JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

Ekonomická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2011 Pavel Čermák

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

Ekonomická fakulta

Katedra aplikované matematiky a informatiky

Studijní program: 6208 B Ekonomika a management

Studijní obor: Obchodní podnikání

Určitý integrál v ekonomii

Vedoucí bakalářské práce

Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

Autor

Pavel Čermák

2011

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Ekonomická fakulta
Akademický rok: **2009/2010**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Pavel ČERMÁK**
Studijní program:	**B6208 Ekonomika a management**
Studijní obor:	**Obchodní podnikání**
Název tématu:	**Určitý integrál v ekonomii**
Zadávající katedra:	**Katedra aplikované matematiky a informatiky**

Zásady pro vypracování:

Diplomant bude v práci budovat teorii určitého integrálu a jeho vlastnosti. Dále budou ukázány metody a způsoby výpočtu určitého integrálu, založené na tzv. Newton-Leibnitzově formuli. Poté budou zmíněny možnosti použití vytvořené teorie v ekonomii i dalších oborech. Cílem je ucelenou formou popsat podstatu integrálního počtu funkcí jedné proměnné a použít ji v konkrétních praktických úlohách.

Metodický postup:

1. Shromáždění a studium doporučené literatury.
2. Odvození určitého integálu a některých jeho vlastností.
3. Uplatnění integrálního počtu v praxi.
4. Závěr.

Rozsah grafických prací:
Rozsah pracovní zprávy: **40 - 50 stran**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

Jarník V. Integrální počet I. Praha : Academia, 1974.
Laitochová J. Matematická analýza 2 - Integrální počet. Olomouc UP, 2001.
Dĕmidovič B. P. Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Brno : Fragment, 2003.
Mohanty R.K. Integral calculus. New Delhi : Anmol Publications, 2004.
Dhami H. S. Integral calculus. Chennai : New Age International Publishers, 2001.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Petr Chládek, Ph.D.**
Katedra aplikované matematiky a informatiky

Datum zadání bakalářské práce: **15. února 2010**
Termín odevzdání bakalářské práce: **16. dubna 2011**

JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
EKONOMICKÁ FAKULTA
Studentská 13 (26)
370 05 České Budějovice
L.S.

prof. Ing. Magdalena Hrabánková, CSc., prof.h.c.
děkanka

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.
vedoucí katedry

V Českých Budějovicích dne 11. března 2010

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Určitý integrál v ekonomii“ vypracoval samostatně s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 sb. v plném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly, v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb., zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 21.4.2011 Pavel Čermák

Poděkování

Úvodem své práce bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Petru Chládkovi, Ph.D. za odborné vedení. Dále také děkuji Ing. Tomáši Volkovi, Ph.D., který mi svými odbornými radami a připomínkami napomohl k úspěšnému vypracování této práce.

OBSAH

Úvod a cíl práce

Hlavní náplní práce je popis teorie určitého integrálu, který umožňuje řešit řadu úloh např. na výpočet obsahu rovinných těles, délky křivek, objemu těles rotačních, statických momentů rovinných obrazců, křivek a rotačních těles, souřadnice těžiště atd., a jeho vlastností. Dále budou ukázány a vysvětleny metody a způsoby výpočtu určitého integrálu, které jsou založené na tzv. Newton-Leibnizově formuli, budou zmíněny možnosti použití vytvořené teorie v ekonomii.

Na určitý integrál lze pohlížet hned z několika přístupů a těmto přístupům také odpovídá několik druhů určitých integrálů (Riemannův, Lebesgueův, Newtonův). Podle způsobu zavedení se mění třída integrovatelných funkcí. Dnes se nejvíce používá definice, kterou zavedl významný německý matematik B. Riemann (1826 – 1866). Způsob zavedení je východiskem pro numerické výpočty určitých integrálů. Již v minulosti ve starém Egyptě bylo třeba řešit problémy s výměrou pozemků, jejichž velikost se měnila v důsledku záplav Nilu. Problémy byly tehdy řešeny pomocí jednoduchých metod, které spočívaly v rozdělení plochy na malé trojúhelníky, jejichž obsahy se poté sečetly. v 16. a 17. století byla velká pozornost věnována studiu křivek a také byla hojně rozvíjena klasická mechanika. Během staletí tedy vznikala otázka, jakým způsobem by bylo vhodné určit či definovat obsah plochy obecných útvarů, které se nedají rozložit na konečný počet trojúhelníků.

Cílem práce je ucelenou formou popsat podstatu integrálního počtu reálných funkcí jedné reálné proměnné a použít ji v praktických úlohách v ekonomii.

Kapitola 1

Neurčitý integrál

Abychom se mohli začít zabývat problematikou určitého integrálu, bylo by jistě vhodné nejprve přiblížit teorii integrálu neurčitého, který tvoří základ k pochopení dalších výpočtů. Tento popis bude sice pouze rámcový, ale bude plně dostačovat k pochopení problematiky.

1.1 Primitivní funkce

Základem výpočtu každého integrálu, ať určitého či neurčitého, je primitivní funkce a proto začneme její definicí.

Definice 1. Nechť $f(x)$ je funkce definovaná v intervalu I. Každá funkce $F(x)$, která je diferencovatelná (tzn., má derivaci) v intervalu I a splňuje v něm rovnost

$$F'(x) = f(x)$$

se nazývá primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu I. [2]

Pro zjednodušení lze říci, že pokud jsme zderivovali funkci $F(x)$, dostali jsme funkci $f(x)$ a $F(x)$ je právě onou hledanou primitivní funkcí.

Příklad 1

1. Primitivní funkce k funkci $2x$ v intervalu $(-\infty; +\infty)$ je funkce x^2, neboť $(x^2)' = 2x$ a zapisujeme

$$\int 2x\,dx = x^2$$

Primitivní funkce k funkci $\cos x$ v intervalu $(-\infty; +\infty)$ je funkce $\sin x$, neboť $(\sin x)' = \cos x$ a zapisujeme

$$\int sin\, x\, dx = \ cos\, x$$

Věta 1. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu I, potom je také součet $F(x) + C$, kde C je libovolná konstanta, primitivní funkcí. Daná věta platí i naopak. Jsou-li dvě funkce $F(x)$ a $G(x)$ funkcemi primitivními k funkci $f(x)$, na celém intervalu I se liší pouze o konstantu. [2]

Důkaz. Je-li $F'(x) = f(x)$ a $G'(x) = f(x)$, potom také $(F(x) + C)' = f(x)$ a $(G(x) + C)' = f(x)$, neboť derivace konstanty je nula, a tudíž jsou i funkce $F(x) + C$ a $G(x) + C$ primitivními funkcemi k funkci $f(x)$.

Definice 2. Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci $f(x)$ nazýváme **neurčitým integrálem** k dané funkci a podle Leibnize ji označujeme symbolem

$$\int f(x)\, dx$$

a čteme integrál $f(x)dx$. [2]

Symbolem protaženého písmena S se rozumí znak integrálu, část, kde stojí $f(x)$, nazýváme integrand, což není nic jiného než funkce, která má být integrována.

Věta 2. Pokud k dané funkci $f(x)$ existuje nějaká primitivní funkci $F(x)$, je počet primitivních funkcí funkce $f(x)$ roven nekonečnu.

Důkaz. Máme-li $F'(x) = f(x)$, potom podle věty 1 je i $(F(x) + C)' = f(x)$. Protože $(C)' = 0$, může nabývat konstanta C jakýchkoliv hodnot, a přesto bude stále $F(x) + C$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

Nyní je tedy zřejmé, že proces integrování je procesem opačným k derivování a obecně se nechá zapsat jako

$$F'(x) = f(x) \rightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$$

1.2 Pravidla integrování

Jelikož hledáme funkci, jejíž derivaci známe, můžeme si ze známých vztahů pro derivace elementárních funkcí odvodit pravidla pro integrování. Ještě je nutné podotknout, že následující pravidla platí pro tzv. přímou integraci.

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
2. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tg\ x + C$
8. $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -cotg\ x + C$
9. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\ x + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ [1]

Pokud není možné funkci integrovat přímo dle výše uvedených vzorců, je třeba použít metod, které nám zajistí výsledek za použití výpočtů derivace funkcí, které se derivují podle vzorců.

Metoda per partes

První metoda vyplývá ze vzorce derivace součinu. Její podstata spočívá, jak už z názvu vyplývá, z postupné integrace, neboli po částech (per partes).

Věta 3. Funkce $u(x)$, $v(x)$ nechť mají v intervalu (a, b) spojité derivace, potom je

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \tag{1.2.1}$$

v intervalu (a, b).

Důkaz. Funkce $u(x)v(x)$ má v intervalu (a, b) derivaci $u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$, takže je $(u \cdot v)' = uv' + u'v$, pokud provedeme ekvivalentní úpravu a obě strany rovnice zintegrujeme, dostaneme $\int (uv)'dx = \int uv' + u'vdx$, z čehož poté dostáváme

$$u(x)v(x) = \int \big(u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\big)dx$$

v intervalu (a, b). Funkce $u(x), v(x)$ jsou spojité v (a, b), jelikož jsou funkce $u'(x), v'(x)$ také spojité v (a, b). V daném intervalu jsou spojité i funkce $u(x)v'(x)$ a $u'(x)v(x)$. Můžeme tedy zapsat ve tvaru $u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx$. Pokud převedeme v této rovnici druhý integrál na levou stranu rovnice, dostaneme rovnici (1.2.1). [2],[4]

Metoda substituce

Druhá metoda vyplývá ze vzorce pro derivaci složené funkce. Podstata této metody spočívá v nahrazení (substituování) složitější funkce funkcí jednodušší, následným provedením integrace a zpětným dopočítáním funkce původní.

Věta 5. Funkce $f(x)$ budiž spojitá v intervalu (a, b); funkce $\varphi(t)$ nechť má v intervalu (α, β) spojitou derivaci $\varphi'(t)$; pro každé t z intervalu (α, β) nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b). Potom platí v intervalu (α, β) rovnice

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

dosadíme-li do primitivní funkce, kterou nám představuje integrál na levé straně, $\varphi(t)$ za x.

Důkaz. V intervalu (a, b) položme $F(x) = \int f(x)dx$. Pak v intervalu (α, β) je funkce $F\big(\varphi(t)\big)$ primitivní funkcí k funkci $f\ \big(\varphi\ (t)\big)\varphi'(t)$, neboť

$$(F\big(\varphi(t)\big)' = F'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = (\int f(\varphi(t)dx)' \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Tedy je opravdu funkce $F(\varphi(t))$ v intervalu (α, β) primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. [1],[5]

Využití výše popsaných metod v praxi

Metoda per partes

Příklad:

$$\int x\cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int 1 \sin x\, dx =$$

$$= x\sin x \ - (-\cos x) + c =$$

$$= x\sin x + \cos x + c$$

Zkouška:

$$y = x\sin x + \cos x + c$$

$$y' = \sin x + x\cos x - \sin x + 0$$

$$y' = x\cos x$$

a příklad je tedy vypočítán správně.

Příklad:

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

Zkouška:

$$y = xe^x - e^x + c$$

$$y' = 1e^x + xe^x - e^x + 0$$

$$y' = xe^x$$

a příklad je tedy vypočítán správně.

Metoda substituce

Příklad:

$$\int (3x+1)^{20} dx$$

dle výše zmíněné definice je tedy $f\colon y = x^{20}$, $\varphi\colon y = 3x+1$ a protože

$(f \circ \varphi)(x) = (3x+1)^{20}$ a $\varphi'(x) = 3$, můžeme potom zapsat

$$f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) = [f(3x+1)] \cdot 3 = (3x+1)^{20} \cdot 3$$

a podle věty 5: $\int (3x+1)^{20} = \frac{\int (3x+1)^{20} \cdot 3dx}{3} = \frac{\int t^{20} dt}{3} = \frac{t^{21}}{21} \cdot \frac{1}{3}$

po dosazení za t dostaneme $\frac{(3x+1)^{21}}{63}$.

Všeobecně se ovšem provádí postup popsaný níže, jelikož je přehlednější.

$$\int (3x+1)^{20} dx = \begin{vmatrix} 3x+1 = t \\ 3 = \dfrac{dt}{dx} \\ dx = \dfrac{dt}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int t^{20} dt = \frac{1}{3}\frac{t^{21}}{21} = \frac{1}{63} t^{21} = \frac{(3x+1)^{21}}{63} + c$$

Zkouška

$$y = \frac{(3x+1)^{21}}{63} + c$$

$$y' = \frac{21(3x+1)^{20} * 3}{63} + 0 = (3x+1)^{20}$$

a tudíž je příklad vypočítán správně.

Příklad:

$$\int 3\cos\ (2x+1)\,dx = \begin{vmatrix} (2x+1) = t \\ 2 = \dfrac{dt}{dx} \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{vmatrix} = 3\int \cos t\,\frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\sin t = \frac{3}{2}\sin(2x+1) + c$$

Zkouška:

$$y = \frac{3}{2}\sin(2x+1) + c$$

$$y' = \frac{3}{2}\cos(2x+1) * 2 + 0$$

$$y' = 3\cos(2x+1)$$

a příklad je tedy vypočítán správně.[3]

Kapitola 2

Teorie určitého integrálu (Riemannův určitý integrál)

Než se pustíme do vlastního popisu určitého integrálu a jeho vlastností, je nutné ještě nadefinovat pojmy, které budou užity při definici.

Máme-li nyní číselnou množinu N a existuje-li číslo $K \in \boldsymbol{R}$ takové, že všechna čísla x množiny N splňují nerovnost $x \leq K$, nazýváme množinu N shora omezenou. Je-li N neprázdná shora omezená množina, potom v ní existuje pouze jedno jediné číslo, nazvěme ho G, které má následující vlastnosti:

1) Žádné číslo z N není větší než G
2) Je-li $\overline{G}$ libovolné číslo menší než G, existuje v N alespoň jedno číslo, které je větší než $\overline{G}$.

Toto číslo G se nazývá supremem množiny N, značíme a zapisujeme ho znakem $sup\ N$.

Máme-li nyní číselnou množinu N a existuje-li číslo K takové, že všechna čísla x množiny N splňují nerovnost $x \geq K$, nazýváme množinu N zdola omezenou. Je-li N neprázdná zdola omezená množina, potom v ní existuje pouze jedno jediné číslo, nazvěme ho g, které má následující vlastnosti:

1) Žádné číslo z N není menší než g
2) Je-li $\overline{g}$ libovolné číslo větší než g, existuje v N alespoň jedno číslo, které je menší než $\overline{g}$.

Toto číslo $g\ se$ nazývá infimum množiny N, značíme a zapisujeme ho znakem $inf\ N$.

Pokud platí, že je množina zdola i shora omezená současně, pak lze o množině říci, že je omezená. Pokud je tedy množina N neprázdná a omezená, musí existovat obě čísla $sup\ N$ i $inf\ N$ a je zřejmé, že pro jakékoli číslo $n \in N$ platí $inf\ N \leq n \leq sup\ N$. [1]

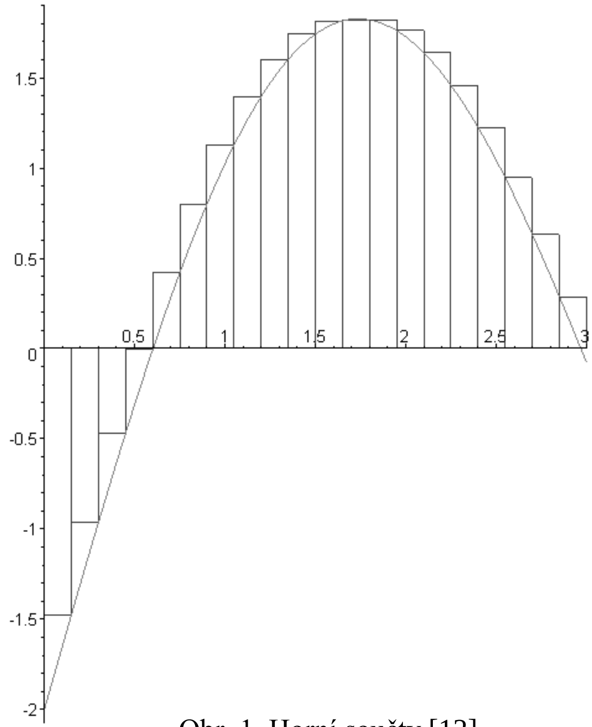
Mějme reálnou funkci $f(x)$, která je definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. V tomto intervalu může tato funkce nabývat kladných i záporných hodnot a může být spojitá, ale není to podmínkou. Jedinou podmínkou potřebnou pro konstrukci Riemanova integrálu je omezenost funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, abychom měli zaručenou existenci $sup\ f(x)$, $inf\ f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. [2]

2.1 Součtová definice určitého integrálu

Budiž dán interval $\langle a, b \rangle$ a budiž dána funkce $f(x)$ omezená v intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li dáno celé kladné číslo n a je-li dáno $n + 1$ bodů, které jsou na číselné ose (reálná čísla) $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, které splňují tyto vztahy $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, lze říci, že tyto body definují určité rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ se nazývají dělícími body tohoto rozdělení. Body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ dělí interval $\langle a, b \rangle$ na n dílčích intervalů, a sice na $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle$, …, $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$. Toto rozdělení, definované dělícími body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, označíme jako D a zapíšeme

$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \langle a, b \rangle$. Označme znakem Δx_i délku i*-tého* částečného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, což znamená, že položíme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Označme M_i supremum a m_i infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ (funkce je dle výše uvedeného na daném intervalu omezená). Danému rozdělení D přiřadíme nyní dvě čísla:

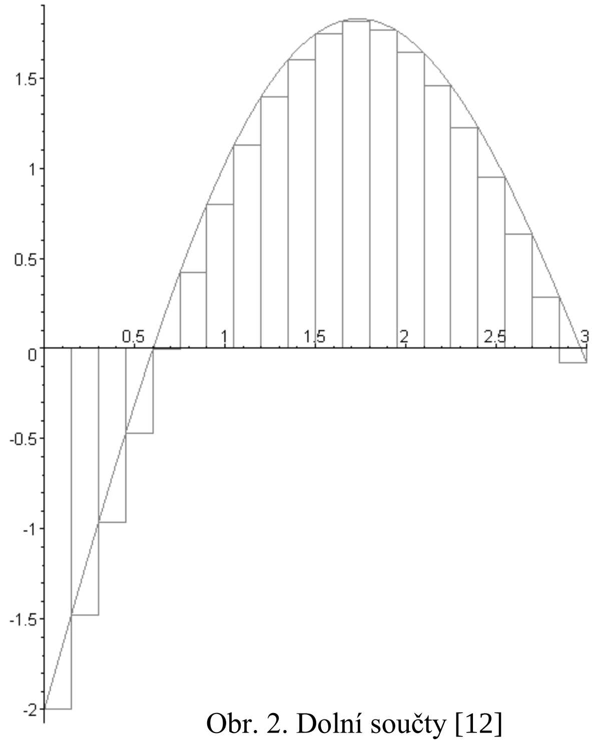
$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$



Obr. 1. Horní součty [12]

které budeme nazývat horním integrálním součtem (stručně horní součet) příslušným k rozdělení D a

$$s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$



Obr. 2. Dolní součty [12]

které budeme nazývat dolním integrálním součtem (stručně dolní součet) příslušným k rozdělení D. Hodnota horního součtu S a také hodnota dolního součtu s je závislá (při dané funkci a pevném intervalu $\langle a,b\rangle$) na zvoleném dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$. To je vyznačeno tím, že jsme psali $S(D)$ a $s(D)$. Pokud bychom zvolili jiné dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$, dostaneme jiný horní součet $S(D)$ i jiný dolní součet $s(D)$. Infimum množiny všech horních součtů (vezme-li v potaz všechna možná dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$) se nazývá horní integrál z funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$,

$$\inf_D S(D) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

obdobně supremum množiny všech dolních součtů se nazývá dolní integrál

$$\sup_D s(D) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

Aby bylo možné definovat dolní a horní integrál z dané funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, není nutné, aby byla funkce spojitá. Co však musí funkce splňovat, musí být $f(x)$ na daném intervalu $\langle a, b\rangle$ omezená. [1],[2],[4],[5],[9]

Z výše uvedeného je tedy zřejmé, že

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

Definice 3 Je-li

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

potom hodnotě, která jim je společná, říkáme integrál funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ a o funkci f lze říci, že je integrovatelná podle Cauchyovy-Riemannovy definice a zapisujeme

$$\int_a^b f(x)dx$$

číslo a se poté nazývá dolní mezí integrálu a číslo b horní mezí integrálu.

Definice 4 Z dosavadní konstrukce plyne, že v integrálu $\int_a^b f(x)dx$ je $a < b$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Pro $b < a$ je definován vztahem

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

a pro $a = b$ dostáváme vztah

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Pokud jsou tedy meze shodné, je hodnota integrálu rovna nule.[1],[5],[9]

Na rozdíl od integrálu neurčitého je výsledek integrace určitého integrálu **vždy číslo**.

2.2 Vlastnosti určitého integrálu

V následující podkapitole se budeme zabývat vlastnostmi určitého integrálu. Tyto vlastnosti budou demonstrovány pouze jako tvrzení v podobě vět. Důkazy zde není třeba zmiňovat, jelikož nejsou podstatou této práce. Zájemci však potřebné důkazy mohou nalézt v publikaci [1], případně v publikacích [4] a [5]. Samotné věty pak lze nalézt v publikaci [9].

Věta 6. Je-li

$$f(x) \geq 0 \text{ v } \langle a, b \rangle$$

pak

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

pokud je funkce $f(x)$ alespoň v jednom bodě c tohoto intervalu spojitá a je-li $f(c) > 0$ pak

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Věta 7. Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, je také funkce $|f(x)|$integrovatelná a platí, že

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Věta 8. Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ $a\ je - li\ m \leq f(x) \leq M$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, potom

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Věta 9. Je-li $f(x) \geq g(x)$ v $\langle a, b\rangle$ a jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Věta 10. Mějme $a < b < c$ a funkci $f(x)$, která je omezená v intervalu $\langle a, c\rangle$, potom je

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Věta 11. Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a číslo k je libovolná konstanta, platí

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Věta 12. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2.3 Metody výpočtu určitého integrálu

Newton-Leibnizova formule

Věta 13. Pokud je funkce $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$ (ze zápisu intervalu je tedy jisté, že $a < b$), budiž funkce $F(x)$ k ní primitivní spojitá v $\langle a, b\rangle$, která má v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) derivaci $F'(x) = f(x)$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.3.1}$$

Tato rovnice má pro výpočet určitého integrálu zásadní význam, protože nám říká, že stačí udělat pouze dva kroky k získání výsledku:

1. Najít primitivní funkci F k funkci f
2. Spočítat rozdíl mezi $F(b)$ a $F(a)$ dosazením mezí do vzniklé primitivní funkce.

V aplikacích se značí pravá strana rovnice symbolem [1]

$$[F(x)]_a^b \quad \text{nebo} \quad F(x)|_a^b \quad \text{takže} \quad \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

Integrování určitých integrálů metodou substituce

Metoda vyplývá ze vzorce pro derivaci složené funkce. Podstata této metody spočívá v nahrazení (substituování) složitější funkce funkcí jednodušší, následným provedením integrace a zpětným dopočítáním funkce původní. V případě použití substituce u určitého integrálu máme na výběr dvě možnosti výpočtu.

1. Za použití vět níže uvedených přetransformujeme nejen funkci $f(x)$ a zároveň s ní i meze integrálu a poté aplikujeme na celý nově vzniklý integrál Newton-Leibnizovu formuli. Tato metoda nám poskytne již rovnou výsledek integrálu a dále již nedosazujeme původní proměnnou.

2. Nejprve najdeme primitivní funkci a vrátíme se k původní proměnné a teprve poté aplikujeme Newton-Leibnizovu formuli, ovšem meze integrálu zůstanou původní. [1]

Věta 14. Substituce. Nechť $A \leq a < b \leq B$ a funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle A, B\rangle$, $\varphi'(z)$ je spojitá na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a pro každé $z \in \langle \alpha, \beta\rangle$ leží $\varphi(z)$ v intervalu $\langle A, B\rangle$,$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(z)\big)\varphi'(z)dz \tag{2.3.2}$$

Důkaz. Pokud je m resp. M nejmenší resp. největší hodnota funkce $\varphi(z)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, potom na intervalu $\langle m, M\rangle$ je definována funkce $f(x)$ a existuje k ní primitivní funkce $F(x) = \int f(x)dx$. Podle Newton-Leibnizovy formule je levá strana rovnice (2.3.2) rovna $F(b) - F(a)$. Derivace složené funkce $F[\varphi(z)]$ se rovná $f[\varphi(z)]\varphi'(z)$, a proto pravá strana rovnosti se rovná $F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$ a rovnost tedy platí. [1]

Integrování určitých integrálů metodou per partes

Věta 15. Mějme funkce $u(x)$ a $v(x)$, které mají na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, potom platí

$$\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'vdx \tag{2.3.3}$$

Důkaz. Protože $(uv)' = u'v + uv'$, lze tedy vyjádřit

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$$

a proto rovnice (2.3.3) platí. [1]

Využití výše popsaných metod v praxi

Metoda substituce

Příklad:

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}$$

Řešení I:

Nejprve provedeme výpočet neurčitého integrálu $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$, kde za použití substituce dostaneme $t = x^3 + 1$ a $3x^2dx = dt$. Po substituování tedy dostaneme integrál $\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}$. Integrujeme

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t$$

nyní již můžeme dosadit zpět za substituci a zapíšeme, že

$$\frac{1}{3}[\ln(x^3+1)]_0^1 = \frac{1}{3}(\ln(1^3+1) - \ln(0^3+1)) = \frac{1}{3}\ln 2 \doteq 0{,}2310$$

Řešení II:

Druhá metoda výpočtu substitucí spočívá v přepočítání mezí hned při aplikaci substituce. Tedy položme opět $t = x^3 + 1$ a $3x^2dx = dt$. Nyní dosadíme do rovnice $t = x^3 + 1$ původní meze pro $x = 0$

$$t_0 = 0^3 + 1 = 1$$

Pro $x = 1$

$$t_1 = 1^3 + 1 = 2$$

Dostali jsme tedy nové meze integrálu a zapíšeme jako

$$\frac{1}{3}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \left[\frac{1}{3}\ln t\right]_1^2 = \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{3}\ln 2 \doteq 0{,}2310$$

Z příkladu je vidět, že je jedno jakou metodu budeme používat, protože obě jsou správné. [3]

Příklad:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}dx$$

Řešení:

Opět provedeme nejprve výpočet integrálu neurčitého, tzn. bez mezí. Substituce bude tedy vypadat: $t = x^2 + 2x + 3$ a $2(x+1)dx = dt$. Výsledný integrál bude tedy vypadat $\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2}$ a můžeme integrovat [3]

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt = \frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{t}$$

když jsme získali primitivní funkci, můžeme do ní zpět dosadit za t a dopočítat integrál v zadaných mezích

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2+2x+3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{0+0+3}\right) = \frac{1}{12}$$

Metoda Per partes

Příklad:

$$\int_0^1 xe^x dx$$

Řešení:

Řešení příkladu dostaneme za použití vzorce z věty (2.3.3), a nejprve si tedy určíme $u\ a\ v$ a potom přejdeme k samotné aplikaci vzorce. [3]

$$\int_0^1 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (1e^1 - 0e^0) - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

Příklad:

$$\int_0^1 x \sin x \, dx$$

Řešení:

Řešení příkladu dostaneme za použití vzorce z věty (2.3.3), a nejprve si tedy určíme $u\ a\ v$ a potom přejdeme k samotné aplikaci vzorce. [3]

$$\int_0^1 x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= [-\cos x \cdot x]_0^1 + \int_0^1 \cos x \, dx = ((-\cos 1 \cdot 1) - (-\cos 0 \cdot 0)) + [\sin x]_0^1 =$$

$$= -\cos 1 + \sin 1 - \sin 0 = \sin 1 - \cos 1 \doteq 0{,}9824$$

2.4 Použití určitého integrálu

Určení obsahu rovinné plochy

Pomocí určitého integrálu můžeme vypočítat obsah některých rovinných útvarů, které ohraničuje funkce f, případně i funkce g.

Věta 16. Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná a nezáporná na uzavřeném intervalu $\langle a , b\rangle$, pak množina D bodů $[x , y]$, kterou dávají nerovnosti

$$a \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq f\ (x) \qquad \text{příp.} \quad f\ (x) \leq y \leq 0$$

má obsah $|D|$ dán vzorcem

$$|D| = \left| \int_a^b f\ (x)dx \right|$$

Důkaz. Nechť $0 \leq y \leq f(x)$. Dolní integrál je supremem dolních součtů s_{n} a ty vyjadřují obsahy vepsaných obdélníků do množiny D. Podobně i horní integrál funkce $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$ je infimem horních součtů S_{n}, a ty vyjadřují obsahy obdélníků pokrývajících společně množinu D. Pokud můžeme říci, že se horní a dolní integrál rovnají, existuje určitý integrál

$$\int_a^b f\ (x)dx$$

a vyjadřuje přesně obsah $|D|$ množiny D. V tomto případě je $\int_a^b f\ (x)dx \geq 0$.

Pokud je funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a , b\rangle$ nekladná, potom vyjadřuje $\int_a^b f\ (x)dx$ obsah množiny bodů D, které jsou dány nerovností $f\ (x) \leq y \leq 0$, ale je záporný. Jelikož není možné vyjádřit obsah záporným číslem, platí $|D| = \left| \int_a^b f\ (x)dx \right|$. [2]

Věta 17. Obsah $|D|$ části roviny D, která je ohraničená grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$, jež jsou spojité na intervalu $\langle a\,, b\rangle$ a $g(x) \geq f(x)$ pro $a \leq x \leq b$ a příslušnými úsečkami na přímkách $x = a$ a $x = b$, je vyjádřen integrálem

$$|D| = \int_a^b [g\,(x) - f\,(x)]\, dx$$

Důkaz. Pokud je $f(x) \geq 0$, tak musí být také $g(x) \geq 0$, jak vyplývá z podmínky $g(x) \geq f(x)$. Podle věty 12 máme $|D| = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$, což je výše uvedený vzorec. [2]

Pokud nabývají funkce $f(x)$ a $g(x)$ záporných hodnot, pak vzhledem k jejich spojitosti a ohraničenosti na uzavřeném intervalu existuje taková konstanta c, že $f(x) + c \geq 0$, a tedy také $g(x) + c \geq 0$. Uvážíme-li, že

$$g(x) - f(x) = (g(x) + c) - (f(x) + c)$$

zůstává vzorec pravdivý. [2]

Délka křivky

Budiž c rovinná křivka v rovině Oxy a uvažujme její oblouk $\overset{\frown}{AB}$, který je dán parametrickými rovnicemi

$$x = x(t) \qquad y = y(t), \qquad \text{kde } \alpha \leq t \leq \beta$$

dále rozdělme interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ na n částečných intervalů dělícími body $t_0, t_1, \dots, t_n$ tak, že

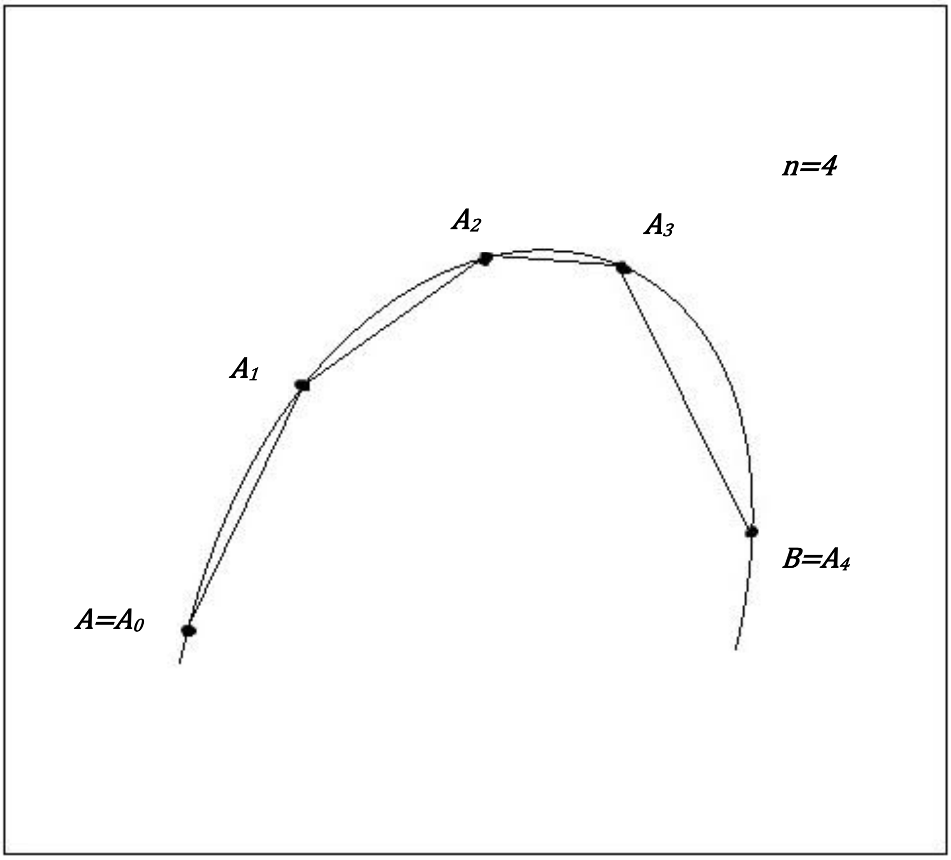
$$\alpha = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n \leq \beta$$

Označíme δ_n normu dělení intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a sice

$$\delta_n = \max_{i=1,\dots,n} \Delta t_i$$

kde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, pro $i = 1,2, \dots, n$.

Nechť dělícím bodům t_i odpovídají na křivce body $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ viz obr. níže.



Obr. 3: Lomená čára vepsaná do křivky [2]

Lomená čára $AA_1 \dots A_{n-1}B$ se nazývá čarou vepsanou do křivky AB a body A_i jsou její vrcholy. Označme d_n délku lomené čáry, čili součet

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} |A_{i-1}A_i|$$

Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} d_n$, když $\delta_n \to 0$ pro $n \to \infty$, přičemž tato limita nezávisí na volbě dělicích bodů t_i, pak platí, že křivka c je schopná rektifikace. Limita $\lim_{n\to\infty} d$ se nazývá délka oblouku $\widetilde{AB}$ křivky c.

Podobným způsobem by se definovala délka oblouku $\widetilde{AB}$ prostorové křivky c. [2]

Jelikož není každá křivka schopná rektifikace, viz G. Peano a jeho Peanova křivka, je třeba dělit křivky podle jejich vlastností.

1. Jordanův oblouk. Křivka, která nemá násobné body, tj. různým hodnotám parametru t odpovídají různé body křivky
2. Hladký oblouk. Křivka, která je Jordanovým obloukem a pokud má pravá strana rovnice v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité derivace, které splňují podmínku ${x'}^2(t) + {y'}^2(t) > 0$. Hladký oblouk má tedy v každém bodě tečnu, která se spojitě mění se změnou bodu na oblouku.
3. Křivka po částech hladká. Pokud se dá křivka rozdělit na konečný počet hladkých oblouků. Ve vrcholech má tečnu zleva a tečnu zprava, které ovšem nemusí být totožné. Jako příklad křivky po částech hladké lze uvést lomenou čáru. [2]

Věta 18. Mějme křivku $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, pokud má funkce $y(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou derivaci a je schopná rektifikace, má potom délku

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

Objem rotačních těles (kubatura)

Věta 19. Objem V_x rotačního tělesa, které vzniká rotací hladkého oblouku $\overset{\frown}{AB}$ křivky $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, $x \in \langle a, b \rangle$ kolem osy x, vyjadřuje vzorec

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Důkazy vět 17,18 a 19 zde pro jejich složitost neuvádíme, ale lze je opět nalézt v literatuře [1],[4],[5]

Kapitola 3

Aplikace určitých integrálů do ekonomie

Pro výpočet určitých integrálů v aplikačních příkladech budeme v následující kapitole používat Newton-Leibnizovu formuli. Ve vzorcích, kde bude přítomno e je toto považováno za Eulerovu konstantu, čili základ přirozeného logaritmu.

3.1 Investice a tvorba kapitálu během časového intervalu

Při procesu tvorby kapitálu dochází ke změně základního kapitálu na základě investic. Tyto změny mohou nabývat formy přidávání či uvolňování. Předpokladem pro tvorbu kapitálu je úspora prostředků, které můžeme posléze proměnit v investici. Obecně se tedy jedná o přeměnu peněžních prostředků v kapitál. Pokud tento proces pozorujeme za určité spojité časové období, můžeme vyjádřit základní kapitál jako funkci času $K(t)$. Míru tvorby kapitálu poté dostáváme jako derivaci $K(t)$ podle času t a sice $K'(t)$. Tato míra tvorby kapitálu v čase t je naprosto identická s mírou čistého investičního toku v čase $I(t)$. Nyní tedy již můžeme vyjádřit vztah pro základní kapitál a čisté investice a ten jest

$$K'(t) = I(t) \tag{3.1.1}$$

což můžeme upravit na časový tok kapitálu následovně

$$K(t) = \int I(t)dt \tag{3.1.2}$$

Chceme-li vyjádřit, jak se změní velikost kapitálu během časového období, které je rovno intervalu $\langle a, b\rangle$, musíme z neurčitého integrálu udělat určitý, jehož meze budou vyjadřovat námi sledované období, a integrál by vypadal následovně

$$\int_a^b I(t)dt = [K(t)]_a^b = K(b) - K(a) \tag{3.1.3}$$

Po vypočtení integrálu dostaneme číslo, které nám určuje celkovou akumulaci kapitálu během sledovaného časového období $\langle a, b\rangle$. Číslo nám tedy vyjadřuje konkrétní číselnou hodnotu. Tato hodnota je současně i velikostí plochy, kterou nám ohraničuje křivka $I(t)$, osa t přímky, kterou prochází body a a b. [6],[10]

$K(t)$ – základní kapitál jako funkce času

$I(t)$ – čistý investiční tok

a, b – sledované období

Příklad 3.1.P1

Jaká bude celková tvorba kapitálu během roku pro časový interval $\langle 2,3\rangle$, pokud jsou čisté investice $I(t) = 50\ 000$?

Řešení:

Podle (3.1.3) je třeba vyřešit určitý integrál v mezích od 2 do 3.

$$\int_2^3 I(t)dt = \int_2^3 50\ 000dt = [50\ 000t]_2^3 = (50\ 000 \cdot 3 - 50\ 000 \cdot 2) = 50\ 000$$

Z příkladu vyplývá, že jsou-li investice konstantní, je tvorba kapitálu rovna jejich čisté hodnotě.

Příklad 3.1.P2

Jaká bude tvorba kapitálu během časového období $\langle 1,6\rangle$, pokud je funkce čistého investičního toku $I(t) = 7\sqrt{t}$.

Řešení:

K vyřešení příkladu použijeme určitého integrálu a sice

$$\int_1^6 7\sqrt{t}dt = \left[\frac{14\sqrt{t^3}}{3}\right]_1^6 = 28\sqrt{6} - \frac{14}{3} \doteq 63{,}92$$

Během námi sledovaného období dojde ke změně kapitálu o 63,92 jednotek, což je současně obsah plochy, kterou nám vytyčí osa x meze 1 a 6 a funkce $I(t)$.

3.2 Spojité úročení

Spojité úročení je další možnou aplikací, kde můžeme využít určitého integrálu. Princip spojitého úročení vychází z předpokladu, že frekvence připisování úroků se blíží k nekonečnu, a tím pádem klesá délka úrokovacího období k nule. Tento pojem má však spíše teoretický význam, protože přechod k nekonečně malým hodnotám umožňuje použití derivace a integrálu, což je právě náš případ. Přesto však některé banky nabízejí spojité úročení, a dokonce ho vydávají za zvláštní službu ve prospěch klienta. Tato situace je dána faktem, že efektivní úroková míra s rostoucí frekvencí úročení roste. Proto vklad úročí nejvíce ta banka, při stejné nominální úrokové míře, která připisuje úroky spojitě.

Částku, která je splatná při spojitém úročení, dostaneme tedy dle vzorce

$$S = P\, e^{jt} \tag{3.2.1}$$

kde nám vyjadřuje

P-vložená (vypůjčená) částka

j-nominální úroková míra,

t-doba půjčky vyjádřena v letech $(t > 0)$,

e-základ přirozeného logaritmu čili Eulerova konstanta

Aby bylo možné zachytit spojité změny v úrokové míře mezi časovými okamžiky $\tau = 0$ a $\tau = t$, je třeba vzorec zapsat jako

$$S = Pe^{\left(\int_0^t \delta(\tau) d\tau\right)} \tag{3.2.2}$$

Funkce $\delta(\tau)$ se nazývá úroková intenzita v čase τ a představuje cosi, co by se nechalo nazvat výší průtoku úrokové míry v daném časovém okamžiku. Pokud $\delta(\tau) = j$, což znamená, že průtoky jsou konstantní, pak přechází rovnice (3.2.2) v rovnici (3.2.1) [11],[10]

Příklad 3.2.P1

O kolik procent vzroste vklad 700 000 jednotek za dva a půl roku při spojitém úročení s nominální úrokovou mírou 7,5% p.a.?

Řešení:

Dosadíme známé proměnné do rovnice (3.2.2), kde $P = 700\,000$, $j = 0{,}075$, $t = 2{,}5$ a řešíme rovnici

$$S = 700\,000 e^{\int_0^{2,5} 0{,}075 d\tau}$$

řešení určitého integrálu v exponentu:

$$\int_0^{2,5} 0{,}075 d\tau = [0{,}075\tau]_0^{2,5} = 0{,}075 \cdot 2{,}5 = 0{,}1875$$

dosadíme do vzorce o řádek výše a dostaneme

$$S = 700\,000 e^{0,1875} = 844\,361{,}18$$

nyní již zbývá pouze dopočítat procentní změnu a zjistíme, že za 2,5 roku vzroste vklad o 20,62 %.

3.3 Současná hodnota důchodového toku

Pokud chceme vyjádřit, jaká je současná hodnota budoucího důchodu, je třeba všechny přijaté budoucí platby diskontovat. Diskontování znamená přepočet částky, kterou máme v budoucnu na hodnotu, jakou má dnes. Vycházíme z toho, že referenční datum je chápáno jako současná časová pozice. Všechny peněžní toky, které budeme uvažovat, se tedy týkají přítomnosti nebo budoucnosti. Pokud tedy chápeme tok důchodu během roku jakou spojitou funkci času $R(\tau)$, lze potom současnou hodnotu důchodového toku τ (v letech) určit podle vzorce

$$\int_0^\tau R(t)e^{-st}dt \tag{3.3.1}$$

kde nám s vyjadřuje roční diskontní míru. [11]

$R(\tau)$ – tok důchodu během roku – spojitá funkce času

τ – očekávaná doba sledování

s – úroková míra (diskontní míra)

Příklad 3.3.P1

Jaká bude současná hodnota příjmu za dobu 5 let, diskontuje-li firma budoucí příjem spojitě mírou 6,5% a její roční příjem činí 860 000 jednotek?

Řešení:

Dosadíme do vzorce (3.3.1) kde $R = 860\ 000$, $s = 0{,}065$ a $\tau = 5$ a dostáváme

$$\int_0^5 860\ 000 e^{-0{,}065t}\,dt = 860\ 000 \int_0^5 e^{-0{,}065t}dt =$$

$860\ 000 \left[\frac{-1}{0{,}065} e^{-0{,}065t}\right]_0^5 = -\frac{860\ 000}{0{,}065}\left(e^{-0{,}065\cdot 5} - 1\right) \doteq 3\ 671\ 176$

Současná hodnota je přibližně 3 671 176 jednotek.

Příklad 3.3.P2

Jaká bude současná hodnota příjmu stavební firmy za dobu 3 let, jejíž roční příjem je popsán funkcí $R = \sin 2\pi t + 2$ (v desítkách milionů Kč), diskontuje-li firma budoucí příjem spojitě mírou 5,5%? (funkce příjmu v podobě sinu zde má za úkol demonstrovat fakt, že v zimním období má firma příjmy nižší než v období, kdy se staví).

Řešení:

Opět provedeme dosazení do vzorce (3.3.1) a provedeme integraci. Tedy

$$\int_0^3 (\sin 2\pi t + 2)e^{-0,055t} dt = \int_0^3 e^{-0,055t} \cdot \sin 2\pi t \, dt + \int_0^3 2e^{-0,055t} \, dt$$

Nyní je třeba vypočítat jednotlivé integrály. Nejprve se budeme zabývat integrálem $\int_0^3 e^{-0,055t} \cdot \sin 2\pi t \, dt$. Tento integrál pro potřebu výpočtu vezmeme jako neurčitý. Pro výpočet použijeme dvakrát za sebou integraci per partes, a poté vypočítáme integrál v daných mezích.

$$\int e^{-0,055t} \cdot \sin 2\pi t \, dt = \left| \begin{matrix} u = \sin 2\pi t & u' = 2\pi \cdot \cos 2\pi t \\ v' = e^{-0,055t} & v = \dfrac{e^{-0,055t}}{-0,055} \end{matrix} \right| = \frac{e^{-0,055t}}{-0,055} \cdot \sin 2\pi t +$$

$$+ \frac{2\pi}{0,055} \cdot \int \cos 2\pi t \cdot e^{-0,055t} dt = \left| \begin{matrix} u = \cos 2\pi t & u' = -2\pi \sin 2\pi t \\ v' = e^{-0,055t} & v = \dfrac{e^{-0,055t}}{-0,055} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{e^{-0,055t}}{-0,055} \cdot \sin 2\pi t + \frac{2\pi}{0,055} \cdot \left(\frac{e^{-0,055t}}{-0,055} \cdot \cos 2\pi t - \frac{2\pi}{0,055} \cdot \int e^{-0,055t} \cdot \sin 2\pi t \, dt \right) =$$

$$= \frac{e^{-0,055t}}{-0,055} \cdot \sin 2\pi t - \frac{2\pi \cdot e^{-0,055t}}{0,055^2} \cos 2\pi t - \frac{4\pi^2}{0,055^2} \int e^{-0,055t} \cdot \sin 2\pi t \, dt$$

Nyní jsme dostali původní integrál, a tak výsledek porovnáme s původním integrálem a dostaneme

$$\int e^{-0,055t} \cdot \sin 2\pi t \, dt = \frac{e^{-0,055t}}{-0,055} \cdot \sin 2\pi t - \frac{2\pi \cdot e^{-0,055t}}{0,055^2} \cos 2\pi t -$$

$$- \frac{4\pi^2}{0,055^2} \int e^{-0,055t} \cdot \sin 2\pi t \, dt$$

$$\int e^{-0,055t} \cdot \sin 2\pi t \, dt = \frac{\frac{e^{-0,055t}}{-0,055} \cdot \sin 2\pi t - \frac{2\pi \cdot e^{-0,055t}}{0,055^2} \cos 2\pi t}{\frac{4\pi^2}{0,055^2} + 1}$$

Když teď máme výsledek integrálu, vypočítáme, jak vypadá jeho určitá forma v mezích $\langle 0,3 \rangle$

$$\left[\frac{\frac{e^{-0,055t}}{-0,055} \cdot \sin 2\pi t - \frac{2\pi \cdot e^{-0,055t}}{0,055^2} \cos 2\pi t}{\frac{4\pi^2}{0,055^2} + 1} \right]_0^3 =$$

$$\frac{\frac{e^{-0,055\cdot 3}}{-0,055} \cdot \sin(2\pi \cdot 3) - \frac{2\pi \cdot e^{-0,055\cdot 3}}{0,055^2} \cos(2\pi \cdot 3)}{\frac{4\pi^2}{0,055^2} + 1} -$$

$$\frac{\frac{e^{-0,055\cdot 0}}{-0,055} \cdot \sin(2\pi \cdot 0) - \frac{2\pi \cdot e^{-0,055\cdot 0}}{0,055^2} \cos(2\pi \cdot 0)}{\frac{4\pi^2}{0,055^2} + 1} \doteq - 0,1281 + 0,1591 = 0,031$$

Zbývá dopočítat integrál $\int_0^3 2e^{-0,055t}\,dt$

$$\int_0^3 2e^{-0,055t}\,dt = 2\int_0^3 e^{-0,055t}dt = 2 \cdot \left[\frac{e^{-0,055t}}{-0,055}\right]_0^3 = 2 \cdot \left(\frac{e^{-0,055\cdot 3}}{-0,055} - \frac{e^{-0,055\cdot 0}}{-0,055}\right) =$$

$$= 5,531$$

Dostali jsme dílčí výsledky integrálů a nyní zbývá poslední krok - sečíst výsledky. Tedy

$$0,031 + 5,531 = 5,562$$

Současná hodnota je přibližně 55 620 000 Kč.

3.4 Od mezních veličin k veličinám celkovým

Definujeme: *„Mezní veličina je dodatečnou jednotkou příslušné veličiny. v ekonomické teorii se pojem mezní veličina vztahuje ke dvěma proměnným, tj. udává změnu celkové proměnné, která je vyvolána změnou jiné proměnné o jednotku. v grafickém vyjádření pak mezní veličina vyjadřuje směrnici funkce celkové proměnné. v mikroekonomické teorii se mezní veličiny využívají pro analýzu velmi malých změn (v grafickém vyjádření pak mezní veličina určuje velikost změny funkce celkové veličiny v daném bodě a je tedy tangentou tečny k funkci celkové veličiny).“* [8]

Máme-li funkci celkových nákladů, můžeme pomocí derivace dostat funkci mezních nákladů. Tyto mezní funkce se ovšem netýkají pouze nákladů. Jako další mezní veličiny můžeme uvést mezní příjem, mezní užitek, mezní produkt práce atd. Co však tyto mezní veličiny znamenají? Tyto mezní veličiny vyjadřují, jaký vliv mají velmi malé změny proměnných na celek, tedy na celkové náklady, celkový užitek atd. Jelikož je proces integrace procesem opačným k derivaci, můžeme pomocí integrace získat funkce celkové z funkcí mezních. Pokud je tedy funkce $f(x)$ naší mezní veličinou, můžeme pomocí integrace dostat funkci $F(x)$, která bude k funkci $f(x)$ z matematického hlediska funkcí primitivní, z ekonomického hlediska veličinou celkovou, a zapíšeme [10],[6]

$$\int f(x)dx = F(x) + c \tag{3.5.1}$$

Tímto výpočtem získáme, jak jsme u určitého integrálu zvyklí, opět funkci. Abychom mohli využít teorie určitého integrálu, budeme v následujícím příkladu používat reálné hodnoty, které nám omezí funkce na určité intervaly a zároveň nám umožní použít teorii určitého integrálu, který bude pro konkrétní hodnoty nabývat podoby

$$\int_a^b f(x)dx \tag{3.5.2}$$

Příklad 3.4.P1

Při běžném provozu vyprodukuje firma 166 výrobků denně. Denní náklady firmy na jeden výrobek jsou dány funkcí $MC = 0{,}3Q^2 - 23Q + 150$. Jaké budou dodatečné náklady na výrobky, pokud se firma rozhodne zvýšit denní produkci o 22 výrobků?

Řešení:

Chceme-li zjistit, jak se změní celkové náklady, musíme funkci mezních nákladů dosadit do rovnice (3.5.2), kde za $f(x)$ dosadíme funkci MC a meze integrálu budou původní a nový počet výrobků za den, tedy $a = 166$, $b = 188$. Dostáváme tedy integrál

$$\int_{166}^{188} (0{,}3Q^2 - 23Q + 150)dQ$$

Nyní již vypočítáme určitý integrál pomocí Newton-Leibnizovy formule a dostaneme výsledek. Tedy

$$\int_{166}^{188} (0{,}3Q^2 - 23Q + 150)dQ = \left[\frac{0{,}3}{3}Q^3 - \frac{23}{2}Q^2 + 150Q\right]_{166}^{188} =$$

$$= \left(\frac{0{,}3}{3} \cdot 188^3 - \frac{23}{2} \cdot 188^2 + 150 \cdot 188\right) - \left(\frac{0{,}3}{3} \cdot 166^3 - \frac{23}{2} \cdot 166^2 + 150 \cdot 166\right) =$$

$$= 268\,211 - 165\,436 = 102\,775$$

Náklady firmy vzrostou o 102 775 Kč denně.

Příklad 3.4.P2

Firma dostala nabídku na investici do nového zařízení. Ekonomové stanovili, že úspora, která by inovací vznikla, se nechá vyjádřit jako funkce času $s(t) = 1\,600 - 0{,}7t^2$(v tis. Kč). t je v tomto případě počet měsíců od uvedení nového zařízení do provozu. Představenstvo společnosti ovšem očekává konkrétní čísla. Kolik tedy firma skutečně ušetří?

Řešení:

Na funkci $s(t)$ lze nahlížet jako na mezní veličinu úspory. Abychom mohli spočítat skutečnou hodnotu, kterou firma zavedením nového zařízení ušetří, musíme získat meze určitého integrálu. Tyto meze získáme z funkce $s(t)$. Je třeba zjistit, jak dlouho bude firma na novém zařízení šetřit. To zjistíme tak, že položíme funkci $s(t)$ rovnu nule, protože s tím, jak postupuje čas, úspory klesají, až dosáhnou nuly, tedy

$$1\,600 - 0{,}7t^2 = 0$$

$$0{,}7t^2 = 1\,600$$

$$0{,}7t = 40$$

$$t \doteq 57{,}14$$

Nyní jsme dostali meze a můžeme integrovat

$$\int_0^{57,14} (1600 - 0{,}7t^2)dt = \left[1\,600t - \frac{0{,}7t^3}{3}\right]_0^{57,14} =$$

$$= \left(1\,600 \cdot 57{,}14 - \frac{0{,}7 \cdot 57{,}14^3}{3}\right) - \left(1\,600 \cdot 0 - \frac{0^3}{3}\right) =$$

$$\doteq 47\,893$$

Skutečná úspora firmy bude 47 893 tisíc Kč.

Závěr

Bakalářská práce měla za cíl uceleně popsat teorii integrálního počtu funkcí jedné proměnné a použít ji v konkrétních praktických úlohách z oblasti ekonomie.

První část práce se věnuje především definicím, pojmům, větám a důkazům týkajících se integrálního počtu, kde postupně dostáváme z neurčitého integrálního počtu integrální počet určitý, následně definujeme jeho vlastnosti a jeho matematické, případně fyzikální aplikace.

Druhá část popisuje jednotlivé ekonomické aplikace, vysvětluje použité pojmy a demonstruje použití integrálního počtu na příkladech. K výpočtům je používáno výhradně Newton-Leibnizovy formule a z matematických aplikací je nejvýznamnější aplikací obsah rovinného obrazce pod křivkou, která se používá ve většině aplikačních příkladů. Je však třeba nahlížet na jednotlivé aplikace s jistou dávkou zdravého rozumu. Jak z příkladu 3.1.P1 vyplývá, není třeba na tento typ příkladů používat metodu integrálního počtu funkcí jedné proměnné, jelikož nám dává stejné číslo, jako bylo v zadání. Integrální počet má bezesporu svou roli v mezních veličinách, kde pomocí jeho metodiky dostáváme z mezních veličin veličiny celkové, se kterými potom můžeme dále pracovat. Také ve finanční matematice je jeho metodika velmi účinná v příkladech spojitého úročení.

Summary

In thesis task there was mentioned little bit of indefinite integral theory and computation methods. After that was described the definite integral theory, its properties, computation methods, first of all the Newton-Leibniz formulary, and its connection with indefinite integral. Then was shown where is possible to use definite integral on examples in mathematics. The most important part of the thesis is the application of definite integral theory on examples in economics. Each subchapter is occupied by one application. At the beginning of each part the rough description of economics view is contained. Then is defined an equation eventually equations for computing. All of this is demonstrated on examples.

Bibliografie

[1] JARNÍK, V. *Integrální počet (I)*. Praha: Academia, 1974. 244 s.

[2] LAITOCHOVÁ, J. *Matematická analýza 2*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2001. 103 s.

[3] DĚMIDOVIČ, B.P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Brno: Fragment, 2003. 460 s.

[4] MOHANTY, R.K. *Integral calculus*. New Delhi: Anmol Publications, 2004. 394 s.

[5] DHAMI, H.S. *Integral calculus*. Chennai: New Age International Publishers, 2001. 333 s.

[6] BAUEROVÁ, D. *Matematická ekonomie I*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 1998. 227 s.

[7] SEKERA, B.; ČERNOHORSKÝ, J. *Matematická ekonomie*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2005. 241 s.

[8] ŽÁK, M. *Velká ekonomická encyklopedie*. Praha: Linde Praha, 1999. 806 s.

[9] REKTORYS, K. *Přehled užité matematiky I*. Praha: Prometheus, 1996. 720 s.

[10] CHIANG, A. C. *Fundamental methods of Mathematical Economics*. New York: McGraw-Hill, 2005. 688 s.

[11] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Ekopress, 2005. 308 s.

[12] Math.muni.cz [online]. 2010 [cit. 2011-04-07]. Integrální počet. Dostupné z WWW: <http://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i44.html>.

Seznam obrázků