UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Některé reprezentace svazově uspořádaných grup

Vypracoval:	Petr Bařina
Studijní program:	N1701 Fyzika
Studijní obor:	Učitelství fyziky-matematiky pro střední školy
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	Doc. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.

2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Kühra, Ph.D., výhradně za použití citované literatury.

V Olomouci dne 16. června 2015

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce doc. RNDr. Janu Kührovi, Ph.D., za ochotu, trpělivost a cenné rady, které mi poskytl. Dále děkuji své rodině, která mě podporovala po celou dobu studia.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Petr Bařina
Název práce	Některé reprezentace svazově uspořádaných grup
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	Doc. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2015
Abstrakt	Práce shrnuje základní vlastnosti konvexních ℓ-grup a obsahuje některé reprezentace ℓ-grup, především reprezentace pomocí automorfismů řetězců.
Klíčová slova	ℓ-grupa, Hollandova věta,
Počet stran	36
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Petr Bařina
Title	Some representations of Lattice-Ordered Groups
Type of thesis	Diploma
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	Doc. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.
The year of presentation	2015
Abstract	Theses summarizes basic properties of convex ℓ-groups and contains some representation of ℓ-groups, specially represention with automorfisms of a chain.
Keywords	ℓ-group, Holland theorem
Number of pages	36
Number of appendices	0
Language	czech

Obsah

Úvod

Svazově uspořádaná grupa je grupa vybavená kompatibilním svazovým uspořádáním. K jedním z nejdůležitějších výsledků patří Hollandova věta o vnoření. Pro každou lineárně uspořádanou množinu, množina všech permutací zachovávajících uspořádání je svazově uspořádanou grupou. V roce 1963 Charles Holland dokázal, že každá svazově uspořádaná grupa je vnořitelná do ℓ-grupy permutací lineárně uspořádané množiny. Vlastnosti svazově uspořádaných grup je tedy možné získat studiem ℓ-grupy permutací. Tento text si klade za úkol předvést Hollandův důkaz s použitím pojmů, které se v původním Hollandově důkazu nevyskytují, ale v zahraniční literatuře se již delší dobu používají.

V první kapitole se definují svazově uspořádané grupy a dále obsahuje výčet jejich základních vlastností.

Ve druhé kapitole se definují konvexní ℓ-podgrupy a studují se jejich základní vlastnosti. Dále se tato kapitola zabývá některými druhy konvexních ℓ-podgrup, tzv. prvopodgrupami, hodnotami a polárami. Buduje se zde potřebný aparát pro třetí a čtvrtou kapitolu.

Ve třetí kapitole se nejprve definují subdirektní součiny ℓ-grup. Druhá část této kapitoly se zabývá automorfismy řetězců a obsahuje důkaz Hollandovy věty a některé její důsledky.

Ve čtvrté kapitole se zkoumají vlastnosti archimedovských ℓ-grup.

1 Svazově uspořádané grupy

V této úvodní kapitole definujeme pojem svazově uspořádané grupy a uvedeme výčet jejich základních vlastností. Důkazy těchto tvrzení zde uvádět nebudeme, je možné je najít například v [2].

Definice 1. Uspořádaná grupa je struktura $\mathcal{G} = (G; \cdot, \leq)$, kde $(G; \cdot)$ je grupa a $\leq$ uspořádání takové, že pro každé $a, b, c \in G$ platí, že $a \leq b$ implikuje $ca \leq cb$ a $ac \leq bc$. Je-li $(G; \leq)$ řetězec, $\mathcal{G}$ se nazývá lineárně uspořádaná grupa. Je-li $(G; \leq)$ svaz, $\mathcal{G}$ se nazývá svazově uspořádaná grupa.

V tomto textu budeme svazově uspořádanou grupu $\mathcal{G} = (G; \cdot, \leq)$ značit pouze G a budeme ji většinou nazývat ℓ-grupou.

Každá uspořádaná grupa je charakterizována tzv. kladným kuželem $G^+ = \{x \in G \mid 1 \leq x\}$. Prvky kladného kužele budeme nazývat kladnými. Kladný kužel charakterizuje uspořádání vztahem $a \leq b$, právě když $ba^{-1} \in G^+$. Podobně se definuje záporný kužel $G^- = \{x \in G \mid x \leq 1\}$.

Lemma 2. Nechť G je ℓ-grupa. Potom

(1) násobení je distributivní přes svazové operace;

(2) každý prvek je možné psát ve tvaru $g = xy^{-1}$, kde $x, y \in G^+$;

(3) 1 je jediným prvkem konečného řádu;

(4) pro všechny $x, y, z \in G^+$ platí $x \wedge yz \leq (x \wedge y)(x \wedge z)$;

(5) když $x \wedge y = 1$, pak $xy = yx$;

(6) když $xy = yx$, potom pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí, že $x^n \leq y^n$ implikuje $x \leq y$.

Věta 3 (Rieszova interpolační vlastnost)**.** Nechť G je ℓ-grupa. Dále nechť $a, b_1, \ldots, b_n \in G^+$ a $a \leq \prod_{i=1}^{n} b_i$. Pak existují $a_1, \ldots, a_n \in G^+$ takové, že $a_i \leq b_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ a $a = \prod_{i=1}^{n} a_i$.

Lemma 4. Nechť G je ℓ-grupa a $b, a_i \in G$ pro každé $i \in I$. Když $\bigvee_{i \in I} a_i$ existuje, potom

(1) $\bigvee_{i \in I} a_i^{-1} = (\bigwedge_{i \in I} a_i)^{-1}$;

(2) $\bigvee_{i \in I} (ba_i) = b(\bigvee_{i \in I} a_i)$;

(3) $\bigvee_{i\in I}(b \wedge a_i) = b \wedge \bigvee_{i\in I} a_i$.

Platí i duální tvrzení.

Lemma 5. Nechť G je ℓ-grupa. Nechť $x_1, \dots, x_n \in G^+$ jsou prvky takové, že $x_i \wedge x_j = 1$ pro každé $i \neq j$. Pak $x_1 \vee \dots \vee x_n = x_1 \dots x_n$.

Důsledek 6. Nechť pro $x, y \in G^+$ platí $x \wedge y = 1$. Pak $x^m \wedge y^n = 1$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$.

Připomeňme, že svaz A se nazývá distributivní, pokud pro všechna $x, y, z \in A$ platí:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Věta 7. Pro každou ℓ-grupu G je svaz $(G; \leq)$ distributivní.

V ℓ-grupách se pro každý prvek $x \in G$ definuje kladná část vztahem $x^+ = x \vee 1$ a záporná část $x^- = x^{-1} \vee 1$. Absolutní hodnotou x se rozumí $|x| = x \vee x^{-1}$.

Lemma 8. V ℓ-grupě pro všechny prvky platí:

(1) $|x| = x^+x^- \geq 1$;

(2) $x^+ \wedge x^- = 1$;

(3) $x = x^+(x^-)^{-1}$;

(4) $(xy)^+ \leq x^+y^+$;

(5) $(x^+)^n = (x^n)^+, (x^-)^n = (x^n)^-$, $|x|^n = |x^n|$;

(6) $|x| = |x^{-1}|$;

(7) $|x \vee y| \leq |x| \vee |y| \leq |x||y|$;

(8) $|xy| \leq |x||y||x|$;

(9) $|x| \leq |y|$, právě když $|y|^{-1} \leq x \leq |y|$;

(10) $|xy^{-1}| = (x \vee y)(x \wedge y)^{-1} = |yx^{-1}|$.

Lemma 9. Nechť G je ℓ-grupa. Pak $g_1 = 1, \dots, g_n = 1$, právě když $|g_1| \vee \dots \vee |g_n| = 1$.

Věta 10. Nechť G je ℓ-grupa. Pak G je komutativní, právě když pro všechna $x, y \in G$ platí $|xy| \leq |x||y|$.

Definice 11. Nechť G_i jsou ℓ-grupy. Kartézský součin $G = \prod_{i \in I} G_i$ je množina všech zobrazení $g : I \to \bigcup_{i \in I} G_i$ takových, že $g(i) \in G_i$ pro každé $i \in I$. Definujeme-li $f \cdot g$, $f \vee g$ a $f \wedge g$ předpisy $(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i)$, $(f \vee g)(i) = f(i) \vee g(i)$, $(f \wedge g)(i) = f(i) \wedge g(i)$, pak G je ℓ-grupa, tzv. direktní součin ℓ-grup G_i. Označme $supp(g) = \{i \in I \mid g(i) \neq 0\}$ (tzv. nosič funkce g). Direktní součet $\sum_{i \in I} G_i$ je pak definován takto: $\sum_{i \in I} G_i = \{g \in \prod_{i \in I} G_i \mid supp(g)$ je konečný$\}$.

Přímo z definice plyne, že $\sum_{i \in I} G_i$ je ℓ-podgrupa $\prod_{i \in I} G_i$.

1.1 Příklady ℓ-grup

- Aditivní grupy $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ s přirozeným uspořádáním jsou ℓ-grupy.

- Aditivní grupa komplexních čísel uspořádaná po složkách, tj. $a + bi \leq c + di$, právě když $a \leq c$ & $b \leq d$.

- Reálný vektorový prostor V s bází $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ a uspořádáním $\vec{u} \leq \vec{v}$, právě když $a_i \leq b_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, kde $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e_i}$ a $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{e_i}$ a a_i, b_i jsou reálná čísla.

- Množina všech reálných spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$ s operací sčítání a uspořádáním po bodech, tj. $f \leq g$, právě když pro každé $x \in I$ je $f(x) \leq g(x)$.

- Množina dvojic (α, a), kde $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$ se sčítáním definovaným $(\alpha, a) + (\beta, b) = (\gamma, c)$, kde funkce $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ je dána předpisem $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x + a)$ a $c = a + b$. Uspořádání je dáno předpisem $(\alpha, a) \leq (\beta, b)$, právě když $a < b$ nebo $a = b$ a $\alpha(x) \leq \beta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Tato konstrukce se nazývá věncový součin.

- Nechť Γ je uspořádaná množina, kde pro každé $\alpha \in \Gamma$ je $\{\beta \in \Gamma \mid \alpha \leq \beta\}$ řetězec. Taková uspořádaná množina Γ se nazývá kořenový systém. Nechť G_α $(\alpha \in \Gamma)$ jsou lineárně uspořádané grupy. Nechť $V(\Gamma; G_\alpha)$ je množina takových $g \in \prod_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$, že $supp(g)$ je $\emptyset$ nebo má maximální prvek. Pak $V(\Gamma; G_\alpha)$ je podgrupa $\prod_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$. Uspořádání je definováno takto: g je kladný prvek, právě když $g(\alpha)$ je kladný prvek G_α pro každé $\alpha \in \Gamma$, které je maximální prvek $supp(g)$. Tato ℓ-grupa se nazývá Hahnova ℓ-grupa.

- Nechť $Aut(T)$ je množina všech permutací f na řetězci T, které zachovávají uspořádání, tj. pro každé $s, t \in T$ je $s \leq t$, právě když $f(s) \leq f(t)$. Uspořádání je definováno po bodech: $f \leq g$, právě když $f(t) \leq g(t)$ pro každé $t \in T$.

  Množina $Aut(T)$ se nazývá množina automorfismů řetězce T a pro tuto práci má stěžejní význam. Proto zde provedeme důkaz, že se jedná o ℓ-grupu.

  Důkaz. Zvolme $f, g \in Aut(T)$. Pak pro každé $s, t \in T$ platí $s \leq t \Leftrightarrow f(s) \leq f(t) \Leftrightarrow g(f(s)) \leq g(f(t)) \Leftrightarrow (f \cdot g)(s) \leq (f \cdot g)(t)$, tj. $f \cdot g \in Aut(T)$. Tedy $Aut(T)$ je vzhledem ke skládání zobrazení grupa. Je zřejmé, že $\leq$ je uspořádání na $Aut(T)$, které je kompatibilní se skládáním zobrazení. Mějme $f, g \in Aut(T)$. Supremum je dáno vztahem $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, podobně pro infimum platí $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Dokážeme, že supremum splňuje podmínku: $s \leq t$, právě když $(f \vee g)(s) \leq (f \vee g)(t)$ pro všechna $s, t \in T$. Nechť $\max\{f(s), g(s)\} \leq \max\{f(t), g(t)\}$. Rozlišíme jednotlivé případy. V případě, že $f(s) \leq f(t)$ nebo $g(s) \leq g(t)$, platí $s \leq t$. Kdyby $f(s) \leq g(t)$ a $s > t$, tak by $g(s) > g(t) \geq f(t)$, a to je spor. Stejným způsobem by se dokázalo, že i infimum splňuje tuto podmínku. Takže zobrazení jsou injektivní. Surjekce je zřejmá. To znamená, že $f \vee g$ a $f \wedge g$ jsou automorfismy. $\square$

2 Konvexní ℓ-podgrupy

2.1 Vlastnosti konvexních ℓ-podgrup

V této části se budeme věnovat ℓ-podgrupám a převážně konvexním ℓ-podgrupám. Obecně podgrupa svazově uspořádané grupy nemusí být podsvazem. Například v aditivní abelovské ℓ-grupě $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ s uspořádáním po složkách je $H = \{(n, -n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ podgrupa, ale není podsvazem, protože $(0,0) \vee (1,-1) = (1,0) \notin H$. Proto je přirozené zavést následující definici.

Definice 12. Podgrupu C ℓ-grupy G, která je současně podsvazem G, budeme nazývat ℓ-podgrupou.

Následující lemma je jednoduché kriterium říkající, které podgrupy jsou ℓ-podgrupami.

Lemma 13. Podgrupa H ℓ-grupy G je ℓ-podgrupou G, právě když $x \vee 1 \in H$ pro každé $x \in H$.

Důkaz. První část tvrzení je zřejmá. Naopak, pokud $x, y \in H$, pak $x \vee y = (xy^{-1} \vee 1)y \in H$. Navíc platí $x \wedge y = (x^{-1} \vee y^{-1})^{-1} \in H$. Tedy H je podsvazem G. $\square$

Lemma 14. Nechť H_1, H_2 jsou ℓ-podgrupy v G. Pak $H_1 \subseteq H_2$, právě když $H_1^+ \subseteq H_2^+$.

Důkaz. Pro důkaz $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow H_1^+ \subseteq H_2^+$ si stačí uvědomit, že $H_1^+ = G^+ \cap H_1$. Naopak, zvolme $h \in H_1$. Pak $h^+ \in H_1^+ \subseteq H_2^+$ a $h^- \in H_1^+ \subseteq H_2^+$. Vzhledem k tomu, že $h = h^+(h^-)^{-1}$ je $h \in H_2$. $\square$

V důkazu následující věty bude $\langle g \rangle$ označovat podgrupu generovanou prvkem g. Podgrupa generovaná g je průnik všech podgrup obsahujících g a je to nejmenší podgrupa obsahující g. Podobně budeme značit $\langle M \rangle$ podgrupu generovanou množinou M.

Věta 15. Nechť G je svazově uspořádaná grupa. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) G je řetězec;

(2) každá podgrupa G je ℓ-podgrupa;

(3) pro každé $x, y \in G$ platí $x, y > 1 \Rightarrow x \wedge y > 1$.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Pro každé $x, y \in G$ je $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V prvním případě $x \wedge y = x$, $x \vee y = y$, ve druhém je $x \wedge y = y$ a $x \vee y = x$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Předpokládejme, že každá podgrupa je ℓ-podgrupa. Dále předpokládejme, že existují $x, y > 1$ takové, že $x \wedge y = 1$. Pak $x \vee y = xy = yx$. Nechť $g = xy^{-1}$ a uvažujme podgrupu $\langle g \rangle$. Podle předpokladu $\langle g \rangle$ je ℓ-podgrupa a tak $g^{-1} \vee 1 \in \langle g \rangle$. Ale $g^{-1} \vee 1 = yx^{-1} \vee 1 = (y \vee x)x^{-1} = yxx^{-1} = y$. Tedy $y = g^n$ pro některé $n \in \mathbb{Z}$ a $x = gy = g^{n+1}$. Nyní protože $x \wedge y = 1$, musí být také $x^n \wedge y^{n+1} = 1$. Ale $x^n = g^{n^2+n} = y^{n+1}$ a tak $g^{n^2+n} = 1$. Tedy ℓ-podgrupa $\langle g \rangle$ je konečná. Ale každá netriviální ℓ-grupa je nekonečná, to je spor.

(3) $\Rightarrow$ (1) Platí $x^+ \wedge x^- = 1$. Pak podle předpokladu $x^+ = 1$ nebo $x^- = 1$, tedy $x \leq 1$ nebo $x \geq 1$. To znamená, že G je uspořádána lineárně. $\square$

Podgrupa C se nazývá konvexní, pokud pro každé $x \in G$ a $a, b \in C$ platí, že $a \leq x \leq b$ implikuje $x \in C$.

Definice 16. Konvexní ℓ-podgrupou budeme rozumět ℓ-podgrupu, která je konvexní.

Z definice snadno plyne, že triviální ℓ-podgrupy, tj. G a $\{1\}$, jsou konvexní. Dále je vidět, že průnik konvexních ℓ-podgrup je konvexní ℓ-podgrupou. Sjednocení konvexních ℓ-podgrup je konvexní ℓ-podgrupa, pokud tvoří tyto ℓ-podgrupy řetězec.

Věta 17. Nechť C je podgrupa ℓ-grupy G. Pak C je konvexní ℓ-podgrupa G, právě když pro každé $g \in G$ a pro každé $c \in C$ platí, že $|g| \leq |c|$ implikuje $g \in C$.

Důkaz. Nechť C je konvexní ℓ-podgrupa ℓ-grupy G, $c \in C, g \in G$ a $|g| \leq |c|$. Vyjdeme z nerovnosti $|g|^{-1} \leq g \leq |g|$. Pak $|c|^{-1} \leq |g|^{-1} \leq g \leq |g| \leq |c|$ a $g \in C$.

Naopak, nechť $g \in C$ pro všechna $g, c \in G$ s vlastností $|g| \leq |c|$. Když $g \leq f \leq h$, $g, h \in C$, pak $1 \leq g^{-1}f \leq g^{-1}h$, $1 \leq |g^{-1}f| \leq |g^{-1}h|$. Potom $g^{-1}f \in C$ a $f \in C$, protože $|g^{-1}h| \in C$. Tedy C je konvexní.

Nakonec zvolme $g \in C$. Potom $1 \leq g \vee 1 \leq |g|$, a tedy $1 \vee g \in C$. To znamená, že C je ℓ-podgrupa. $\square$

Následující věta popisuje, jak vznikají konvexní podgrupy. Pro její důkaz budeme ovšem potřebovat jedno pomocné tvrzení týkající se vlastností kladných kuželů konvexních uspořádaných grup.

Lemma 18. Nechť G je uspořádaná grupa a H je její podgrupa. Pak $H^+ = H \cap G^+$ a H je konvexní, právě když H^+ má vlastnost: $x \in H^+$ a $y \leq x$ implikuje $y \in H^+$ pro každé $y \in G^+$.

Důkaz. Nechť H je konvexní. Předpokládejme, že $1 \leq y \leq x$, kde $1, x \in H^+ \subseteq H$. Pak $y \in H \cap G^+ = H^+$. Naopak, když $x \leq y \leq z$, kde $x, z \in H$, pak $1 \leq x^{-1}y \leq x^{-1}z$ a $1, x^{-1}z \in H^+$. Potom $x^{-1}y \in H^+ \subseteq H$. Z toho plyne $y \in xH = H$, a proto H je konvexní. $\square$

Věta 19. Nechť G je svazově uspořádaná grupa. Dále nechť C je konvexní podpologrupa G^+ taková, že obsahuje 1. Pak podgrupa $\langle C \rangle$ je dána $\langle C \rangle = \{xy^{-1} \mid x, y \in C\}$ a je to konvexní ℓ-podgrupa G.

Důkaz. Uvažujme množinu $C^* = \{xy^{-1} \mid x, y \in C\}$. Zřejmě $C \subseteq C^* \subseteq \langle C \rangle$. Když $x \in C^*$, pak $x^{-1} \in C^*$. Chceme dokázat, že C^* je podgrupa, a tedy $C^* = \langle C \rangle$. Předpokládejme, že $xy^{-1}, gh^{-1} \in C^*$ a uvažujme prvek $xy^{-1}gh^{-1}$. Označme $\alpha = (y \wedge g)^{-1}y$ a $\beta = (y \wedge g)^{-1}g$. Ukážeme, že $\alpha, \beta \in C$. Zřejmě $y, g \in C$ a $1 \leq y \wedge g \leq y$, proto také $y \wedge g \in C$. Potom ale také $1 \leq (y \wedge g)^{-1}y \leq y$, protože $(y \wedge g)^{-1} \leq 1$, tedy $\alpha \in C$. Podobně bychom získali $\beta \in C$. Platí $\alpha \wedge \beta = 1$ a podle lemmatu 2 α, β komutují. Pak α^{-1}, β také komutují. Důsledkem je $xy^{-1}gh^{-1} = x\alpha^{-1}(y \wedge g)^{-1}(y \wedge g)\beta h^{-1} = x\alpha^{-1}\beta h^{-1} = x\beta\alpha^{-1}h^{-1} = (x\beta)(h\alpha)^{-1} \in C^*$, což jsme chtěli dokázat.

K tomu, abychom dokázali, že $\langle C \rangle$ je konvexní, stačí ukázat, že pro $x \in \langle C \rangle^+$ a $y \in G^+$ platí, že $y \leq x$ implikuje $y \in \langle C \rangle^+$. Předpokládejme, že $1 \leq g \leq xy^{-1} \in \langle C \rangle$. Potom $1 \leq g \leq x \in C$, protože $1 \leq y$. Protože C je konvexní a obsahuje 1, dostáváme $g \in C \subseteq \langle C \rangle$.

Vzhledem k tomu, že pro všechna $x, y \in C$ platí $1 \leq xy^{-1} \vee 1 \leq x \vee 1 = x \in C$, musí $xy^{-1} \vee 1 \in C \subseteq \langle C \rangle$ a tedy $\langle C \rangle$ je podsvaz v G, a proto je ℓ-podgrupou. $\square$

Věta 20. Množina všech konvexních ℓ-podgrup ℓ-grupy G spolu s množinovou inkluzí je úplný distributivní svaz. Navíc pro všechny konvexní ℓ-podgrupy A, C_i $(i \in I)$ platí

$$A \cap \bigvee_{i \in I} C_i = \bigvee_{i \in I}(A \cap C_i).$$

Důkaz. Nechť C_i jsou konvexní ℓ-podgrupy G. Je zřejmé, že $\bigcap_{i \in I} C_i$ je konvexní ℓ-podgrupa. Dokážeme, že podgrupa C generovaná $\bigcup_{i \in I} C_i$ $(i \in I)$ je konvexní ℓ-podgrupa. Nechť $|g| \leq |c|$ pro některé $c \in C$. Pak $c = \prod_{k=1}^{n} c_k$, kde $c_k \in C_{i_k}$. Podle lemmatu 8 a Rieszovy interpolační vlastnosti můžeme g^+ a g^- napsat ve tvaru součinu prvků z $\bigcup_{i \in I} C_i^+$ a $g = g^+(g^-)^{-1}$. Proto $g \in C$, a tedy C je konvexní ℓ-podgrupa.

Zřejmě $\bigvee_{i \in I}(A \cap C_i) \subseteq A \cap \bigvee_{i \in I} C_i$, a když $g \in A^+ \cap \bigvee_{i \in I} C_i$, pak $g \leq \prod_{k=1}^{n} c_k$, kde $c_k \in C_{i_k}^+$. Podle Rieszovy interpolační vlastnosti $g = \prod_{k=1}^{n} g_k$, kde $1 \leq g_k \leq c_k$. Vzhledem k tomu, že $1 \leq g_k \leq g \in A$, každé $g_k \in A \cap C_{ik}$. $\square$

Dále budeme značit $G(g)$ konvexní ℓ-podgrupu generovanou g.

Věta 21. Nechť G je ℓ-grupa, $g \in G$. Pak $G(g) = \{f \in G \mid |f| \leq |g|^n$ pro některé $n \in \mathbb{N}_0\}$.

Důkaz. Označme $T = \{f \in G \mid |f| \leq |g|^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0\}$. Nechť $f \in T$. Pak $|f| \leq |g|^n$, kde $|g|^n \in G(g)$. Vzhledem k tomu, že $G(g)$ je konvexní a $1 \leq |f| \leq |g|^n$, je $|f| \in G(g)$. Ale opět vzhledem k konvexnosti a $1 \leq f \vee 1 \leq (f \vee 1) \vee (f^{-1} \vee 1) = |f|$ je $f \vee 1 \in G(g)$. Stejným způsobem by se dokázalo $f^{-1} \vee 1 \in G(g)$. Tím jsme dokázali, že $f \in G(g)$, tedy $T \subseteq G(g)$.

Pro důkaz $T \supseteq G(g)$ stačí ověřit, že T je konvexní ℓ-podgrupa G. Je zřejmé, že T je neprázdná, protože $|1| \leq |g|$, tedy $1 \in T$. Dále existují inverzní prvky a platí $|f^{-1}| = |f|$. Pro násobení platí $|f_1 f_2| \leq |f_1||f_2||f_1| \leq |g|^n |g|^m |g|^n \leq |g|^{2n+m}$ pro některé $m, n \in \mathbb{N}_0$. Konvexnost plyne z věty 17. □

V důkazu následující věty použijeme toto jednoduché lemma.

Lemma 22. Nechť G je ℓ-grupa $x, y \in G^+$. Pak $(x^m \wedge y^n) \leq (x \wedge y)^{mn}$.

Důkaz. Podle lemmatu 2 je $x \wedge y^2 \leq (x \wedge y)^2$. Předpokládejme, že platí $x \wedge y^{n-1} \leq (x \wedge y)^{n-1}$. Pak $(x \wedge y)^n \geq (x \wedge y)(x \wedge y^{n-1}) = x^2 \wedge xy^{n-1} \wedge yx \wedge y^n \geq x \wedge y^n$, protože $x^2 \wedge xy^{n-1} \wedge yx \geq x$. Podobným způsobem dostaneme $x^m \wedge y^n \leq x \wedge y^{mn}$. □

Věta 23. Nechť G je ℓ-grupa a $f, g \in G^+$. Pak $G(f \wedge g) = G(f) \cap G(g)$ a $G(f \vee g) = G(f) \vee G(g)$.

Důkaz. Když $x \in G(g \wedge h)$, pak $|x| \leq (g \wedge h)^n \leq g^n, h^n$ a tedy $x \in G(g) \cap G(h)$. Naopak, když $x \in G(g) \cap G(h)$, pak $|x| \leq g^n \wedge h^m \leq (g \wedge h)^{nm}$, odkud dostáváme $x \in G(g \wedge h)$.

Nyní když $x \in G(g \vee h)$, pak $|x| \leq (g \vee h)^n \leq [g(g \wedge h)^{-1} h]^n \leq (gh)^n$ a tedy $x \in G(gh) \subseteq G(g) \vee G(h)$, protože $gh \in G(g) \vee G(h)$. Naopak, když $x \in G(g) \vee G(h)$, pak $x = \prod_{i=1}^k x_i$, kde každé $x_i \in G(g) \cup G(h)$. Vzhledem k tomu, že $|x_i| \leq g^n$ nebo $|x_i| \leq h^m$ pro každé i, existuje kladné t takové, že $|x| \leq (g \vee h)^t$. Důsledkem je $x \in G(g \vee h)$. □

Nechť H ℓ-podgrupa G a $x \in G$. Množina $xH = \{xh \mid h \in H\}$ se nazývá levou třídou prvku x. Podobně se definuje pravá třída $Hx = \{hx \mid h \in H\}$. Systém všech pravých tříd budeme značit $G/_P H$, systém všech levých tříd $G/_L H$. V případě, že $G/_P H = G/_L H$, budeme psát pouze G/H.

Věta 24. Nechť C je konvexní ℓ-podgrupa G. Na $G/_P C$ můžeme zavést uspořádání takto: $Cx \leq Cy$, právě když existuje $c \in C$ takové, že $x \leq cy$. Vzhledem k tomuto uspořádání je $G/_P C$ svazem.

Důkaz. Je zřejmé, že $Cx \leq Cx$. Když $Cx \leq Cy$, $Cy \leq Cx$, pak existují $u, v \in C$ takové, že $x \leq uy$, $y \leq vx$ a $v^{-1} \leq xy^{-1} \leq u$. Vzhledem k tomu, že C je konvexní, pak $xy^{-1} \in C$ a $Cx = Cy$. Nakonec, když $Cx \leq Cy$, $Cy \leq Cz$, pak $x \leq uy$, $y \leq vz$ pro některé $u, v \in C$ a $x \leq uvz$, $uv \in H$, tj. $Cx \leq Cz$. To znamená, že $\leq$ je uspořádání na $G/_P C$.

Dále $G/_P C$ je svazem, kde $Cx \vee Cy = C(x \vee y)$ a $Cx \wedge Cy = C(x \wedge y)$ pro všechna $x, y \in G$. Je zřejmé, že $Cx \leq C(x \vee y)$ a $Cy \leq C(x \vee y) \in G/_P C$. Nechť $Cz \geq Cx$ a $Cz \geq Cy$ pro některé $z \in G$. Pak existují $c_1, c_2 \in C$ taková, že $c_1 z \geq x$ a $c_2 z \geq y$. Označme $c = c_1 \vee c_2$. Potom $cz \geq c_1 z \geq x$ a $cz \geq c_1 z \geq x$. Odtud $cz \geq x \vee y$. Potom $Cz \geq C(x \vee y)$ a $C(x \vee y)$ je supremem Cx, Cy v $G/_P C$. Podobně $C(x \wedge y)$ je infimum Cx, Cy v $G/_P C$. $\square$

Definice 25. Normální konvexní ℓ-podgrupy budeme nazývat ℓ-ideály.

Věta 26. Nechť G je ℓ-grupa a C je ℓ-ideál v G. Potom G/C s výše uvedeným uspořádáním je ℓ-grupa.

Důkaz. Je známo, že G/C je grupa s násobením $Cx \cdot Cy = Cxy$ a podle předešlé věty je $\leq$ uspořádání. Ověříme, že uspořádání je kompatibilní s násobením. Uvažujme $Cx \leq Cy$. Pak $x \leq cy$ pro některé $c \in C$ a vynásobením b zprava získáme $xb \leq cyb$, tj. $Cxb \leq Cyb$. Pro důkaz zleva si stačí uvědomit, že C je normální podgrupa, tj. $xC = Cx$. Nechť $Cx \leq Cy$. Potom $x \leq cy = yd$ pro některé $c, d \in C$ a vynásobením a zleva získáme $ax \leq ayd$, tj. $axC \leq ayC$. Ale vzhledem k normálnosti je $Cax \leq Cay$. Tím jsme ověřili, že G/C je uspořádaná grupa. $\square$

2.2 Homomorfismy ℓ-grup

Homomorfismus mezi ℓ-grupami se definuje jako grupový a současně svazový homomorfismus.

Definice 27. Nechť G, H jsou ℓ-grupy. Homomorfismus grup $\phi : G \mapsto H$ budeme nazývat ℓ-homomorfismus, pokud zachovává i operace $\wedge$ a $\vee$, tj. pro všechna $x, y \in G$ jsou splněny tyto podmínky:

(1) $\phi(xy) = \phi(x) \cdot \phi(y)$,

(2) $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \wedge \phi(y)$,

(3) $\phi(x \vee y) = \phi(x) \vee \phi(y)$.

Bude-li ϕ injektivní, budeme jej nazývat ℓ-vnořením. Bude-li navíc bijektivní, budeme jej nazývat ℓ-izomorfismem.

K tomu, aby homomorfismus byl ℓ-homomorfismem, stačí, aby byla splněna jen jedna z podmínek pro $\vee$, $\wedge$, protože $f \wedge g = (f^{-1} \vee g^{-1})^{-1}$.

Věta 28. Nechť G a H jsou ℓ-grupy a $\phi : G \mapsto H$ je homomorfismus grup. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) ϕ je ℓ-homomorfismus,

(2) $\phi(g \vee 1) = \phi(g) \vee 1$ pro všechna $g \in G$,

(3) když $f, g \in G$ a $f \wedge g = 1$, pak $\phi(f) \wedge \phi(g) = 1$.

Důkaz. Z (1) jasně vyplývá (2). Pro důkaz (2) $\Rightarrow$ (3) předpokládejme $f, g \in G$ a $f \wedge g = 1$. Potom také $f^{-1} \vee g^{-1} = 1$. Vynásobíme f a získáme $1 \vee fg^{-1} = f$, a dále $1 \vee \phi(fg^{-1}) = \phi(f)$. Nyní vynásobíme $\phi(f)^{-1}$ a dostaneme $\phi(f)^{-1} \vee \phi(g)^{-1} = 1$ a z toho již plyne $\phi(f) \wedge \phi(g) = 1$. Na závěr dokážeme (3) $\Rightarrow$ (1). Vzhledem k tomu, že $f(f \wedge g)^{-1} \wedge g(f \wedge g)^{-1} = 1$, platí $\phi(f)\phi(f \wedge g)^{-1} \wedge \phi(g)\phi(f \wedge g)^{-1} = 1$. Proto $\phi(f) \wedge \phi(g) = \phi(f \wedge g)$ a zobrazení ϕ je tedy ℓ-homomorfismus. $\square$

Věta 29. Nechť $\phi : G \mapsto H$ je ℓ-homomorfismus ℓ-grup G, H. Jádro ℓ-homomorfismu je ℓ-ideál v G.

Důkaz. Označme jádro homomorfismu I. Jádro homomorfismu je normální podgrupou. Nechť $x \leq y \leq z$ v G pro $x, z \in I$, $y \in G$. Pak z $1 = \phi(x) \leq \phi(y) \leq \phi(z) = 1$ plyne $\phi(y) = 1$ a $y \in I$. To znamená, že I je konvexní podgrupa. Když $x \in I$, pak $\phi(x \vee 1) = \phi(x) \vee 1 = 1$ a I je tedy ℓ-ideál v G. □

Věta 30. Nechť C je ℓ-ideál ℓ-grupy G a G/C je faktorová ℓ-grupa. Potom zobrazení $\nu : x \mapsto Cx$ je ℓ-homomorfismus G na G/C.

Důkaz. Zobrazení ν je homomorfismem grup, protože $\nu(xy) = Cxy = Cx \cdot Cy = \nu(x)\nu(y)$. Stejně tak snadno získáme, že $\nu(x) \vee \nu(y) = Cx \vee Cy = C(x \vee y) = \nu(x \vee y)$. Zobrazení ν je opravdu ℓ-homomorfismus. □

Definice 31. Homomorfismus $\nu : G \mapsto G/C$ budeme nazývat přirozeným homomorfismem ℓ-grupy G na ℓ-grupu G/C.

Věta 32 (o homomorfismu ℓ-grup)**.** Nechť G, H jsou ℓ-grupy, $\phi : G \mapsto H$ je surjektivní ℓ-homomorfismus a C je jádro tohoto homomorfismu. Pak G/C je izomorfní s H.

Důkaz. Víme, že zobrazení $g : H \mapsto G/C$ dané vztahem $\nu(x) = g(\phi(x))$ je izomorfismus grup. Stačí tedy dokázat jen zachování $\vee$. Nechť $y_i = \phi(x_i)$. Pak

$$g(y_1 \vee y_2) = g(\phi(x_1) \vee \phi(x_2)) = g(\phi(x_1 \vee x_2)) = \nu(x_1 \vee x_2) =$$

$$= \nu(x_1) \vee \nu(x_2) = g(\phi(x_1)) \vee g(\phi(x_2)) = g(y_1) \vee g(y_2).$$

□

2.3 Prvopodgrupy

Definice 33. Konvexní ℓ-podgrupa P svazově uspořádané grupy G se nazývá prvopodgrupou, když pro všechny konvexní ℓ-podgrupy A a B ℓ-grupy G platí, že z $A \cap B \subseteq P$ plyne $A \subseteq P$ nebo $B \subseteq P$.

Věta 34. Nechť P je konvexní ℓ-podgrupa svazově uspořádané grupy G. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) P je prvopodgrupa ℓ-grupy G;

(2) když $f \wedge g = 1$, pak $f \in P$ nebo $g \in P$;

(3) když $f \wedge g \in P$, pak $f \in P$ nebo $g \in P$;

(4) když $f, g \in G$, pak existuje $c \in P$ takové, že $f \leq cg$ nebo $g \leq cf$;

(5) když D_1 a D_2 jsou konvexní ℓ-podgrupy ℓ-grupy G obsahující P, pak $D_1 \subseteq D_2$ nebo $D_2 \subseteq D_1$.

Důkaz.

(1) $\Rightarrow$ (2). Když $f \wedge g = 1$, pak $G(f) \cap G(g) = G(f \wedge g) = \{1\} \subseteq P$. Potom podle definice prvopodgrupy $G(f) \subseteq P$ nebo $G(g) \subseteq P$. Jinými slovy $f \in P$ nebo $g \in P$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Nechť $f \wedge g \in P$. Pak z $f(f \wedge g)^{-1} \wedge g(f \wedge g)^{-1} = 1$ podle předešlého tvrzení je $f(f \wedge g)^{-1} \in P$ nebo $g(f \wedge g)^{-1} \in P$. Proto $f \in P$ nebo $g \in P$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Vzhledem k tomu, že $f(f \wedge g)^{-1} \wedge g(f \wedge g)^{-1} = 1$ pro všechna $f, g \in G$, pak $c = f(f \wedge g)^{-1} \in P$ nebo $d = g(f \wedge g)^{-1} \in P$. Tedy $f = c(f \wedge g) \leq cg$ nebo $g = d(f \wedge g) \leq df$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Předpokládejme, že $d_1 \in D_1^+ \setminus D_2$ a $d_2 \in D_2^+ \setminus D_1$. Pak pro některé $c \in P$ platí $d_1 \leq cd_2$ nebo $d_2 \leq cd_1$. Tedy $d_1 \in D_2$ nebo $d_2 \in D_1$, spor.

(5) $\Rightarrow$ (1) Nechť A, B jsou konvexní ℓ-podgrupy a $A \cap B \subseteq P$. Pak $P = P \vee (A \cap B) = (P \vee A) \cap (P \vee B)$. Pak $P \vee A \subseteq P \vee B$ nebo $P \vee B \subseteq P \vee A$. Proto $P = P \vee A$ nebo $P = P \vee B$. Tedy $A \subseteq P$ nebo $B \subseteq P$. $\square$

Připomeňme, že uspořádaná množina Γ se nazývá kořenový systém, pokud pro každé $\alpha \in \Gamma$ je $\{\beta \in \Gamma \mid \alpha \leq \beta\}$ řetězec.

Důsledek 35. Množina všech prvopodgrup ℓ-grupy G je kořenovým systémem ve svazu všech konvexních ℓ-podgrup G.

Důkaz. Plyne okamžitě z předešlé věty. $\square$

Důsledek 36. Nechť G je ℓ-grupa. Množina všech konvexních ℓ-podgrup je řetězec, právě když G je řetězec.

Důsledek 37. Nechť G je ℓ-grupa a C její konvexní ℓ-podgrupa. Pak C je prvopodgrupa, právě když $G/_P C$ je lineárně uspořádaná.

Definice 38. Nechť G je svazově uspořádaná grupa a C je konvexní ℓ-podgrupa. Řekneme, že G je lexikografickým rozšířením C, jestliže $1 \neq g \in G$ a $f \wedge g = 1$ implikuje $f \in C$.

Přímo z definice plyne, že když G je lexikografickým rozšířením C, pak C musí být prvopodgrupa.

Věta 39. Nechť G je ℓ-grupa a C je konvexní ℓ-podgrupa. Když G je lexikografickým rozšířením C, pak $C < d$ pro každé $d \in G^+ \setminus C$, tj. $c < d$ pro každé $c \in C$ a $d \in G^+ \setminus C$.

Důkaz. Předpokládejme, že $c \not< d$ pro některé $c \in C, d \in G^+ \setminus C$. Pak $c \neq c \wedge d$. Ale $d(c \wedge d)^{-1} \wedge c(c \wedge d)^{-1} = 1$. Proto $d(c \wedge d)^{-1} \in C$, protože $c(c \wedge d)^{-1} \neq 1$. Tedy $d \in C$, ale to je spor. $\square$

Věta 40. Průnik neprázdného řetězce prvopodgrup je prvopodgrupou.

Důkaz. Nechť $x \wedge y = 1$ a P_i jsou prvopodgrupy. Chceme dokázat, že x nebo y patří do $\bigcap_{i \in I} P_i$. Předpokládejme, že $x, y \notin \bigcap_{i \in I} P_i$. Potom $x \notin P_i$, $y \notin P_j$ pro některé $i, j \in I$. Můžeme předpokládat, že $P_i \subseteq P_j$. Potom $x, y \notin P_i$, tj. P_j není prvopodgrupa, spor. $\square$

Definice 41. Konvexní ℓ-podgrupa H ℓ-grupy G se nazývá minimální prvopodgrupa, je-li prvopodgrupa a žádná konvexní ℓ-podgrupa C taková, že $C \subset H$, není prvopodgrupa.

Pro důkaz dalšího tvrzení budeme potřebovat tzv. Zornovo lemma, známé také jako princip minimality.

Lemma 42 (Zornovo)**.** Pokud je množina A uspořádaná tak, že každý řetězec je zdola omezený, pak v A existuje minimální prvek.

Platí i duální tvrzení, tj. pokud je množina A uspořádaná tak, že každý řetězec je shora omezený, pak v A existuje maximální prvek.

Věta 43. Každá prvopodgrupa obsahuje minimální prvopodgrupu.

Důkaz. Předpokládejme, že P je prvopodgrupa G. Dále uvažujme množinu A všech prvopodgrup B_i takových, že $B_i \subseteq P$. Vhledem k tomu, že průnik řetězce prvopodgrup je prvopodgrupou, musí být každý řetězec v A zdola omezený. Podle Zornova lemmatu pak existuje v P minimální prvopodgrupa. $\square$

2.4 Hodnoty

Nyní se dostáváme ke zvláštnímu případu konvexních ℓ-podgrup, které jsou klíčovým prvek celého důkazu Hollandovy věty. Hodnotami prvku budeme rozumět konvexní ℓ-podgrupy, které jsou mezi konvexními ℓ-podgrupami neobsahujícími daný prvek maximální. Existenci takové konvexní ℓ-podgrupy zajišťuje Zornovo lemma. Jak ukážeme, hodnoty mají spoustu užitečných vlastností. Pro nás nejdůležitější bude to, že hodnoty jsou prvopodgrupami.

Definice 44. Nechť G je svazově uspořádaná grupa, $1 \neq g \in G$ a $\mathcal{V}$ je množina všech konvexních ℓ-podgrup neobsahujících g. Maximální prvky z $\mathcal{V}$ budeme nazývat hodnotami prvku g. Pokud prvek bude mít jedinou hodnotu, budeme jej nazývat speciálním a příslušnou hodnotu budeme nazývat speciální hodnotou.

Nechť A a B jsou konvexní ℓ-podgrupy G. Řekneme, že A pokrývá B, když $B \subset A$ a pro každou konvexní ℓ-podgrupu C grupy B platí, že z $B \subseteq C \subseteq A$ plyne $C = A$ nebo $C = B$.

Věta 45. Nechť G je ℓ-grupa. Pro každou hodnotu existuje jediná konvexní ℓ-podgrupa, která ji pokrývá.

Důkaz. Nechť $1 \neq g \in G$ a V je hodnota g v G. Dále nechť V^* je průnik všech konvexních ℓ-podgrup G obsahujících V a g. Když D je konvexní ℓ-podgrupa G taková, že $V \subset D$, pak $g \in D$. Z toho plyne $V^* \subseteq D$. Tedy V^* pokrývá V. $\square$

Definice 46. Nechť L je úplný svaz. Řekneme, že $x \in L$ je úplně průsekově ireducibilní, když $x \neq 1$ a pro každé $S \subseteq G$ platí: když $x = inf_L S$, pak $x \in S$.

Poznámka 47. Prvopodgrupy jsou konečně průsekově ireducibilní.

Věta 48. Nechť G je ℓ-grupa a H je konvexní ℓ-podgrupa G. Pak H je hodnota v G, právě když H je úplně průsekově ireducibilní ve svazu všech konvexních ℓ-podgrup G.

Důkaz. Předpokládejme, že H je hodnota pro některé $g \in G$. Nechť H_i $(i \in I)$ je systém konvexních ℓ-podgrup G takových, že $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. Když $H \neq H_i$ pro každé $i \in I$, pak $g \in H_i$, protože H je maximální neobsahující g. Z toho plyne $g \in \bigcap_{i \in I} H_i = H$, spor. Tedy platí $H = H_i$ pro některé $i \in I$ a H je úplně průsekově ireducibilní ve svazu konvexních ℓ-podgrup G.

Naopak, předpokládejme, že H je úplně průsekově ireducibilní ve svazu konvexních ℓ-podgrup G. Uvažujme množinu $H^* = \bigcap\{K \mid H \subset K\}$, kde K jsou konvexní ℓ-podgrupy G. Pak H^* pokrývá H ve svazu konvexních ℓ-podgrup a existuje $g \in H^* \setminus H$. Předpokládejme, že H není hodnota g. Pak existuje hodnota K prvku g taková, že $H \subset K$. Ale $H^* \subseteq K$ a tedy $g \in K$, to je spor. Proto H je hodnota g. □

Důsledek 49. Každá hodnota je prvopodgrupou.

Důsledek 50. Každá konvexní ℓ-podgrupa ℓ-grupy G je průnikem hodnot G, proto je také průnikem prvopodgrup G.

Důkaz. Nechť C je konvexní ℓ-podgrupa. Pro každý prvek $g \notin C$ zvolíme některou hodnotu V_g. Pak $C = \bigcap\{V_g \mid g \in G \setminus C\}$. □

Věta 51. Je-li G ℓ-grupa, pak $f \leq g$, právě když $Vf \leq Vg$ pro všechny hodnoty V.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že každá hodnota je konvexní ℓ-podgrupa, $f \leq g$ implikuje $Vf \leq Vg$. Naopak, když $f \nleq g$, pak $fg^{-1} \vee 1 \neq 1$ a existuje hodnota V prvku $fg^{-1} \vee 1$. Potom $1 \leq fg^{-1} \vee 1 \notin V$, tedy $V < V(fg^{-1} \vee 1) = V(f \vee g)g^{-1}$. Vzhledem k tomu, že V je prvopodgupa, $G/_P V$ je uspořádaná lineárně, a proto platí $Vg < V(f \vee g) = \max\{Vf, Vg\}$. Důsledkem je $Vf \nleq Vg$. □

Věta 52. Nechť G je ℓ-grupa, $f, g \in G^+ \setminus \{1\}$ a $f \wedge g = 1$. Pak f, g mají nesrovnatelné hodnoty.

Důkaz. Každá hodnota je prvopodgrupa. Tvrzení pak plyne z věty 34. □

Věta 53. Nechť G je ℓ-grupa, $f, g, h \in G^+$ a V_f, V_g, V_h jsou jediné hodnoty těchto prvků.

(1) Když $f \wedge g \neq 1$, pak $V_f \subseteq V_g$ nebo $V_g \subseteq V_f$.

(2) Když $f \wedge g = 1$, ale $f \wedge h \neq 1$, $g \wedge h \neq 1$, pak $V_f \subset V_h$ a $V_g \subset V_h$.

(3) Když $V_f \subset V_g$, pak $f^n \leq g$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(4) Když $V_f = V_g$, pak $f \leq g^n$ pro některé $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. (1) Nechť V je hodnota $f \wedge g \neq 1$. Pak $f, g \notin M$, a tedy $V \subseteq V_f, V_g$. Vzhledem k tomu, že každá hodnota je prvopodrupa, je množina všech hodnot kořenový systém, a proto $V_f \subseteq V_g$ nebo $V_g \subseteq V_f$.

(2) Když $f \wedge g = 1$ a $f \notin V_f$, pak $g \in V_f \setminus V_g$. Podobně $f \in V_g \setminus V_f$. Vzhledem k tomu, že V_f a V_g jsou nesrovnatelné a množina všech hodnot je kořenovým systémem, musí být $V_f \subset V_h$ a $V_g \subset V_h$.

(3) Když $f^n \nleq g$, kde $n \in \mathbb{N}$, pak pro hodnotu V platí podle věty 51 $Vf^n > Vg \geq V$. Potom $V \subseteq V_f \subset V_g$, protože $f^n \notin V$, a tedy i $f \notin V$. Pak $V_g < V_g g \leq V_g f^n = V_g$. To je spor.

(4) Když $f \nleq g^n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $f \notin G(g)$. Proto existuje hodnota V prvku f taková, že $V \supseteq G(g)$. Protože f je speciální, musí být $V = V_f$ a $g \in V_f = V_g$. To je spor.

$\square$

Věta 54. Ve svazově uspořádané grupě G má každý prvek konečně mnoho hodnot, právě když každá hodnota v G je speciální.

Důkaz. Nechť každý prvek ℓ-grupy G má konečně mnoho hodnot a g je kladný prvek. Když g má jedinou hodnotu, pak je speciální. Předpokládejme, že g má hodnoty $V_1, \ldots, V_{n+1}$. Protože tyto hodnoty jsou speciální v $G(g)$, můžeme předpokládat $G = G(g)$. Proto $V_1, \ldots, V_{n+1}$ jsou maximální konvexní ℓ-podgrupy G a každá vlastní konvexní ℓ-podgrupa je obsažena nejméně v jedné z těchto hodnot. Nechť $f_i \in V_{n+1}^+ \setminus V_i$ a $h_i \in V_i^+ \setminus V_{n+1}$ $(1 \leq i \leq n)$. Nechť $f = \bigvee_{i=1}^n f_i$ a $h = \bigwedge_{i=1}^n h_i$. Pak $f \in V_{n+1} \setminus (\bigcup_{i=1}^n V_i)$ a $h \in (\bigcap_{i=1}^n V_i) \setminus V_{n+1}$. Nyní f nahradíme $f(f \wedge h)^{-1}$ a h nahradíme $h(f \wedge h)^{-1}$ a můžeme předpokládat, že $f \wedge h = 1$. Nyní $V_1, \ldots, V_n$ jsou hodnoty f a V_{n+1} je hodnota h. Navíc V_{n+1} je speciální hodnota. Když $M \neq V_{n+1}$ je hodnota h, potom když $M \subseteq V_i$ pro některé $i = 1, \ldots, n$, dostáváme $f \in M \subseteq V_i$, protože $f \wedge h = 1$, a to je spor. Navíc, když M je hodnota f různá od $V_1, \ldots, V_n$, pak obsahuje h a je obsažena v V_{n+1}, a to nemůže nastat. Proto indukcí zjistíme, že všechny hodnoty $V_1, \ldots V_n$ jsou speciální.

Naopak, předpokládejme, že každá hodnota G je speciální. Když $g \in G^+$ má hodnoty V_i $(i \in I)$, vybereme $f_i \in G^+$ s jedinou hodnotou V_i $(i \in I)$. Podle věty 53(1) $f_i \wedge f_j = 1$ pro $i, j \in I$, $i \neq j$. Nechť C je konvexní ℓ-podgrupa G generovaná množinou $\{f_i \mid i \in I\}$. Pak C je ℓ-izomorfní s direktním součinem $\{G(f_i) \mid i \in I\}$. Protože $f_i \in C \setminus V_i$ pro všechna $i \in I$, musí být $g \in C$. Proto I je konečná a C_i jsou speciální. $\square$

2.5 Poláry

Definice 55. Nechť X je neprázdná podmnožina ℓ-grupy G. Polárou $X^{\perp}$ množiny X budeme rozumět množinu prvků G, které jsou ortogonální ke každému prvku množiny X. Tedy

$$X^{\perp} = \{g \in G \mid \forall x \in X : |g| \wedge |x| = 1\}.$$

V případě, že X bude obsahovat pouze prvek g, budeme poláru značit pouze $g^{\perp}$. Pokud $X = \emptyset$, definujeme $\emptyset^{\perp} = G$. Množinu všech polár ℓ-grupy G budeme značit $\mathcal{P}(G)$.

Lemma 56. Nechť X, Y jsou podmnožiny ℓ-grupy G. Pak platí:

1) $X \subseteq Y$ implikuje $Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$;

2) $X \subseteq X^{\perp\perp}$;

3) $X^{\perp\perp\perp} = X^{\perp}$.

Důkaz. 1) Když $X \subseteq Y$ a $g \in Y^{\perp}$, pak $|g| \wedge |y| = 1$ pro každé $y \in Y$, a tak $|g| \wedge |x| = 1$ pro každé $x \in X$. Proto $g \in X^{\perp}$, tedy $Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$.

2) Když $x \in X$ a $g \in X^{\perp}$, pak $|g| \wedge |x| = 1$ implikuje $x \in X^{\perp\perp}$. Proto $X \subseteq X^{\perp\perp}$.

3) Když $X \subseteq X^{\perp\perp}$, pak $X^{\perp\perp\perp} \subseteq X^{\perp}$. Současně však $X^{\perp} \subseteq (X^{\perp})^{\perp\perp}$, a proto $X^{\perp} = (X^{\perp})^{\perp\perp}$.

□

Věta 57. Každá polára $X^{\perp}$ je konvexní ℓ-podgrupa ℓ-grupy G.

Důkaz. Nechť $X^{\perp}$ je polára a $a, b \in X^{\perp}$ a $x \in X$. V každé ℓ-grupě platí $|ab^{-1}| \leq |a||b||a|$. Pak pro každé $x \in X$,

$$|ab^{-1}| \wedge |x| \leq |a||b||a| \wedge |a||b||x| \wedge |x| =$$

$$= |a||b|(|a| \wedge |x|) \wedge |x| = |a||b| \wedge |x||b| \wedge |x| =$$

$$(|a| \wedge |x|)|b| \wedge |x| = |b| \wedge |x| = 1.$$

Proto $X^{\perp}$ je podgrupa G. Nyní když $1 \leq c \leq b, b \in X^{\perp}$, pak $1 \leq c \wedge |x| \leq b \wedge |x| = 1$ a $c \in X^{\perp}$. Nechť $c \in X^{\perp}$. Pak $c \vee 1 \leq |c|$ a $1 \leq (c \vee 1) \wedge |x| \leq |c| \wedge |x| = 1$. Tedy polára je konvexní ℓ-podgrupa G. □

Připomeňme pojem filtr svazu. Nechť G je svaz. Řekneme, že F je filtr svazu G, jestliže:

1) pro každé $x, y \in F$ platí $x \wedge y \in F$;

2) pro každé $x \in F, g \in G$ platí $x \vee g \in F$.

Duálním pojmem k pojmu filtr je ideál svazu. Maximální filtr v G se nazývá ultrafiltr.

Věta 58. Nechť G je ℓ-grupa a P je konvexní podmnožina. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) P je minimální prvopodgrupa v G;

(2) $P = \bigcup\{g^\perp \mid g \notin P\}$;

(3) P je prvopodgrupa a $h^\perp \not\subseteq P$, když $h \in P$.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Když $f, g \in G^+ \setminus P$, pak $f \wedge g \neq 1$, vzhledem k tomu, že P je prvopodgrupa. Pak existuje ultrafiltr F na G^+ obsahující $G^+ \setminus P$. Zvolme $Q = \bigcup\{g^\perp \mid g \in F\}$. Pokud $g \in F$, pak $g^\perp \subseteq G \setminus F \subseteq P$. Tedy $Q \subseteq P$.

Dokážeme, že Q je konvexní ℓ-podgrupa. Když $a, b \in Q$, pak $a \in f^\perp$ a $b \in g^\perp$ pro některé $f, g \in F$. Pak $1 \leq (|ab| \vee |a \vee b|) \wedge f \wedge g \leq (|ab| \vee |a||b|) \wedge f \wedge g \leq |a||b||a| \wedge f \wedge g$. Navíc $|a||b||a| \wedge f \wedge g \leq (|a| \wedge f)(|b| \wedge g)(|a| \wedge f) = 1$. Odsud dostáváme, že $ab, a \vee b \in Q$. Vzhledem k tomu, že Q je konvexní a uzavřená vzhledem k inverzním prvkům, Q je konvexní ℓ-podgrupa. Když $c \in Q$ a $c \wedge d = 1$, pak z $c \wedge g > 1$ pro všechna $g \in F$ dostáváme, že $c \in F$, protože F je ultrafiltr. Tedy $d \in c^\perp \subseteq Q$ a Q je prvopodgrupa. Protože P je minimální, dostáváme $Q = P$ a $F = G^+ \setminus P$.

(2)$\Rightarrow$ (3) Zřejmé.

(3)$\Rightarrow$ (1) Nechť Q je minimální prvopodgrupa a je obsažená v P. Když $Q \neq P$, pak existuje $g \in P \setminus Q$. Podle předpokladu existuje $h \in g^\perp \setminus P$, odkud dostáváme $h \notin Q$. Ale $g \notin Q$, a proto $h \in g^\perp \subseteq Q$. To je spor. □

Věta 59. Nechť G je ℓ-grupa a P je konvexní ℓ-podgrupa různá od $\{1\}$. Pak $P^\perp$ je minimální prvopodgrupa v G, právě když P je lineárně uspořádaná.

Důkaz. Nechť $P^\perp$ je minimální prvopodgrupa G a $f, g \in P$ takové, že $f \wedge g = 1$ a $f \neq 1$. Vzhledem k tomu, že $P \cap P^\perp = \{1\}$, pro $g \neq 1$ je $g \notin P^\perp$. Podle předešlé věty $f \in g^\perp \subseteq P^\perp$, a proto $g = 1$. Tedy P je lineárně uspořádaná. Naopak, nechť

P je lineárně uspořádaná a $f \wedge g = 1$. Když $f, g \notin P^\perp$, existují $c_1, c_2 \in P$ takové, že $f \wedge c_1, g \wedge c_2 > 1$. Ale $(f \wedge c_1) \wedge (g \wedge c_2) = 1$. Vzhledem k tomu, že P je lineárně uspořádaná grupa, musí být $f \wedge c_1 = 1$ nebo $g \wedge c_2 = 1$. To je spor, a proto $P^\perp$ je prvopodgrupa. Když $h \in P^\perp$, pak $P \subseteq h^\perp$, proto $h^\perp \nsubseteq P^\perp$. Podle předešlé věty je $P^\perp$ minimální prvopodgrupa. $\square$

3 Reprezentace ℓ-grup

3.1 Subdirektní součiny

Nejprve budeme potřebovat několik informací o subdirektním součinu ℓ-grup. Subdirektní součin umožňuje rozložit složitější ℓ-grupy na jednodušší.

Definice 60. Řekneme, že ℓ-grupa G je subdirektním součinem ℓ-grup G_i $(i \in I)$, když existuje vnoření $h : G \to \prod_{i \in I} G_i$ takové, že složené homomorfismy $h \cdot \gamma_j : G \to G_j$, kde γ_j je přirozená projekce $\prod_{i \in I} G_i$ na G_j, jsou surjektivní. Vnoření h se nazývá subdirektní vnoření G do $\prod_{i \in I} G_i$. Řekneme, že ℓ-grupa G je subdirektně ireducibilní, jestliže platí, že když G je subdirektní součin některých ℓ-grup G_i $(i \in I)$, potom G je izomorfní s některou ℓ-grupou G_j. Když je ℓ-grupa subdirektním součinem lineárně uspořádaných grup, nazýváme ji reprezentovatelnou.

Poznámka 61. Když H_i $(i \in I)$ jsou ℓ-ideály G takové, že $\bigcap_{i \in I} H_i = \{1\}$, potom G je subdirektní součin faktorových ℓ-grup G/H_i $(i \in I)$.

Věta 62. Každá subdirektně ireducibilní abelovská ℓ-grupa je lineárně uspořádaná.

Důkaz. Nechť G je abelovská ℓ-grupa a $1 < g \in G$. Pak $g^\perp \cap g^{\perp\perp} = \{1\}$ a $g \in g^{\perp\perp}$. Pak $g^\perp = \{1\}$, když G je subdirektně ireducibilní. Nechť $f, h \in G$. Pak $f(f \wedge h)^{-1} \wedge h(f \wedge h)^{-1} = 1$. Tedy $f(f \wedge h)^{-1} = 1$ nebo $h(f \wedge h)^{-1} = 1$, protože $g^\perp = \{1\}$, když $g > 1$. Proto $f \le h$ nebo $h \le f$. □

Věta 63. Nechť G je ℓ-grupa. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) G je reprezentovatelná;

(2) pro všechna $x, y \in G : (x \wedge y)^2 = x^2 \wedge y^2$;

(3) pro všechna $x, y \in G : (x \vee 1) \wedge y^{-1}(x^{-1} \vee 1)y = 1$;

(4) každá polára $g^\perp$ je normální;

(5) každá minimální prvopodgrupa je normální.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Tato rovnost platí v lineárně uspořádaných grupách, a proto platí také v reprezentovatelných grupách.

(2) $\Rightarrow$ (3) Podle předpokladu je $(yx)^2 \wedge y^2 = (yx \wedge y)^2 \leq yxy$. Proto $yx \wedge x^{-1}y \leq y$ a dále $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee 1 = 1$. Nakonec dostáváme $(x \vee 1) \wedge y^{-1}(x^{-1} \vee 1)y = 1$ pro všechna $x, y \in G$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Když $f \wedge |g| = 1$, pak podle lemmatu 5 je $f = f|g||g|^{-1} = (f \vee |g|)|g|^{-1} = f|g|^{-1} \vee 1$. Podobným způsobem získáme $|g| = |g|f^{-1} \vee 1$. Ale podle předešlého tvrzení je $(g \vee 1) \wedge h^{-1}(g^{-1} \vee 1)h = 1$. Důsledkem je $|g| \wedge h^{-1}fh = 1$ pro všechna $h \in G$. Tedy $g^{\perp}$ je normální v G.

(4) $\Rightarrow$ (5) Plyne z věty 58.

(5) $\Rightarrow$ (1) Nechť P je minimální prvopodgrupa. Pak G/P je lineárně uspořádaná grupa. Vzhledem k tomu, že průnik minimálních prvopodgrup je $\{1\}$, G je reprezentovatelná. $\square$

Definice 64. Nechť G je ℓ-grupa. Řekneme, že G je normálně hodnotová, když každá hodnota V je normální ve svém pokrytí V^*.

Věta 65. Každá reprezentovatelná ℓ-grupa je normálně hodnotová.

Důkaz. Nechť G je reprezentovatelná a V je hodnota v G a $g \in V^*$. Potom existuje minimální prvopodgrupa P taková, že $P \subseteq V$. Navíc každá minimální prvopodgrupa je normální v G, tj. $g^{-1}Pg = P$. Platí, že když H je konvexní ℓ-podgrupa G, pak $a^{-1}Ha$ je také konvexní ℓ-podgrupa G, pro každé $a \in G$. Když vybereme $g \in V^*$, pak podle věty 34(5) je $V \subseteq g^{-1}Vg \subset g^{-1}V^*g = V^*$ nebo $g^{-1}Vg \subseteq V \subset V^* = g^{-1}V^*g$. Vzhledem k tomu, že V^* pokrývá V, je $g^{-1}Vg = V$. To znamená, že V je normální v V^*. $\square$

3.2 Automorfismy řetězců

Automorfismus řetězce T je permutace taková, že $x \leq y \Leftrightarrow \alpha(x) \leq \alpha(y)$ pro každé $x, y \in T$. Množinu všech automorfismů budeme značit $Aut(T)$.

Věta 66. Když P je prvopodgrupa G, pak pro každé $a \in G$ je zobrazení $\alpha_a : Px \mapsto Pxa$ automorfismus na řetězci $G/_P P$.

Důkaz. Nechť G je ℓ-grupa, $a \in G$ a $\alpha_a : G/_P P \mapsto G/_P P$ je zobrazení definované vztahem $\alpha_a(Px) = Pxa$. Když $Px = Py$, pak $xy^{-1} = xa(ya)^{-1} \in P$, a tedy $\alpha_a(Px) = Pxa = Pya = \alpha_a(Py)$, tj. definice α_a je korektní. Pro důkaz injektivity předpokládejme $\alpha_a(Px) = \alpha_a(Py)$. Pak $Pxa = Pya$, a dále $(xa)(ya)^{-1} = xy^{-1} \in P$. To znamená $Px = Py$, což jsme chtěli dokázat. Dále nechť $Py \in G/_P P$ a x je tvaru $x = ya^{-1}$. Vidíme, že α_a je surjektivní, protože $\alpha_a(Pya^{-1}) = Pyaa^{-1} = Py$. Ještě je třeba ověřit zachování uspořádání. Uspořádání na $G/_P P$ je dáno takto: $Px \leq Py$, právě když existuje $p \in P$, tak že $x \leq py$. Pak $xa \leq pya$, a tedy $\alpha_a(Px) = Pxa \leq Pya = \alpha_a(Py)$. □

Definice 67. Nechť H je podgrupa $Aut(T)$. Řekneme, že H je tranzitivní, když pro všechna $\alpha, \beta \in T$ existuje $h \in H$ takové, že $h(\alpha) = \beta$.

Věta 68. Nechť P je prvopodgrupa G. Potom zobrazení $f_P : a \mapsto \alpha_a$ je ℓ-homomorfismus G na tranzitivní ℓ-podgrupu $Aut(G/_P P)$.

Důkaz. Víme, že množina automorfismů řetězce se skládáním zobrazení je ℓ-grupa. Vzhledem k tomu, že P je prvopodgrupa, je $G/_P P$ řetězec, tedy $Aut(G/_P P)$ je ℓ-grupa s násobením $\alpha_a(Px) \cdot \alpha_b(Px) = \alpha_{ab}(Px)$, kde $Px \in G/_P P$. Proto je $f_P(a) \cdot f_P(b) = \alpha_a \cdot \alpha_b = \alpha_{ab} = f_P(ab)$, tj. zobrazení f_P je grupový homomorfismus. Nechť $a \wedge b = 1$, ale $f_P(a) \wedge f_P(b) \neq 1$, tj. existuje $Px \in G/_P P$ tak, že $\alpha_a(Px) \wedge \alpha_b(Px) = Pxa \wedge Pxb \neq Px$. Pak jistě $xax^{-1}, xbx^{-1} \notin P$. Přitom $xax^{-1} \wedge xbx^{-1} = x(a \wedge b)x^{-1} = xx^{-1} = 1$, tedy $xax^{-1} \in P$ nebo $xbx^{-1} \in P$, protože P je prvopodgrupa G, spor. Takže f_P splňuje podmínku (3) věty 28, a je tedy ℓ-homomorfismem. □

Věta 69. Nechť G je ℓ-grupa V_g jsou hodnoty $g \in G \setminus \{1\}$. Pak G je vnořitelná do $\prod_{g \in G \setminus \{1\}} Aut(G/_P V_g)$.

Důkaz. Pro každé $1 \neq g \in G$ zvolíme libovolnou hodnotu V_g. Víme, že $G/_P V_g$ je řetězec a že $f_{V_g} : a \mapsto \alpha_a$ je ℓ-homomorfismus G do $Aut(G/_P V_g)$, protože V_g je prvopodgrupa. Proto můžeme přirozeně definovat homomorfismus $\phi : G \mapsto \prod_{g \in G \setminus \{1\}} Aut(G/_P V_g)$

předpisem $\phi(a) = (\dots, f_{V_g}(a), \dots)$, $a \in G$, kde $f_{V_g}(a)$ je g-tá složka, $a \in G$. Tedy $\phi(a)$ je prvek direktního součinu $\prod_{g \in G \setminus \{1\}} Aut(G/_P V_g)$, tj. zobrazení z $G \setminus \{1\}$ do $\bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} Aut(G/_P V_g)$, takové, že pro každé $g \in G \setminus \{1\}$ je $\phi(a)(g) = f_{V_g}(a)$. Ověříme, že ϕ je vnoření. Když $a \in Ker(\phi)$, pak $f_{V_g}(a) = id$ pro každé $g \in G \setminus \{1\}$. Kdyby $a \neq 1$, tak taky $f_{V_a}(a) = id$, a tedy $V_a x a = V_a x$ pro každé x. Speciálně $V_a a = V_a$, tj. $a \in V_a$. To je spor s tím, že V_a je hodnota a. Tedy $Ker(\phi) = \{1\}$, tj. ϕ je injektivní. Takže ϕ je vnoření G do direktního součinu $\prod_{g \in G \setminus \{1\}} Aut(G/_P V_g)$. □

Budeme potřebovat několik informací o dobrém uspořádání. Dobře uspořádaná množina je uspořádaná množina taková, že každá její podmnožina má nejmenší prvek. Je zřejmé, že každá dobře uspořádaná množina je uspořádána lineárně. S dobrým uspořádáním souvisí tzv. princip dobrého uspořádání říkající, že každou množinu je možné dobře uspořádat. Toto tvrzení souvisí s axiomem výběru.

Věta 70 (Hollandova)**.** Každá ℓ-grupa je vnořitelná do ℓ-grupy automorfismů nějakého řetězce.

Důkaz. Předpokládejme, že G je netriviální ℓ-grupa. Pro každé $g \in G \setminus \{1\}$ vybereme libovolnou hodnotu V_g. Položíme $T = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} G/_P V_g$. Víme, že $G/_P V_g$ jsou řetězce. Vzhledem k tomu, že každou množinu je možné dobře uspořádat, zvolíme libovolné lineární uspořádání $\sqsubseteq$ na $G \setminus \{1\}$. Nyní T uspořádáme lexikograficky: $V_g x \leq V_h y \Leftrightarrow g \sqsubset h$ (tj. g je ostře menší než h vzhledem ke zvolenému lineárnímu uspořádání na $G \setminus \{1\}$) nebo $g = h$ a $V_g x \leq V_g y$ v řetězci $G/_P V_g$. Pro každé $a \in G$ definujeme zobrazení $\beta : T \mapsto T$ předpisem $\beta_a(V_g x) = V_g x a$. Vzhledem k tomu, že V_g jsou prvopodgrupy, podle věty 66 je β_a automorfismus na každém řetězci $G/_P V_g$ a je tedy automorfismem i na $T = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} G/_P V_g$.

Nyní můžeme definovat $\psi : G \mapsto Aut(T)$ předpisem $\psi(a) = \beta_a$. Vzhledem k tomu, že T je řetězec je $Aut(T)$ ℓ-grupa. Proto platí $\psi(ab) = \beta_{ab} = \beta_a \beta_b = \psi(a)\psi(b)$ pro každé $a, b \in G$. Dále předpokládejme, že $c \wedge d = 1$ a $\psi(c) \wedge \psi(d) \neq id$, tedy existuje $V_g x \in G/_P V_g$ takové, že $\beta_c(V_g x) \wedge \beta_d(V_g x) = V_g x c \wedge V_g x d \neq V_g x$. Pak $xcx^{-1}, xdx^{-1} \notin V_g$. Ale $xcx^{-1} \wedge xdx^{-1} = x(c \wedge d)x^{-1} = xx^{-1} = 1$, tedy $xcx^{-1} \in V_g$ nebo $xdx^{-1} \in V_g$. To je spor. Zobrazení ψ je tedy ℓ-homomorfismus. Nakonec kdyby $a \neq 1$, pak by $V_a a = V_a$, a to je spor s tím, že V_a je hodnota. Proto $Ker(\psi) = \{1\}$, tj. ψ je vnoření.

□

Pokud je ℓ-grupa vnořitelná do $Aut(T)$ pro lineárně uspořádanou množinu T, říkáme, že má reprezentaci na T.

Věta 71. Svazově uspořádaná grupa G je ℓ-izomorfní s tranzitivní ℓ-podgrupou $Aut(T)$ některého řetězce T, právě když existuje prvopodgrupa C grupy G taková, že jediný ℓ-ideál obsažený v C je $\{1\}$.

Důkaz. Předpokládejme, že G je tranzitivní ℓ-podgrupa ℓ-grupy $Aut(T)$ pro některé T. Zvolme $x \in T$ a nechť $C = \{g \in G \mid g(x) = x\}$. Pak C je konvexní ℓ-podgrupa G. Navíc C neobsahuje žádný ℓ-ideál ℓ-grupy G. Když $1 \neq g \in C$, pak existuje $y \in T$ s vlastností $g(y) \neq y$. Pak vzhledem k tomu, že G je tranzitivní, existuje $f \in G$ takové, že $f(x) = y$. Pak platí $f^{-1}(g(f(x))) = f^{-1}(g(y)) \neq f^{-1}(y) = x$, tedy $f \cdot g \cdot f^{-1} \notin C$.

Nyní ukážeme, že C je prvopodgrupa. Existují $a, b \notin C$ takové, že $a \wedge b = 1$. Potom $a(x) \neq x \neq b(x)$, a tedy $x = (a \wedge b)(x) = a(x) \wedge b(x)$. Ale to není možné vzhledem k tomu, že T je řetězec.

Naopak předpokládejme, že C je prvopodgrupa v G. Pak zobrazení $f_C : a \mapsto \alpha_a$ je podle věty 68 ℓ-homomorfismus G do tranzitivní ℓ-podgrupy $A(G/_P C)$. Když $g \in \ker(f_C)$, pak $g(C) = C$, a tedy $\ker(f_C) \subseteq C$. Ale jádro je ℓ-ideál a obsahuje tedy pouze 1. Proto f_C je vnoření. □

Důsledek 72. Svazově uspořádaná grupa bez netriviálních ℓ-ideálů je tranzitivní ℓ-grupa automorfismů řetězce.

Důsledek 73. Nechť G je abelovská a tranzitivní ℓ-grupa automorfismů řetězce. Pak G je lineárně uspořádaná.

4 Archimedovské ℓ-grupy

Definice 74. Nechť G je ℓ-grupa a $a, b \in G^+$. Jestliže $a^n \leq b$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak píšeme $a \ll b$. Řekneme, že G je archimedovská, když $a \not\ll b$ pro každé $a, b \in G^+ \setminus \{1\}$. Tedy kdyby pro některé $a, b \in G^+$ platilo $a \ll b$, pak by $a = 1$.

Je-li G lineárně uspořádaná archimedovská grupa, $a, b \in G^+$ a $a \leq b$, pak musí existovat $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a^n \leq b < a^{n+1}$.

Komutátorem budeme rozumět prvek $[f, g] = f^{-1}g^{-1}fg$.

Věta 75. Každá lineárně uspořádaná archimedovská grupa je komutativní.

Důkaz. Nechť G je lineárně uspořádaná archimedovská grupa. Rozlišíme dva případy. Nejprve předpokládejme, že $G^+ \setminus \{1\}$ má nejmenší prvek a. Pak pro každé $g \in G^+$ existuje takové $n \in \mathbb{N}$, pro které $a^n \leq g < a^{n+1}$. Z toho $1 \leq ga^{-n} < a$, tedy $ga^{-n} = 1$, tj. $g = a^n$. Vidíme, že G je cyklická grupa. Ale každá cyklická grupa je komutativní.

Dále předpokládejme, že $G^+ \setminus \{1\}$ nemá nejmenší prvek. Pak pro každé $a > 1$ existuje $c > 1$ tak, že $c^2 < a$. Opravdu, nechť $1 < b < a$ tak, že $b^2 \not< a$. Pak $b^{-1} < b^{-1}ab^{-1} < 1$, protože kdyby $a = b^2$, můžeme místo b vzít $c$takové, že $b > c > 1$, a v tom případě by platilo $a = b^2 > c^2$. Proto $1 < (ab^{-1})^2 < a$. Předpokládejme, že $f, g \in G^+$ nekomutují. Můžeme předpokládat, že $a = [f, g] > 1$. Zvolme c takové, že $1 < c < c^2 < a, f, g$. Protože G je archimedovská, existují $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $c^m \leq f < c^{m+1}$ a $c^n \leq g < c^{n+1}$. Nyní $[f, g] < c^{-m}c^{-n}c^{m+1}c^{n+1} = c^2$. To je spor s tím, že $c^2 < a$.

Nyní ukážeme, že když G^+ je komutativní, pak i G je komutativní. Nechť G^+ je komutativní. Pak pro každé $x, y \in G$ platí, že y^+ komutuje s x^+. Pak y^+ komutuje také s x^- a $(x^-)^{-1}$. Podobně x^- komutuje s y^-, a tedy komutuje i s y^+ a $(y^+)^{-1}$. Potom $xy = x^+(x^-)^{-1}y^+(y^-)^{-1} = y^+(y^-)^{-1}x^+(x^-)^{-1} = yx$.

□

Věta 76 (Hölderova)**.** Každá lineárně uspořádaná archimedovská grupa je izomorfní s některou podgrupou $(\mathbb{R}; +)$.

Důkaz. Nechť G je archimedovská lineárně uspořádaná grupa. Zvolme $c \in G^+ \setminus \{1\}$. Pro každé $g \in G^+$ označme $Q(g) = \{\frac{m}{n}\} \mid m, n \in \mathbb{N}_0, n \neq 0, c^m \leq g^n\}$. Tato množina je neprázdná, protože $0 \in Q(g)$. Dále platí $Q(g) \neq \mathbb{Q}^+$ a z $\frac{r}{s} < \frac{m}{n} \in Q(g)$ $\frac{r}{s} \in Q(g)$

(protože z $c^{nr} < c^m s \leq g^n s$ vyplývá $c^r \leq g^s$). Množina $Q(g)$ je tedy Dedekindovým řezem.

Definujme $\phi : G^+ \to \mathbb{R}$ takto: $\phi(g) = \sup Q(g)$. Dokážeme, že ϕ je homomorfismus grup. Nechť $\frac{m}{n} \in Q(f)$ a $\frac{r}{s} \in Q(g)$. Pak $c^m \leq f^n$ a $c^r \leq g^s$. Můžeme předpokládat, že $s = n$. Pak $c^{m+r} \leq f^n g^n = (fg)^n$, tj. $\frac{m+n}{n} \in Q(fg)$. Proto $Q(fg) \supset Q(f) + Q(g)$. Podobně způsobem, když $\frac{u}{n} \notin Q(f)$ a $\frac{v}{n}$, tj. $\frac{u}{n} > \frac{m}{n}$ pro každé $\frac{m}{n} \in Q(f)$ a $\frac{v}{n} > \frac{m}{n}$ pro každé $\frac{m}{n} \in Q(g)$, pak $c^u > f^n$ a $c^v > g^n$. Odtud $c^{u+v} > f^n g^n = (fg)^n$, tedy $\frac{u+v}{n} \notin Q(fg)$. To ale znamená $\frac{u+v}{n} \in Q(fg)$ implikuje $\frac{u+v}{n} \in Q(f)+Q(g)$, tedy $Q(fg) \subseteq Q(f)+Q(g)$. Proto $Q(fg) = Q(f) + Q(g)$ a odtud $\phi(fg) = \phi(f) + \phi(g)$.

Dokážeme, že ϕ zachovává uspořádání. Nechť $f \leq g$ a $Q(f) = \{\frac{m}{n} \mid c^m \leq f^n\}$, $Q(g) = \{\frac{p}{n} \mid c^p \leq g^n\}$. Pak $c^m \leq f^n \leq g^n$. Odtud plyne $\sup Q(f) \leq \sup Q(g)$. Navíc když $g > 1$, pak $c < g^n$ pro některé $n \in \mathbb{N}$, tedy $\frac{1}{n} \in Q(g) \setminus Q(1)$. Tedy ϕ je vnoření.

□

Věta 77. Nechť G je lineárně uspořádaná ℓ-grupa. Pak G nemá žádné netriviální konvexní ℓ-podgrupy.

Důkaz. Nechť G je archimedovská lineárně uspořádaná ℓ-grupa. Dále nechť H je vlastní netriviální konvexní ℓ-podgrupa G. Potom když $h \in H^+$ a $g \in G^+$, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $h^n \geq g$. Protože H je konvexní, je $g \in H$. Pak $G^+ \subseteq H^+$, a tedy i $G \subseteq H$. Ale H ℓ-podgrupa G, proto $H = G$.

Naopak, předpokládejme, že G nemá žádné nevlastní ℓ-podgrupy. Když $g, h \in G$ jsou takové, že $1 \leq g \ll h$, pak $G(g) \subset G(h)$. Ale podle předpokladu musí být $G(g) = \{1\}$, odkud dostáváme $g = 1$, tj. G je archimedovská. □

Věta 78. Každá archimedovská ℓ-grupa je reprezentovatelná.

Důkaz. Nechť G je archimedovská a $g \in G$. Předpokládejme, že $f \in g^\perp$, tedy $|f| \wedge |g| = 1$. Dále nechť pro některé $h \in G^+$ je $x = h^{-1}|f|h \wedge |g|$. Pak $1 \leq x$ a $1 \leq x \wedge hxh^{-1} = h^{-1}|f|h \wedge |g| \wedge |f| \wedge h|g|h^{-1} \leq |g| \wedge |f| = 1$. Tedy $x \wedge hxh^{-1} = 1$ a podle lemmatu 5 x a hxh^{-1} komutují. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $1 = x^n \wedge (hxh^{-1})^n = x^n \wedge hx^n h^{-1} \geq 1 \vee x^n h^{-1} \geq 1$. Z toho plyne $x^n h^{-1} \leq 1$, tj. $x^n \leq 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z archimedovskosti plyne, že $x = 1$. Potom $h^{-1}fh \in g^\perp$ pro každé $h \in G^+$. Ale pak také $k^{-1}fk \in g^\perp$ pro každé $k \in G$, protože každé k lze psát ve tvaru $k = ab^{-1}$ pro některé $a, b \in G^+$. Tedy G je reprezentovatelná. □

Věta 79. Každá archimedovská ℓ-grupa je komutativní.

Důkaz. Nechť G je archimedovská ℓ-grupa. Pak je reprezentovatelná a tedy i normálně hodnotová. Nyní když V je hodnota v G, pak $G/_P V$ je lineárně uspořádaná. Pak V^*/V je také lineárně uspořádaná. Vzhledem k tomu, že V^* pokrývá V ve svazu konvexních ℓ-podgrup G, V^*/V má netriviální vlastní konvexní podgrupy, a tedy je izomorfní s podgrupou $\mathbb{R}$ a je komutativní. Dokážeme, že když $x, y \in V^*$, pak komutátor $[x, y] \in V$.

Ověříme, že $[x, y] \ll |x| \vee |y|$ pro všechna $x, y \in G$. Předpokládejme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $[x, y]^n \not\leq |x| \vee |y|$. Nechť $z = [x, y]^n(|x| \vee |y|)^{-1} \vee 1$. Pak $z > 1$ a $z \in G(x) \vee G(y) = G(|x| \vee |y|)$. Nyní nechť N je hodnota z. Pak $|x| \vee |y| \notin N$, jinak by $z \in N$. Proto existuje hodnota M prvku $|x| \vee |y|$ taková, že $N \subseteq M$. Vzhledem k tomu, že $x, y \in M^*$, podle předpokladu je $[x, y] \in M$, odkud $[x, y]^n \in M$. Nyní protože $G/_P N$ je lineárně uspořádaná, je $N[x, y]^n > N(|x| \vee |y|)$. V opačném případě existuje $t \in N$ takové, že $[x, y]^n \leq t(|x| \vee |y|)$, odkud $1 < z \leq t \vee 1 \in N$. To je spor, protože $z \in N$. Pak existuje $p \in N$ takové, že $p[x, y]^n > |x| \vee |y|$. Protože $N \subseteq M$, je v lineárně uspořádané grupě $G/_P M$, $M[x, y] > M(|x| \vee |y|)$. Ale $[x, y]^n \in M$, a tedy existuje $q \in M$ takové, že $q > (|x| \vee |y|)$, tedy $|x| \vee |y| < g \in M$, a pak $|x| \vee |y| \in M$, spor. Z toho plyne, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $[x, y]^n \leq |x| \vee |y|$ a tedy $[x, y] \ll |x| \vee |y|$. Vzhledem k tomu, že G je archimedovská, je $[x, y] = 1$, což jsme chtěli dokázat. □

Literatura

[1] W. C. Holland: *The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set*, Michigan Math, 1963

[2] A. M. W. Glass: *Partially Ordered Groups* , World Scientific, Singapore, 1999

[3] V. M. Kopytov and N.Ya. Medvedev *The Theory of Lattice-Ordered Groups*, Kluwer Academic Publishers, 1994

[4] M. Anderson and T. Feil: *Lattice Ordered Groups: an introduction*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1988

[5] T. Blyth: *Lattices and Ordered Algebraic Structures*, Springer, London, 2005

[6] A. M. W. Glass and W. Charles Holland (Eds.):*Lattice-Ordered Groups: Advances and Techniques* , Kluwer Academic Publishers, 1989

[7] M. R. Darnel: *The Theory of Lattice-Ordered Groups*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 187, Marcel Dekker, 1995

[8] L. Fuchs: *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, 1963

[9] V. M. Kopytov and A. I. Kokorin: *Fully Ordered Groups*, Halsted Press (John Wiley & Sons), 1974

[10] L. Beran: *Grupy a svazy*, SNTL, Praha, 1974

[11] C.C. Chang, H. J. Keisler *Model Theory*, North Holland, 1973

[12] P. Bařina: *Uspořádané grupy*, Olomouc, 2013, bakalářská práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta