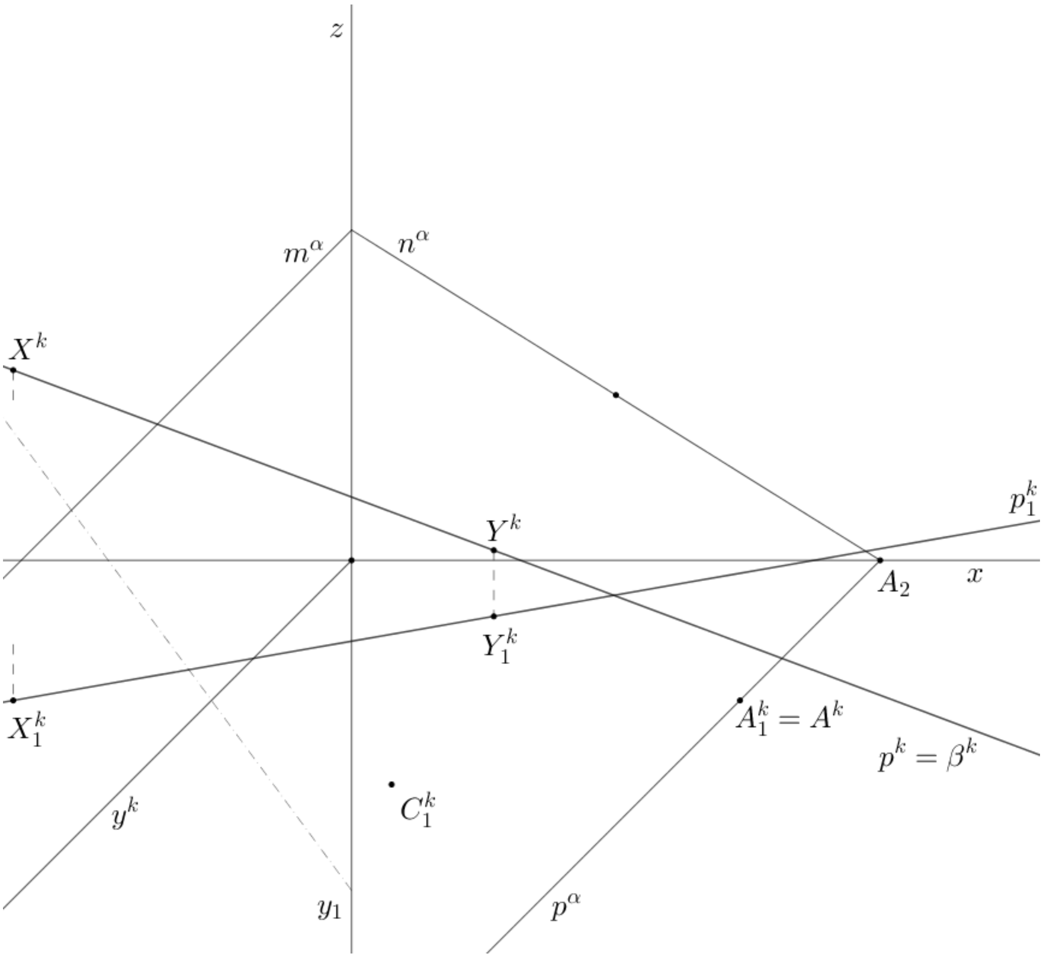
Obrázek 3.2: Příklad 3.1 - řešení

Příklad 3.2 V KP($135°, q = \frac{3}{5}$) je dán kolmý pravidelný čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$ s podstavou v rovině α a výškou v. Sestrojte řez hranolu rovinou β. Rovina β je určena přímkou p a je kosoúhle promítací. Určete velikost řezu.

$\alpha = (8, \infty, 5);\ v = 7$

$A[8, 5, 0], C[4, 8, ?]$

$p = \leftrightarrow XY;\ X[-3, 5, 5], Y[3, 2, 1]$

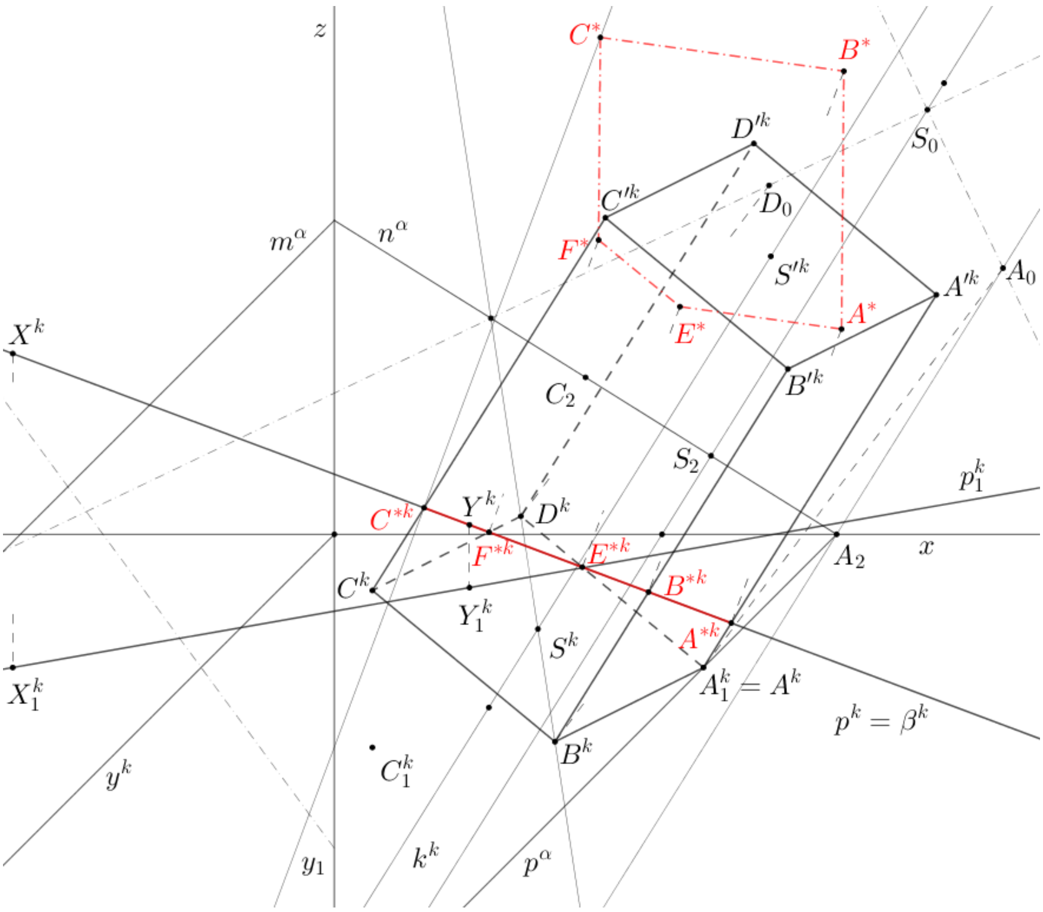


Obrázek 3.3: Příklad 3.2 - zadání

Řešení: Rovinu α, ve které leží dolní podstava hranolu, otočíme. Pomocí afinity mezi otočením a kosoúhlým průmětem získáme průmět podstavy. V bodě S (střed podstavy) sestrojíme kolmici k k rovině α a naneseme na ni velikost výšky v. Sestrojíme horní podstavu hranolu $A'B'C'D'$.

Rovina β je kosoúhle promítací, průmětem řezu hranolu bude úsečka C^*A^*. Velikost řezu určíme otočením roviny β.

Konstrukce a postup řešení - viz applet Příklad 3.2



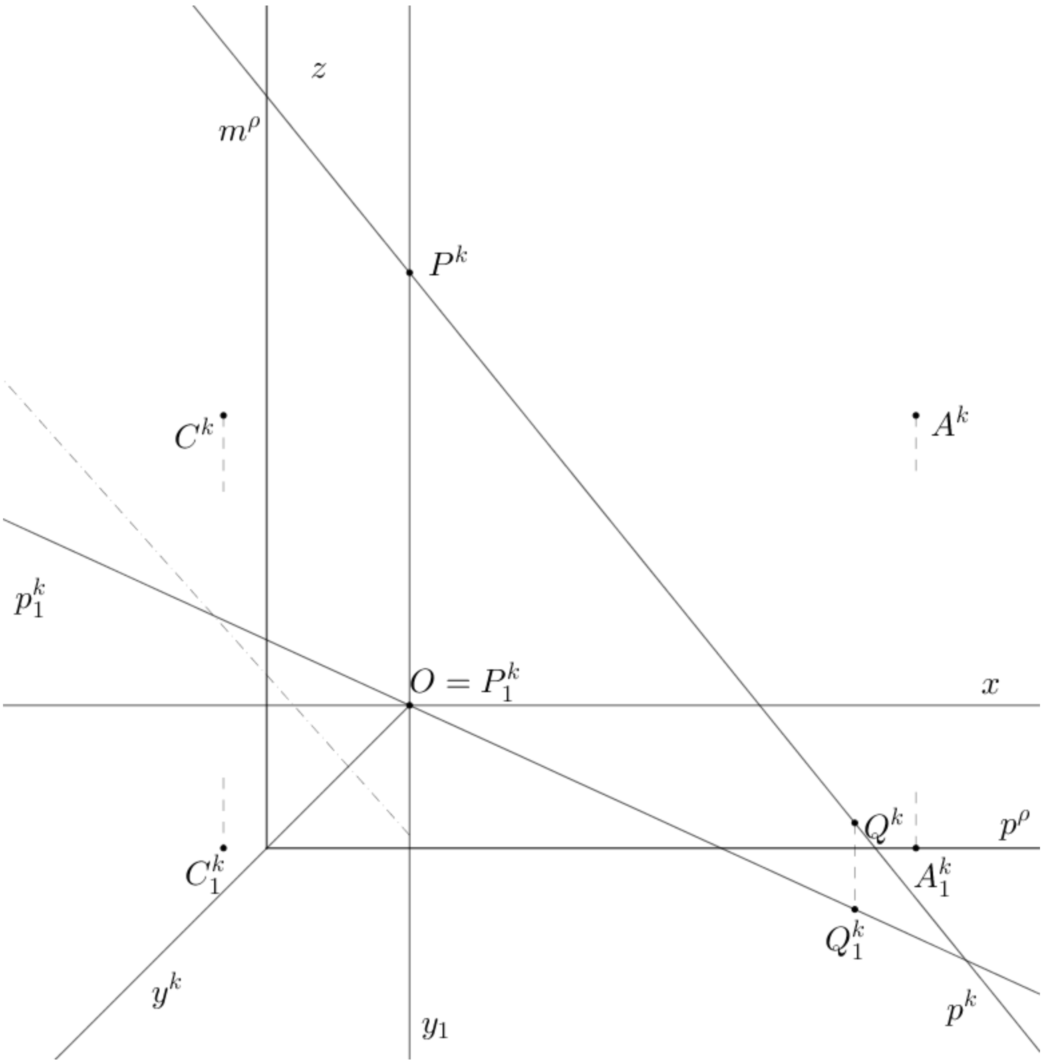
Obrázek 3.4: Příklad 3.2 - řešení

Příklad 3.3 V KP $(140°, q = \frac{2}{3})$ sestrojte průsečík přímky p s pravidelným čtyřstěnem $ABCV$, jehož podstava leží v rovině ρ.

$p = \leftrightarrow PQ$; $P[0,0,10]$, $Q[15,10,2]$

$\rho = (\infty, 7, \infty)$

$A[15,7,10]$, $C[-1,7,10]$, $z_B < z_C$, $y_V < y_A$

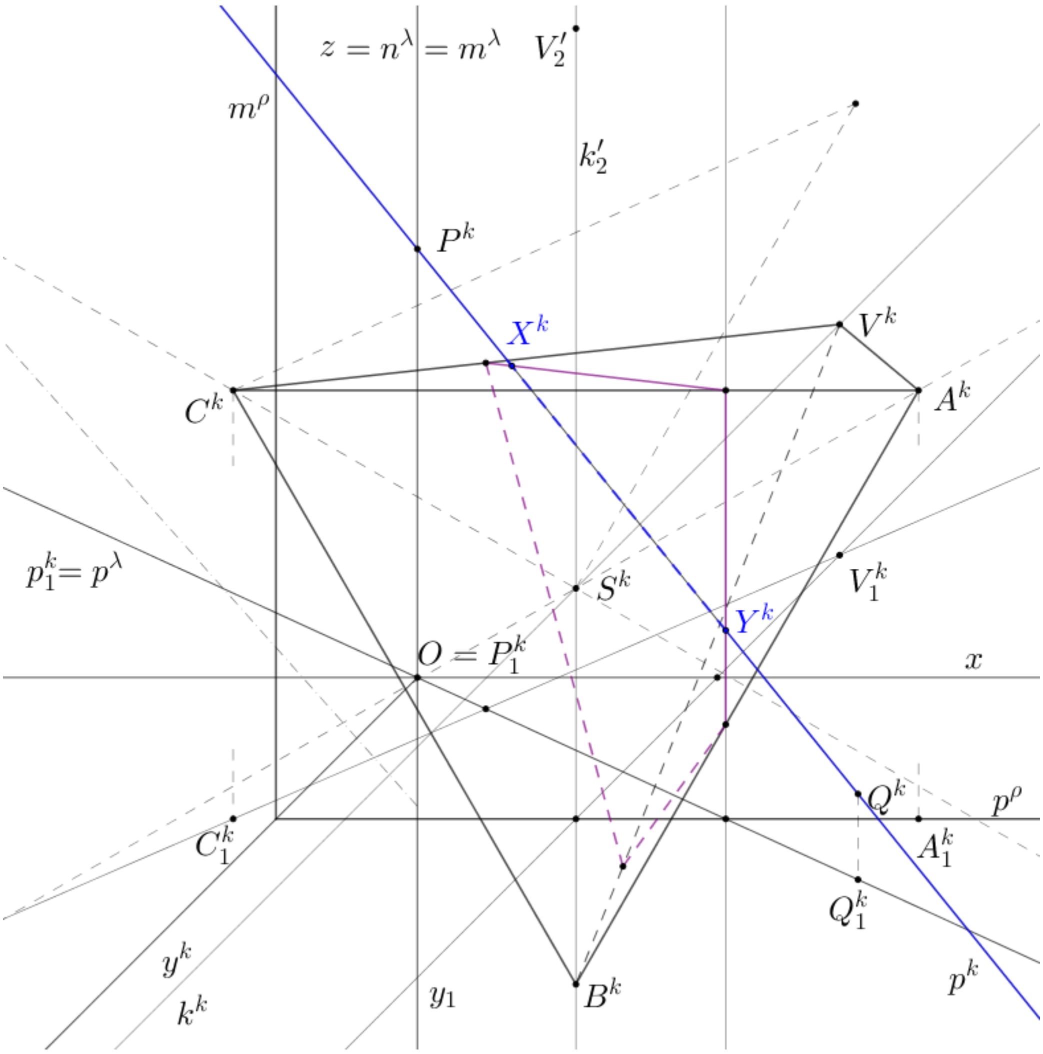


Obrázek 3.5: Příklad 3.3 - zadání

Řešení: Podstava čtyřstěnu leží v rovině rovnoběžné s nárysnou, její průmět bude rovnostranný trojúhelník. Vrchol čtyřstěnu V leží na kolmici k vedené k rovině ρ bodem S ve výšce čtyřstěnu (určena vedlejší konstrukcí).

Přímkou p proložíme rovinu λ kolmou k půdorysně. Sestrojíme řez čtyřstěnu touto rovinou. Potom průsečíky přímky s řezem jsou průsečky přímky s čtyřstěnem. Průsečíky označíme X, Y a určíme viditelnost přímky p vzhledem ke čtyřstěnu.

Konstrukce a postup řešení - viz applet Příklad 3.3



Obrázek 3.6: Příklad 3.3 - řešení

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit soubor vybraných úloh z kosoúhlého promítání a zpracovat je formou dynamických pracovních listů v programu Geogebra. Každý zpracovaný příklad obsahuje zadání, řešení, odkaz na příslušný pracovní list a obrázek s řešením.

V pracovním listu se nachází zadání pomocí souřadnic a vyřešený příklad. V pracovním listu je heslovitě popsán postup konstrukce. Jednotlivé body postupu se vždy objeví v odpovídajícím kroku konstrukce. Student si tak může průběžně kontrolovat správnost řešení, zároveň postupným objevováním bodů konstrukce na obrazovce je dán prostor studentovi, aby se zamyslel nad následujícím krokem konstrukce. Postup na další krok konstrukce student ovládá sám, může postupovat vlastním tempem.

Student si také může zvolit, zda se bude řídit souřadnicovým zadáním příkladu, nebo použije již předchystané graficky zpracované zadání.

Všechny pracovní listy jsou přístupné v knize Řešené úlohy z kosoúhlého promítání, kterou jsem vytvořila na internetové stránce geogebra.org.

Literatura

[1] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie I.* Praha 1965.

[2] Pomykalová, E.: *Deskriptivní geometrie pro střední školy.* Prometheus 2010.

[3] Kraemer, E.: *Zobrazovací metody II.* SPN Praha 1991.