



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Skládání papíru ve výuce matematiky

Vypracovala: Nikol Schinková
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Skládání papíru ve výuce matematiky jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 29. 4. 2016

.....

Poděkování

Chtěla bych na tomto místě poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce, prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc, za ochotu, cenné rady a připomínky, které mi pomohly při psaní této práce.

Anotace

Bakalářská práce Skládání papíru ve výuce matematiky se zabývá využitím origami v řešení matematických problémů. Nejprve se v práci věnuji historii origami a základním konstrukcím skládání neboli Huzita-Hatori axiomy. V další části jsou řešeny a dokázány problémové úlohy neřešitelné euklidovskou konstrukcí, tečna k dvěma parabolám, trisekce úhlu a duplikace krychle. V závěrečné části jsou uvedeny postupy konstrukcí s důkazy, které lze využít ve výuce matematiky.

Annotation

The bachelor thesis Paper folding in teaching mathematics deals with the usage of origami to solve mathematic problems. In the introduction the history of origami and basic constructions of composing, so called Huzita-Hatori axioms, are mentioned. In next part, the problem tasks which are unsolvable with Euclidean construction, the tangent to two parabolas, angle trisection and duplicating of the cube are solved and proven. In conclusion, procedures of constructions with proofs which can be used in teaching the mathematic, are given.

Obsah

1	Úvod	5
2	Historie origami	6
2.1	Vývoj skládání v Japonsku.....	6
2.2	Počátky skládání v Evropě.....	7
3	Základní konstrukce skládání	8
3.1	Huzita-Hatori axiomy	8
3.2	Tečna k dvěma parabolám	14
4	Trisekce úhlu a duplikace krychle	17
4.1	Trisekce úhlu	17
4.1.1	Trisekce tupého úhlu.....	20
4.2	Duplikace krychle.....	21
4.2.1	Čtverec podle Margherity Beloch	22
4.2.2	Metoda Petera Messera.....	24
5	Konstrukce využitelné ve výuce	27
5.1	Dělení úsečky na 3, 5, ... n částí	27
5.2	Rovnostranný trojúhelník.....	29
5.3	Pravidelný čtyřstěn	32
5.4	Pythagorejský trojúhelník	35
6	Závěr.....	37

1 Úvod

Skládání papíru, origami, se využívá v mnoha vědních disciplínách, od umění, architektury až po medicínu. V mé bakalářské práci chci ukázat, jak lze skládání papíru využít ve výuce matematiky jako didaktické pomůcky a k řešení matematických problémů. Začlenění origami do výuky podněcuje žáky k zamyšlení nad danou problematikou z jiného úhlu pohledu.

Práce je rozdělena na čtyři kapitoly, v první se věnuji historii skládání, kde vznikly první skládanky a za jakým účelem. Následující kapitola je o základních konstrukcích skládání, neboli Huzita-Hatori axiomech, ty nám demonstrují 7 základních typů přeložení papíru a jejich využití. Především se budu věnovat 6. axiomu, který přesahuje euklidovskou konstrukci a například umožňuje vytvoření společné tečny k dvěma parabolám. Následně je věnována samostatná kapitola trisekci úhlu a duplikaci krychle, klasickým antickým problémům, s postupy řešení a důkazy. Poslední kapitola je tvořena konstrukcemi, které jsou využitelné ve výuce, dělení úsečky na 3, 5, ..., n částí, konstrukci rovnostranného trojúhelníku, pravidelného čtyřstěnu a pythagorejského trojúhelníku. Tyto konstrukce mohou být nápomocny k pochopení dané látky, především pro jejich názornost a prostorovou manipulaci. U každého modelu uvádím postup složení a důkaz, k objasnění daných přehybů.

2 Historie origami

Origami je japonský název pro skládání papíru, též paper folding. Označení vzniklo roku 1880 spojením dvou slov „oru“ (skládání) a „kami“ (papír), do té doby se používaly názvy risue, orimono a orikata. Pojem origami se používá běžně v Americe a téměř po celé Evropě, ve Španělsku mají pro skládání papíru speciální název papiroflexia [1], [3].

Počátek vzniku origami nelze přesně určit, jelikož nejsou dochovány písemné doklady o prvním skládání. Japonci si stojí za tím, že origami vzniklo v Japonsku a do Španělska se dostalo prostřednictvím Maurů. Jiné zdroje tvrdí, že začátky skládání papíru se na obou kontinentech, ve Španělsku a v Japonsku, vyvíjely nezávisle na sobě, především z hlediska odlišného náhledu na využití skládání [3].

2.1 Vývoj skládání v Japonsku

Počátky origami jsou těsně spojeny s počátkem výroby papíru. Výrobu papíru vynalezli Číňané kolem roku 105 n. l., snažili se vše utajit, ale postupem času se tajemství výroby přes Koreu dostalo v 6. století do Japonska. Papír byl velmi drahý a nábožensky uctíváný, proto se první skládanky z něj využívaly k náboženským účelům, především k výzdobě šintoistických svatyní při obřadech. Základní výzdobou svatyní byly papírové řetězy, které měly přesný postup skládání. Řetězy byly používány k oddělení posvátných míst, kam mohl vstoupit pouze duchovní představený, od veřejných míst ve svatyni [1], [2].

Znalost skládání se ústně sdělovala z generace na generaci jako rodinné tajemství, díky tomu nemáme žádné písemné doložení postupů skládání z tohoto období. Až od 17. století se začalo na origami nahlížet jako na zábavu a byly sepsány materiály se základními postupy skládání zvířátek, ozdob a předmětů s náboženskou symbolikou. Kolem roku 1800 se objevil postup na skládanku jeřába (orizuru), který byl symbolem dlouhého života a vážala se k němu známá legenda (pokud člověk složí 1000 papírových jeřábů, splní se mu jeho přání) [1], [2].

Všechny tyto skládanky se řadily mezi **tradiční origami** (denšó origami), z jednoho kusu papíru, bez dokreslování a slepování, s přesně daným postupem. Postupem času a oblíbeností origami vznikaly novinky ve skládání, které nemají striktně daný řád a mají prostor pro kreativitu a jedinečnost, nazývají se **moderní origami** (sósako origami). Pro skládanky moderního origami je typické, že jsou složeny z několika komponentů [3].

2.2 Počátky skládání v Evropě

Nejznámější počátky skládání papíru v Evropě jsou ve Španělsku, ale i v Itálii se v muzeu zachovaly doklady o skládání. Italové vymysleli mnoho způsobů složitého skládání ubrousků a dochovaly se nákresy s postupem složení létající šipky z papíru od Leonarda da Vinci. Na rozdíl od japonského pojetí origami se ve Španělsku skládání (papiroflexia) lišilo tím, že je využívali primárně k řešení matematických problémů a k názornosti geometrických útvarů [2], [3].

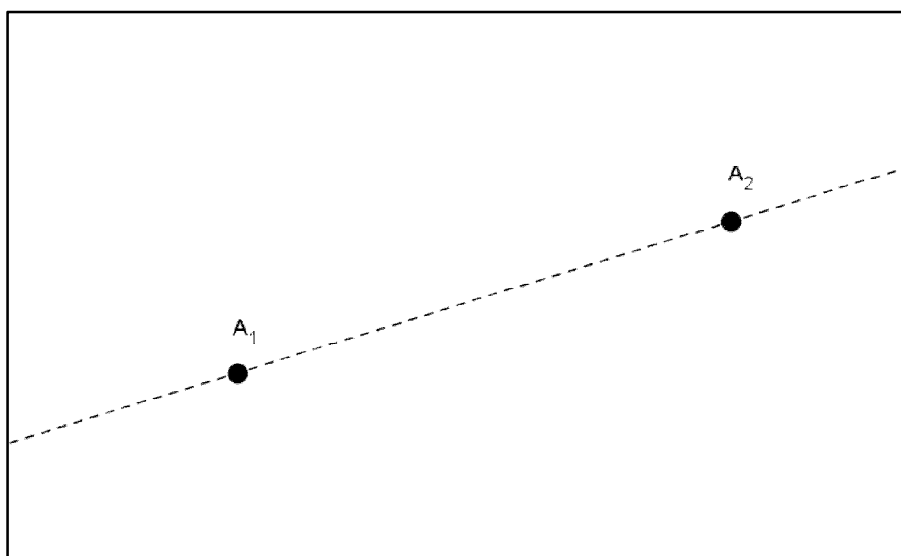
3 Základní konstrukce skládání

Při skládání papíru používáme několik technik překládání, přikládáme bod na bod, bod na přímku, přímku na přímku, či různé kombinace. V roce 1992 italsko-japonský matematik Humiaki Huzita vydal článek *Understanding geometry through origami axioms*, ve kterém uvedl šest základních konstrukcí skládání, neboli Huzita axiomů. V roce 2001 Koshiro Hatori doplnil Huzita axiomu o 7. a od té doby se uvádějí společně jako Huzita-Hatori axiomu. Otázce kompletní sestavy jednotlivých možných překládání papíru se věnoval i Robert J. Lang, který uvedl, že Huzita-Hatori axiomu jsou kompletní. Ovšem první, kdo uvedl 7. axiom ve své práci, byl Francouz Jacques Justin roku 1989, takže by to měly být spíše Huzita-Justin axiomu. Jeho objev ovšem byl a je většinou autorů přehlížený [5], [6], [7].

3.1 Huzita-Hatori axiomu

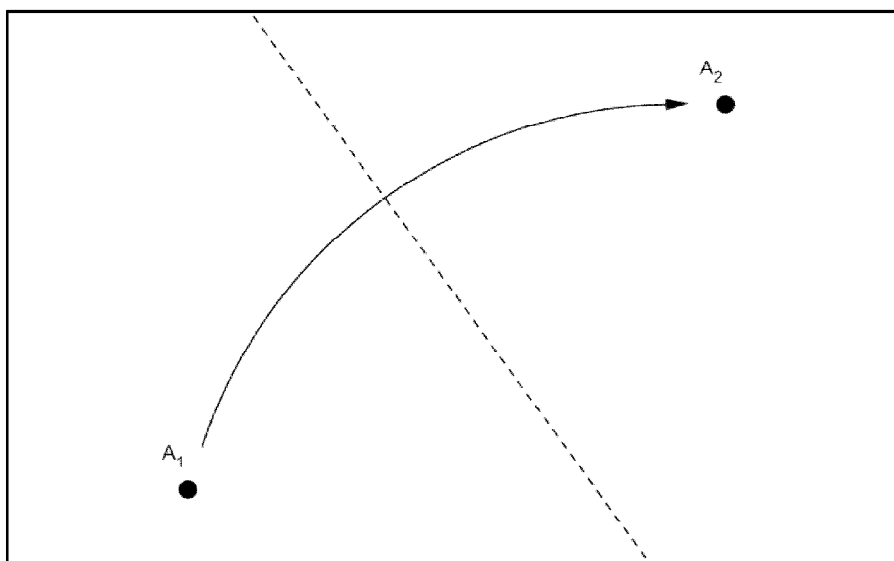
V následující části popíši a ilustruji Huzita-Hatori axiomu (01)-(07) z publikace Roberta J. Langa: *Origami and Geometric Construction* (2003) [6].

(01) Máme-li dány dva body A_1 a A_2 , můžeme vytvořit přehyb, procházející oběma z nich. (obr. 3.1.1.)



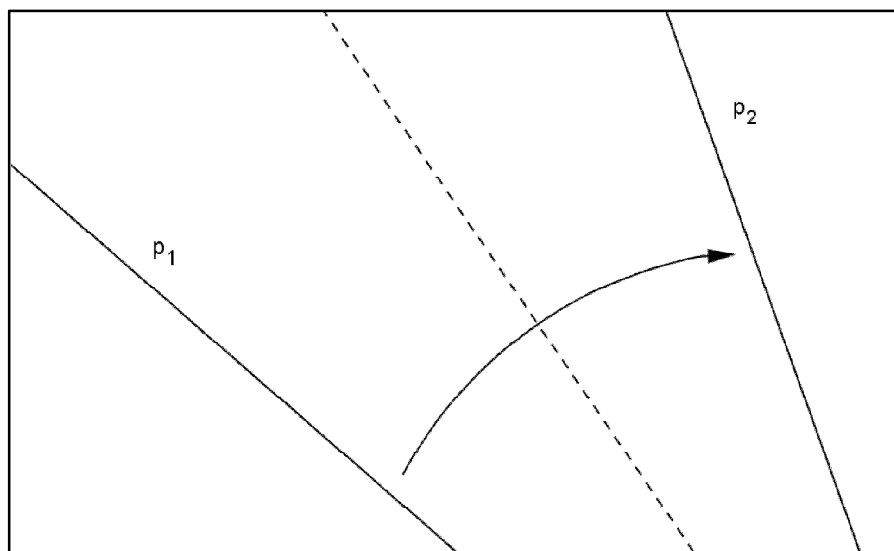
Obr.3.1.1.: Axiom 1

(02) Máme-li dány dva body A_1 a A_2 , můžeme vytvořit přehyb tak, aby bod A_1 ležel na bodu A_2 . (obr. 3.1.2.)



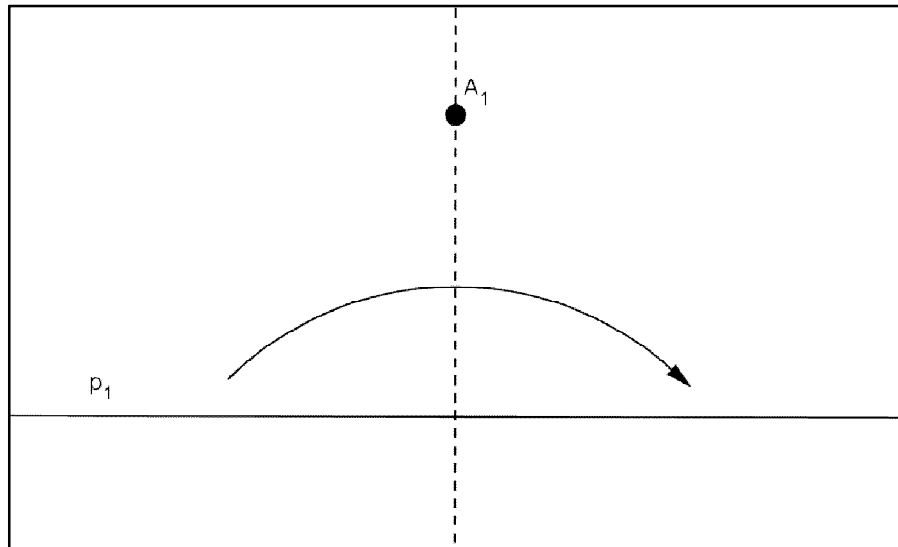
Obr.3.1.2.: Axiom 2

(03) Máme-li dány dvě přímky p_1 a p_2 , můžeme vytvořit přehyb tak, aby přímka p_1 ležela na přímce p_2 . (obr. 3.1.3.)



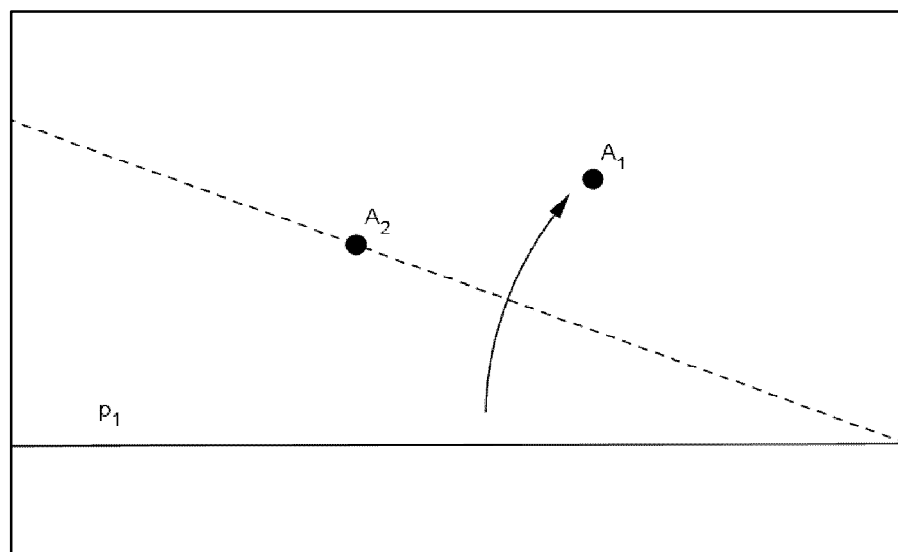
Obr.3.1.3.: Axiom 3

(04) Máme-li dán bod A_1 a přímku p_1 , můžeme vytvořit přehyb, procházející bodem A_1 a zároveň kolmý na přímce p_1 . (obr. 3.1.4.)



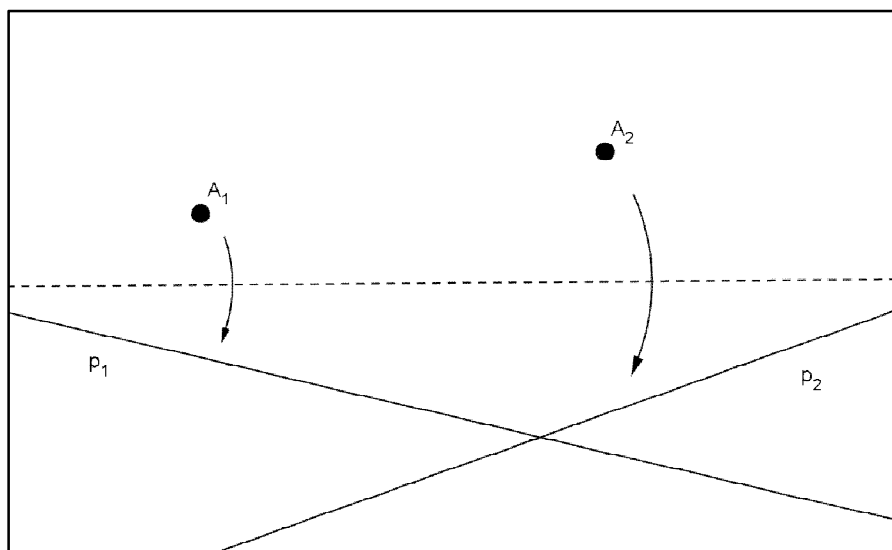
Obr.3.1.4.: Axiom 4

(05) Máme-li dány dva body A_1, A_2 a přímku p_1 , můžeme vytvořit přehyb tak, aby bod A_1 ležel na přímce p_1 a zároveň procházel bodem A_2 . (obr. 3.1.5.)



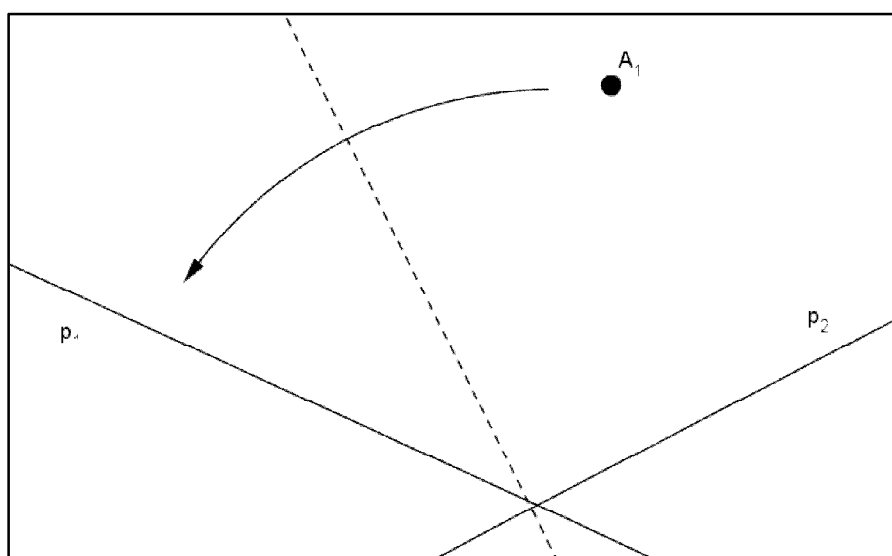
Obr. 3.1.5.: Axiom 5

(06) Máme-li dány dva body A_1, A_2 a dvě přímky p_1, p_2 , můžeme vytvořit přehyb tak, aby bod A_1 ležel na přímce p_1 a zároveň bod A_2 ležel na přímce p_2 . (obr. 3.1.6.)



Obr. 3.1.6.: Axiom 6

(07) Máme-li dán bod A_1 a dvě přímky p_1, p_2 , můžeme vytvořit přehyb tak, aby bod A_1 ležel na přímce p_1 a zároveň byl kolmý na přímku p_2 . (obr. 3.1.7.)

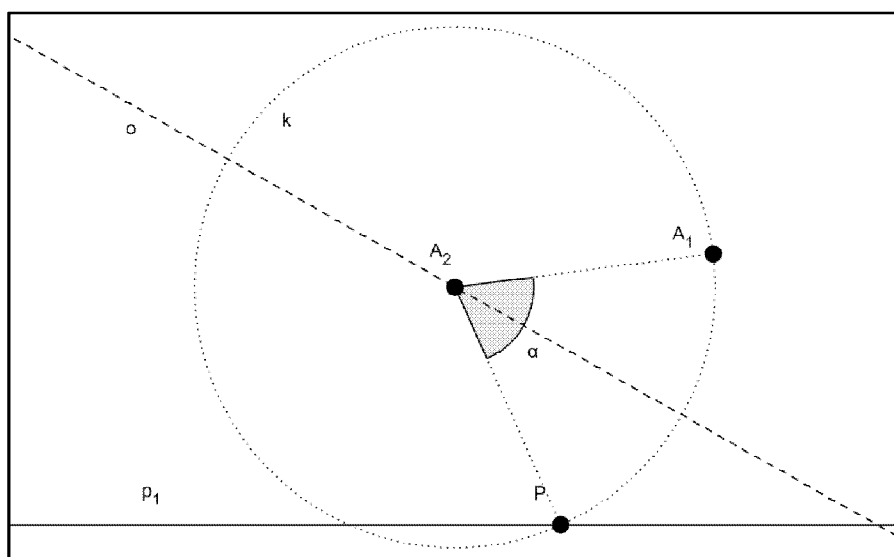


Obr 3.1.7.: Axiom 7

Axiomy 01-05 lze jednoduše sestavit euklidovskou konstrukcí (pomocí pravítka a kružítka). Axiom 01 je pouhé proložení přímky dvěma danými body. Axiom 02 je vytvoření osy dvou daných bodů. Axiom 03 je konstrukce osy

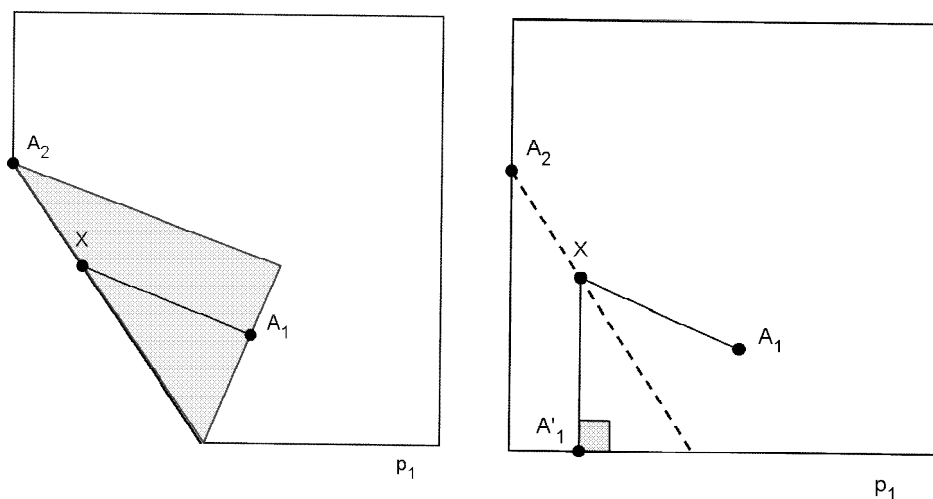
dvou přímek. Axiom 04 je založen na sestrojení kolmice k dané přímce daným bodem [4].

Konstrukce axiomu 05 je o trochu složitější než konstrukce předcházejících axiomů. Axiom je zadán body A_1 , A_2 a přímkou p_1 , pomocí kružnice k s poloměrem $|A_1A_2|$ a středem v A_2 získáme průsečík P pomocné kružnice k s přímkou p_1 . Posledním krokem je sestrojení osy úhlu PA_2A_1 (Obr. 3.1.8.).

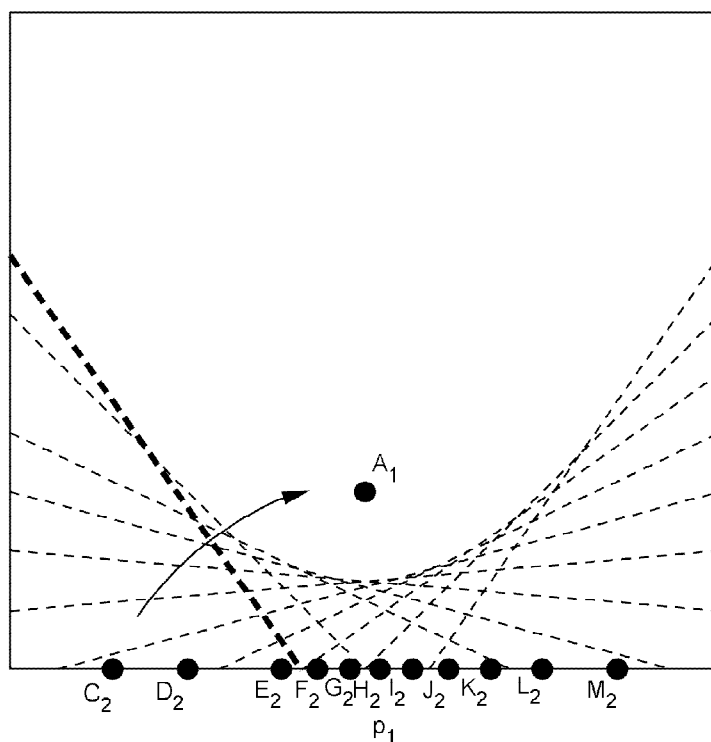


Obr. 3.1.8.: Konstrukce axiomu 5

Tento axiom je zajímavý přehybem, osou úhlu PA_2A_1 , který je tečnou paraboly s ohniskem v bodě A_1 a řídicí přímkou p_1 . Pro názornost si určíme jednu hranu papíru jako přímkou p_1 , bod A_1 zvolíme libovolně a bod A_2 na druhé hraně papíru. Na obrázku je bod X , bod dotyku tečny, jelikož splňuje definici paraboly $|XA_1| = |XA'_1|$, vzdálenost bodu X a ohniska A_1 je rovna vzdálenosti bodu X od řídicí přímky p_1 (Obr. 3.1.9.). Pro znázornění paraboly dané tečnami si zvolíme na listu papíru ohnisko A_1 a hranu papíru jako řídicí přímkou p_1 . Poté budeme přikládat libovolné body na přímce p_1 na bod A_1 . Několik tečen daných přehybem znázorňuje parabolou danou ohniskem A_1 a řídicí přímkou p_1 (Obr.3.1.10.) [4], [8].



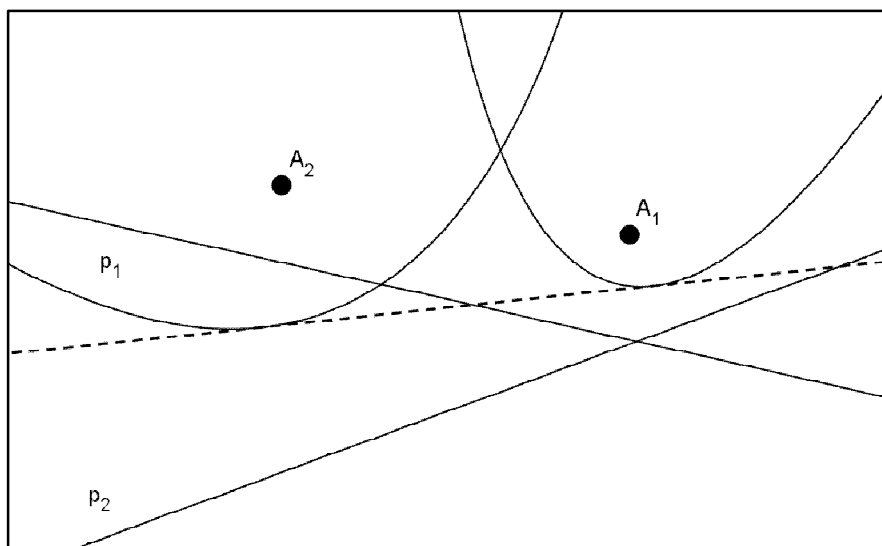
Obr 3.1.9.: Přeložení papíru podle axiomu 5



Obr. 3.1.10.: Parabola určená tečnami

Axiom 06 je určitým zdvojením axiomu 05. Proto analogicky podle axiomu 05 je bod A_1 ohniskem a přímka p_1 řídicí přímkou jedné paraboly a bod A_2 ohniskem a přímka p_2 řídicí přímkou druhé paraboly. Vytvořený přehyb pomocí axiomu 06 tvoří tečnu k dvěma parabolám, 1 nebo 3 možné tečny podle polohy parabol. Tečna k dvěma parabolám představuje řešení kubické

rovnice (obr. 3.1.11.). Jelikož euklidovskou konstrukcí neumíme řešit kubické rovnice, skládání papíru nám umožňuje řešit i úlohy neřešitelné pomocí kružítka a pravítka, např. zdvojení krychle a trisekci úhlu [6], [14].



Obr. 3.1.11.: Tečna ke dvěma parabolám

Axiom 07 je kombinací předcházejících axiomů, proto se většinou nevyužívá, ale zde ho pro úplnost uvádím.

3.2 Tečna k dvěma parabolám

V předchozí kapitole jsem uvedla, že tečna k dvěma parabolám představuje řešení kubické rovnice, kterou zde obecně dokážu (R. Geretschläger: Euclidean Constructions and the Geometry of Origami) [14].

Zvolím si paraboly

$$p_1: (y - n)^2 = 2a(x - m) \quad \text{a} \quad p_2: x^2 = 2by.$$

Společnou tečnu t parabol p_1 a p_2 si zvolím $t: y = cx + d$, s body dotyku $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ (Obr.3.2.1.). Určíme si tečnu bodem dotyku P_1 k parabole p_1

$$(y - n)(y_1 - n) = a(x - m)(x_1 - m) \Leftrightarrow y = \frac{a}{y_1 - n} \cdot x + n + \frac{ax_1 - 2am}{y_1 - n}$$

Z toho

$$c = \frac{a}{y_1 - n} \quad d = n + \frac{ax_1 - 2am}{y_1 - n}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{a + nc}{c} \quad x_1 = \frac{d - n}{c} + 2m$$

Následně dosadíme x_1 a y_1 do rovnice paraboly p_1 .

$$(y_1 - n)^2 = 2a(x_1 - m)$$

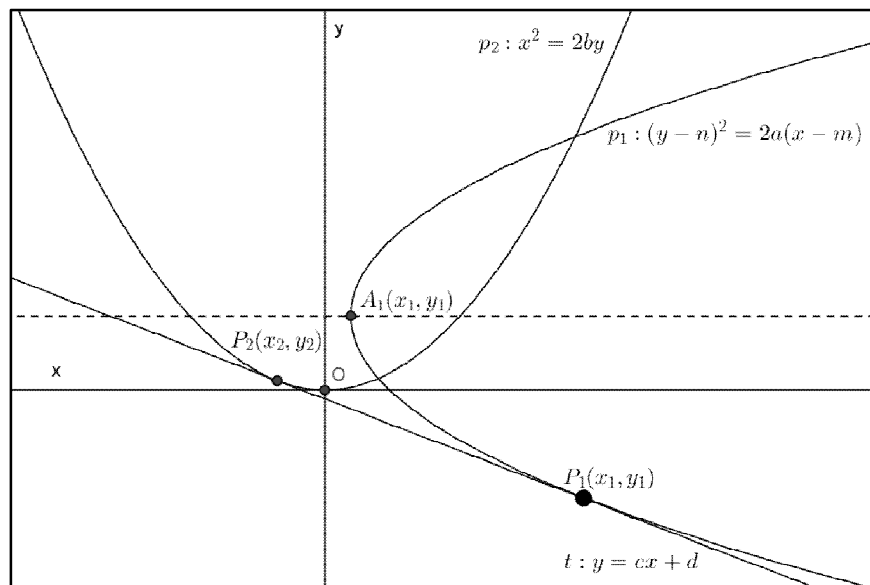
$$\Rightarrow \left(\frac{a + cn}{c} - n\right)^2 = 2a\left(\frac{d - n}{c} + m\right)$$

$$\frac{a^2}{c^2} = 2a\left(\frac{d - n + cm}{c}\right)$$

$$a = 2c(d - n + cm)$$

Dále jako v předchozí části vyjádříme tečnu t , teď s bodem dotyku $P_2(x_2, y_2)$ k parabole p_2 .

$$x \cdot x_2 = b(y + y_2) \Leftrightarrow y = \frac{x_2}{b} \cdot x - y_2$$



Obr. 3.2.1.: Tečna k dvěma parabolám

Z toho

$$c = \frac{x_2}{b} \Leftrightarrow x_2 = cb$$

$$d = -y_2 \Leftrightarrow y_2 = -d$$

Následně dosadíme x_2 a y_2 do rovnice paraboly p_2 .

$$(cb)^2 = 2b(-d)$$

$$d = \frac{c^2 b}{-2}$$

Konstantu d dosadím do rovnice $a = 2c(d - n + cm)$ a po úpravách dostanu z

$$a = 2c \left(-\frac{bc^2}{2} - n + cm \right)$$

$$\Leftrightarrow bc^3 - 2mc^2 + 2nc + a = 0$$

$$\Leftrightarrow c^3 - \frac{2m}{b}c^2 + \frac{2n}{b}c + \frac{a}{b} = 0$$

Směrnice společné tečny parabol p_1 a p_2 je řešení c kubické rovnice

$$c^3 - \frac{2m}{b}c^2 + \frac{2n}{b}c + \frac{a}{b} = 0.$$

4 Trisekce úhlu a duplikace krychle

Trisekce úhlu a duplikace (zdvojení) krychle patří mezi tři klasické problémy antické matematiky, tím třetím je kvadratura kruhu. Tyto problémové úlohy mají jednoduché zadání, ovšem složitou konstrukci. Byly sepsány již v 5. století př. n. l. a než byla v 19. století dokázána jejich euklidovská neřešitelnost (řešení pomocí pravítka a kružítka), se je matematici snažili vyřešit. Skládání papíru nám umožňuje řešit dva ze tří antických problémů a tyto konstrukce budu demonstrovat [9], [10].

4.1 Trisekce úhlu

Trisekcí úhlu rozumíme rozdělení úhlu na tři stejné části. Roku 1830 uvedl matematik Évariste Galois důkaz euklidovské neřešitelnosti, jelikož řešení vede na kubickou rovnici, kterou nelze řešit pomocí kružítka a pravítka [9].

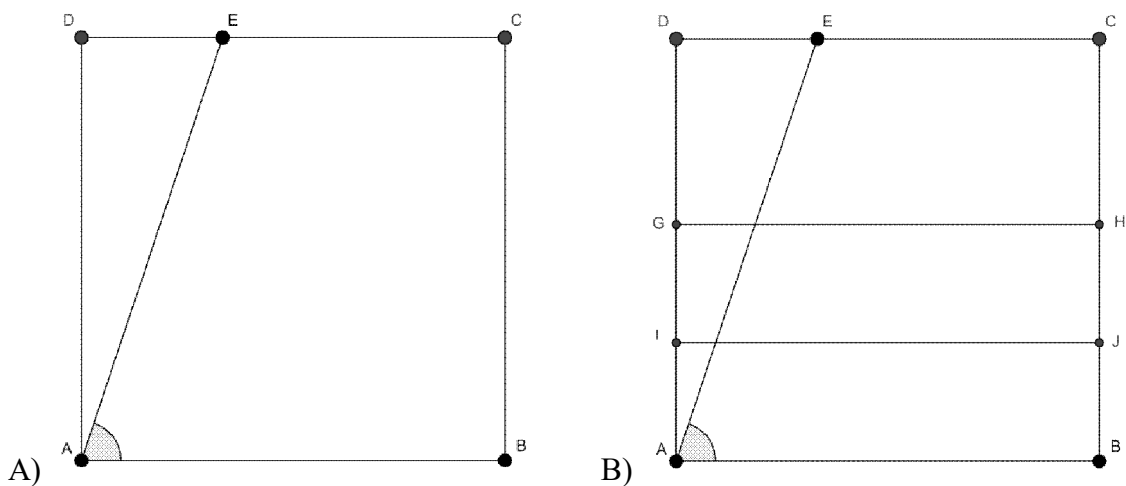
Pro důkaz euklidovské neřešitelnosti si zvolím úhel α do pravoúhlé soustavy souřadnic body $O(0,0)$, $X(1,0)$ a $Y(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Jelikož chceme zjistit $1/3 \alpha$ budeme hledat bod $Z(\cos 1/3 \alpha, \sin 1/3 \alpha)$, podle vztahu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ pro libovolné α stačí zjistit $\cos 1/3 \alpha$. Vzorec pro $\cos 3\alpha$ si odvodíme [15]:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha \\ &= (2\cos^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha + 2\cos^3 \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha\end{aligned}$$

Po úpravách jsme dostali rovnici $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$, do které si místo $\cos \alpha$ dosadíme x . Dostaneme kubickou rovnici:

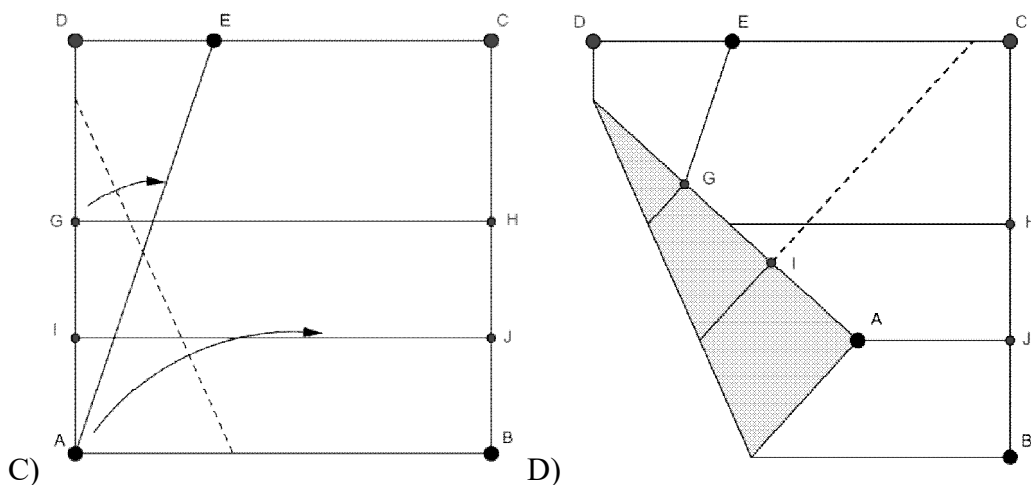
$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\cos 3\alpha = 0$$

Ovšem pomocí skládání papíru můžeme trisekci řešit. Hisashi Abe zveřejnil roku 1980 postup řešení pro ostrý úhel [6], [9].



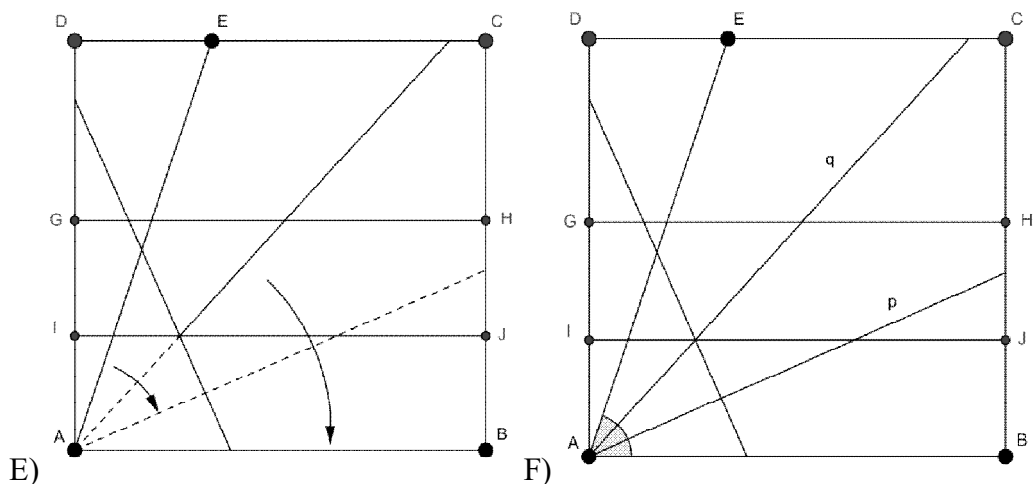
Obr. 4. 1.: Postup konstrukce trisekce úhlu

- (1) U listu papíru si libovolně zvolíme v levém rohu přeložením úhel (EAB), který budeme dělit na třetiny. (Obr. 4. 1. A)
- (2) Přeložíme stranu AB tak, aby nám přeložená hrana vytvořila rovnoběžku se stranou AB. Vznikne nám úsečka GH.
- (3) Přiložíme bod A na bod G, zároveň B na H, přehyb nám vytvoří úsečku IJ rovnoběžnou s AB. Vzdálenost AB a IJ je stejná jako u IJ a GH. (Obr. 4. 2. B)



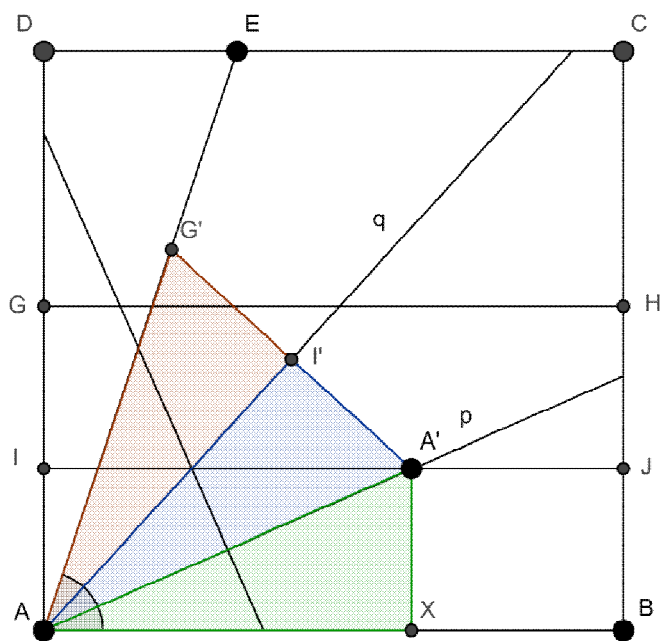
Obr. 4.2.: Postup konstrukce trisekce úhlu

- (4) Následně podle axiomu 6 přiložíme bod G na úsečku AE a zároveň bod A na úsečku IJ. (Obr. 4. 2. C)
- (5) Přeložená část úsečky IJ vyznačuje $\frac{1}{3}$ zvoleného úhlu. Proto ji prodloužíme přeložením. (Obr. 4. 2. D)



Obr. 4. 3.: Postup konstrukce trisekce úhlu

- (6) Přeloženou část rozložíme a přeložením prodloužíme přehyb určující $\frac{1}{3}$ úhlu až k bodu A. Tento přehyb budeme značit q. (Obr. 4. 3. E, F)
- (7) Vytvoříme přehyb b tím, že úsečku AB přiložíme na úsečku q. (Obr. 4. 3. E, F)
- (8) Úhel EAB máme rozdělený na tři části pomocí úseček q a p.



Obr. 4. 4.: Důkaz pomocí podobnosti trojúhelníků

K důkazu tohoto postupu sestrojení trisekce úhlu využijeme podobnosti trojúhelníků (Obr. 4. 4.). Pomocí skládání víme, že $|G'I'| = |I'A'|$ a zároveň spuštěním kolmice na úsečku AB z bodu A' nám vznikne úsečka $A'X$, následně platí rovnost $|G'I'| = |I'A'| = |A'X|$. Jelikož mají trojúhelníky $\Delta AG'I'$ a $\Delta AI'A'$ společnou stranu AI' , platí rovnost $|G'I'| = |I'A'|$ a zároveň jsou oba pravoúhlé, z toho vyplývá podle věty *ssu* $\Delta AG'I' \cong \Delta AI'A'$. Zároveň $\Delta AI'A'$ a $\Delta AA'X$ mají společnou stranu AA' , platí rovnost $|I'A'| = |A'X|$ a jsou oba pravoúhlé, z toho vyplývá podle věty *ssu* $\Delta AI'A' \cong \Delta AA'X$. Z podobností trojúhelníků $\Delta AG'I' \cong \Delta AI'A' \cong \Delta AA'X$ máme nakonec dokázanou rovnost úhlů $\sphericalangle G'AI' = \sphericalangle I'AA' = \sphericalangle A'AX = \frac{1}{3} \sphericalangle G'AX$ [4], [6], [9].

4.1.1 Trisekce tupého úhlu

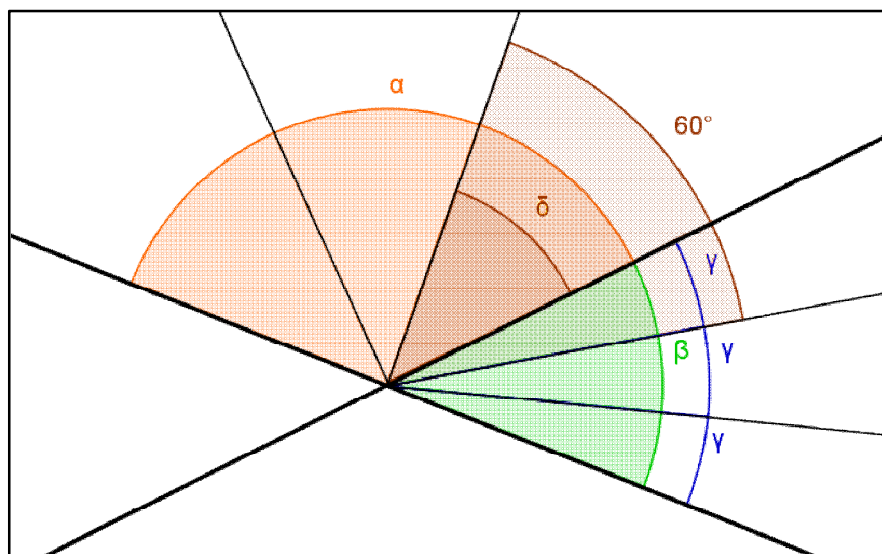
Trisekce pomocí Hisashi Abeho lze využít pouze pro ostrý úhel, jelikož se úhel určuje v rohu papíru (úhel maximálně 90°). Tupý úhel můžeme řešit Abeho konstrukcí pomocí doplňkového úhlu, který bude ostrý. Postup trisekce úhlu α pomocí doplňkového úhlu β (Obr. 4. 5.):

- (1) Uděláme trisekci doplňkového úhlu β tak, že bude platit $\beta = 3 \cdot \gamma$.
- (2) K úhlu γ sousedícímu s úhlem α přidáme 60° , aby platila rovnice $60^\circ - \gamma = \delta$.
- (3) Úhel δ je $1/3$ úhlu α .

K tomuto postupu jsme využili znalosti vztahu vedlejších úhlů, $180^\circ - \beta = \alpha$.

$$\begin{aligned} 180^\circ - \beta &= \alpha & \beta &= 3 \cdot \gamma \\ 180^\circ - 3 \cdot \gamma &= \alpha & \alpha &= 3 \cdot \delta \\ 180^\circ - 3 \cdot \gamma &= 3 \cdot \delta \quad /:3 \\ 60^\circ - \gamma &= \delta \end{aligned}$$

Po úpravách jsme získali vztah, který jsme využili v konstrukci, a to $60^\circ - \gamma = \delta$.



Obr. 4. 5.: Trisekce tupého úhlu α

4.2 Duplikace krychle

Duplikace krychle neboli zdvojení krychle, reduplikace krychle či délský problém je matematický problém, kterým se zabývali a zformulovali matematici v 5. století př. n. l. Problém je zformulován: k dané krychli sestrojte krychli s dvojnásobným objemem.

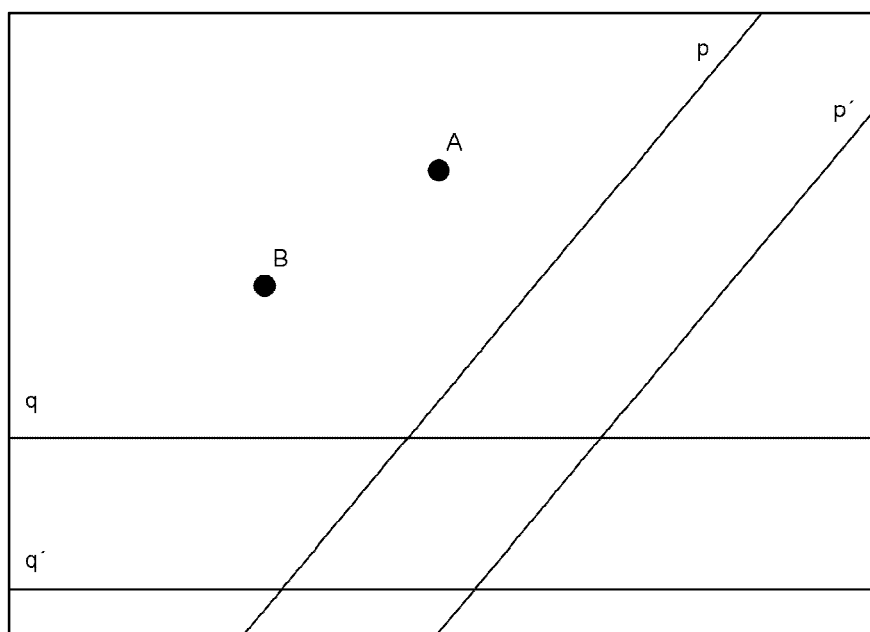
Historie duplikace krychle sahá do roku 430 př. n. l., kdy Athény sužoval mor. Athéňané vyslali posádku do Apollónova oraklea (věštírny) na ostrov Délos v Egejském moři, aby zjistili od bohů, čím mohou mor zastavit. Od věstců dostali odpověď, mají zvětšit kamenný oltář krychlového tvaru tak, aby měl dvakrát větší objem. Pythagorejci toto vyřčení matematicky zformulovali a snažili se ho vyřešit. Až do roku 1837 se snažili matematici o totéž, než Pierre Wantzel uvedl euklidovskou neřešitelnost [11].

Pokud chceme sestrojít krychli s dvojnásobným objemem ke krychli s délkou strany $a = 1$ a objemem $V = 1$, budeme konstruovat krychli se stranou $b = \sqrt[3]{2}$. Uvedu zde dvě metody, jak lze sestrojít $\sqrt[3]{2}$ pomocí skládání papíru.

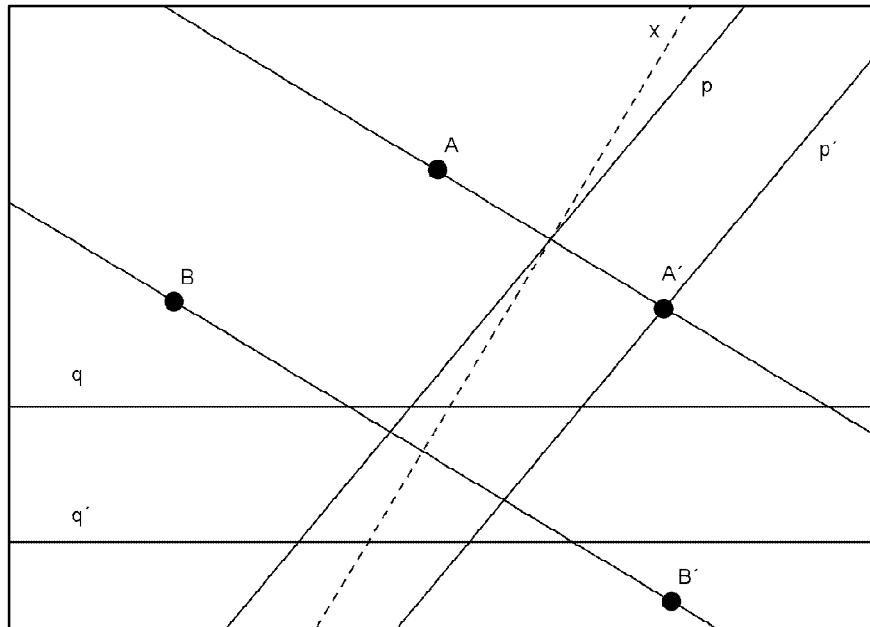
4.2.1 Čtverec podle Margherity Beloch

Margherita Piazzola Beloch byla italská matematička, která jako první roku 1936 uvedla řešení kubické rovnice pomocí origami. Konstrukce čtverce využívá 6. axiomu a slouží k sestrojení $\sqrt[3]{2}$. Postup z publikace Thomase C. Hulla: Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill [13].

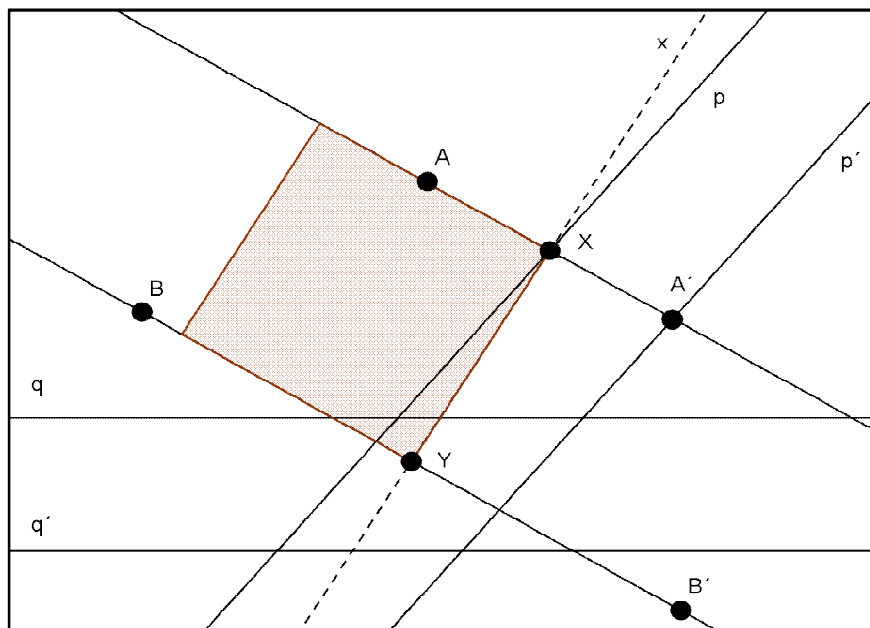
- (1) Na papíru si zvolíme body A, B a přímky p, q .
- (2) Dále vytvoříme podle přímky p přímku p' , která je rovnoběžná s p a je ve vzdálenosti $|Ap|$, totéž uděláme s přímkou q , podle které vytvoříme q' (Obr. 4.2.1).
- (3) Vytvoříme přehyb x , který vznikne přiložením bodu A na přímku p' a zároveň bodu B na přímku q' .
- (4) Vzniknou nám přímky AA' a BB' (Obr. 4.2.2.), průsečík AA' s přímkou p označíme X , BB' s přímkou q označíme Y .
- (5) Vzniklé body X a Y tvoří jednu stranu čtverce, který podle této strany dotvoříme a označíme $XYZW$ (Obr. 4.2.3.) [13].



Obr. 4.2.1. Konstrukce čtverce 1



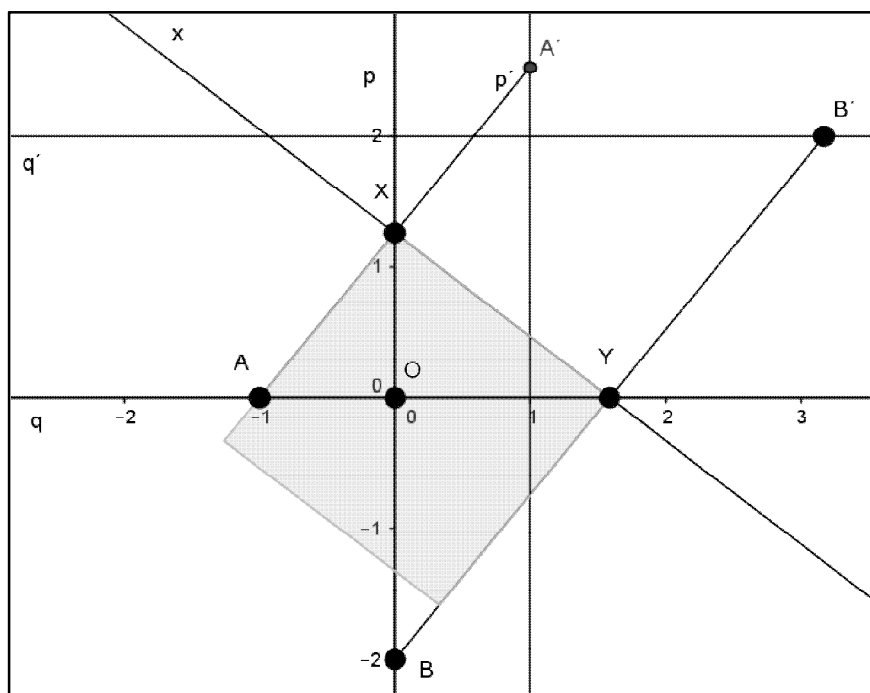
Obr. 4.2.2. Konstrukce čtverce 2



Obr. 4.2.3. Konstrukce čtverce 3

Pro sestavení $\sqrt[3]{2}$ si čtverec podle Margherity Beloch sestrojíme do soustavy souřadnic. Vyznačíme si body $A = [-1,0]$ a $B = [0,-2]$ a přímky p, q budou osy x

a y . Přímka p' bude mít předpis $x = 1$ a přímka q' bude mít předpis $y = 2$. Dále si podle předchozího postupu označíme body X a Y (Obr. 4.2.4.) [13].



Obr. 4.2.4.: Čtverec v soustavě souřadnic

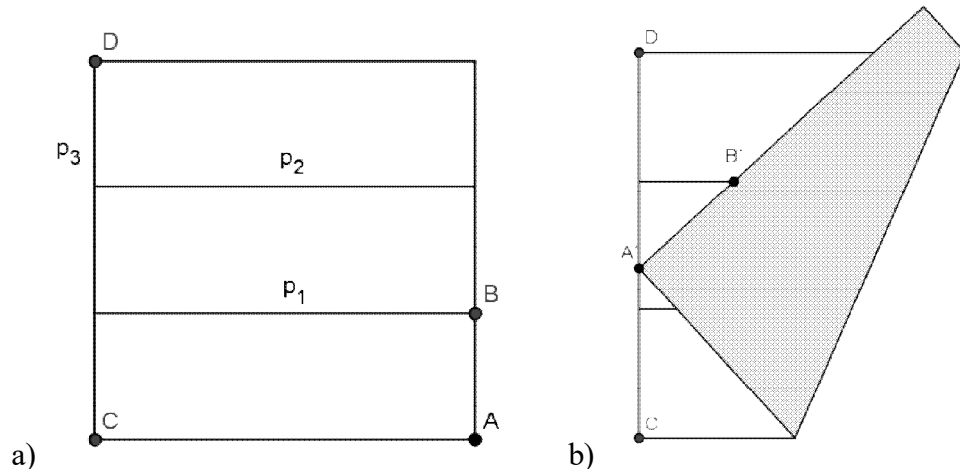
Pomocí délek úseček víme, že platí $\frac{|OX|}{|OA|} = \frac{|OY|}{|OB|} = \frac{|OB|}{|OY|}$. Známe délky $|OA| = 1$ a $|OB| = 2$, dosadíme do rovnice a získáme $|OX| = \frac{|OY|}{|OB|} = \frac{2}{|OY|}$. Po úpravě dostaneme $|OX|^3 = 2$, z čehož máme polohu bodu $X = [0, \sqrt[3]{2}]$.

4.2.2 Metoda Petera Messera

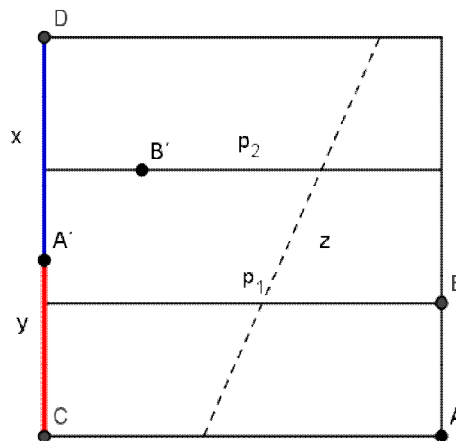
Peter Messer vytvořil jednoduchou metodu konstrukce $\sqrt[3]{2}$. Postup konstrukce z publikace Roberta J. Langa: *Origami and Geometric Construction* (2003) [6], [15].

- (1) Čtvercový papír rozdělíme přímkami p_1 a p_2 na tři stejné části (konstrukce je popsána v kapitole 5.1.).
- (2) Následně si podle obrázku 4.2.5.a. vyznačíme body A, B, C, D a přímku p_3 .
- (3) Vytvoříme přehyb z tak, že bod A přiložíme na p_3 a zároveň bod B na přímku p_2 (Obr. 4.2.5.b)

- (4) Přeložením vznikne bod A' a B' .
- (5) Bod A' nám rozdělí úsečku CD na $|A'C| = y$ a $|A'D| = x$ (Obr. 4.2.6.).
- (6) Poměr $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$.



Obr. 4.2.5. Konstrukce Petera Messera



Obr. 4.2.6. Konstrukce Petera Messera

Při důkazu $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$ si zvolíme $y = 1$ a $|CF| = d$ (Obr. 4.2.7). Podle obrázku víme, že

$$|A'F| = x + 1 - d$$

$$|A'B'| = \frac{x + 1}{3}$$

$$|A'E| = x - \frac{x + 1}{3} = \frac{2x - 1}{3}$$

Následně si vyjádříme d z trojúhelníku $\triangle CFA'$ (Pythagorova věta),

$$d^2 = (x + 1 - d)^2 - 1^2$$

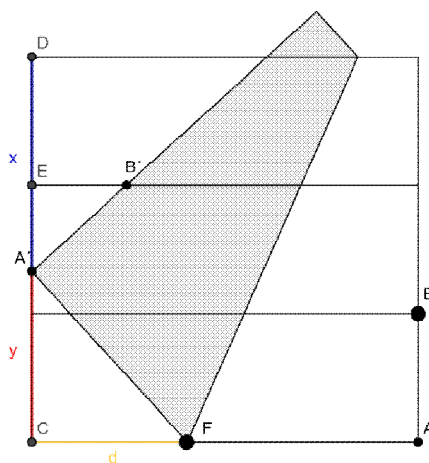
$$d = \frac{x^2 + 2x}{2 + 2x}$$

Následně využijeme podobnosti trojúhelníků $\triangle CFA' \cong \triangle B'A'E$, ze které víme:

$$\frac{|CF|}{|A'F|} = \frac{|EA'|}{|B'A'|}$$

$$\frac{\frac{x^2 + 2x}{2 + 2x}}{x + 1 - \frac{x^2 + 2x}{2 + 2x}} = \frac{\frac{2x - 1}{3}}{\frac{x - 1}{3}}$$

Po úpravách dostaneme $x = \sqrt[3]{2}$, tím je důkaz hotov.



Obr. 4.2.7. Přehyb Petera Messera

5 Konstrukce využitelné ve výuce

V této kapitole uvedu několik příkladů konstrukcí, které lze využít ve výuce matematiky na ZŠ a SŠ. Skládání papíru může pomoci žákům s rovinnou či prostorovou představivostí. Mohou zkoumat osovou a středovou souměrnost a jiné vlastnosti, které řešíme v geometrii. Zařazení origami do výuky není tradiční metoda vedení hodiny matematiky, ale může vést ke zpestření výuky a umožní žákům jiný náhled na danou problematiku.

5.1 Dělení úsečky na 3, 5,... n částí

Dělení úsečky na 3, 5... n částí lze využít například v tématické poměrů, dělení úsečky v daném poměru, zlomků či podobnosti trojúhelníků.

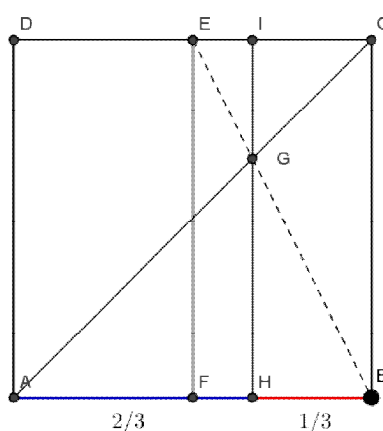
Dělení úsečky na sudý počet částí je jednoduché, základem je sestrojení středu úsečky. Střed úsečky nám rozděluje danou úsečku na poloviny, rozdělením polovin dostaneme čtvrtiny atd. Při dělení úsečky na 3, 5, ... n částí nevyužíváme střed úsečky, ale podobnost trojúhelníků, tzv. redukční úhel (Obr. 5.1.1.). Určíme si úsečku AB , kterou budeme dělit na třetiny (analogicky na pětiny, atd.) a pomocnou přímkou p procházející bodem A . Na přímce p si určíme 3 body, X , Y a Z tak, aby platila rovnost $|AX| = |XY| = |YZ|$. Následně si vytvoříme úsečku ZB , podle které povedu rovnoběžky body X a Y . Průsečíky rovnoběžek s úsečkou AB si označíme X' a Y' . Body X' a Y' dělí úsečku AB na třetiny.



Obr. 5.1.1. Dělení úsečky na 3 části

Dělení úsečky na 3, 5, ... n částí lze provést i pomocí skládání papíru, kdy rozdělíme celý papír na dané části. Nejprve uvedu postup dělení papíru na třetiny (Obr. 5.1.2.) [6]:

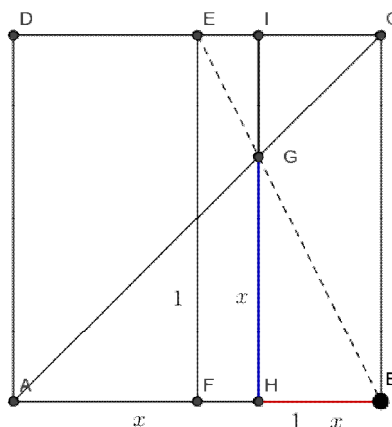
- (1) Na čtvercovém papíru vytvořím přehyb EF (půl list papíru), přiložením bodu B na A a zároveň bodu C na D .
- (2) Dále přehyb AC , který bude úhlopříčkou čtvercového papíru.
- (3) Body E a B povedeme přehyb, který nám vytvoří průsečík G s přehybem AC .
- (4) Vytvoříme přehyb IH kolmý na AB bodem G .
- (5) Bod H dělí úsečku AB na $1/3$ a $2/3$ $|AB|$.



Obr. 5.1.2.: Dělení papíru na třetiny

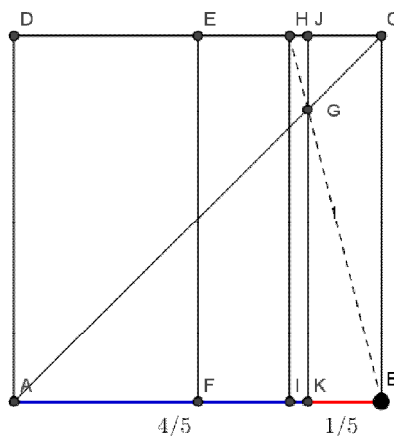
Pro důkaz si určíme stranu $|AB| = 1$ a $|AH| = x$, z toho víme že $|HB| = 1 - x$, $|EF| = 1$ a $|HG| = x$. Podle věty uuu víme, že trojúhelník $\triangle HBG \cong \triangle FBE$. Tím pádem platí rovnost:

$$\frac{|EF|}{|HG|} = \frac{|FB|}{|HB|} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1/2}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$



Obr 5.1.3.: Důkaz dělení papíru na třetiny

Pokud chceme papír rozdělit na pětiny, nejprve ho musíme rozdělit na čtvrtiny. Dále pokračujeme podle postupu dělení na třetiny, podle obrázku obr. 5.1.4. Analogicky bychom postupovali při dělení papíru na n částí, nejprve bychom rozdělili papír na $n - 1$ částí (sudých).



Obr. 5.1.4. Dělení papíru na pětiny

Pro důkaz si určíme stranu $|AB| = 1$ a $|AK| = x$, z toho víme, že $|KB| = 1 - x$, $|IH| = 1$ a $|KG| = x$. Podle věty *uuu* víme, že trojúhelník $\triangle HBG \cong \triangle FBE$. Tím pádem platí rovnost:

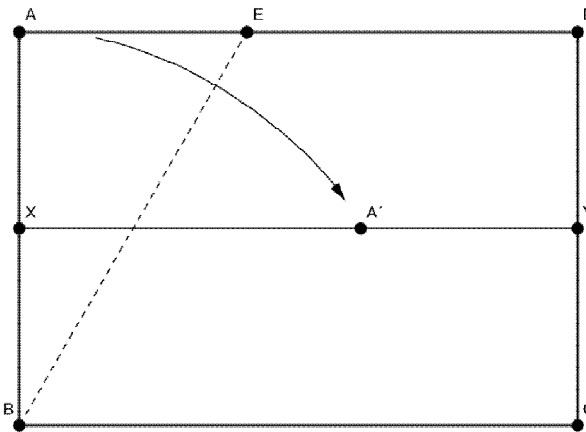
$$\frac{|HI|}{|GK|} = \frac{|IB|}{|KB|} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1/4}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$

5.2 Rovnostranný trojúhelník

Rovnostranný trojúhelník složený z papíru může sloužit ve výuce jako názorná pomůcka k vyložení látky. Na modelu si žáci mohou dokázat vlastnosti trojúhelníku, určit výšky, osy souměrnosti, těžiště nebo střední příčky.

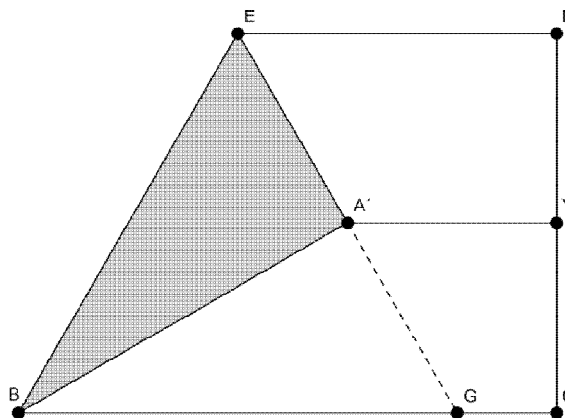
Ke konstrukci rovnostranného trojúhelníku využijeme papír velikosti A4 [4], [12].

- (1) Papír podélně přehneme na polovinu, vznikne přehyb XY .
- (2) Následně přiložíme bod A na úsečku XY , vznikne bod A' a přehyb BE (Obr. 5.2.1.).



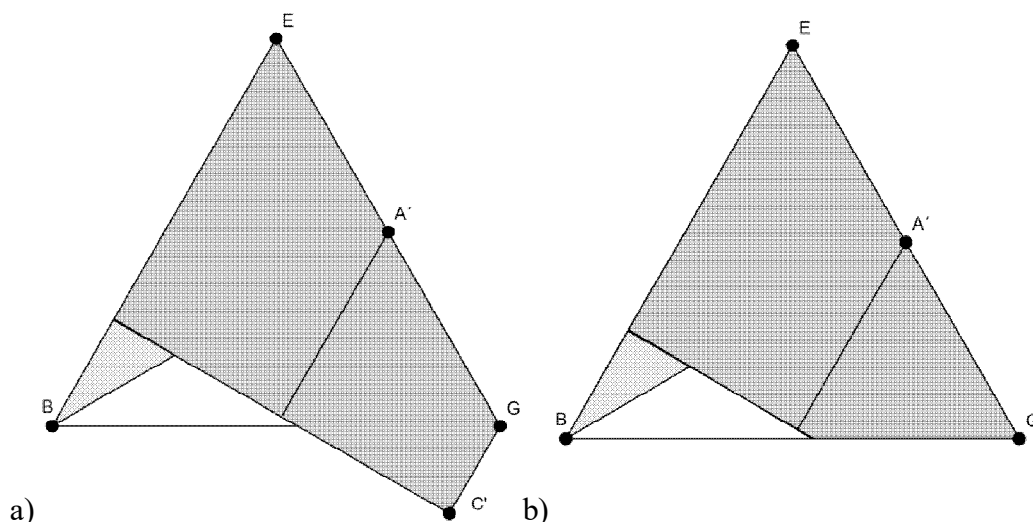
Obr. 5.2.1.: Konstrukce rovnostranného trojúhelníku 1

(3) Přehneme papír podél EA' a vznikne G , které bude tvořit $\triangle BEG$ (Obr. 5.2.2.).



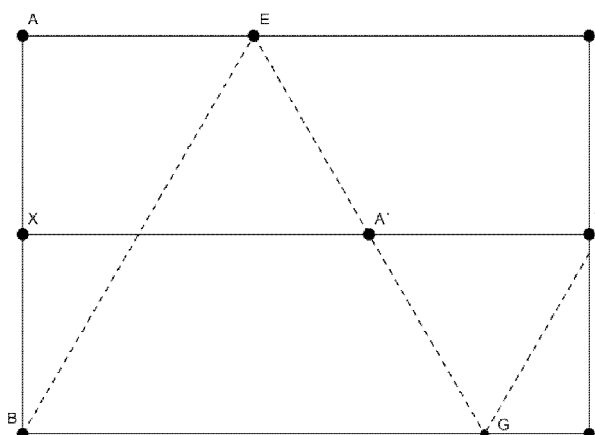
Obr. 5.2.2.: Konstrukce rovnostranného trojúhelníku 2

(4) Následně přehneme roh s bodem C podle BG a získáme $\triangle BEG$ (Obr. 5.2.3.).



Obr. 5.2.3.: Konstrukce rovnostranného trojúhelníku 3

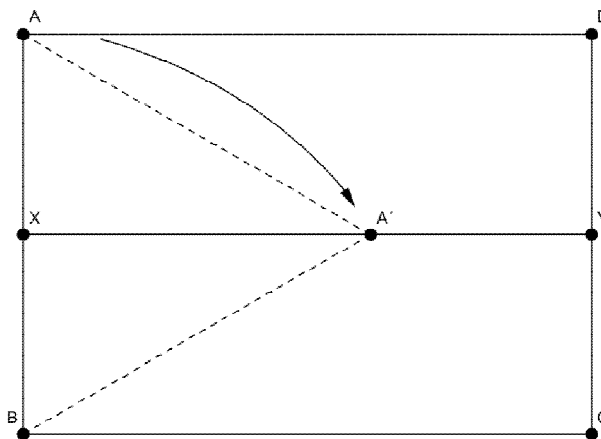
Důkaz rovnostranného trojúhelníku $\triangle BEG$ (Obr. 5.2.4.) provedeme pomocí podobnosti trojúhelníků. Postupem skládání víme, že $|AB| = |A'B|$, trojúhelníky $\triangle ABE$ a $\triangle A'BE$ mají společnou stranu BE a oba jsou pravoúhlé, proto můžeme tvrdit podle věty *ssu* $\triangle ABE \cong \triangle A'BE$. Dále víme, že trojúhelníky $\triangle A'BE$ a $\triangle A'BG$ mají společnou stranu $A'B$, jsou pravoúhlé a podle osy souměrnosti $A'B$ platí $|A'E| = |A'G|$. Také podle věty *ssu* platí $\triangle A'BE \cong \triangle A'BG$, tím pádem $\triangle ABE \cong \triangle A'BE \cong \triangle A'BG$. Z toho víme, že úhel $\sphericalangle ABE = \sphericalangle A'BE = \sphericalangle A'BG = 30^\circ$, proto je $\sphericalangle GBE = 60^\circ$. Podle součtu úhlů v trojúhelníku lze určit úhel $\sphericalangle A'EB = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ a $\sphericalangle A'GB = 60^\circ$, čímž je důkaz hotov. Trojúhelník $\triangle BEG$ je rovnostranný, jelikož mají všechny vnitřní úhly 60° .



Obr. 5.2.4. Složení rovnostranného trojúhelníku

Další jednodušší postup konstrukce rovnostranného (Obr. 5.2.5.):

- (1) Papír (velikosti A4 nebo čtverce) podélně přehneme na polovinu, vznikne přehyb XY .
- (2) Následně přiložíme bod A na úsečku XY , vznikne bod A' .
- (3) Rovnostranný trojúhelník $\Delta ABA'$.



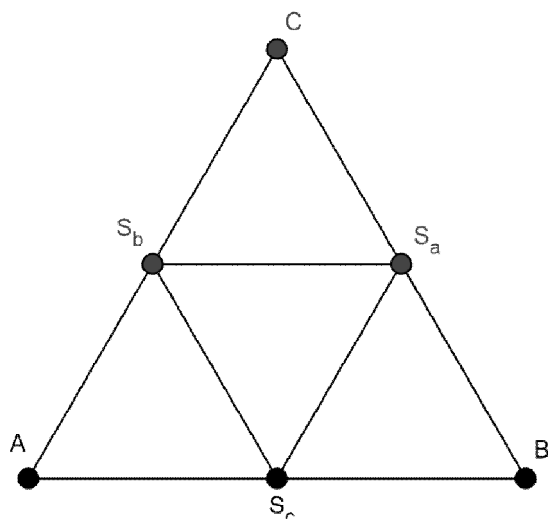
Obr. 5.2.5.: Rovnostranný trojúhelník

Tato konstrukce je založená na vytvoření výšky na stranu AB a následné přenesení vzdálenosti $|AB|$ na výšku. Aby žáci sami vymyslely postup, stačí jim znalost výšky jako osy úsečky AB a stejné délky stran.

5.3 Pravidelný čtyřstěn

Pravidelný čtyřstěn je těleso se sítí ze čtyř rovnostranných trojúhelníků, proto budeme vycházet z předchozí kapitoly o rovnostranném trojúhelníku. Uvedu zde dva postupy složení.

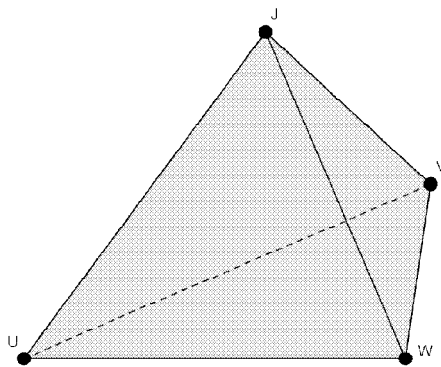
U prvního využijeme již složený rovnostranný trojúhelník, který přeložíme podle jeho středních příček (Obr. 5.3.1.). Získáme síť se čtyřmi stejnými rovnostrannými trojúhelníky, ze které vytvoříme čtyřstěn přiložením vrcholů ABC k sobě.



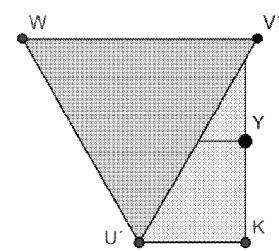
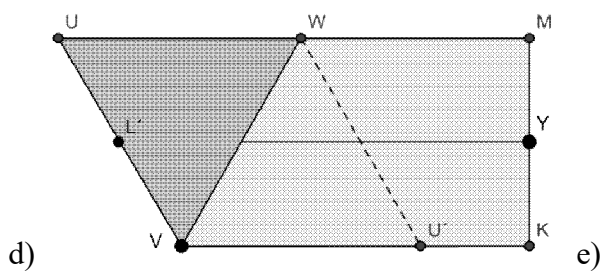
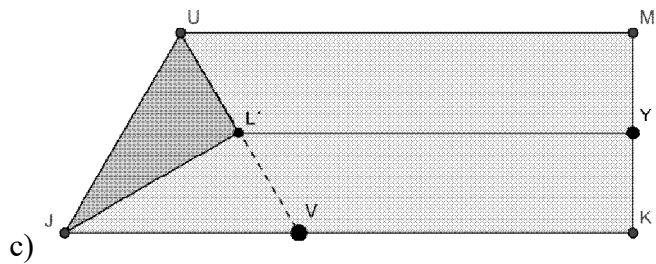
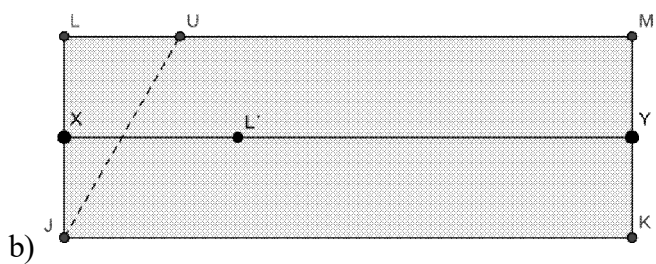
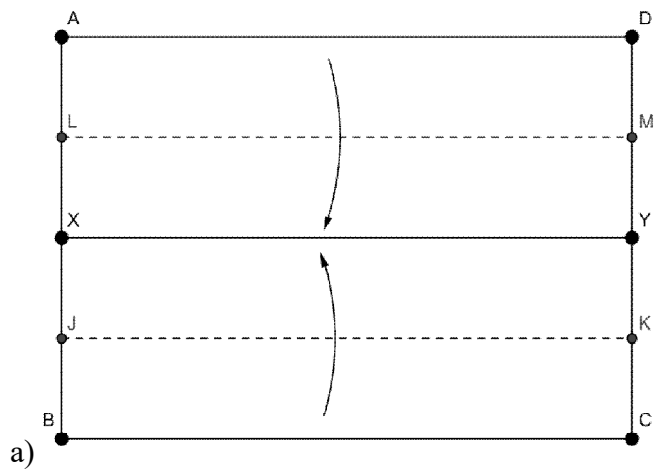
Obr. 5.3.1.: Sít' čtyřstěnu

K druhému postupu složení budeme potřebovat papír velikosti A4 [4], [12].

- (1) Papír podélně přehneme na polovinu, tím vznikne přehyb XY .
- (2) Přiložíme bod A a B na bod X a zároveň bod C a D na bod Y (Obr.5.3.3.a), tím vzniknou přehyby dané úsečkami JK a LM .
- (3) Následně přiložíme bod L na úsečku XY , vznikne bod L' a přehyb JU (Obr. 5.3.3.b).
- (4) Přehneme papír podél UL' a vznikne V , které bude tvořit ΔJUV (Obr. 5.3.3.c).
- (5) Následně přeložíme ΔJUV , tak aby byl přehyb úsečka UV .
- (6) Opět přeložíme ΔWUV tak, aby byl přehyb úsečka VW (Obr. 5.3.3.d).
- (7) Naposledy přeložíme $\Delta WU'V$ tak, aby byl přehyb úsečka WU' (Obr. 5.3.3.e).
- (8) Následně si vytvoříme přehyb $V'U'$, tím budeme mít síť čtyřstěnu hotovou.
- (9) Složený čtyřstěn bude mít vrcholy $UVWJ$ (Obr. 5.3.2.).



Obr. 5.3.2.: Čtyřstěn UVWJ



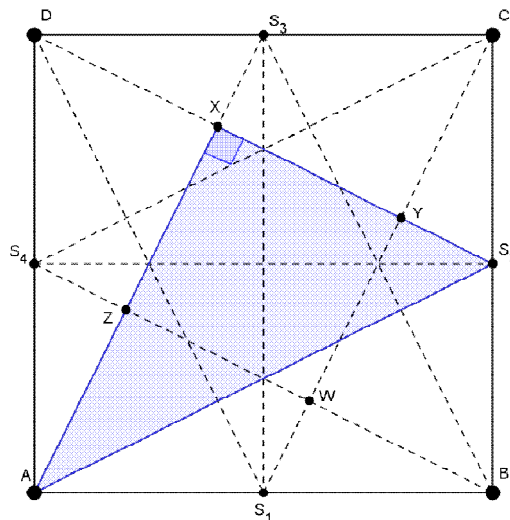
Obr. 5.3.3.: Konstrukce čtyřštěny

5.4 Pythagorejský trojúhelník

Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník s celočíselným poměrem délek stran 3:4:5. Čísla v tomto poměru nazýváme pythagorejská, jelikož splňují rovnici $a^2 + b^2 = c^2$ [16].

Ke konstrukci pythagorejského trojúhelníku využijeme čtvercový tvar papíru, na kterém vytvoříme osm pythagorejských trojúhelníků a zároveň jeden čtverec s poměrem stran 2:2 (Obr. 5.4.1.) [12].

- (1) List papíru $ABCD$ si podélně a příčně rozdělíme na polovinu, tím získáme středy stran S_1, S_2, S_3 a S_4 .
- (2) Následně vytvoříme přehyby $AS_3, AS_2, BS_3, BS_4, CS_1, CS_4, DS_1$ a DS_2 .
- (3) Průsečík $AS_3 \cap DS_2$ si označíme X , $DS_2 \cap CS_1$ si označíme Y , $AS_3 \cap BS_4$ si označíme Z a $CS_1 \cap BS_4$ si označíme W .



Obr. 5.4.1.: Pythagorejský trojúhelník

Z osmi pythagorejských trojúhelníků si vybereme jeden např. AXS_2 a ověříme, zda je opravdu pythagorejský, poměr délek stran 3:4:5 a je pravoúhlý.

Pravoúhlost: Víme, že strana AD je kolmá na DC , když otočíme stranu AD tak, že vznikne AS_3 a DC tak, že vznikne DS_2 . Pak víme, že strana AS_3 je kolmá na DS_2 , proto je $\triangle AXS_2$ pravoúhlý.

Poměr délek stran 3:4:5: Jelikož víme, že $AS_3 \parallel CS_1$ pak i $XS_3 \parallel CY$. Bod X je střed DY , proto je XS_3 střední příčka $\triangle CYD$ a poloviční CY . Trojúhelníky $\triangle CYD = \triangle CWB = \triangle AZB = \triangle AXD$ a $\triangle DXS_3 = \triangle CYS_2 = \triangle BWS_1 = \triangle AZS_4$ jsou shodné.

Označíme si $|XS_3| = a$, proto $|CY| = 2a$.

Strany $\triangle AXS_2$ jsou $|XS_2| = |XY| + |YS_2| = |CY| + |XS_3| = 2a + a = 3a$

$$|XA| = |XZ| + |AZ| = |CY| + |CY| = 2a + 2a = 4a$$

$$|AS_2| = 5a \text{ (Pythagorova věta), poměr délek stran je } 3:4:5.$$

Ještě vznikne čtverec $XYZW$ s poměrem stran 2:2, jelikož je strana $|XY|$ stejně dlouhá jako $|CY| = 2a$.

Tuto konstrukci je ideální zařadit do výuky při probírání podobnosti trojúhelníků, jelikož přehyby, které jsme vytvořili konstrukcí pythagorejského trojúhelníku, nám rozdělují papír na několik trojúhelníků. Úkolem by bylo nalézt podobné, či shodné trojúhelníky a rozhodnou o nich zda jsou pravoúhlé, rovnostranné, rovnoramenné nebo obecné a uvést proč.

6 Závěr

Skládání papíru má široké využití v matematice, jak v konstrukcích papírových modelů geometrických útvarů, tak i v řešení matematických problémů, i těch které nelze euklidovskou konstrukcí řešit. Velkou výhodou je proto přesah skládání papíru nad euklidovskou konstrukci.

Výuka geometrie není na školách moc oblíbená, proto je zařazení origami do výuky přínosem a zpestřením. Pro svou názornost je skládání papíru ideální k upevnění a ověření znalostí, navíc rozvíjí představivost a podněcuje k zamyšlení nad daným tématem. Důležité je ovšem konstrukce skládání vysvětlit, proč konstruujeme daný přehyb a čeho chceme dosáhnout, abychom nedocílili pouhého manuálního skládání.

Doufám, že se ve výuce bude origami využívat častěji a učitelé i žáci budou vymýšlet stále nové konstrukce.

Literatura

- [1] Historie origami [online]. Dostupné z WWW: <<http://origami.webz.cz/historie.htm>>
- [2] Historie origami [online]. Dostupné z WWW: <<http://origami-cos.cz/historie-origami>>
- [3] Podrobnosti k Origami [online]. Dostupné z WWW: <<http://www.origami.cz/welcome.html>>
- [4] BOHÁČOVÁ, Jana. Origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání [online], Karlova Univerzita, Praha, 2009. Dostupné z WWW: <<http://jana.vysehrad.org/diplomka.pdf>>.
- [5] GHOURABI, F., KASEM, A., KALISZYK, C. Algebraic Analysis of Huzita's Origami Operations and their Extensions. T. Ida and J. Fleuriet (Eds): ADG 2012, LNAI 7993, pp. 143-160, 2013. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.
- [6] LANG, R. J. Origami and geometric construction (2003) [online]. Dostupné z WWW: <http://www.langorigami.com/files/articles/origami_constructions.pdf>
- [7] Huzita-Hatori axioms [online]. Dostupné z WWW: <https://en.wikipedia.org/wiki/Huzita-Hatori_axioms>
- [8] Origami a geometrie [online]. Dostupné z WWW: <<http://www.origami.cz/welcome.html>>
- [9] Trisekce úhlu [online]. Dostupné z WWW: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Trisekce_%C3%BAhlu>
- [10] KOZUBEK, Jan. Trisekce úhlu a duplicita krychle pomocí speciálních křivek [online]. Dostupné z WWW: <<https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/134961/18987841/>>
- [11] Zdvojení krychle [online]. Dostupné z WWW: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Zdvojen%C3%AD_krychle>

- [12] ŠOLÁ, Martina. Skládání papíru [online]. Dostupné z WWW: <http://theses.cz/id/km8p3g/Skldn_papru.pdf>
- [13] HULL, Thomas C. Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill. Amer. Math. Monthly 118 (2011), no. 4, 307-315 [online]. Dostupné z WWW: <<http://mars.wne.edu/~thull/papers/amer.math.monthly.118.04.307-hull.pdf>>
- [14] GERETSCHLÄGER, Robert. Euclidean Constructions and the Geometry of Origami [online]. Dostupné z WWW: <http://www.jstor.org/stable/2690924?origin=crossref&seq=1#page_scan_tab_contents>
- [15] ŠVECOVÁ, Michaela. Klasické úlohy řecké matematiky [online]. Dostupné z WWW: <<https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120017829/?lang=cs>>
- [16] SLÁMA, Michal. Pythagorejské trojúhelníky [online]. Dostupné z WWW: <<https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/164175/>>